คู่มือการสอน
หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์
สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา

กระทรวงศึกษาธิการ

พฤษภาคม 2547

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
ส 691 ค คู่มือการสอนหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย/ศักดา บุญโต. กรุงเทพฯ : สกศ., 2547
195 หน้า
ISBN 974-559-689-2
1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ – คู่มือ 2. ศักดา บุญโต 3. ชื่อเรื่อง

คู่มือการสอนหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สิ่งพิมพ์ สกศ.	อันดับที่ 82/2547
พิมพ์ครั้งที่ 1	มิถุนายน 2547
จำนวน	1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่	สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา 99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300 โทรศัพท์ 0 2668 7123 ต่อ 2528 โทรสาร 0 2668 7329 Web site : http://www.once.go.th
สำนักพิมพ์	บริษัท พิมพ์ดี จำกัด 21/232 – 4 ซอยคลองหนองใหญ่ ถนนวงแหวน เขตบางแค กรุงเทพฯ 10160 โทรศัพท์ 0 2803 2694 – 7 โทรสาร 0 2803 4401

คำนำ

หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เป็นหลักสูตรที่จัดขึ้นสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อ

: พัฒนาผู้เรียนให้มีความสามารถด้านคณิตศาสตร์ในระดับที่กว้าง ยาก และลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ โดยเน้นกระบวนการเรียนรู้ กระบวนการคิดที่หลากหลาย และทักษะที่เป็นรากเหง้าของความสามารถด้านคณิตศาสตร์มากกว่าที่จะเน้นเนื้อหาที่ปรากฏในสื่อการเรียน

: ฝึกการคิดวิเคราะห์ สืบสวนหาความรู้ และฝึกทักษะอื่นๆ ที่อยู่นอกเหนือจากจุดมุ่งหมายในการเรียนของหลักสูตรปกติ โดยเฉพาะทักษะที่ต้องใช้ความคิดริเริ่มและความคิดสร้างสรรค์

: ฝึกให้ศึกษาเรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างชัดแจ้ง ฝึกการทำโครงสร้างการเรียนรู้ การวางแผน และการจัดการตามความถนัด และศักยภาพ

: ฝึกการใช้ความคิดสร้างสรรค์ สามารถบูรณาการกับวิชาอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องได้

: เข้าใจธรรมชาติ ความงาม ความกระชับ และความชัดเจนของคณิตศาสตร์

เอกสารเล่มนี้เป็น **คู่มือการสอนหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** ที่ได้จากการวิจัยนำร่องการพัฒนารูปแบบและหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่าง ที่นำเสนอไว้ให้ครูผู้สอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษได้ดูเป็นตัวอย่างและนำไปใช้สอน โดยครูผู้สอนสามารถจะขยายเนื้อหาที่นำเสนอไว้ หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจหรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียน เพื่อนำมาสอนในหลักสูตรนี้ โดยเนื้อหานั้นควรสามารถทำให้บรรลุวัตถุประสงค์ที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา ขอขอบคุณรองศาสตราจารย์ศักดา บุญโต และคณะ ตลอดจนผู้เกี่ยวข้องทุกท่านที่ให้ความร่วมมือและช่วยเหลือ จนทำให้การดำเนินงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อวงการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของไทยอย่างกว้างขวางต่อไป

ศาสตราจารย์ ร้อยตำรวจเอก

(วรเดช จันทรศร)

เลขาธิการสภาการศึกษา

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หลักสูตรเสริมประสบการณ์

หน่วยที่ 1
ทักษะการคำนวณ (การบวก - ลบ)

ตอนที่ 1.1 การบวกจำนวนหลายจำนวน

ตอนที่ 1.2 จำนวนในระบบเครื่องหมายคละ

ตอนที่ 1.3 การบวก - ลบ จำนวนคละกันหลายจำนวน

แนวคิด

1. การบวก ถ้านำจุดมาแทนการทดจะทำให้การคิดคำนวณแม่นยำและรวดเร็วขึ้น
2. การแปลงจำนวนในระบบฐานสิบเป็นระบบเครื่องหมายคละ แล้วนำมาใช้ในการคิดคำนวณในการบวก - ลบจะทำให้มีกระบวนการคิดคำนวณที่รวดเร็ว และหลากหลายวิธี

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 1 จบแล้วนักเรียนสามารถ

1. บวกจำนวนหลายจำนวนได้อย่างแม่นยำและรวดเร็ว
2. แปลงจำนวนในระบบฐานสิบเป็นจำนวนในระบบเครื่องหมายคละได้ และแปลงจำนวนในระบบเครื่องหมายคละเป็นจำนวนในระบบฐานสิบได้
3. บวก และลบจำนวนคละกันได้หลายวิธีแตกต่างกัน
4. ออกแบบวิธีการบวก-ลบจำนวนตามแนวคิดสร้างสรรค์ของตนเอง

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายเนื้อหา กระบวนการวิธีคิดคำนวณ การบวก ระบบเครื่องหมายคละ การบวก - ลบคละกันด้วยวิธี
2. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่าง และแบบฝึกหัด
3. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัด และการทดสอบ

ตอนที่ 1.1 การบวกจำนวนหลายจำนวน

เรื่องที่ 1.1.1 การบวกจำนวนหลายจำนวนตามแนวตั้ง

ในการบวกจำนวนหลายๆ จำนวน โดยการตั้งบวกกันนั้นปัญหาที่ทำให้ผิดพลาดได้ง่าย ก็คือ การทดและการบวกเลขในใจที่มีตัวเลขมากกว่า 1 หลัก สำหรับวิธีการบวกที่จะแนะนำนี้ เป็นวิธีการบวกในเวทคณิต ซึ่งง่ายกว่าวิธีการบวกทั่วๆ ไป เพราะจะคิดในใจเฉพาะการบวกเลขโดดเท่านั้น (เลขโดด ได้แก่ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) และจะเขียนผลลัพธ์เฉพาะเลขโดด ถ้าผลลัพธ์เกิน 9 จะใช้ • แทนตัวทด ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่าง การบวกเลขโดด

$1 + 4 = 5$ $2 + 3 = 5$ $8 + 2 = \dot{0}$ ($\dot{0}$ คือ 10) $4 + 9 = \dot{3}$ ($\dot{3}$ คือ 13)

$3 + 5 = 8$ $8 + 1 = 9$ $5 + 7 = \dot{2}$ ($\dot{2}$ คือ 12) $7 + 8 = \dot{5}$ ($\dot{5}$ คือ 15)

$6 + 3 = 9$ $0 + 7 = 7$ $9 + 8 = \dot{7}$ ($\dot{7}$ คือ 17) $9 + 9 = \dot{8}$ ($\dot{8}$ คือ 18)

ในการบวกเลขเป็นแถวหลายๆ แถว จะนำหลักการบวกเลขโดดข้างต้นมาใช้โดยจะบวกทีละหลัก เริ่มต้นจากหลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย ไปเรื่อยๆ จนหมดหลัก การบวกจะบวกเลขเฉพาะเลขโดดจากแถวบนลงแถวล่าง ถ้ามีการทดจะเขียน • แทนการทดที่ตัวบวก หลังจากนั้นจะนำเลขโดดของผลบวกกับเลขโดดในหลักหน่วยของแถวที่อยู่ถัดไปข้างล่าง ทำเช่นนี้จนหมดแถว เสร็จแล้วจึงบวกเลขโดดในหลักสิบ แต่ก่อนทำการบวกเลขโดดในหลักสิบจะต้องตรวจสอบก่อนว่ามี • ในหลักหน่วยอยู่เท่าใด เมื่อนับ • ในหลักหน่วยได้แล้วว่ามีจำนวนเท่าใดก็ให้ถือว่าจำนวน • ที่นับได้เป็นตัวทดไปยังหลักสิบ แต่ถ้าไม่มี • ในหลักหน่วยเลย ถือว่าไม่มีตัวทดไปยังหลักสิบ ในกรณีที่มีตัวทดให้นำตัวทดไปบวกกับตัวเลขในหลักสิบของแถวแรกแล้วทำการบวกลงมาเช่นเดียวกับการบวกในหลักหน่วย สำหรับการบวกในหลักอื่นๆ ก็กระทำเช่นเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1.1.1

การบวกแบบธรรมดา การบวกแบบเขียน • แทนการทด

$$\begin{array}{rr} 1 \leftarrow \text{ทด} & \\ 2 & 6 \\ & 8 \\ \hline 3 & 4 \end{array} + \qquad \text{จุดแทนการทด} \longrightarrow \qquad \begin{array}{rr} 2 & 6 \\ & \dot{8} \\ \hline 3 & 4 \end{array} + \downarrow \text{ทิศทางการบวก}$$

การบวกแบบธรรมดาในหลักหน่วย 6 + 8 = 14 จึงเขียน 4 เป็น ผลลัพธ์ในหลักหน่วยและทด 1 ไว้เหนือ 2 ซึ่งเป็นเลขในหลักสิบของตัวตั้ง รวมตัวตั้งกับตัวทดได้ 1 + 2 = 3 จึงเขียนผลลัพธ์ 3 ที่หลักสิบของผลลัพธ์ จึงได้ 26 + 8 = 34

การบวกแบบเขียน • แทนการทด จะเขียน • กำกับไว้เหนือตัวบวก เมื่อการบวกนั้นได้ผลลัพธ์ตั้งแต่ 10 ขึ้นไป

พิจารณาการบวกในหลักหน่วย

6		
• +	←	6 + 8 = $\dot{4}$ จึงใส่ • ไว้ที่ 8 ซึ่งเป็นตัวบวก
<u>8</u>		ทิศทางการบวก จากบนลงล่าง) ใส่ 4 ที่ได้จาก
<u>4</u>		14 ไว้ในผลลัพธ์

สำหรับ • ในหลักหน่วย นั้น คือ 1 ในหลักสิบที่เป็นตัวทดนั่นเอง

หลังจากนั้นนำ • ที่แทน 1 ในหลักสิบไปบวกกับ 2 ในหลักสิบของตัวตั้งได้เป็น 3 ผลลัพธ์ คือ 34

■

ตัวอย่างที่ 1.1.2 จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$\begin{array}{cccc} 8 & 3 & 5 & \\ 4 & 8 & 9 & + \\ \underline{6} & \underline{9} & \underline{2} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด การบวกในหลักหน่วย

หลักหน่วย

$$\begin{array}{cccc} 8 & 3 & 5 & \\ 4 & \dot{8} & \dot{9} & + \\ 6 & \dot{9} & 2 & \\ \hline & & 6 & \\ \hline\hline \end{array}$$

5 + 9 = $\dot{4}$ นำ • ไปใส่ไว้ที่ 9 ซึ่งเป็นตัวบวก นำผลลัพธ์ 4 ไปบวกกับ 2 ในบรรทัดที่ 3 ได้ผลลัพธ์เป็น 6 ใส่ 6 ตรงกับหลักหน่วยในบรรทัดที่ 4 ที่เป็นบรรทัดผลลัพธ์

การบวกในหลักสิบ

หลักสิบ

8	3	5		หนึ่ง • ในหลักหน่วยทดเป็น 1 ในหลักสิบ จึงนำ 1 ไปบวก
4	$\dot{8}$	$\dot{9}$	+	กับ 3 ในหลักสิบของแถวแรกได้เป็น 4 นำ 4 ไปบวกกับ 8
6	$\dot{9}$	2		จะได้ 4 + 8 = $\dot{2}$
	1	6		จึงเขียน • ไว้ที่ 8 ซึ่งเป็นตัวบวกแล้วนำ 2 ไปบวกกับ 9 ได้ผลลัพธ์

เป็น $\dot{1}$ จึงเขียน • ไว้ที่ 9 ซึ่งเป็นตัวบวก เขียนผลลัพธ์ 1 ตรงกับหลักสิบในบรรทัดที่ 4 ที่เป็นบรรทัด ผลลัพธ์

การบวกในหลักร้อย

หลักร้อย

$\dot{8}$	3	5		สอง • ในหลักสิบทดเป็น 2 ในหลักร้อย จึงนำ 2 ไปบวกกับ 8 ใน
4	$\dot{8}$	$\dot{9}$	+	หลักร้อยของแถวแรก 2 + 8 = $\dot{0}$ จึงใส่ • ที่ 8 ซึ่งเป็นตัวบวก นำ 0
$\dot{6}$	$\dot{9}$	2		ไปบวกกับ 4 ได้ 4 นำ 4 ไปบวกกับ 6 ในบรรทัดที่ 3 4 + 6 = $\dot{0}$ จึง
0	1	6		ใส่ • ที่ 6 ที่เป็นตัวบวก และเขียน0 ลงในหลักร้อยของบรรทัดผลลัพธ์

ค่าทดไปหลักพัน

	$\dot{8}$	3	5		เนื่องจากในหลักร้อยมีสอง • ทดเป็น 2 ไปหลักพัน แต่หลักพันไม่มี
	4	$\dot{8}$	9	+	การบวกจึงใส่2 ไว้ในหลักพันของบรรทัดผลลัพธ์
	$\dot{6}$	$\dot{9}$	2		
2	0	1	6		

จึงได้ผลบวก คือ 2 0 1 6

■

ตัวอย่างที่ 1.1.3 ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงขั้นตอนการบวกทีละหลัก การบวกเริ่มตั้งแต่หลักหน่วย เป็นขั้นที่ 1 การบวกหลักสิบเป็นขั้นที่ 2 ไปเรื่อยๆ

$$\begin{array}{ccccc|l}
7 & \dot{8} & \dot{9} & 2 & 4 & \\
\dot{2} & 7 & 2 & \dot{7} & 2 & + \\
\dot{9} & \dot{9} & \dot{9} & 9 & \dot{9} & \\
7 & 2 & 6 & \dot{7} & 2 & \\
\hline
7 & 8 & 8 & 6 & 7 & \\
\hline\hline
\end{array}$$

แนวคิด

ขั้นที่ 1 4 + 2 = 6 $\longrightarrow$ 6 + 9 = 15 (ใส่ • เหนือ 9) $\longrightarrow$ 5 + 2 = 7 ใส่ 7 เป็นผลลัพธ์ในหลักหน่วยและมีตัวทดเป็น 1

ขั้นที่ 2 นำ 1 (ตัวทด) มาบวกในหลักสิบ 1 + 2 = 3 $\longrightarrow$ 3 + 7 = 10 (ใส่ • เหนือ 7) $\longrightarrow$ 0 + 9 = 9 $\longrightarrow$ 9 + 7 = 16 (ใส่ • เหนือ 7) ใส่ 6 เป็นผลลัพธ์ในหลักสิบ และมีตัวทดเป็น 2

ขั้นที่ 3 นำ 2 (ตัวทด) มาบวกในหลักร้อย 2 + 9 = 11 (ใส่ • เหนือ 9) $\longrightarrow$ 1 + 2 = 3 $\longrightarrow$ 3 + 9 = 12 (ใส่ • เหนือ 9) $\longrightarrow$ 2 + 6 = 8 ใส่ 8 เป็นผลลัพธ์ในหลักร้อย และมีตัวทดเป็น 2

ขั้นที่ 4 นำ 2 (ตัวทด) มาบวกในหลักพัน 2 + 8 = 10 (ใส่ • เหนือ 8) $\longrightarrow$ 0 + 7 = 7 $\longrightarrow$ 7 + 9 = 16 (ใส่ • เหนือ 9) $\longrightarrow$ 6 + 2 = 8 ใส่ 8 เป็นผลลัพธ์ในหลักพัน และมีตัวทดเป็น 2

ขั้นที่ 5 นำ 2 (ตัวทด) มาบวกในหลักหมื่น2 + 7 = 9 $\longrightarrow$ 9 + 2 = 11 (ใส่ • เหนือ 2) 1 + 9 = 10 (ใส่ • เหนือ 9) $\longrightarrow$ 0 + 7 = 7 ใส่ 7 เป็นผลลัพธ์ ในหลักหมื่น และมีตัวทดเป็น 2 หมด การบวก จึงเขียนตัวทด 2 เป็น 2 ในหลักแสน การบวกเป็นดังนี้

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & 7 & \dot{8} & \dot{9} & 2 & 4 & \\
 & \dot{2} & 7 & 2 & \dot{7} & 2 & + \\
 & \dot{9} & \dot{9} & \dot{9} & 9 & \dot{9} & \\
 & 7 & 2 & 6 & \dot{7} & 2 & \\
\hline
2 & 7 & 8 & 8 & 6 & 7 & \\
\hline\hline
\end{array}$$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.4 จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$
\begin{array}{ccccc c}
2 & 9 & 7 & 9 & 6 & \\
6 & 5 & 7 & 2 & 8 & + \\
2 & 3 & 9 & 9 & 9 & \\
\underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

แนวคิด

ขั้นที่ 1 $6 + \dot{8} = 14 \rightarrow 4 + \dot{9} = 13 \rightarrow 3 + 1 = (4)$ (2 จุด ทด 2 ไปขั้นที่ 2)

ขั้นที่ 2 $2 + \dot{9} = 11 \rightarrow 1 + 2 = 3 \rightarrow 3 + \dot{9} = 12 \rightarrow 2 + 2 = (4)$ (2 จุด ทด 2 ไปขั้นที่ 3)

ขั้นที่ 3 $2 + 7 = 9 \rightarrow 9 + \dot{7} = 16 \rightarrow 6 + \dot{9} = 15 \rightarrow 5 + 3 = (8)$ (2 จุด ทด 2 ไปขั้นที่ 4)

ขั้นที่ 4 $2 + \dot{9} = 11 \rightarrow 1 + 5 = 6$ ---> $6 + 3 = 9 \rightarrow 9 + \dot{4} = 13(3)$ (2 จุด ทด 2 ไปขั้นที่ 5)

ขั้นที่ 5 $2 + 2 = 4 \rightarrow 4 + \dot{6} = 10$ ---> $0 + 2 = 2 \rightarrow 2 + 5 = (7)$ (1 จุด ทด1ไปขั้นหลักแสน) จะได้

$$
\begin{array}{cccccc c}
 & 2 & \dot{9} & 7 & \dot{9} & 6 & \\
 & \dot{6} & 5 & \dot{7} & 2 & \dot{8} & + \\
 & 2 & 3 & \dot{9} & \dot{9} & \dot{9} & \\
 & 5 & \dot{4} & 3 & 2 & 1 & \\
\hline
1 & 7 & 3 & 8 & 4 & 4 & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.5 จงหาผลบวกของ

4	1	7	5	แนวคิด		4	1	7	5
3	8	2	6 +			3	$\dot{8}$	$\dot{2}$	$\dot{6}$ +
4	7	5	3			$\dot{4}$	7	5	3
2	1	0	4			2	1	0	4
					1	4	8	5	8

■

เพื่อเป็นการฝึกหัดการบวกเลขโดด ตารางต่อไปนี้แสดงตารางการบวกเลขโดด ซึ่งสามารถเข้าใจได้โดยง่าย

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\dot{0}$
2	2	3	4	5	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$
3	3	4	5	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
4	4	5	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
5	5	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
6	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
7	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
8	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$
9	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{8}$

หมายเหตุ

$\dot{0} = 10$
$\dot{1} = 11$
$\dot{2} = 12$
$\dot{3} = 13$
$\dot{4} = 14$
$\dot{5} = 15$
$\dot{6} = 16$
$\dot{7} = 17$
$\dot{8} = 18$
$\dot{9} = 19$

แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงหาผลบวกต่อไปนี้

(1) 8 1 3
2 5 6 +
7 4 9

(2) 6 6 6
9 4 5 +
1 3 2

(3) 1 4 8
9 8 7 +
4 5 6

(4) 3 1 3 8
4 5 7 5 +
3 6 4 9
7 3 2 2

(5) 2 1 2 9
9 7 5 4 +
3 6 8 1
2 1 3 4

(6) 8 1 4 2
6 7 5 4 +
9 9 9 9
3 3 3 3

(7) 5 9 4 1 5
7 2 4 8
4 8 9 +
8 2 1 1 6
3 8 4 1 4

(8) 6 7 5 4 1
8 3 6
4 7 9 5 +
3 8 5 8 3
8 7 6 5 4

(9) 1 4 1 5 1
8 7 8 7 8
2 6 4 9 +
3 5 5 5
7 8 2 1 4

(10) 4 8 5 9 5
4 7 2 8
3 1 6
8 4 2 7
5 2 9 8 3
1 2 5 +
6 6 6 6
1 2 3 4 5
3 7 6 2 1

(11) 4 1 2 8 1
5 2 3 9
9 3 5 2 7
3 8 0 9 2
4 2 1 6
5 5 7 6 6 +
3 3 3 8
1 4 8 5
2 3 1 1 7

2. จงหาผลบวกของ

31465 + 47474 + 38641 + 27264 + 38886 = ___________

48753 + 99486 + 10238 + 47655 + 95384 = ___________

สนุกกับตัวเลข (1)

คู่เหมือน	สามตัวเหมือน	สี่ตัวเหมือน
$11 \times 1 = 11$	$37 \times 3 = 111$	$101 \times 11 = 1111$
$11 \times 2 = 22$	$37 \times 6 = 222$	$101 \times 22 = 2222$
$11 \times 3 = 33$	$37 \times 9 = 333$	$101 \times 33 = 3333$
$11 \times 4 = 44$	$37 \times 12 = 444$	$101 \times 44 = 4444$
$11 \times 5 = 55$	$37 \times 15 = 555$	$101 \times 55 = 5555$
$11 \times 6 = 66$	$37 \times 18 = 666$	$101 \times 66 = 6666$
$11 \times 7 = 77$	$37 \times 21 = 777$	$101 \times 77 = 7777$
$11 \times 8 = 88$	$37 \times 24 = 888$	$101 \times 88 = 8888$
$11 \times 9 = 99$	$37 \times 27 = 999$	$101 \times 99 = 9999$

ตอนที่ 1.2 จำนวนในระบบเครื่องหมายคละ

เรื่องที่ 1.2.1 จำนวนในระบบฐานสิบกับจำนวนในระบบเครื่องหมายคละ

ในระบบตัวเลขฐานสิบซึ่งตัวเลขที่ใช้ได้แก่ ตัวเลข 0 ไปจนถึง 9 สำหรับในระบบเครื่องหมายคละ นิยมเปลี่ยนรูปตัวเลขที่มากกว่า 5 ให้เป็นตัวเลขที่น้อยกว่า 5 แล้วเขียนสัญลักษณ์ - (ขีดบน) บนตัวเลขเหล่านั้น อัน จะทำให้การคำนวณง่ายขึ้น เพราะการคำนวณใช้ค่าตัวเลขเพียง 0 ถึง 5 ย่อมง่ายและเร็วกว่าใช้ค่าตัวเลขตั้งแต่ 0 ถึง 9 การเขียนสัญลักษณ์แทนตัวเลขที่มากกว่า 5 แสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.1 พิจารณา 9 จะเห็นว่า $9 = 10 - 1 = 10 + (-1)$ ถ้าเขียน -1 เป็น $\bar{1}$

จะได้ $10 + (-1) = 10 + \bar{1}$ ซึ่งจะเขียนเป็น $1\bar{1}$ ดังนั้น $9 = 1\bar{1}$ อธิบายได้ดังนี้

ในระบบตัวเลขฐานสิบ ถ้าเขียน ab จะหมายถึง $a \times (10) + b$ ทำนองเดียวกัน $1\bar{1}$ จะหมายถึง $1 \times (10) + \bar{1} = 10 + \bar{1}$

นั่นคือ $1\bar{1} \quad = \quad 1 \times (10) + \bar{1} = 10 + \bar{1} = 10 - 1 = 9$

ตัวอย่างที่ 1.2.2 $29 = 30 - 1 = 30 + (-1) = 3 \times (10) + (-1)$

$= 30 + \bar{1} = 3\bar{1}$

นั่นคือ $29 = 3\bar{1}$ ■

> สำหรับจำนวนเต็ม m ใด ๆ กำหนด $\bar{m} = -m$

จากการกำหนด $\bar{m} = -m$ สำหรับจำนวนเต็ม m ใดๆ จะได้คุณสมบัติต่อไปนี้

> สำหรับจำนวนเต็ม m, n ใด ๆ
>
> 1. $\overline{m+n} = \bar{m} + \bar{n}$
> 2. $\bar{\bar{m}} = m$
> 3. $\overline{m+\bar{n}} = \overline{\bar{n}+m} = \bar{m} + n = n + \bar{m}$

แสดงได้ดังนี้

1. $\overline{m+n} \quad = \quad -(m+n) = (-m) + (-n) = \bar{m} + \bar{n}$

2. $\bar{\bar{m}} \quad = \quad -\bar{m} = -(-m) = m$

3. $\overline{m+\bar{n}} \quad = \quad -(m + \bar{n}) = (-m) - \bar{n} = (-m) - (-n)$

$\quad = \quad (-m) + n = \bar{m} + n$

$$\overline{n+m} = -(\overline{n}+m) = (-\overline{n})+(-m) = -(-n)+(-m)$$

$$= n+(-m) = n+\overline{m}$$

นอกจากนี้ สำหรับในระบบตัวเลขฐานสิบ จะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

สำหรับเลขโคด $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$

4. $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n}\ \overline{a_{n-1}}\ \overline{a_{n-2}} \ldots \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_0}$

คุณสมบัติข้อ 4. จะแสดงประกอบด้วยตัวอย่าง ดังนี้

$$\overline{23} = \overline{2}\,\overline{3}$$

(เนื่องจาก $23 = 20+3$ ดังนั้น $\overline{23} = \overline{20+3} = \overline{20}+\overline{3}$

โดยการเขียนแบบมีค่าประจำตำแหน่ง จะได้ $\overline{20}+\overline{3} = \overline{2}\ \overline{3}$

การเขียนจำนวนในระบบเครื่องหมายคละนั้น จะพบจำนวนที่เขียนดังตัวอย่างต่อไปนี้ $1, \overline{2}, \overline{3}, 0, \overline{4}, 2, 1, \overline{5}, 6, 1, \overline{0}, 2, \overline{1}$ ฯลฯ ซึ่งหลักใดมีขีดบนอยู่เหนือจำนวนหลักนั้นๆ จะมีค่าเป็นจำนวนลบที่มีขนาดเท่ากับขนาดของค่าตัวเลขในหลักนั้น

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการเขียนตัวเลขในระบบฐานสิบ เป็นตัวเลขในระบบเครื่องหมายคละโดยมีขีดบน –

ตัวอย่างที่ 1.2.3 $79 = 80+(-1) = 80+\overline{1}$

เขียน $80+\overline{1}$ ในรูปค่าประจำตำแหน่งจะได้ $8\,\overline{1}$

ดังนั้น $79 = 8\,\overline{1}$

นอกจากนี้ $80 = 100-20 = 100+\overline{2}\,\overline{0} = 100+\overline{2}\,\overline{0} = 1\,\overline{2}\,\overline{0}$

ดังนั้น $79 = 80+\overline{1} = 1\,\overline{2}\,\overline{0}+\overline{1} = 1\,\overline{2}\,\overline{1}$

(เพราะ $\overline{0}+\overline{1} = \overline{1}$)

นั่นคือ $79 = 1\,\overline{2}\,\overline{1}$

หมายเหตุ การเขียนสัญลักษณ์แทน 79 อาจทำได้ดังนี้

$79 = 100-21 = 100+\overline{2}\,\overline{1} = 100+\overline{2}\,\overline{0}+\overline{1} = 1\,\overline{2}\,\overline{1}$

■

ในการเขียนจำนวนในระบบตัวเลขฐานสิบให้เป็นตัวเลขที่ใช้ในระบบเครื่องหมายคละ โดยใช้เลขโดดไม่เกิน 5 สามารถทำได้โดยใช้จำนวนทบสิบ และจำนวนทบเก้า ซึ่งในการอธิบายความหมายของจำนวนทบเก้า หรือจำนวนทบสิบของเลขโดดใดๆ อธิบายได้ดังนี้

จำนวนทบเก้า สำหรับเลขโดด a ใดๆ จำนวนทบเก้าของ a คือเลขโดด b ซึ่ง $a + b = 9$

เนื่องจากสำหรับเลขโดด a, b ใดๆ $a + b = b + a$ ดังนั้น ถ้า $a + b = 9$ จะได้ $b + a = 9$

จึงกล่าวได้ว่า b เป็นจำนวนทบเก้าของ a และ a เป็นจำนวนทบเก้าของ b หรือกล่าวว่า a และ b เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกัน

คู่จำนวนทบเก้าของเลขโดด 0 ถึง 9 มีดังนี้

0 และ 9 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $0 + 9 = 9 + 0 = 9$

1 และ 8 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $1 + 8 = 8 + 1 = 9$

2 และ 7 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $2 + 7 = 7 + 2 = 9$

3 และ 6 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $3 + 6 = 6 + 3 = 9$

4 และ 5 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $4 + 5 = 5 + 4 = 9$

จำนวนทบสิบ สำหรับเลขโดด a ใดๆ จำนวนทบสิบของ a คือเลขโดด b ซึ่ง $a + b = 10$

ทำนองเดียวกันกับจำนวนทบเก้า สำหรับเลขโดด a และ b ซึ่ง $a + b = 10$ กล่าวว่า a และ b เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกัน

คู่จำนวนทบสิบของเลขโดด 0 ถึง 9 มีดังนี้

1 และ 9 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกันเพราะ $1 + 9 = 9 + 1 = 10$

2 และ 8 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกันเพราะ $2 + 8 = 8 + 2 = 10$

3 และ 7 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกันเพราะ $3 + 7 = 7 + 3 = 10$

4 และ 6 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกันเพราะ $4 + 6 = 6 + 4 = 10$

5 เป็นจำนวนทบสิบของตัวเองเพราะ $5 + 5 = 10$

ตัวอย่างที่ 1.2.4 จงเขียน 2789 โดยใช้ตัวเลขไม่เกิน 5

แนวคิด 2 7 8 9 $= 3000 - 211$

$= 3000 + \bar{2}\bar{1}\bar{1}$

$= 3\,\bar{2}\bar{1}\bar{1}$

$= 3\,\bar{2}\bar{1}\bar{1}$

นอกจากวิธีคิดตามแนวคิดข้างต้นแล้ว อาจใช้วิธีคิดลัดได้ดังนี้

พิจารณา 789 ตัวเลขที่ต้องเปลี่ยนแปลงคือ 9 ในหลักหน่วย 8 ในหลักสิบ และ 7 ในหลักร้อย

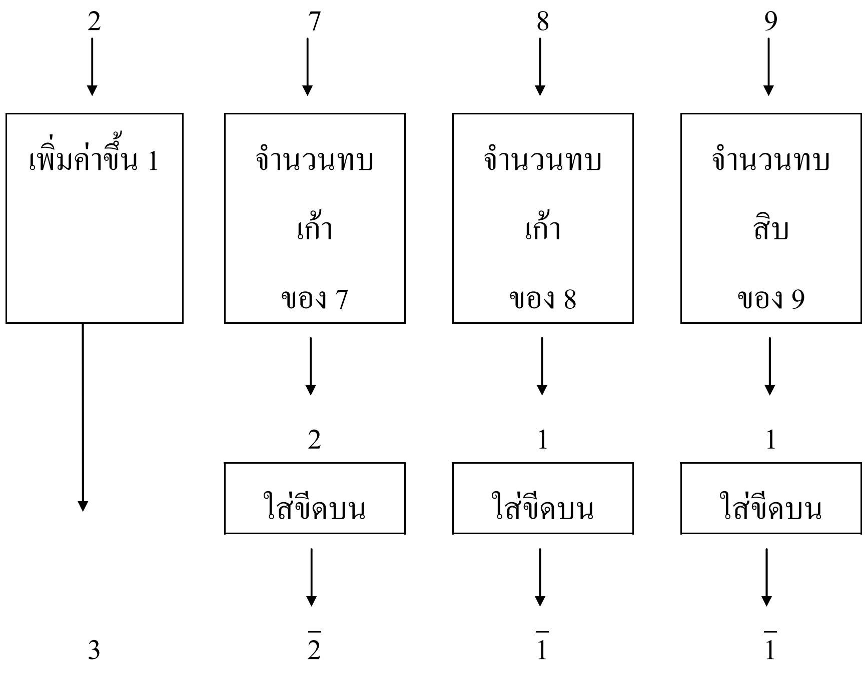
ตัวเลข ขวาสุด (หลักหน่วย) คือ 9 มีจำนวนทบสิบ คือ 1 ใส่ขีดบนได้เป็น $\bar{1}$

ตัวเลข หลักสิบ คือ 8 มีจำนวนทบเก้า คือ 1 ใส่ขีดบนได้เป็น $\bar{1}$

ตัวเลข ซ้ายสุด (หลักร้อย) คือ 7 มีจำนวนทบเก้า คือ 2 ใส่ขีดบนได้เป็น $\bar{2}$

ในการเขียน 2789 โดยเขียนเฉพาะตัวเลขที่น้อยกว่า 5 และใช้ ขีดบนทำได้ดังนี้ ให้เขียนตัวเลขจากขวาไปซ้ายโดยเขียนจำนวนทบสิบของ 9 พร้อมขีดบนถัดมาเป็นจำนวนทบเก้าของ 8 พร้อมขีดบนและจำนวนทบเก้าของ 7 พร้อมขีดบน และตัวเลขซ้ายสุดเขียนค่าของ 2 ที่เพิ่มขึ้น 1 นั่นคือเขียน 3 ซ้ายสุดจะได้ $3\,\bar{2}\bar{1}\bar{1}$

เขียนเป็นผังได้ดังนี้ (เริ่มจาก ขวาไปซ้าย)



นั่นคือ 2789 เปลี่ยนเป็น $3\,\bar{2}\bar{1}\bar{1}$

■

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนเต็ม m ใดๆ ถ้ามีชุดของเลขโดดติดกันหลายตัว โดยที่เลขโดดแต่ละตัวที่ติดกันนั้นมีค่าเกิน 5 ในการแปลงเลขโดดเหล่านั้นทำได้โดยตัวเลขขวาสุดของชุดแปลงเป็นจำนวนทบสิบของเลขโดดนั้น แล้วเขียนขีดบนไว้ที่จำนวนทบสิบนั้น สำหรับเลขโดดถัดๆ มาทางซ้ายในชุดนั้น แปลงเป็นจำนวนทบเก้าแล้วเขียนขีดบนไว้ที่จำนวนทบเก้าเหล่านั้น และเลขโดดที่ถัดไปทางซ้ายที่มีค่าน้อยกว่า 5 ให้เพิ่มค่าขึ้น 1 ก็จะเป็นการเขียนจำนวนเต็ม m ที่มีเลขโดดมีค่าไม่เกิน 5

ตัวอย่างที่ 1.2.5 จงเขียน 928716 โดยใช้ตัวเลขไม่เกิน 5 (นิขิลัมสูตร)

แนวคิด 0 9 2 8 7 1 6

$$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow$$

$1 \ \bar{1} \ 3 \ \bar{1} \ \bar{3} \ 2 \ \bar{4}$

4 เป็น จำนวนทบสิบของ 6 จึงเขียน $\bar{4}$

เพิ่มค่า 1 ขึ้นอีก 1 เป็น 2

3 เป็นจำนวนทบสิบของ 7 จึงเขียน $\bar{3}$

1 เป็นจำนวนทบเก้าของ 8 จึงเขียน $\bar{1}$

เพิ่มค่า 2 ขึ้นอีก 1 เป็น 3

1 เป็นจำนวนทบสิบของ 9 จึงเขียน $\bar{1}$

เนื่องจากในหลักของ 9 จะต้องแปลงค่า 9 เป็น $\bar{1}$ ดังนั้น

จึงจำเป็นต้องเขียน 0 หน้า 9 เพื่อจะต้องเพิ่มค่าขึ้น 1 จึงเขียน 1 เพิ่มขึ้นมาไว้หน้าสุดของตัวเลขที่แปลงแล้ว

นั่นคือ $928716 = 1\ \bar{1}\ 3\ \bar{1}\ \bar{3}\ 2\ \bar{4}$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.6 จงแปลง 257182 เป็นตัวเลขนิขิลัมสูตร

แนวคิด $2\ 5\ 7\ 1\ 8\ 2$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

แนวคิด $2\ 6\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

จำนวนทบสิบ

1 + 1

เริ่มชุดใหม่

จำนวนทบสิบ

5 + 1

ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

ดังนั้น $2\ 5\ 7\ 1\ 8\ 2 = 2\ 6\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

หลังจากการแปลงครั้งแรกแล้วยังมีเลขโดด 6 ที่มีค่าเกิน 5 จึงแปลงต่อไป

$2\ 6\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$3\ \bar{4}\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

จำนวนทบสิบ

2 + 1

ดังนั้น $2\ 6\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2 = 3\ \bar{4}\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

นั่นคือ $2\ 5\ 7\ 1\ 8\ 2 = 3\ \bar{4}\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.7 จงแปลง 353782 เป็นตัวเลขนิขิลัมสูตร

แนวคิด $3\ 5\ 3\ 7\ 8\ 2$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$3\ 5\ 4\ \bar{2}\ \bar{2}\ 2$

ดังนั้น $3\ 5\ 3\ 7\ 8\ 2 \ = \ 3\ 5\ 4\ \bar{2}\ \bar{2}\ 2$ ■

ในการแปลงตัวเลขในนิขิลัมสูตรให้เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ สามารถทำได้โดยใช้กระบวนการย้อนกลับ จากการแปลงตัวเลขในระบบฐานสิบเป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตร

พิจารณาการแปลงตัวเลขระบบฐานสิบเป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตร

$3\ 7\ 1\ 6\ 9$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$4\ \bar{3}\ 2\ \bar{3}\ \bar{1}$

จำนวนทบสิบของ 9 คือ 1 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{1}$

จำนวนทบเก้าของ 6 คือ 3 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{3}$

จาก 1 เพิ่มค่าขึ้นอีก 1 เป็น 2

เริ่มต้นใหม่ จำนวนทบสิบของ 7 คือ 3 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{3}$

จาก 3 เพิ่มค่าขึ้นอีก 1 เป็น 4

การแปลงตัวเลขในนิขิลัมสูตร เป็นตัวเลขระบบฐานสิบใช้กระบวนการย้อนกลับ ดังนี้

$4\ \bar{3}\ 2\ \bar{3}\ \bar{1}$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$3\ 7\ 1\ 6\ 9$

เอาขีดบนออกจาก $\bar{1}$ ได้ 1 หาจำนวนทบสิบ

ของ 1 ได้เป็น 9

เอาขีดบนออกจาก $\bar{3}$ ได้ 3 หาจำนวนทบเก้า

ของ 3 ได้เป็น 6

2 มีค่าลดลง 1 ได้เป็น 1

เริ่มต้นใหม่

เอาขีดบนออกจาก $\bar{3}$ ได้ 3 หาจำนวนทบสิบ

ของ 3 ได้เป็น 7

4 มีค่าลดลง 1 เป็น 3

นั่นคือ $4\ \bar{3}\ 2\ \bar{3}\ \bar{1} = 3\ 7\ 1\ 6\ 9$

ตัวอย่างที่ 1.2.8 จงแปลง $3\ \bar{3}\ 4\ \bar{4}$ เป็นตัวเลขในระบบฐาน 10

แนวคิด $3\ \bar{3}\ 4\ \bar{4}$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$2\ 7\ 3\ 6$

เอา – ออกจาก $\bar{4}$ ได้เป็น 4 ซึ่งจำนวนทบสิบของ 4 คือ 6

ลดค่า 4 ลง 1 เป็น 3

เริ่มต้น

เอา – ออกจาก $\bar{3}$ ได้เป็น 3 ซึ่งจำนวนทบสิบของ 3 คือ 7

ลดค่า 3 ลง 1 เป็น 2

นั่นคือ $3\ \bar{3}\ 4\ \bar{4} = 2\ 7\ 3\ 6$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.9 จงแปลง $3\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{2}$ เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ

แนวคิด $3\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{2}$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$2\ 6\ 5\ 8$

ทบสิบ

ทบเก้า

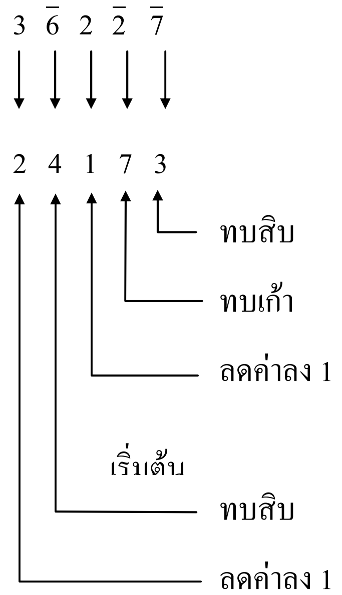
ลดค่าลง 1

ดังนั้น $3\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{2} = 2658$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.10 จงแปลง $3\ \bar{6}\ 2\ \bar{2}\ \bar{7}$ เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ

แนวคิด



ดังนั้น $3\ \bar{6}\ 2\ \bar{2}\ \bar{7} = 24173$

■

เรื่องที่ 1.2.2 จำนวนตรงข้าม

ต่อไปจะกล่าวถึงจำนวนตรงข้ามในระบบเครื่องหมายคละ เช่น $-3\bar{6}2\bar{1}$ มีค่าเป็นเท่าใด ในการพิจารณาค่าจำนวนตรงข้าม จะต้องใช้คุณสมบัติ $-a_n\,a_{n-1}\ldots a_2\,a_1\,a_0 = \overline{a_n}\;\overline{a_{n-1}}\;\overline{a_{n-2}}\ldots\overline{a_2}\;\overline{a_1}\;\overline{a_0}$ และในกรณีของนิขิลัมสูตรจะต้องแปลงตัวเลขที่มีค่ามากกว่า 5 ให้เป็นตัวเลขที่น้อยกว่า 5 และมีขีดบนเสียก่อน จึงจะทำการหาจำนวนตรงข้ามดังจะแสดงโดยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.11 $-27489 = \bar{2}\,\bar{7}\,\bar{4}\,\bar{8}\,\bar{9}$

ในนิขิลัมสูตรจะไม่เขียนตัวเลขที่เกิน 5 จึงจะต้องแปลง 27489 เป็น ตัวเลขในนิขิลัมสูตรก่อน ดังนี้

$$
\begin{array}{llcl}
 & 27489 & = & 3\;\bar{3}\;5\;\bar{1}\;\bar{1} \\
\text{จะได้} & -(27489) & = & -(3\;\bar{3}\;5\;\bar{1}\;\bar{1}) \\
 & & = & \bar{3}\;\bar{\bar{3}}\;\bar{5}\;\bar{\bar{1}}\;\bar{\bar{1}} \\
 & & = & \bar{3}\;3\;\bar{5}\;1\;1 \\
\text{นั่นคือ} & -27489 & = & \bar{3}\;3\;\bar{5}\;1\;1
\end{array}
$$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.12

$$
\begin{array}{llcl}
 & -80379 & = & -(80379) \\
 & & = & -(1\;\bar{2}\;0\;4\;\bar{2}\;\bar{1}) \\
 & & = & \bar{1}\;\bar{\bar{2}}\;\bar{0}\;\bar{4}\;\bar{\bar{2}}\;\bar{\bar{1}} \\
 & & = & \bar{1}\;2\;0\;\bar{4}\;2\;1 \\
\text{นั่นคือ} & -80379 & = & \bar{1}\;2\;0\;\bar{4}\;2\;1
\end{array}
$$

■

ในตัวอย่างที่ 1.2.11 และ 1.2.12 เป็นการแปลงจำนวนลบในฐานะฐานสิบให้เป็นจำนวนในระบบเครื่องหมายคละ ในทางกลับกันจำนวนในระบบเครื่องหมายคละ เมื่อแปลงแล้วอาจจะเป็นจำนวนลบในระบบฐานสิบได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.13 จงแปลง $\bar{3}\;7\;8\;\bar{2}\;1$ เป็นจำนวนในระบบฐานสิบ

แนวคิด วิธีที่ 1 ใช้ $M = -(-M)$ และ $-N = \overline{N}$ แล้วใช้จำนวนทบสิบและทบเก้า

$$\begin{aligned}
\bar{3}\ 7\ 8\ \bar{2}\ 1 &= -(-(\bar{3}\ 7\ 8\ \bar{2}\ 1)) \\
&= -(3\ \bar{7}\ \bar{8}\ 2\ \bar{1}) \\
&= -(2\ 2\ 2\ 1\ 9) \\
&= -\ 2\ 2\ 2\ 1\ 9
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{3}\ 7\ 8\ \bar{2}\ 1 = -\ 2\ 2\ 2\ 1\ 9$

วิธีที่ 2 ใช้จำนวนทบสิบและทบเก้าโดยตรงโดยให้ตัวเลขทุกตัวมีขีดบน

$$\begin{array}{ccccc}
\bar{3} & 7 & 8 & \bar{2} & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{9}
\end{array}$$

จำนวนทบสิบของ 1 คือ 9 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{9}$

$\bar{2}$ เพิ่มค่าขึ้น 1 เป็น $\bar{1}$

จำนวนทบสิบของ 8 คือ 2 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{2}$

จำนวนทบเก้าของ 7 คือ 2 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{2}$

$\bar{3}$ เพิ่มค่าขึ้น 1 เป็น $\bar{2}$

ดังนั้น $\bar{3}\ 7\ 8\ \bar{2}\ 1 = \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{9}$

$= -22219$

วิธีที่ 3 เปลี่ยนตัวเลขที่มีขีดบนเป็นตัวเลขที่มีค่าเป็นบวก

$$\begin{array}{cccccc}
0 & \bar{3} & 7 & 8 & \bar{2} & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\bar{1} & 7 & 7 & 7 & 8 & 1
\end{array}$$

1 มีค่าคงเดิม

เอาขีดบนออกจาก $\bar{2}$ ได้ 2 มีจำนวนทบสิบเป็น 8

ลดค่า 8 ลง 1

7 มีค่าคงเดิม

เริ่มต้นใหม่

เอาขีดบนออกจาก $\bar{3}$ ได้ 3 มีจำนวนทบสิบเป็น 7

ลดค่า 0 ลง 1 เป็น $\bar{1}$

นำ $\bar{1}\ 7\ \ 7\ 7\ 8\ \ 1$ มาแปลงอีกครั้งหนึ่งเพราะ $\bar{1}$ ยังไม่ใช่ตัวเลขที่มีค่า เป็นบวก

$$\bar{1}\ 7\ \ 7\ 7\ 8\ \ 1 \quad = \quad -100000 + 77781$$

$$= \quad -22219$$

นั่นคือ $\bar{3}\ \ 7\ \ 8\ \ \bar{2}\ \ 1 \quad = \quad -22219$

หมายเหตุ $-100000 + 77781$ หาค่าได้จาก

เขียนจำนวนทบเก้าของ 7778 แต่ละตัวตามลำดับ และเขียนจำนวนทบสิบของ 1 แล้วใส่เครื่องหมายลบ – ข้างหน้า จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

7 7 7 8 1

2 2 2 1 9 $\longleftarrow$ จำนวนทบเก้าและทบสิบ

ใส่ – ข้างหน้า $\longrightarrow$ -222197

■

ข้อสังเกต

1. สำหรับเลข $a_n a_{n+1} \ldots a_2\, a_1\, a_0$ ถ้าเขียนขีดบนลงบน a_n เป็น $\overline{a_n}$ และถึงแม้ว่า a_i ตัวอื่น ๆ ($i = n-1, \ldots, 0$) จะมีขีดบนหรือไม่ จะมีค่าเป็นจำนวนลบเมื่อ $a_n \neq 0$ เช่น $\bar{3}\ 7\ 8\ \bar{2}\ 1 = -22219$

2. ในระบบตัวเลขฐานสิบค่าประจำหลักนับตั้งแต่หลักสิบขึ้นไปจะมีค่าเป็น 10, 100, 1000, 10000, ..., 10^n ,... เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 ถ้า m เป็นจำนวนเต็ม และ $m \leq 10^n$ สำหรับบาง n จะมีจำนวนเต็ม p ซึ่ง $m + p = 10^n$ จะเรียก p ว่าจำนวนทบ 10^n ของ m หาได้โดยหาจำนวนทบสิบของเลขโดดขวาสุดของ m แล้วหาจำนวนทบเก้าของเลขโดดของ m ที่ถัดไปทางซ้าย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.14 จงหาจำนวนทบ 10^n ของ 728 เมื่อ 10^n มีค่าดังนี้

ก. 1000

ข. 10000

ค. 100000

ก. เนื่องจาก 1000 เป็นเลขที่มี 0 อยู่ 3 ตัว และ 728 เป็นจำนวนที่มี 3 หลัก จึงเขียนจำนวนทบสิบและทบเก้าตามข้อสังเกตดังนี้

7 2 8
↓ ↓ ↓
2 7 2

ดังนั้น จำนวนทบ 1000 ของ 728 คือ 272

ข. เนื่องจาก 10000 เป็นเลขที่มี 0 อยู่ 4 ตัว และ 728 เป็นจำนวนที่มี 3 หลัก จึงเพิ่ม 0 ข้างหน้าเพื่อให้เป็นจำนวนที่มี 4 หลัก ดังนี้ 0728 หลังจากนี้เขียนทบสิบและทบเก้า ดังนี้

0 7 2 8
↓ ↓ ↓ ↓
9 2 7 2

ดังนั้นจำนวนทบ 10000 ของ 728 คือ 9272

ค. ทำนองเดียวกันจำนวนทบ 100000 ของ 728 คือ 99272 ■

บทสรุป การแปลงเลขโดดที่มีค่าเกิน 5 ให้เป็นตัวเลขระบบเครื่องหมายคละ ซึ่งใช้ตัวเลขไม่เกิน 5 จะทำให้การคิดคำนวณง่ายขึ้น

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้แบบเครื่องหมายคละ

(1.1) 2 9 8	(1.2) 6 3
(1.3) 9 7 1	(1.4) 1 6 1 8
(1.5) 2 9 8 7 0 5	(1.6) 1 9 1 8 1 6
(1.7) 4 8 9 9 0 2 9 1	(1.8) 9 0 8 3 5 2 8 1
(1.9) 9 9 9 8 0 8 9 2	(1.10) 9 0 9 1 2 5 4 6 8 3 2
(1.11) 9 2 3 4 6 7 1	(1.12) $9\ 8\ 3 \bullet 0\ 1\ 2$
(1.13) $2 \bullet 1\ 0\ 3\ 5$	(1.14) $-\ 3 \bullet 5\ 2\ 4\ 1$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในตัวเลขระบบฐาน 10

(2.1) $2\ \bar{4}\ 1$	(2.2) $\bar{3}\ \bar{1}\ \bar{2}\ 8$
(2.3) $3\ \bar{4}\ \bar{1}\ \bar{3}$	(2.4) $1\ \bar{2}\ \bar{3}\ 1\ \bar{1}\ \bar{1}\ 1$
(2.5) $2\ \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}\ 4\ \bar{5}\ 3$	(2.6) $3\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{6}\ 0\ \bar{1}\ \bar{3}\ 4$
(2.7) $5\ \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2}\ 3\ \bar{3}\ \bar{2}\ 1$	(2.8) $5\ \bar{1}\ \bar{2}\ 0\ \bar{1}\ \bar{2}\ 0\ 2$
(2.9) $5\ \bar{4}\ 0\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 1\ \bar{1}\ 0$	(2.10) $5\ \bar{1}\ 3\ \bar{2}\ 3\ \bar{3}\ 5\ \bar{4}\ 3$
(2.11) $5\ 0\ 0\ \bar{3}\ \bar{4}\ 2\ 0\ \bar{4}$	(2.12) $3\ 0\ 1 \bullet \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{5}$
(2.13) $\bar{3}\ 0\ 1 \bullet \bar{4}\ 7\ \bar{3}\ 2$	(2.14) $1\ \bar{1}\ 1 \bullet \bar{1}\ 1\ \bar{1}\ 1$

ตอนที่ 1.3 การบวก - ลบคละกันหลายจำนวน

เรื่องที่ 1.3.1 การลบที่มีการขอยืม

ในการลบจำนวนสองจำนวน ถ้าเลขโดดในแต่ละหลักของตัวตั้งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าของเลขโดดของตัวลบในหลักนั้นๆ แล้วจะทำการลบได้ง่ายโดยไม่ต้องขอยืม แต่ถ้าในหลักใดที่ตัวลบมีค่ามากกว่าตัวตั้งจะต้องมีการขอยืมค่าในหลักถัดขึ้นไปของตัวตั้งซึ่งจะทำให้การลบซับซ้อนขึ้น เราอาจหลีกเลี่ยงการขอยืมและใช้วิธีการทบเก้าหรือทบสิบเข้าช่วย นอกจากนี้แทนที่จะทำการลบกันในหลักที่ตัวลบมีค่ามากกว่าตัวตั้งแล้วจะทำการบวกตัวตั้งด้วยจำนวนที่เกิดจากการทบเก้าหรือทบสิบอีกด้วย

พิจารณาการลบต่อไปนี้ 3 – 8 = –5 เห็นได้ชัดว่า ตัวตั้งคือ 3 ตัวลบ คือ 8 ซึ่งตัวลบมีค่ามากกว่าตัวตั้ง วิธีหาผลลบอาจทำได้โดยเปลี่ยนเอาตัวลบเป็นตัวตั้ง และเปลี่ยนตัวตั้งเป็นตัวลบได้ผลลัพธ์เป็นเท่าใดให้ใส่เครื่องหมายลบ (–) หน้าผลลัพธ์นั้น ก็จะได้ผลลบของ 3 – 8 ตามต้องการ

สำหรับการลบ 13 – 8 ถึงแม้ว่าตัวตั้งจะมีค่ามากกว่าตัวลบแต่เลขโดดในหลักหน่วยของตัวตั้งคือ 3 มีค่าน้อยกว่าเลขโดดซึ่งเป็นตัวลบคือ 8 กรณีนี้จะหาผลต่างเฉพาะเลขโดดกับเลขโดดไม่ได้จะต้องใช้เลขโดดในตัวตั้งทั้งหลักสิบและหลักหน่วย โดยทั่วๆ ไป อาจหาผลลัพธ์ของ 13 – 8 ได้ดังนี้

ให้ 13 – 8 = □ ซึ่งสอดคล้องกับ 13 = 8 + □ นั่นคือ จะต้องหาค่า □ ว่า มีค่าเป็นเท่าใด ซึ่งเมื่อนำมาบวกกับ 8 แล้วเท่ากับ 13 จะเห็นได้ว่า □ มีค่าเท่ากับ 5 เพราะ 8 + 5 = 13

นั่นคือ 13 – 8 = 5

อย่างไรก็ตาม 8 + 5 เป็นการบวกเลขโดดซึ่งผลบวกมีค่าเกิน 10

นอกจากนี้ถ้าจะหาผลลัพธ์ของ 23 – 8 อาจทำได้โดย ให้ 23 – 8 = □
ซึ่งสอดคล้องกับ 23 = 8 + □ ซึ่ง □ มีค่าเท่ากับ 15 เพราะ 8 + 15 = 23

นั่นคือ 23 – 8 = 15 จะเห็นได้ว่ายากขึ้นกว่าการหาผลลัพธ์ของ 13 – 8

แนวคิดและขั้นตอนการใช้จำนวนทบเก้า และทบสิบช่วยในการลบ สำหรับกรณีที่ต้องขอยืมจะอธิบายด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.1 จงหาผลลบของ 43 – 18

แนวคิด เขียนการลบในแนวตั้งให้หลักของตัวตั้ง และหลักของตัวลบตรงกัน

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & - \\ \underline{1} & \underline{8} & \end{array}$$

ขั้นที่ 1 ในหลักหน่วย ตัวตั้งคือ 3 ตัวลบคือ 8 เห็นได้ชัดว่า ตัวลบมีค่ามากกว่าตัวตั้ง จะใช้จำนวนทบสิบของ 8 นำไปบวกกับ 3 ซึ่งเป็นตัวตั้ง แล้วใส่ ′ เหนือตัวลบในหลักถัดไปทางซ้าย จำนวนทบสิบของ 8 คือ 2 นำ 2 ไปบวกกับ 3 ได้ 5 ใส่ 5 เป็นผลลัพธ์ในหลักหน่วย แล้วใส่ ′ เหนือ 1 ซึ่งเป็นตัวลบในหลักถัดไป

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & - \\ ' & 2^{+} & \\ \underline{1} & \underline{8} & \\ & \underline{\underline{5}} & \end{array}$$

ขั้นที่ 2 ทำการลบในหลักสิบ กรณีนี้ 1′ คือ 2 ซึ่ง 4 – 1′ คือ 4 – 2 = 2 จึงใส่ 2 เป็น ผลลัพธ์ในหลักสิบ จะได้ผลลัพธ์ในการลบคือ 25

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & \\ ' & 2^{+} & - \\ \underline{1} & \underline{8} & \\ \underline{\underline{2}} & \underline{\underline{5}} & \end{array}$$

ดังนั้น 43 – 18 = 25

■

ตัวอย่างที่ 1.3.2 จงหาผลลัพธ์ของ 432 – 257

แนวคิด เขียนตัวตั้งและตัวลบให้หลักตรงกัน

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & - \\ \underline{2} & \underline{5} & \underline{7} & \end{array}$$

ขั้นที่ 1 ในหลักหน่วยตัวตั้งคือ 2 น้อยกว่าตัวลบคือ 7 จำนวนทบสิบของ 7 คือ 3 นำ 3 บวกกับ 2 ได้เป็น 5 ในช่องผลลัพธ์ เขียน ′ เหนือ 5 ซึ่งเป็นตัวลบในหลักสิบ

$$\begin{array}{cccc} & & \text{ขอยืม} & \\ 4 & 3 & 2 & - \\ & & 3^{+} & \\ \underline{2} & \underline{5'} & \underline{7} & \\ & & \underline{\underline{5}} & \end{array}$$

ขั้นที่ 2 ในหลักสิบตัวตั้งคือ 3 น้อยกว่าตัวลบคือ $5'$ ซึ่งคือ 6 จำนวนทบสิบของ 6 คือ 4 นำ 4 บวกกับ 3 ได้เป็น 7 เขียน 7 ในช่องผลลัพธ์ เขียน $'$ เหนือ 2 ซึ่งเป็นตัวลบในหลักร้อย

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{ขอยืม} & \\
4 & 3 & 2 \\
 & 4^{+} & 3^{+} \quad - \\
\underline{2'} & \underline{5'} & \underline{7} \\
 & 7 & 5 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

ขั้นที่ 3 ในหลักร้อย ตัวตั้งคือ 4 ตัวลบ คือ $2'$ หรือ 3 จะได้ $4 - 3 = 1$ ใส่ 1 ในช่องผลลัพธ์

$$
\begin{array}{ccc}
4 & 3 & 2 \\
 & & 3^{+} \quad - \\
\underline{2'} & \underline{5'} & \underline{7} \\
1 & 7 & 5 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

ดังนั้น $432 - 257 = 175$

หมายเหตุ ในขั้นที่ 2 จำนวนทบสิบของ $5'$ คือ จำนวนทบสิบของ 6 ซึ่งจำนวนทบสิบของ $5'$ คือ 4 อาจจะกล่าวว่า จำนวนทบเก้าของ 5 คือ 4 ก็ได้

สำหรับการลบที่มีการขอยืมหลายหลักติดกัน หลักที่มีการขอยืมหลักขวาสุดใช้จำนวนทบสิบของตัวลบ ส่วนหลักที่มีการขอยืมหลักอื่นๆ ถัดไปทางซ้ายใช้จำนวนทบเก้าของตัวลบไปบวกกับตัวตั้งที่ตรงหลักเดียวกันกับตัวลบ หลังจากนั้นใส่ $'$ เหนือตัวเลขหลักถัดไปทางซ้ายที่ไม่มีการขอยืมแล้วทำการลบตามปกติ

จากตัวอย่างที่ 1.3.2

$$
\begin{array}{ccc}
4 & 3 & 2 \\
 & & \quad - \\
\underline{2} & \underline{5} & \underline{7}
\end{array}
$$

ตัวลบคือ 257 และมีการขอยืมในหลักหน่วยและหลักสิบติดกัน ส่วนหลักร้อยไม่มีการขอยืม ในหลักหน่วยจำนวนทบสิบของ 7 คือ 3 ใน หลักสิบจำนวนทบเก้าของ 5 คือ 4 สำหรับหลักร้อยไม่มีการขอยืมเติม $'$ บน 2 ในหลักร้อย ซึ่ง $2'$ คือ 3 แล้วทำการลบปกติ ในหลักที่ไม่มีการขอยืมคือ หลักร้อย ส่วนหลักหน่วยและหลักสิบบวกด้วยจำนวนทบสิบและจำนวนทบเก้าของตัวลบตามลำดับ

อธิบายการแปลงตัวลบ 257 ดังนี้

$$
\begin{aligned}
-257 &= (-2)\times 10^{2} + ((-5)\times 10) + (-7) \\
&= ((-2)\times 10^{2}) + (-10+5)\times 10 + (-10+3) \\
&= ((-2)\times 10^{2}) + ((-10)\times 10) + (5\times 10) + ((-1)\times 10) + 3 \\
&= ((-2)\times 10^{2}) + ((-1)\times 10^{2}) + ((5-1)\times 10) + 3 \\
&= ((-3)\times 10^{2}) + (4\ \times 10) + 3
\end{aligned}
$$

ทบสิบของ 7

ทบเก้าของ 5

พิจารณาตัวอย่างที่ 1.3.2

$$
\begin{array}{cccc}
 & \text{ขอยืม} & \text{ขอยืม} & \\
4 & 3 & 2 & - \\
' & 4^{+} & 3^{+} & \\
\underline{2} & \underline{5} & \underline{7} & \\
 & \underline{\underline{7}} & \underline{\underline{5}} &
\end{array}
$$

ได้จาก 3 (จำนวนทบสิบของ 7)
บวกกับ 2 ซึ่งเป็นตัวตั้ง

ได้จาก 4 (จำนวนทบเก้าของ 5)
บวกกับ 3 ซึ่งเป็นตัวตั้ง

อย่างไรก็ตาม ′ บน 2 ในหลักร้อย จำเป็นต้องมีเนื่องจากในหลักร้อยไม่ใช่กรณีที่ตัวตั้งค่ามีน้อยกว่าตัวลบ

ตัวอย่างที่ 1.3.3 จงหาผลลบของ

$$
\begin{array}{cccc}
8 & 2 & 5 & - \\
\underline{4} & \underline{8} & \underline{7} & \\
 & & & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

แนวคิด

$$
\begin{array}{cccc}
 & \text{ขอยืม} & \text{ขอยืม} & \\
8 & 2 & 5 & \\
 & 1^{+} & 3^{+} & - \\
\underline{4} & \underline{8} & \underline{7} & \\
 & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{8}} &
\end{array}
$$

การลบนี้มีการขอยืมสองหลักติดกัน คือ หลักหน่วยและหลักสิบ ในหลักหน่วยตัวลบคือ 7 จำนวนทบสิบของ 7 คือ 3 นำ 3 ไปบวกกับ 5 ซึ่งเป็นตัวตั้ง ได้ผลลัพธ์เป็น 8 ในหลักสิบ ตัวลบคือ 8 จำนวนทบเก้าของ 8 คือ 1 นำ 1 ไปบวกกับ 2 ซึ่งเป็นตัวตั้ง ได้ผลลัพธ์เป็น 3

$$\begin{array}{ccc} 8 & 2 & 5 \\ , & 1^{+} & 3^{+} \\ \underline{4} & \underline{8} & \underline{7} \\ \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{8}} \end{array}$$

หลักร้อยไม่มีการขอยืมใส่ $'$ เหนือ 4 ซึ่งเป็นตัวลบในหลักร้อย ซึ่ง $4'$ คือ 5 การลบไม่มีการขอยืมจึงนำ 5 ไปลบกับ 8 ได้ 3 ดังนั้นผลลัพธ์คือ 3 3 8

■

ตัวอย่างที่ 1.3.4 จงหาผลลบ

$$\begin{array}{ccccc} 8 & 4 & 6 & 8 & - \\ \underline{3} & \underline{6} & \underline{9} & \underline{2} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด การลบมีการขอยืมในหลักสิบซึ่งตัวลบคือ 9 และหลักร้อยซึ่งตัวลบคือ 6 จึงใช้จำนวนทบสิบของ 9 คือ 1 และจำนวนทบเก้าของ 6 คือ 3 ไปบวกขณะที่ 2 ในหลักหน่วยทำการลบตามปกติ ส่วนหลักพันเปลี่ยน 3 เป็น $3'$ ที่เท่ากับ 4 แล้วทำการลบปกติ ในหลักพัน ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} & \text{ขอยืม} & \text{ขอยืม} & & \\ 8 & 4 & 6 & 8 & \\ , & 3^{+} & 1^{+} & & - \\ \underline{3} & \underline{6} & \underline{9} & \underline{2} & \\ \underline{\underline{4}} & \underline{\underline{7}} & \underline{\underline{7}} & \underline{\underline{6}} & \end{array}$$

■

ตัวอย่างที่ 1.3.5 จงหาผลลบของ

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & 2 & 4 & 5 & 4 & 7 & - \\ \underline{5} & \underline{1} & \underline{8} & \underline{6} & \underline{1} & \underline{9} & \end{array}$$

แนวคิด **ขั้นที่ 1** ในหลักหน่วย ตัวตั้งคือ 7 น้อยกว่าตัวลบคือ 9 นำ 1 จำนวนทบสิบของ 9 บวกกับ 7 ได้ 8 จึงใส่ 8 ที่ช่องผลลัพธ์ นอกจากนี้ในหลักสิบ ตัวตั้งคือ 4 มากกว่าตัวลบคือ 1 ไม่เกิดการขอยืมจึงใส่ $'$ ไว้เหนือ 1ซึ่งเป็นตัวลบในหลักสิบ จะได้ $4-1' = 4-2 = 2$ ใส่ 2 ในช่องผลลัพธ์ของหลักสิบ

					ขอยืม
8	2	4	5	4 –	7 –
				,	1^{+}
5	1′	8	6	1	9
				2	8

ขั้นที่ 2 ในหลักร้อย และหลักพัน ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบติดกันสองหลัก ดังนั้นในหลักร้อยใช้การบวกด้วยจำนวนทบสิบของตัวลบ และในหลักพันใช้การบวกด้วยจำนวนทบเก้าของตัวลบ นอกจากนี้ ดูถัดไปในหลักหมื่น ตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบ จึงใส่ ′ เหนือ 1 ซึ่งเป็นตัวลบ แล้วทำการคิดคำนวณได้ผลลัพธ์ดังนี้

		ขอยืม	ขอยืม		
8	2	4	5	4	7
	–	1^{+}	4^{+}	–	1^{+}
5	1′	8	6	1	9
	0	5	9	2	8

ขั้นที่ 3 ในหลักแสนทำการลบธรรมดา เพราะในหลักหมื่นไม่มีการขอยืมจำนวนในหลักแสน จะได้ 8 – 5 = 3 ใส่ 3 ในช่องผลลัพธ์

	8	2	4	5	4	7
	–	, –	1^{+}	4^{+}	, –	1^{+}
	5	1	8	6	1	9
ทบเก้าคือ 1			↑	↑		↑ ทบสิบ คือ 1 และ 4
	3	0	5	9	2	8 ตามลำดับจาก

นั่นคือ 824547 – 518619 = 305928

■

ตัวอย่างที่ 1.3.6 จงหาค่าของ 1438 - 3165

แนวคิด กรณีนี้ตัวตั้งคือ 1438 น้อยกว่าตัวลบคือ 3165 จึงจะหาค่าของ 3165 – 1438 ได้ผลลัพธ์เป็นเท่าใด จะใส่เครื่องหมาย – หน้าผลลัพธ์ ก็จะได้ผลลบตามต้องการ

3	1	6	5 –
-	6^{+}	-	2^{+}
1′	4	3′	8
1	7	2	7

ดังนั้น 1438 – 3165 = –1727

■

บทสรุป ในการลบธรรมดาที่มีการขอยืม กับการลบโดยวิธีทบสิบ และใส่ ′ บนตัวลบในหลักถัดไปนั้นสอดคล้องกันดังจะอธิบายโดยตัวอย่าง การลบต่อไปนี้

การลบแบบขอยืม

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \underline{2} & \underline{8} \end{array} - \longrightarrow \begin{array}{cc} \overset{3}{\cancel{4}} & \overset{1}{3} \\ \underline{2} & \underline{8} \\ \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{5}} \end{array} -$$

อธิบายได้ดังนี้ 43 = 30 + 13

ดังนั้น 43 – 28 = (30 + 13) – 28

= (30 + 13) – (20 + 8)

= (30 – 20) + (13 – 8)

= 10 + 5

= 15

การลบแบบทบสิบและใส่ ′

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \underline{2} & \underline{8} \end{array} - \longrightarrow \begin{array}{cc} 4 & 3 \\ & 2^{+} \\ \underline{2'} & \underline{8} \\ \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{5}} \end{array} -$$

อธิบายได้ดังนี้ 28 = 30 – 2

–28 = – (30 – 2) = –30 + 2

ดังนั้น 43 – 28 = 43 – 30 + 2

= (40 + 3) – 30 + 2

= (40 – 30) + (3 + 2) ....(*)

= 10 + 5

= 15

ในบรรทัด (*) คือ

$$\begin{array}{ccl} \boxed{\begin{array}{c} 4 \\ ' \\ 2 \end{array}} & \begin{array}{c} 3 \\ 2^{+} - \\ 8 \end{array} & \longleftarrow \end{array}$$

จำนวนทบสิบของ 8 คือ 2นำไป บวกกับ 3 ได้ 5

คือ $40 - 20' = 40 - 30$

บทสรุป 1. ในกรณีที่การลบมีการขอยืม ถ้าใช้บวกด้วยจำนวนทบสิบและใส่ ′ เหนือตัวลบในหลักถัดไปจะสะดวกกว่าการลบแบบขอยืมธรรมดา

2. สำหรับผู้ที่ถนัดการลบแบบขอยืมอาจจะทำการลบโดยไม่ต้องใช้การบวกด้วยจำนวนทบสิบก็ได้ แต่แทนที่จะลดค่าตัวตั้งในหลักถัดไปลงหนึ่ง เปลี่ยนเป็นคงตัวตั้ง ในหลักถัดไปไว้ แล้วใส่ ′ เหนือตัวลบในหลักถัดไปจะสะดวกกว่า เช่น

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \underline{2} & \underline{8} \end{array} - \longrightarrow \begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \underline{2'} & \underline{8} \\ \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{5}} \end{array} -$$

เรื่องที่ 1.3.2 การลบที่ไม่ต้องคำนึงถึงการขอยืม

นอกจากการลบที่ต้องคำนึงถึงถึงการขอยืมแล้วอาจจะ ทำการลบที่ไม่ต้องคำนึงถึงการขอยืมก็ได้ มีหลักการคิดดังนี้

เมื่อนำตัวลบมาพิจารณา มีขั้นตอนการเปลี่ยนตัวลบดังนี้

ขั้นที่ 1 ตัวลบในหลักหน่วยเปลี่ยนเป็นจำนวนทบสิบของตัวลบในหลักหน่วยนั้น

ขั้นที่ 2 ตัวลบที่เหลือเปลี่ยนเป็นจำนวนทบเก้า ของตัวลบหลักนั้นๆ

ขั้นที่ 3 เมื่อหมดตัวลบแล้วเพิ่มตัวเลขถัดไปทางซ้ายอีกหนึ่งหลัก โดยใส่ $\bar{1}$ เป็นตัวบวก ($\bar{1}$ หมายถึง -1 ในหลักที่เพิ่มขึ้นใหม่นั้น)

เมื่อเปลี่ยนแปลงตัวลบเสร็จเรียบร้อยแล้วนำไปบวกกับตัวตั้งก็จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ สำหรับหลักซ้ายสุดนั้นการบวกด้วย $\bar{1}$ ก็คือ การลบด้วย 1 ในหลักซ้ายสุดนั่นเอง

การแปลงตัวลบโดยวิธีการนี้อธิบายได้ดังนี้

สมมติตัวลบ คือ 4 7 8 6 แปลงได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 7 & 8 & 6 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bar{1} & 5 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

$\bar{1}$ คือ –1 จำนวนทบเก้า จำนวนทบสิบในหลักหมื่น

จะเห็นว่า 4 7 8 6 แปลงเป็น $\bar{1}$ 5 2 1 4

พิจารณาตัวลบ 4 7 8 6 คือ

$$\begin{aligned} -4\ 7\ 8\ 6 &= -10000 + 5214 \\ &= (-1) \times 10^4 + 5214 \\ &= \bar{1}5214 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.3.7 จงหาผลลบของ

$$\begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ -\ \underline{4\ 7\ 2\ 3\ 8} \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด

$$\begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ -\ \underline{4\ 7\ 2\ 3\ 8} \\ \hline\hline \end{array} \quad \text{เปลี่ยนเป็น} \quad \begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ +\ \underline{\bar{1}\ 5\ 2\ 7\ 6\ 2} \\ \hline\hline \end{array}$$

ทำการบวกตามปกติโดย $\bar{1}$ หมายถึง –1 ในหลักแสน

$$\begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ +\ \underline{\bar{1}\ \dot{5}\ 2\ 7\ 6\ 2} \\ \underline{\underline{0\ 3\ 6\ 9\ 2\ 5}} \end{array}$$

หมายเหตุ • เหนือ 5 ในหลักหมื่น หนึ่ง • ก็คือการทด 1 ไปหลักแสนซึ่งหักล้างกับ $\bar{1}$ ในหลักแสนพอดี ผลลัพธ์ในหลักแสนจึงเป็น 0 จะได้ผลลัพธ์เป็น 3 6 9 2 5 นั่นคือ ได้การลบดังนี้

$$\begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ -\ \underline{4\ 7\ 2\ 3\ 8} \\ \underline{\underline{3\ 6\ 9\ 2\ 5}} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 1.3.8 จงหาผลลบของ

$$
\begin{array}{r}
8\ 6\ 7\ 3\ 5 \\
-\quad 4\ 8\ 2\ 1 \\
-\quad 1\ 4\ 7\ 8\ 6 \\
\hline
\hline
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{เปลี่ยนเป็น}} \quad
\begin{array}{r}
8\ 6\ 7\ 3\ 5 \\
+\quad \bar{1}\ 5\ 1\ 7\ 9 \\
+\quad \bar{1}\ 8\ 5\ 2\ 1\ 4 \\
\hline
\hline
\end{array}
$$

ทำการบวกปกติยกเว้น $\bar{1}$ คือ –1 ในหลักนั้น

$$
\begin{array}{r}
8\ 6\ 7\ 3\ 5 \\
+\quad \bar{1}\ \dot{5}\ 1\ \dot{7}\ \dot{9} \\
+\quad \bar{1}\ \dot{8}\ 5\ \dot{2}\ 1\ 4 \\
\hline
6\ 7\ 1\ 2\ 8 \\
\hline
\hline
\end{array}
$$

ผลลัพธ์ คือ 6 7 1 2 8

■

• ในหลักพันคือ การทด 1 ไปหลักหมื่นหักล้างกับ $\bar{1}$ ในหลักหมื่น นอกจากนี้ • ในหลักหมื่นคือการทด 1 ไปหลักแสน หักล้างกับ $\bar{1}$ ในหลักแสน

ในกรณีที่ผลลัพธ์มีค่าติดลบหลักซ้ายสุดของผลลัพธ์จะอยู่ในรูป $\bar{a}$ เมื่อ a เป็นเลขโดดที่มากกว่า 0 เช่น $\bar{1}, \bar{2}$ เป็นต้น ในการแปลงกลับเป็นจำนวนลบก็ทำได้โดยผลลัพธ์หลักหน่วยเปลี่ยนเป็นจำนวนทบสิบ หลักถัดมาทางซ้ายเปลี่ยนเป็นจำนวนทบเก้าเมื่อเปลี่ยนมาถึง $\bar{1}$ ให้เอา $\bar{1}$ ออกแล้วใส่เครื่องหมาย – แทน ซึ่งเครื่องหมาย – จะอยู่หน้าจำนวนทบเก้าและทบสิบที่เปลี่ยนมาก่อนแล้วผลที่ได้พร้อมเครื่องหมาย – ก็คือ จำนวนลบที่เป็นผลลัพธ์นั่นเอง

เช่น ผลลัพธ์คือ $\bar{1}$ 8 2 1 เปลี่ยนเป็นผลลัพธ์ที่ไม่มี $\bar{1}$ ดังนี้

$$
\begin{array}{cccc}
\bar{1} & 8 & 2 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
- & \underbrace{1 \quad 7}_{\text{ทบเก้า ทบสิบ}} & & 9
\end{array}
$$

(เพราะ $\bar{1}$ 8 2 1 คือ –1000 + 821 = –179)

ถ้าผลลัพธ์คือ $\bar{2}$ 8 3 7 ให้ทำคล้ายกับการแปลง $\bar{1}$ 8 2 1

แตกต่างเฉพาะ $\bar{2}$ เปลี่ยนเป็น –1 ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\bar{2}\ 8\ 3\ 7 &= -2000 + 837 \\
&= -1000 + (-1000 + 837) \\
&= -1000 + (-163) \\
&= -1163
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\bar{2} & 8 & 3 & 7 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
-1 & 1 & 6 & 3
\end{array}
$$

ทบเก้า ทบสิบ

และถ้าผลลัพธ์เป็น $\bar{3}\ 7\ 6\ 4$ ก็แปลงคล้ายตัวอย่าง ข้างต้นแต่ $\bar{2}$ เปลี่ยนเป็น –2

ตัวอย่างที่ 1.3.9 จงหาค่าของ

$$
\begin{array}{r}
3\ 1\ 4\ 5 \\
-\ \underline{3\ 8\ 1\ 9} \\
\hline\hline
\end{array}
$$

วิธีคิด

$$
\begin{array}{r}
3\ 1\ 4\ 5 \\
-\ \underline{3\ 8\ 1\ 9} \\
\hline\hline
\end{array}
\quad \text{เปลี่ยนเป็น} \quad
\begin{array}{r}
3\ 1\ 4\ 5 \\
+\ \underline{\bar{1}\ 6\ 1\ \dot{8}\ 1} \\
\bar{1}\ 9\ 3\ 2\ 6 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

พิจารณา $\bar{1}\ 9\ 3\ 2\ 6 = -0674 = -674$

ดังนั้นผลลัพธ์คือ -674

หมายเหตุ $\bar{1}\ 9\ 3\ 2\ 6 = -0\ 6\ 7\ 4$ แสดงดังแผนผังต่อไปนี้

$$
\begin{array}{ccccc}
\bar{1} & 9 & 3 & 2 & 6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
- & 0 & 6 & 7 & 4
\end{array}
$$

เปลี่ยน $\bar{1}$ เป็น $-\ 0\ 6\ 7\ 4$

ทบเก้า ทบสิบ

■

ตัวอย่างที่ 1.3.10 จงหาค่าของ

$$
\begin{array}{r}
896 \\
-\;943 \\
-\;927 \\
-\;681 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

แนวคิด

$$
\begin{array}{r}
896 \\
-\;943 \\
-\;927 \\
-\;681 \\
\hline\hline
\end{array}
\quad \text{เปลี่ยนเป็น} \quad
\begin{array}{r}
\dot{8}\;\dot{9}\;6 \\
+\;\bar{1}\;0\;5\;\dot{7} \\
+\;\bar{1}\;0\;\dot{7}\;3 \\
+\;\bar{1}\;3\;1\;\dot{9} \\
\hline
\bar{2}\;3\;4\;5 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

พิจารณาการแปลง $\bar{2}\;3\;4\;5$

จะได้

$$
\begin{array}{cccc}
\bar{2} & 3 & 4 & 5 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
-1 & 6 & 5 & 5
\end{array}
$$

ดังนั้นผลลัพธ์คือ -1655

■

ตัวอย่างที่ 1.3.11 จงหาค่าของ

$$
\begin{array}{r}
81413 \\
+\;21312 \\
-\;92146 \\
-\;23432 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

แนวคิด จากโจทย์เปลี่ยนรูปเป็น

$$
\begin{array}{r}
8\;1\;4\;1\;3 \\
+\;\dot{2}\;1\;3\;1\;2 \\
+\;\bar{1}\;0\;\dot{7}\;\dot{8}\;5\;4 \\
+\;\bar{1}\;7\;6\;\dot{5}\;\dot{6}\;\dot{8} \\
\hline
\bar{1}\;8\;7\;1\;4\;7 \\
\hline\hline
\end{array}
= -12853
$$

เรื่องที่ 1.3.3 การหาผลลบแบบรวบยอด

พื้นฐานการหาผลลบแบบรวบยอดนั้น เป็นพื้นฐานของสมการดังนี้ คือ สำหรับจำนวนเต็มบวก a, b และ c ใดๆ จะพบว่า $a - b = c$ ก็ต่อเมื่อ $a = b + c$ เช่น $8 - 5 = 3$ ก็ต่อเมื่อ $8 = 5 + 3$
ถ้าไม่ทราบค่า c อาจเขียน □ แทน c ดังนี้

$a - b = \square$ ก็ต่อเมื่อ $a = b + \square$

จากรูปสมการลักษณะนี้ จึงควรฝึกการหาค่าจำนวนที่แทน □ เสียก่อน นอกจากนี้อาจมีกรณีที่ผลบวกจำนวนทางซ้ายและขวาของสมการไม่เท่ากัน ก็จะทำให้กลายเป็นอสมการ ถึงแม้ว่ามีตัวเลขในหลักหน่วยของผลบวกเท่ากันก็ตาม จึงควรฝึกหาจำนวนที่แทน □ ในอสมการ หรือสมการก่อนดังนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.12 จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดหรือ 0 ที่เติมลงในกรอบ □ แล้วทำให้ผลบวกทางซ้ายและผลบวกขวามีค่าหลักหน่วยเท่ากัน และเขียน < , > หรือ = ถ้าผลบวกของจำนวนทางซ้ายน้อยกว่า, มากกว่า หรือเท่ากับ ผลบวกของจำนวนทางขวา ตามลำดับ ลงในช่องว่าง ทางด้านขวา ซึ่งตรงหัวตารางเขียน < , > , = ไว้ และเขียน • แสดงการมากกว่าอยู่เท่าไร ทางด้านที่มากกว่า (• มากกว่าอยู่ 10, •• มากกว่าอยู่ 20)

ซ้าย	**ขวา**	**< , > , =**
$1 + 2 + 3$	$3 + 4 + \boxed{9}$	<•
$3 + 4 + \boxed{8}$	$5 + 9 + 1$	=
$9 + 6 + 3 + 9$	$3 + 1 + \boxed{3}$	••>
$3 + \boxed{7} + 8$	$4 + 5 + 9$	=
$8 + 8 + 9 + 9$	$\boxed{3} + 8 + 4 + 9$	•>
$3 + 7 + 1$	$9 + 9 + \boxed{8} + 5$	<••
$3 + 4 + 5 + \boxed{6}$	$1 + 3 + 6 + 8$	=
$3 + 7 + 8 + 2$	$9 + 9 + 2 + \boxed{0}$	=

■

ตัวอย่างที่ 1.3.13 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ \underline{3} & \underline{2} \\ \hline\hline \end{array}\; -$$

แนวคิด

$$\begin{array}{lcc} a: & 4 & 6 \\ \underline{b:} & \underline{3} & \underline{2} \\ \underline{\underline{c:}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{4}} \end{array}\; -$$

ให้ $a = 46$

$b = 32$

$c = a - b$

จะได้ $a = b + c$

เนื่องจาก $46 = 32 + 14$

ดังนั้น $c = 14$

■

ตัวอย่างที่ 1.3.14 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 8 \\ \underline{2} & \underline{4} & \underline{7} \\ \hline\hline \end{array}\; -$$

แนวคิด

$$\begin{array}{lccc} a: & 3 & 1 & 8 \\ \underline{b:} & \underline{2} & \underline{4} & \underline{7} \\ \underline{\underline{C:}} & & \underline{\underline{\overset{\bullet}{7}}} & \underline{\underline{1}} \end{array}\; -$$

ให้ $a = 318$

$b = 247$

$c = a - b$

จะได้ $a = b + c$

หลักหน่วยของ a คือ 8 หลักหน่วยของ b คือ 7 จะได้หลักหน่วยของ c คือ 1 หลักสิบของ a คือ 1 หลักสิบของ b คือ 4 ต้องหาหลักสิบของ c ที่ทำให้ผลบวกของตัวเลขในหลักสิบของ b + c ลงท้าย ด้วย 1 ซึ่ง 1 เป็นตัวเลขในหลักสิบของ a จะเห็นได้ว่าหลักสิบของ c ต้องเป็น 7 แต่ 4 + 7 = 11 ซึ่งมากกว่า 1 อยู่ 10 จึงมีการทดผลบวกในหลักสิบของ b + c ไปยังหลักร้อย ในที่นี้จะเขียน ● เหนือ 7

หลักร้อยของ a คือ 3 หลักร้อยของ b คือ 2 จากผลบวกหลักสิบของ b + c มีการทด 1 ไปหลักร้อย จะได้ 2 + 1 = 3 ซึ่งเป็นตัวเลขในหลักร้อย ของ a พอดี จึงไม่ต้องเขียนตัวเลขในหลักร้อยของ c จึงได้ c เท่ากับ 71 เป็นคำตอบ

■

ตัวอย่างที่ 1.3.15 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cccc} 4 & 8 & 1 & 5 \\ \underline{2} & \underline{9} & \underline{3} & \underline{1} \\ \hline\hline \end{array} -$$

แนวคิด

$$\begin{array}{lcccc} a: & 4 & 8 & 1 & 5 \\ b: & 2 & 9 & 3 & 1 \\ \hline c: & 1 & \dot{8} & \dot{8} & 4 \\ \hline\hline \end{array} -$$

■

ในกรณีที่ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า a < b จะได้ a – b เป็นจำนวนเต็มลบอาจเขียนแทนผลลบของ a – b ด้วย – c นั่นคือ a – b = – c จะพบว่า a + c = b จึงกล่าวได้ว่า a – b = – c ก็ต่อเมื่อ a + c = b

ดังนั้นการหาค่า – c ทำได้โดยหาค่า c ที่นำมาบวกกับ a แล้วได้ผลบวกเท่ากับ b หลังจากนั้นใส่เครื่องหมาย – หน้า c ก็จะได้ – c เป็นคำตอบ

ตัวอย่างที่ 1.3.16 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cccc} 2 & 9 & 3 & 1 \\ \underline{4} & \underline{8} & \underline{1} & \underline{5} \\ \hline\hline \end{array} -$$

แนวคิด

$$\left(\begin{array}{lcccc} a: & 2 & 9 & 3 & 1 \\ b: & 4 & 8 & 1 & 5 \\ \hline c: & 1 & \dot{8} & \dot{8} & 4 \\ \hline\hline \end{array}\right. -$$

คำตอบ คือ –1884

■

เรื่องที่ 1.3.4 การหาผลบวก – ลบคละกันแบบรวบยอด

สำหรับจำนวนเต็มบวก a, b, c และ d จะพบว่า

a + b – c = d ก็ต่อเมื่อ a + b = c + d

$a - b + c = d$ ก็ต่อเมื่อ $a + c = b + d$

เนื่องจาก d เป็นผลลัพธ์ของการบวก – ลบ คละกัน และ d เป็นจำนวนบวก จึงนำ d ไปบวกรวมกับตัวลบทั้งหมด แยกไว้พวกหนึ่ง แล้วทำการหาค่า d ซึ่งเป็นผลลัพธ์ตามต้องการในทางปฏิบัติ จะหาผลบวกของ ตัวตั้งและตัวบวกก่อน แล้วจึงหาค่า d ที่ทำให้ผลบวกของ d กับตัวลบทั้งหมดมีค่าเท่ากับค่าของผลบวกของพวกแรก ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.17 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cccl} 4 & 8 & 7 & \\ & & & + \\ 5 & 2 & 1 & \\ & & & - \\ \underline{7} & \underline{9} & \underline{9} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$\begin{array}{lcccl} a: & 4 & 8 & 7 & \\ & & & & + \\ b: & 5 & 2 & 1 & \\ & & & & - \\ c: & 7 & 9 & 9 & \\ \hline d: & 2 & 0 & \dot{9} & \\ \hline\hline \end{array}$$

หาค่า d ที่ทำให้ $c + d = a + b$ เนื่องจากผลบวกหลักหน่วย ของ $a + b = 8$ จึงต้องทำให้ผลบวกหลักหน่วยของ $c + d$ ลงท้ายด้วย 8 บังคับ ให้หลักหน่วยของ d เป็น 9 แต่หลักหน่วยของ c ก็คือ 9 ซึ่ง $9 + 9$ มากกว่า $7 + 1$ อยู่ 10 จึงเขียนจุดบน 9 ที่หลักหน่วยของ d จุดนั้นจะทดไปในหลักสิบของ $c + d$

พิจารณาหลักสิบของ $a + b$ จะได้ $8 + 2 = 10$ จึงต้องทำให้หลักสิบของ $c + d$ เท่ากับ 10 แต่หลักสิบของ c คือ 9 และมีการทดของ $c + d$ จากหลักหน่วยมา 1 จุด ได้ $9 + 1 = 10$ ดังนั้น หลักสิบของ d จึงเป็น 0

พิจารณาหลักร้อยของ $a + b$ จะได้ $4 + 5 = 9$ เนื่องจากหลักร้อยของ c คือ 7 จึงทำให้หลักร้อยของ d เป็น 2 จะทำให้ $4 + 5 = 7 + 2$

คำตอบจึงเป็น 209 ■

ตัวอย่างที่ 1.3.18 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{ccccl} 3 & 8 & 5 & 9 & \\ & & & & - \\ 2 & 9 & 8 & 7 & \\ & & & & + \\ \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{5} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$
\begin{array}{lcccccl}
a & : & 3 & 8 & 5 & 9 & - \\
b & : & 2 & 9 & 8 & 7 & + \\
c & : & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{5} & \\
d & : & \underline{\underline{2}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{7}} &
\end{array}
$$

จากโจทย์นี้ต้องหาค่า d ที่ทำให้ $a + c = b + d$

หมายเหตุ หลักหน่วยของ d ไม่ต้องเติมจุดเพราะผลบวกหลักหน่วยของ $a + c$ คือ $9 + 5 = 14$ และผลบวกหลักหน่วยของ $b + d$ คือ $7 + 7 = 14$ ซึ่ง $9 + 5 = 7 + 7$ จึงไม่มีการทดค่าที่ต่างกันไปหลักสิบ

■

ตัวอย่างที่ 1.3.19 จงหาค่าของ

$$
\begin{array}{cccccl}
9 & 8 & 5 & 7 & 5 & + \\
7 & 9 & 7 & 4 & 2 & - \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & - \\
\underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$
\begin{array}{lccccccl}
a & : & & 9 & 8 & 5 & 7 & 5 \quad + \\
b & : & & \dot{7} & 9 & 7 & 4 & 2 \quad - \\
c & : & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \quad - \\
d & : & & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} \\
e & : & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{9}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{\dot{8}}} & \underline{\underline{\dot{3}}}
\end{array}
$$

ในการคำนวณค่า ตั้งแต่หลักหน่วยถึงหลักพัน คล้ายกับตัวอย่างที่ 1.3.18 กล่าวคือ ถ้ามีการใส่จุดจะใส่จุดที่ชุดที่ผลบวกที่มากกว่า กรณีหลักหมื่นพบว่าหลักหมื่นของ $a + b = 16$ ขณะที่หลักหมื่นของ $c + d + e$ คือ $1 + 5 + 0 = 6$ จะเห็นว่า $9 + 7$ มากกว่า $1 + 5 + 0$ อยู่ 10 จึงเขียนจุดที่ 7 ซึ่งเป็นตัวบวกของ $9 + 7$ แล้วจึงทดจุดลงมาเป็น 1 ในหลักแสนของผลลัพธ์

■

ในกรณีที่ การบวก – ลบ คละกัน มีผลลัพธ์เป็นจำนวนลบ จะต้องแยกตัวลบทั้งหมดมารวมเป็นพวกเดียวกัน และนำตัวตั้ง ตัวบวกและค่าสัมบูรณ์ของผลลัพธ์ มาบวกกันให้มีค่าเท่ากับผลรวมของตัวเลข (ไม่คิดเครื่องหมายหน้าผลลัพธ์) ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.20 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cccc l}
3 & 8 & 4 & 7 & - \\
6 & 7 & 5 & 3 & + \\
\underline{1} & \underline{3} & \underline{5} & \underline{9} & \\
\hline\hline
\end{array}$$

แนวคิดกรณีนี้ ผลลัพธ์เป็นจำนวนลบ ถ้าให้ $a = 3847$, $b = 6753$, $c = 1359$ และ d เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง

$a - b + c = -d$ จะได้ $a + c + d = b$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$\begin{array}{l cccc l}
a: & 3 & 8 & 4 & 7 & - \\
b: & 6 & 7 & 5 & 3 & + \\
c: & 1 & 3 & 5 & 9 & \\
\hline
d: & & & & & \\
\hline\hline
\end{array}$$

ในการคำนวณค่า $a - b + c$ พบว่า $a - b + c < 0$ ดังนั้นคำตอบเป็นจำนวนเต็มลบให้เป็น $-d$ จึงนำ d ไปรวมกับ a และ c ไว้เป็นพวกหนึ่ง แยก b ไว้อีกพวกหนึ่งคำนวณค่า d ที่ทำให้ $a + c + d = b$ ดังนั้น

$$\begin{array}{l cccc l}
a: & 3 & 8 & 4 & 7 & - \\
b: & 6 & 7 & 5 & 3 & + \\
c: & 1 & 3 & 5 & 9 & \\
\hline
d: & 1 & \dot{5} & \dot{4} & \ddot{7} & \\
\hline\hline
\end{array}$$

คำตอบ คือ $-d = -1\,5\,4\,7$

■

ตัวอย่างที่ 1.3.21 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cccc l}
3 & 2 & 5 & 1 & - \\
4 & 8 & 2 & 9 & + \\
5 & 6 & 7 & 8 & - \\
7 & 8 & 9 & 0 & \\
\hline
 & & & & \\
\hline\hline
\end{array}$$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$
\begin{array}{l cccc l}
a: & 3 & 2 & 5 & 1 & \\
 & & & & & - \\
b: & 4 & 8 & 2 & 9 & \\
 & & & & & + \\
c: & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
 & & & & & - \\
d: & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{0} & \\
e: & 3 & 7 & \dot{9} & 0 & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

คำตอบคือ $-e = -3\ 7\ 9\ 0$

■

สนุกกับตัวเลข (2)	
ห้าตัวเหมือน	**หกตัวเหมือน**
$271 \times 41 = 11111$	$3367 \times 33 = 111111$
$271 \times 82 = 22222$	$3367 \times 66 = 222222$
$271 \times 123 = 33333$	$3367 \times 99 = 333333$
$271 \times 164 = 44444$	$3367 \times 132 = 444444$
$271 \times 205 = 55555$	$3367 \times 165 = 555555$
$271 \times 246 = 66666$	$3367 \times 198 = 666666$
$271 \times 287 = 77777$	$3367 \times 231 = 777777$
$271 \times 328 = 88888$	$3367 \times 264 = 888888$
$271 \times 369 = 99999$	$3367 \times 297 = 999999$

เรื่องที่ 1.3.5 การลบที่ผลลบเป็นจำนวนเครื่องหมายคละ

ในการลบอาจจะเขียน – (ขีดบน) เหนือตัวเลขในหลักที่เป็นจำนวนลบก็ได้ ซึ่งผลลบที่จะได้เป็นจำนวนเครื่องหมายคละ หลังจากนั้นแปลงเป็นจำนวนในระบบฐานสิบก็จะได้คำตอบตามต้องการดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.22 จงหาค่าของ 4328316 – 2876439

แนวคิด ขั้นที่ 1 เขียนการลบเป็นสองแถวโดยให้แถวแรกเป็นตัวตั้ง และแถวที่ 2 เป็นตัวลบ และสำรวจดูว่าแต่ละหลักที่ลบกันถ้าตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ก็ทำการลบกันแบบธรรมดา ถ้าตัวลบมากกว่าตัวตั้ง ใส่ค่าที่ตัวลบมากกว่าในช่องผลลัพธ์แล้วเขียนขีดบน – ดังนี้

$$
\begin{array}{ccccccc}
4 & 3 & 2 & 8 & 3 & 1 & 6 \\
\underline{2} & \underline{8} & \underline{7} & \underline{6} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{9} \\
2 & \overline{5} & \overline{5} & 2 & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3}
\end{array} -
$$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขในนิขิลัมสูตรให้เป็นตัวเลขระบบฐานสิบ จะได้

$$
\begin{array}{ccccccc}
2 & \overline{5} & \overline{5} & 2 & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 7
\end{array}
$$

ซึ่ง 1 4 5 1 8 7 7 เป็นผลลัพธ์

นั่นคือ 4328316 – 2876439 = 1451877

■

ตัวอย่างที่ 1.3.23 จงหาค่าของ 673425 – 387619

แนวคิด

$$
\begin{array}{cccccc}
6 & 7 & 3 & 4 & 2 & 5 \\
\underline{3} & \underline{8} & \underline{7} & \underline{6} & \underline{1} & \underline{9} \\
3 & \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} & 1 & \overline{4} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{2} & \underline{8} & \underline{5} & \underline{8} & \underline{0} & \underline{6}
\end{array} -
$$

ดังนั้น 673425 – 387619 = 285806

■

ตัวอย่างที่ 1.3.24 จงหาค่าของ 341659 – 459283

แนวคิด

วิธีที่ 1

$$
\begin{array}{cccccc}
3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 9 \quad - \\
\underline{4} & \underline{5} & \underline{9} & \underline{2} & \underline{8} & \underline{3} \\
\bar{1} & \bar{1} & \bar{8} & 4 & \bar{3} & 6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\bar{1} & \bar{1} & \bar{7} & \bar{6} & \bar{2} & \bar{4} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
-\underline{1} & \underline{1} & \underline{7} & \underline{6} & \underline{2} & \underline{4}
\end{array}
$$

ดังนั้น 341659 – 45983 = – 117624

วิธีที่ 2

$$
\begin{array}{cccccc}
3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 9 \quad - \\
\underline{4} & \underline{5} & \underline{9} & \underline{2} & \underline{8} & \underline{3} \\
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{8} \quad 4 \quad \bar{3} \quad 6}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
-(1 & 1 & 8 & \bar{4} & 3 & \bar{6}) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
-\underline{1} & \underline{1} & \underline{7} & \underline{6} & \underline{2} & \underline{4}
\end{array}
$$

ดังนั้น 341609 – 45983 = –117624

■

ทศนิยม ทศนิยมในเวทคณิตกับทศนิยมในระบบตัวเลขฐานสิบคล้ายกัน กล่าวคือ ตัวเลขหลังจุดทศนิยมมีจำนวนเท่ากัน และตำแหน่งของจุดทศนิยมอยู่ที่เดียวกัน เมื่อเปลี่ยนจำนวนที่มีจุดทศนิยมจากระบบตัวเลขฐาน 10 เป็นตัวเลขในเวทคณิต

ตัวอย่างที่ 1.3.25 จงแปลง 120 . 981 เป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตร

แนวคิด

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 0 & \bullet & 9 & 8 & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 2 & 1 & \bullet & \bar{0} & \bar{2} & 1
\end{array}
$$

ดังนั้น 120 • 981 = 1 2 1 • $\bar{0}$ $\bar{2}$ 1

■

ตัวอย่างที่ 1.3.26 จงแปลง $1 \bullet 7\ \bar{3}\ 2\ \bar{8}$ เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ

แนวคิด

$$\begin{array}{ccccc} 1 \bullet & 7 & \bar{3} & 2 & \bar{8} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 \bullet & 6 & 7 & 1 & 2 \end{array}$$

ดังนั้น $1 \bullet 7\ \bar{3}\ 2\ \bar{8} = 1 \bullet 6712$

■

ตัวอย่างที่ 1.3.27 จงแปลง $\bar{3} \bullet 2\ \bar{1}\ 4\ \bar{6}$ เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ

แนวคิด $\bar{3} \bullet 2\ \bar{1}\ 4\ \bar{6} = -(-(\bar{3} \bullet 2\ \bar{1}\ 4\ \bar{6}))$

$$\begin{array}{rccccc} = -(& 3 \bullet & \bar{2} & 1 & \bar{4} & 6) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ = & -2 \bullet & 8 & 0 & 6 & 6 \end{array}$$

ดังนั้น $\bar{3} \bullet 2\ \bar{1}\ 4\ \bar{6} = -2 \bullet 8\ 0\ 6\ 6$

■

ตัวอย่างที่ 1.3.28 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{ccccc|c} 4 & 8 & 3 & 1 & 0 & - \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 1 & + \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 8 & - \\ \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด คิดบวก – ลบ คละกันในแต่ละหลักผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น จำนวนเครื่องหมายคละ แล้วแปลงเป็นจำนวนในระบบฐานสิบดังนี้

$$\begin{array}{ccccc|c} 4 & 8 & 3 & 1 & 0 & - \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 1 & + \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 8 & - \\ \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \\ 5 & 1 & \bar{3} & \bar{5} & 2 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \underline{5} & \underline{0} & \underline{6} & \underline{5} & \underline{2} & \end{array}$$

ดังนั้น ผลลบ คือ 5 0 6 5 2

■

ตัวอย่างที่ 1.3.29 จงหาค่าของ

$$
\begin{array}{ccccc l}
3 & 7 & 4 & 6 & 1 & - \\
8 & 8 & 3 & 9 & 9 & - \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & + \\
\underline{5} & \underline{1} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{6} & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

แนวคิด

$$
\begin{array}{ccccc l}
3 & 7 & 4 & 6 & 1 & - \\
8 & 8 & 3 & 9 & 9 & - \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & + \\
\underline{5} & \underline{1} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{6} & \\
\bar{1} & \bar{2} & 1 & \bar{3} & \bar{7} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\bar{1} & \bar{1} & \bar{9} & \bar{3} & \bar{7} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
-\underline{1} & \underline{1} & \underline{9} & \underline{3} & \underline{7} &
\end{array}
$$

ดังนั้น ผลลบคือ –1 1 9 3 7

■

แบบฝึกหัดที่ 1.3

1. จงหาผลลบต่อไปนี้

(1) 100 – 36 = ______________ (2) 100 – 47 = ______________

(3) 100 – 89 = ______________ (4) 1000 – 327 = ____________

(5) 1000 – 638 = ____________ (6) 1000 – 95 = _____________

(7) 10000 – 6759 = __________ (8) 10000 – 328 = ___________

(9) 10000 – 2149 = __________ (10) 100000 – 12345 = _______

(11) 100000 – 39393 = _______ (12) 100000 – 567 = _________

2. จงหาผลลบต่อไปนี้ โดยใช้เฉพาะจำนวนทบเก้า ทบสิบ ′ และการบวก

(1)
$$\begin{array}{r} 36 \\ 28 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

(2)
$$\begin{array}{r} 324 \\ 118 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

(3)
$$\begin{array}{r} 437 \\ 269 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

(4)
$$\begin{array}{r} 506 \\ 107 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

(5)
$$\begin{array}{r} 728 \\ 89 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

(6)
$$\begin{array}{r} 8742 \\ 3796 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

(7)
$$\begin{array}{r} 49062 \\ 8648 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

(8)
$$\begin{array}{r} 87211 \\ 3088 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

(9)
$$\begin{array}{r} 98358 \\ 79467 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

(10)
$$\begin{array}{r} 864237 \\ 270038 \\ \hline \\ \hline \hline \end{array} -$$

3. จงหาค่าต่อไปนี้ โดยวิธีที่แตกต่างกัน 3 วิธี

(1) 4 7 9
-
2 9 8
+
3 4 5

(2) 6 6 6
+
1 2 3
-
5 4 8

(3) 9 9 9
-
6 7 4
-
1 8 8

(4) 4 5 1 8
+
1 2 3 8
-
9 4 2
+
3 1 2 6

(5) 3 2 1
-
4 7 2 9
+
6 5 8 7
-
1 2 3 4

(6) 1 4 8 7
-
2 3 6 7
-
8 2 6 9
-
7 2 8 4

(7) 4 1 4
-
5 8 2
+
6 7 9
-
6 1 6

(8) 7 6 8
-
1 7 9
-
5 4 6
+
5 2 8

(9) 4 4 8
+
6 2 3
-
8 1 2
-
1 7 4

(10) 2 7 4
+
5 8 5
-
4 1 6
-
7 3 1

(11)
$$\begin{array}{ccccc|c} 4 & 7 & 1 & 8 & 4 & \\ & & & & & - \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 5 & \\ & & & & & - \\ 7 & 8 & 6 & 2 & 9 & \\ & & & & & - \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 4 & \\ & & & & & + \\ \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{1} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(12)
$$\begin{array}{ccccc|c} 5 & 9 & 4 & 8 & 9 & \\ & & & & & - \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & \\ & & & & & - \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & \\ & & & & & + \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ & & & & & - \\ \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{5} & \\ \hline\hline \end{array}$$

4. จงหาค่าของ $31456 - 47474 + 38641 - 27264 + 38886 =$ ______________

หน่วยที่ 2
ทักษะการคำนวณ 2 (การคูณ)

ตอนที่ 2.1 การคูณโดยใช้ค่าเบี่ยงฐาน
ตอนที่ 2.2 การคูณโดยการจัดตำแหน่งผลคูณ
ตอนที่ 2.3 การคูณโดยใช้ตาราง
ตอนที่ 2.4 การคูณแนวตั้ง และการคูณไขว้

แนวคิด
1. ฐานในระบบทศนิยม หมายถึง จำนวนในรูป 10^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และเรียกจำนวนเหล่านั้นว่าฐาน 10^n
2. จำนวนที่อยู่ใกล้ 10^n ระยะห่างระหว่างจำนวนกับฐาน 10^n ที่คิดทิศทาง เรียกว่า ค่าเบี่ยงฐานของจำนวนนั้น
3. ในการหาผลคูณของจำนวนที่อยู่ใกล้ฐานเดียวกัน เมื่อทำการคูณโดยใช้ค่าเบี่ยงฐานจะสะดวกกว่า
4. วิธีการคูณจำนวนมีได้หลากหลายวิธีทั้งการคูณโดยการจัดตำแหน่งผลคูณ การคูณโดยใช้ตาราง หรือการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้ ซึ่งแต่ละวิธีจะมีกระบวนการที่แตกต่างกัน

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 2 จบแล้วนักเรียนสามารถ
1. มีกระบวนการคูณได้หลากหลายวิธี
2. ออกแบบการคูณจำนวนตามแนวคิดสร้างสรรค์ของตนเอง

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายเนื้อหา กระบวนการวิธีคิดคำนวณการคูณโดยใช้ค่าเบี่ยงฐานการคูณโดยการจัดตำแหน่งผลคูณ การคูณโดยใช้ตารางการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้
2. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่างและแบบฝึกหัด
3. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 2.1 การคูณโดยใช้ค่าเบี่ยงฐาน

เรื่องที่ 2.1.1 ค่าเบี่ยงฐาน

ตัวเลขในเวทคณิต เช่นเดียวกับตัวเลขระบบฐานสิบ กล่าวคืออิงฐานของระบบฐานสิบ และขณะเดียวกันจะระบุค่าเบี่ยงฐานควบคู่ไปด้วยในกรณีต้องการคูณหรือหาร โดยตัวเลขในเวทคณิตจะยึดฐาน 10, 100, 1000, ..., 10^n และระบุค่าเบี่ยงฐานของจำนวนเหล่านั้น ซึ่งค่าเบี่ยงฐานมีทั้งค่าบวก ค่าลบและศูนย์ จะอธิบาย ค่าเบี่ยงฐานโดยใช้ตัวอย่างประกอบดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.1.1 103 มีค่ามากกว่า 100 อยู่ 3 กล่าวว่า 103 มีค่าเบี่ยงฐาน จาก 100 เป็น + 03

94 มีค่าน้อยกว่า 100 อยู่ 6 กล่าวว่า 94 มีค่าเบี่ยงฐาน จาก 100 เป็น – 06

28 มีค่ามากกว่า 10 อยู่ 18 กล่าวว่า 28 มีค่าเบี่ยงฐาน จาก 10 เป็น + 18

22 มีค่าน้อยกว่า 100 อยู่ 78 กล่าวว่า 22 มีค่าเบี่ยงฐาน จาก 100 เป็น –78

■

ในการเขียนตัวเลขพร้อมระบบฐานในเวทคณิตนั้น จำนวนตัวเลขโดดของค่าเบี่ยงฐานจะต้องเท่ากับจำนวน 0 ที่ปรากฏในฐานนั้น ๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.1.2

103 เขียนในระบบฐาน 100 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น 103 + 03

94 เขียนในระบบฐาน 100 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น 94 – 06

115 เขียนในระบบฐาน 100 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น 115 + 15

1012เขียนในระบบฐาน1000 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น1012 + 012

971 เขียนในระบบฐาน 1000 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น 971 – 029

■

หมายเหตุ ในการกำหนดฐานเพื่อหาค่าเบี่ยงฐานสำหรับจำนวนใด ๆ นั้นจะไม่เลือกฐานที่ทำให้ขนาดของค่าเบี่ยงฐานมีจำนวนมากเกินไป เช่น 12 จะเลือกฐานเป็น 10 มีค่าเบี่ยงฐานเป็น +2 จะไม่เลือกฐาน 100 เพราะมีค่าเบี่ยงฐานเป็น –88 ซึ่งมีขนาดเป็น 88 ซึ่งมากเกินไป นอกจากนี้สำหรับบางจำนวนเช่น 41 ถ้าเลือกฐาน 10 จะได้ค่าเบี่ยงฐานเป็น +31 ในขณะที่เลือกฐาน 100 จะได้ค่าเบี่ยงฐานเป็น –59 ซึ่งทั้ง +31 และ -59 มีขนาดเป็น 31 และ 59 ซึ่งมากเกินไป ในทางปฏิบัติอาจจะเลือกฐานย่อยสำหรับช่วยในการคำนวณ ซึ่งฐานย่อยได้แก่พหุคูณของฐาน 10, 100, 1000, ...เช่น 20, 30, ..., 200, 300,... สำหรับฐานย่อยจะกล่าวถึงในบทที่ 6

แบบฝึกหัดที่ 2.1.1

1. จงระบุฐานของจำนวนต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอกค่าเบี่ยงฐาน
   (1.1) 102 (1.2) 12 (1.3) 97 (1.4) 19 (1.5) 112
   (1.6) 975 (1.7) 10008 (1.8) 89 (1.9) 75 (1.10) 29

2. จงตรวจสอบว่าการระบุฐานและการเขียนจำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐานของจำนวนต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่ สำหรับการระบุที่ไม่ถูกต้องจงแก้ไข

จำนวน	ฐาน	จำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐาน	แก้ไข
111	100	111 + 11	
6	10	6 – 4	
97	100	100 – 3	
107	100	100 + 3	
992	1000	992 + 8	
9972	1000	1000 – 22	
10025	10000	10025 – 25	

3. จากฐานและค่าเบี่ยงฐานที่กำหนดมาให้ จงหาจำนวนเหล่านั้นและ เขียนจำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐาน

	ฐาน	ค่าเบี่ยงฐาน	จำนวน	จำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐาน
(3.1)	10	+ 3	13	13 + 3
(3.2)	100	– 03		
(3.3)	100	– 07		
(3.4)	1000	+ 014		
(3.5)	1000	– 019		
(3.6)	10000	– 0031		
(3.7)	1000	+ 374		

สนุกกับตัวเลข (3)

<u>ผลคูณที่ได้ตัวเลขเรียงจากน้อยไปมาก</u>

1×1	=	1
$2^2 \times 3$	=	12
3×41	=	123
2×617	=	1234
$3 \times 5 \times 823$	=	12345
$2^6 \times 3 \times 643$	=	123456
127×9721	=	1234567
$2 \times 3^2 \times 47 \times 14953$	=	12345678
$3^2 \times 13717421$	=	123456789
$2 \times 3^2 \times 5 \times 13717421$	=	1234567890

เรื่องที่ 2.1.2 การคูณโดยใช้ค่าเบี่ยงฐาน

วิธีการคูณทั่ว ๆ ไปนั้นใช้ได้กับทุกกรณีของการคูณซึ่งไม่ยุ่งยากซับซ้อนจนเกินไป อย่างไรก็ตาม วิธีเฉพาะในเวทคณิตนั้นสะดวกและง่ายกว่า กล่าวคือ จะใช้การคูณเฉพาะหลักทางด้านขวาของสองจำนวนที่คูณกัน ส่วนหลักทางซ้ายถัดมาจะใช้วิธีการบวก นอกจากนี้การคูณหลักทางขวานั้นจะอิงนิขิลัมสูตร วิธีการคูณจะจำแนกตามชนิดดังตัวอย่างต่อไปนี้

ชนิดที่ 1 ผลคูณค่าเบี่ยงฐานมีจำนวนเลขโดดไม่เกินจำนวนตัวเลข 0 ของฐาน

ตัวอย่างที่ 2.1.3 จงหาผลคูณของ 13×11

แนวคิด ขั้นที่ 1 เขียน 13 และ 11 แบบจำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐาน 10 และตั้งคูณ

$$\begin{array}{l} 13 + 3 \\ \underline{11 + 1} \end{array} \times$$

หมายเหตุ สำหรับฐาน 10 มี 0 เพียงตัวเดียว ดังนั้นค่าเบี่ยงฐานจึงเขียนเลขโดดตัวเดียว

ขั้นที่ 2 แบ่งผลคูณที่จะได้ออกเป็นสองส่วน โดยใช้ / เป็นตัวแบ่ง ซึ่งจะแยกผลคูณจากค่าเบี่ยงฐานไว้ต่างหากดังนี้

13 + 3

11 + 1

/

ขั้นที่ 3 หาผลคูณของค่าเบี่ยงฐานแล้วใส่ผลลัพธ์ไว้ทางขวาของ / ที่จะได้เป็น 3 เพราะ $3 \times 1 = 3$

13 + 3 ×

11 + 1

/ 3

ขั้นที่ 4 ทางด้านซ้ายของ / หาผลลัพธ์โดยหาผลบวกของตัวตั้งกับค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณ จะได้ 13 + 1 = 14 (หรือหาผลบวกของตัวคูณกับค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้ง จะได้ 11 + 3 = 14 ซึ่งจะเท่ากับ 13 + 1)

การหาผลบวกแบบนี้เรียกว่า **การหาผลบวกทแยง** เพราะ 13 + 1 หรือ 11 + 3 เป็นการบวกแนวทแยง

นั่นคือ 13 + 3 ×

11 + 1

14 / 3

ขั้นที่ 5 เอาขีด / ออกจะได้ 143 เป็นผลลัพธ์

นั่นคือ $13 \times 11 = 143$

■

ตัวอย่างที่ 2.1.4 ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์จากวิธีคิดตามตัวอย่างที่ 5.1

	14 + 4 ×	11 + 1 ×	19 + 9 ×
	12 + 2	15 + 5	11 + 1
	16 / 8	16 / 5	20 / 9
จะได้	$14 \times 12 = 168$,	$11 \times 15 = 165$,	$19 \times 11 = 209$ ■
	17 + 7 ×	12 + 2 ×	13 + 3 ×
	11 + 1	13 + 3	13 + 3
	18 / 7	15 / 6	16 / 9
จะได้	$17 \times 11 = 187$,	$12 \times 13 = 156$ และ	$13 \times 13 = 169$ ■

ต่อไปจะกล่าวถึงกรณีที่ผลคูณค่าเบี่ยงฐานเป็นเลขสองหลัก

ตัวอย่างต่อไปจะเป็นการคูณตัวเลขที่ฐานเป็น 100

ตัวอย่างที่ 2.15 จงหาค่าของ 106×105

แนวคิด

$$\begin{array}{r} 106 + 06 \\ \underline{105 + 05} \\ \underline{\underline{111 \,/\, 30}} \end{array} \times$$

ได้จาก 106 + 05 หรือ 105 + 06 (ส่วนหน้า 111) ได้จาก 06×05 (ส่วนหลัง 30)

จะได้ $106 \times 105 = 11130$

■

ตัวอย่างที่ 2.1.6 จงหาค่าของ

(1) 111×112

(2) 113×114

(3) 117×118

แนวคิด (1)

$$\begin{array}{r} 111 + 11 \\ \underline{112 + 12} \\ \underline{\underline{123 \,/\, {}_{1}32}} \end{array} \times \quad = 123 + 1/32 = 12432$$

(เนื่องจาก $11 \times 12 = 132$ แต่ค่าเบี่ยงฐานเป็นเลขสองหลักจึงเขียน 132 เป็น ${}_{1}32$ เพื่อแสดงว่า 1 เป็นตัวทด

นั่นคือ $111 \times 112 = 12432$

หมายเหตุ ในการหาค่า 11×12 ทำได้โดย

$$\begin{array}{r} 11 + 1 \\ \underline{12 + 2} \\ \underline{\underline{13 \,/\, 2}} \end{array} = 132$$

ในการหา 111×112 อาจเขียนต่อเนื่องเป็นดังนี้

$$
\begin{array}{l}
\text{ฐาน 100} \quad \text{ฐาน 10} \\
111 \;+\; 11 \;+\; 1 \quad \times \\
\underline{112 \;+\; 12 \;+\; 2} \\
\underline{\underline{123 \;/\; {}_{1}3 \;/\; 2}} \quad = 123/{}_{1}32 = 123 + 1/32 \\
\qquad\qquad\qquad = 12432
\end{array}
$$

(2)

$$
\begin{array}{l}
\text{ฐาน 100} \quad \text{ฐาน 10} \\
113 \;+\; 13 \;+\; 3 \quad \times \\
\underline{114 \;+\; 14 \;+\; 4} \\
\underline{\underline{127 \;/\; {}_{1}7 \;/\; {}_{1}2}} \quad = 127/{}_{1}7 + 1/2 \\
\qquad\qquad\qquad = 127/{}_{1}8/2 \\
\qquad\qquad\qquad = 127 + 1/82 \\
\qquad\qquad\qquad = 12882
\end{array}
$$

(3)

$$
\begin{array}{l}
117 \;+\; 17 \;+\; 7 \quad \times \\
\underline{118 \;+\; 18 \;+\; 8} \\
\underline{\underline{135 \;/\; {}_{2}5 \;/\; {}_{5}6}} \quad = 135 + 2/5 + 5/6 \\
\qquad\qquad\qquad = 137/{}_{1}0/6 \\
\qquad\qquad\qquad = 137 + 1/0/6 \\
\qquad\qquad\qquad = 13806
\end{array}
$$

■

หมายเหตุ ในการหาผลคูณแบบต่อเนื่อง ดังตัวอย่างที่ 5.4 ตัวเลข ทางด้านขวาของ/นับตั้งแต่ขีด/แรกจากขวาจะเป็นตัวเลขโดด ถ้าได้ผลลัพธ์เป็น เลขโดดมากกว่าหนึ่งตัวจะคงตัวเลขทางขวามือไว้ ส่วนตัวเลขทางซ้ายจะเป็น ตัวทด นอกจากนี้ในการคำนวณหาผลคูณจากโจทย์ผลลัพธ์ในช่องขวาสุดเท่านั้นจะได้จากผลคูณ ส่วนผลลัพธ์ในช่องถัดไปทางซ้ายจะได้จากผลบวกตามวิธีที่ได้กล่าวมาแล้ว

ชนิดที่ 3 กรณีที่ตัวตั้งและตัวคูณมีจำนวนหลักต่างกัน การเลือกฐานจะเลือกฐานของตัวเลขที่มีจำนวนหลักน้อยกว่า

ตัวอย่างที่ 2.1.7 จงหาค่าของ 103×2312

แนวคิด ใช้ฐาน 100

จะได้

$$\begin{array}{l} 103 \;+\; 03 \\ \underline{2312 \;+ 2212} \\ \underline{\underline{2315 \;/\; {}_{66}36}} \end{array} \times \quad = 2315 + 66/36$$

$$= 238136$$

นั่นคือ $103 \times 2312 = 238136$ ■

หมายเหตุ สำหรับฐาน 100 จะเห็นว่า 2312 มีค่าเบี่ยงฐานเป็น +2212 จึงเขียน 2312 + 2212 ในส่วนที่เป็นตัวคูณ

ในผลคูณทางขวาของ / เนื่องจาก $3 \times 2212 = 6636$ แต่ฐานเป็น 100 จึงต้องการเลขโดดในส่วนนี้เพียง 2 ตัวคือ 36 ส่วน 66 นั้นเป็นตัวทดในหลัก 100 และหลัก 1000

สำหรับผลบวกทแยง คือ 103 + 2212 หรือ 2312 + 3

ตัวอย่างที่ 2.1.8 จงหาค่าของ 103×13

แนวคิด ใช้ฐาน 10

จะได้

$$\begin{array}{l} 103 \;+\; 93 \\ \underline{\;13 \;+\; 3} \\ \underline{\underline{106 \;/\; {}_{27}9}} \end{array} \times \quad = 106 + 27/9$$

$$= 1339$$

นั่นคือ $103 \times 13 = 1339$ ■

ชนิดที่ 4 จากตัวอย่างการคูณทั้ง 3 ชนิดนั้นจะมีอย่างน้อยหนึ่งจำนวน ซึ่งอาจจะเป็นตัวตั้ง หรือตัวคูณที่ค่าเบี่ยงฐานมีค่าเป็นบวกเล็กน้อยไม่เกินค่าของฐาน การคูณชนิดที่ 4 จะเป็นการคูณซึ่งตัวตั้งและตัวคูณมีค่าเบี่ยงฐานมีค่าเป็นลบ

ตัวอย่างที่ 2.1.9 จงหาค่าของ

(1) 9×6 (2) 6×5

แนวคิด (1)

$$\begin{array}{r} 9 \;-\; 1 \\ \underline{6 \;-\; 4} \\ \underline{\underline{5 \;/\; 4}} \end{array} \times$$

ได้จาก $(-1) \times (-4) = 4$

ได้จาก $9 + (-4) = 9 - 4 = 5$

หรือ $6 + (-1) = 6 - 1 = 5$

ดังนั้น $9 \times 6 = 54$

(2)

$$\begin{array}{r} 6 \;-\; 4 \\ \underline{5 \;-\; 5} \\ \underline{\underline{1 \;/\; {}_{2}0}} \end{array} \times$$

$= 1 + 2/0 = 30$

ได้จาก $(-4) \times (-5) = 20$

และต้องทด 2

ได้จาก $6 - 5 = 1$ (หรือ $5 - 4$)

ดังนั้น $6 \times 5 = 30$

■

ตัวอย่างที่ 2.1.10 ต่อไปนี้เป็นการหาผลคูณของจำนวนสองจำนวนที่มีค่าเบี่ยงเบนฐานเป็นลบ

8×6	91×93	89×97
$\begin{array}{r} 8 \;-\; 2 \\ \underline{6 \;-\; 4} \\ \underline{\underline{4 \;/\; 8}} \end{array} \times$	$\begin{array}{r} 91 \;-\; 09 \\ \underline{93 \;-\; 07} \\ \underline{\underline{84 \;/\; 63}} \end{array} \times$	$\begin{array}{r} 89 \;-\; 11 \\ \underline{97 \;-\; 03} \\ \underline{\underline{86 \;/\; 33}} \end{array} \times$
ดังนั้น $8 \times 6 = 48$	ดังนั้น $91 \times 94 = 8463$	ดังนั้น $89 \times 97 = 8633$

64×98	79×97	988×998
$64 - 36$	$79 - 21$	$988 - 012$
$\underline{98 - 02}$ ×	$\underline{97 - 03}$ ×	$\underline{988 - 002}$ ×
$\underline{\underline{62 \;/\; 72}}$	$\underline{\underline{76 \;/\; 63}}$	$\underline{\underline{986 \;/\; 024}}$
ดังนั้น $64 \times 96 = 6272$	ดังนั้น $79 \times 97 = 7663$	ดังนั้น $988 \times 988 = 986024$

998×995	99976×99998
$998 - 002$	$99976 - 00024$
$\underline{995 - 005}$ ×	$\underline{99998 - 00002}$ ×
$\underline{\underline{993 \;/\; 010}}$	$\underline{\underline{99974 \;/\; 00048}}$
ดังนั้น $998 \times 995 = 993010$	ดังนั้น $99976 \times 99998 = 9997400048$

■

ชนิดที่ 5 กรณีสองจำนวนที่คูณกันจำนวนหนึ่งมีค่าเบี่ยงฐานเป็นบวก และอีกจำนวนหนึ่งมีค่าเบี่ยงฐานเป็นลบ

ตัวอย่างที่ 2.1.11 จงหาค่าของ 13×9

แนวคิด

$13 + 3$
×
$\underline{9 - 1}$

$\underline{\underline{12 \;/\; \bar{3}}} \quad = \quad 12\bar{3} \quad = \quad 117$

ได้จาก $3 \times (-1) = -3 = \bar{3}$

ได้จาก $13 - 1 = 12$ (หรือ $9 + 3$)

ดังนั้น $13 \times 9 = 117$

■

แบบฝึกหัดที่ 2.1.2

1. จงหาผลคูณต่อไปนี้

(1.1) 12×12	(1.2) 14×13	(1.3) 17×17
(1.4) 108×103	(1.5) 102×103	(1.6) 112×108
(1.7) 113×109	(1.8) 112×111	(1.9) 1002×1007
(1.10) 1007×1012	(1.11) 1110×1004	(1.12) 1003×1002

2. จงหาผลคูณต่อไปนี้

(2.1) 89×99	(2.2) 87×88	(2.3) 91×93
(2.4) 989×995	(2.5) 999×988	(2.6) 998×992
(2.7) 9998×9995	(2.8) 9989×9980	(2.9) 9988×9996
(2.10) 98×102	(2.11) 108×98	(2.12) 1004×995
(2.13) 1007×988	(2.14) 1110×989	(2.15) 1003×998

สนุกกับตัวเลข (4)

<u>ผลคูณที่ได้ตัวเลขเรียงกลับ</u>

$1 \times$	1	=	1
$3 \times$	7	=	21
$3 \times$	107	=	321
$29 \times$	149	=	4321
$3 \times$	19×953	=	54321
$3 \times$	218107	=	654321
$19 \times$	402859	=	7654321
$3^2 \times$	9739369	=	87654321
$3^2 \times$	109739369	=	987654321

ตอนที่ 2.2 การคูณโดยการจัดตำแหน่งผลคูณ

เรื่องที่ 2.2.1 การคูณที่ตัวตั้งและตัวคูณประกอบด้วยเลขโดดสองตัว

การคูณโดยการจัดตำแหน่งผลคูณ สำหรับ a และ b ซึ่งเป็นเลขโดดสองตัวจะมีค่าเป็นจำนวนเต็ม ตั้งแต่ 0 ถึง 9 ผลคูณ $a \times b$ จะมีค่าเท่ากับ $c \times 10 + d$ สำหรับบางเลขโดด c และ d ถ้าเขียน $c \times 10 + d$ เป็นตัวเลขที่มีค่าประจำตำแหน่ง จะได้ $c \times 10 + d = cd$ นั่นคือ $a \times b = cd$ จึงเห็นได้ว่า ผลคูณของเลขโดด a และ b มีค่าเป็นจำนวนที่ประกอบด้วยตัวเลขที่ไม่เกินสองหลัก

เช่น $9 \times 9 = 81$ (ค่ามากที่สุดของผลคูณเลขโดดสองตัว)

$6 \times 5 = 30$

$1 \times 7 = 7$ หรือ 07 เป็นต้น

ดังนั้น ถ้า a และ b เป็นเลขโดดในหลักหน่วย จะมีผังการคูณ ดังนี้

<table>
<tr><th>สิบ</th><th>หน่วย</th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>a
b</td><td>×</td></tr>
<tr><td>□</td><td>□</td><td></td></tr>
</table>

□ สองช่อง คือ ตำแหน่งที่ใช้เขียนผลคูณของ $a \times b$ ซึ่งจะอยู่ในตำแหน่งหลักหน่วยและตำแหน่งหลักสิบ (กรณีผลคูณที่ได้เป็นเลขโดดตัวเดียว □ ในหลักสิบ หมายถึง 0)

ถ้า a เป็นเลขโดดในหลักหน่วย และ b เป็นเลขโดดในหลักสิบ และเขียน a และ b ในรูปค่าประจำตำแหน่ง จะได้

a มีค่าเท่ากับ a และ b มีค่าเท่ากับ $b \times 10$

ดังนั้น ผลคูณของจำนวนทั้งสองจะอยู่ในรูป

$a \times (b \times 10) = cd \times 10$ $(a \times b = cd)$

$= cdo$ (cdo เขียนในรูปค่าประจำตำแหน่ง)

แสดงว่า ถ้า a เป็นเลขโดดในหลักหน่วย และ b เป็นเลขโดดใน หลักสิบ จะมีผังการคูณ ดังนี้

<table>
<tr><th>ร้อย</th><th>สิบ</th><th>หน่วย</th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>
b</td><td>a

</td><td>×</td></tr>
<tr><td>□</td><td>□</td><td></td><td></td></tr>
</table>

□ สองช่อง คือ ตำแหน่งที่ใช้เขียนผลคูณของ $a \times (b \times 10)$ ซึ่งจะอยู่ในตำแหน่งหลักสิบ และตำแหน่งหลักร้อย

ทำนองเดียวกัน ถ้า a เป็นเลขโดดในหลักสิบ และ b เป็นเลขโดดในหลักหน่วยจะมีผังการคูณ ดังนี้

ร้อย	สิบ	หน่วย	
	a		×
		b	
□	□		

และถ้า a และ b ต่างก็เป็นเลขโดดในหลักสิบ จะมีผังการคูณ ดังนี้

พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย	
		a		×
		b		
□	□			

□ สองช่อง คือ ตำแหน่งที่ใช้เขียน ผลคูณของ $(a \times 10) \times (b \times 10)$ ซึ่งจะอยู่ในตำแหน่งหลักร้อย และหลักพัน

ถ้า a, b, c, d ต่างเป็นเลขโดด และ ab กับ cd เป็นตัวเลขที่เขียนในรูปที่มีค่าประจำตำแหน่ง $ab \times cd$ จะมีผังการคูณ ดังนี้

พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย	
		a	b	×
		c	d	
		□	□	(1)
	□	□		(2)
	□	□		(3)
□	□			(4)

บรรทัด (1) ช่อง □ สองช่อง แสดงตำแหน่งของผลคูณ $b \times d$

บรรทัด (2) ช่อง □ สองช่อง แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(a \times 10) \times d$

บรรทัด (3) ช่อง □ สองช่อง แสดงตำแหน่งของผลคูณ $c \times (b \times 10)$

บรรทัด (4) ช่อง □ สองช่อง แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(a \times 10) \times (c \times 10)$

ถ้าย้ายตำแหน่งของช่อง □ สองช่องในบรรทัด (4) ไปยังบรรทัด (1) ให้อยู่ในหลักพันและหลักร้อย จะได้ผังการคูณ ดังนี้

พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย	
		a c	b d	×
□	□ □ □	□ □ □	□	(1) (2) (3)

ผลลัพธ์ที่ได้จากการบวกจำนวนในบรรทัด (1), (2) และ (3) ที่มีหลักตรงกันตามปกติ

ตัวอย่างที่ 2.2.1 จงหาผลคูณของ 48×69

วิธีคิด

	4 8	×
	6 9	
(24 ได้จาก 4 × 6)	2 4 7 2	(72 ได้จาก 8 × 9)
	3 6	(36 ได้จาก 4 × 9)
	4 8	(48 ได้จาก 8 × 6)
	3 3 1 2	

ดังนั้น $48 \times 69 = 3312$

■

ตัวอย่างที่ 2.2.2 จงหาผลคูณของ 41×69

วิธีคิด

```
                      4 1
                          ×
                      6 9
(24 ได้จาก 4 × 6)    2 4 0 9     ( 09 ได้จาก 1 × 9)
                      3 6        ( 36 ได้จาก 4 × 9)
                      0 6        (06 ได้จาก 1 × 6)
                    2 8 2 9
```

ดังนั้น $41 \times 69 = 2829$

■

เรื่องที่ 2.2.2 การคูณที่ตัวตั้งประกอบด้วยเลขโดดสามตัว และตัวคูณประกอบด้วยเลขโดดสองตัว

ถ้า a, b, c, d และ e เป็นเลขโดด

ในการหาผลคูณของ abc × de ที่เป็นผลคูณที่ตัวตั้งประกอบด้วยเลขโดดสามตัว และตัวคูณประกอบด้วยเลขโดดสองตัว ใช้แนวคิดทำนองเดียวกันกับรูปแบบที่ 1 แต่เพิ่มหลักร้อยที่ตัวตั้งขึ้นอีกหนึ่งหลัก ผังการคูณเป็นดังนี้

หมื่น	พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย		
		a	b	c		
			d	e		
			□	□	(1)	e เป็นตัวคูณ
		□	□		(2)	
	□	□			(3)	
		□	□		(4)	d เป็นตัวคูณ
	□	□			(5)	
□	□				(6)	

บรรทัด (1) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $c \times e$

บรรทัด (2) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(b \times 10) \times e$

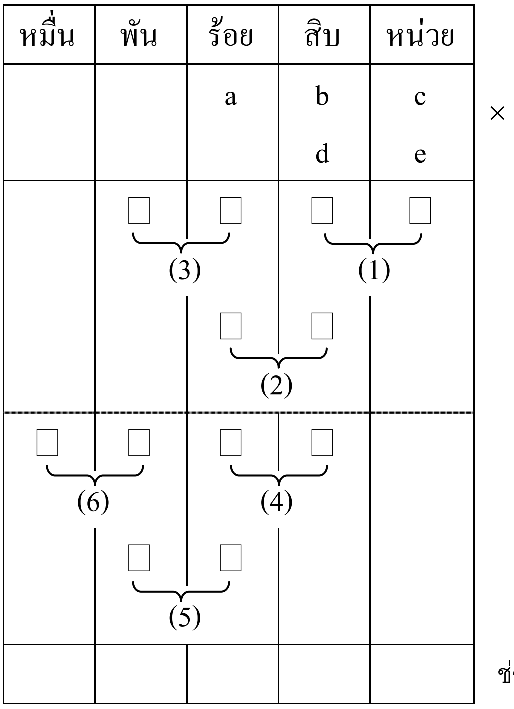
บรรทัด (3) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(a \times 100) \times e$

บรรทัด (4) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $c \times (d \times 10)$

บรรทัด (5) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(b \times 10) \times (d \times 10)$

บรรทัด (6) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(a \times 100) \times (d \times 10)$

นอกจากนี้ ถ้านำ □ □ ในบรรทัด (3) ไปไว้ที่บรรทัด (1) ในหลักที่ตรงกันและนำ □ □ ในบรรทัด (6) ไปไว้ที่บรรทัด (4) ในหลักที่ตรงกัน จะได้ทิศทางการวางตำแหน่งที่มี e และ d เป็นตัวคูณ ดังนี้



(1), (2) และ (3) แสดงทิศทางการวางตำแหน่ง □ □ ของการคูณ c, b และ a ด้วย e ตามลำดับ

(4), (5) และ (6) แสดงทิศทางการวางตำแหน่ง □ □ ของการคูณ c, b และ a ด้วย d ตามลำดับ

ช่องผลลัพธ์

ผังการคูณ เป็นดังนี้

หมื่น	พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย	
		a	b d	c e	×
  □	□ □ □	□ □ □ □	□ □ □	□	

ตัวอย่างที่ 2.2.3 จงหาผลคูณของ 987×36

วิธีคิด

$$
\begin{array}{lrl}
 & 9\ 8\ 7 & \\
 & \underline{\ \ 3\ 6} & \\
(54 \text{ ได้จาก } 9 \times 6) & 5\ 4\ 4\ 2 & (42 \text{ ได้จาก } 7 \times 6) \\
 & 4\ 8\ \ \ & (48 \text{ ได้จาก } 8 \times 6) \\
(27 \text{ ได้จาก } 9 \times 3) & 2\ 7\ 2\ 1\ \ \ & (21 \text{ ได้จาก } 7 \times 3) \\
(24 \text{ ได้จาก } 8 \times 3) & \underline{2\ 4\ \ \ \ \ } & \\
 & \underline{\underline{3\ 5\ 5\ 3\ 2}} &
\end{array}
$$

ดังนั้น $987 \times 36 = 35532$

■

ถ้าเป็นผลคูณของเลขสามหลักกับเลขสามหลักก็ทำได้ทำนองเดียวกันโดยเพิ่มแถวของผลลัพธ์การคูณด้วยตัวเลขในหลักร้อยของตัวคูณต่ออีกสองแถว แล้วจึงหาผลบวกของผลคูณทั้งหมด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.2.4 จงหาผลคูณของ 987×436

วิธีคิด

$$
\begin{array}{r}
9\ 8\ 7 \quad \times \\
\underline{4\ 3\ 6} \quad\ \ \\
5\ 4\ 4\ 2 \quad\ \ \\
4\ 8\ \ \ \quad\ \ \\
2\ 7\ 2\ 1\ \ \ \quad\ \ \\
2\ 4\ \ \ \ \ \quad\ \ \\
3\ 6\ 2\ 8\ \ \ \ \ \quad\ \ \\
\underline{3\ 2\ \ \ \ \ \ \ \ \ } \quad\ \ \\
\underline{\underline{4\ 3\ 0\ 3\ 3\ 2}} \quad\ \
\end{array}
$$

ดังนั้น $987 \times 436 = 430332$

■

แบบฝึกหัดที่ 2.2

จงหาค่าของ

1. 47×68
2. 63×327
3. 472×384
4. 615×738
5. 1234×389

สนุกกับตัวเลข (8)

<u>หนึ่งคูณกับหนึ่งได้ หนึ่ง สอง สาม</u>

11×111	=	1221
111×111	=	12321
1111×111	=	123321
11111×111	=	1233321
111111×111	=	12333321
1111111×111	=	123333321
11111111×111	=	1233333321

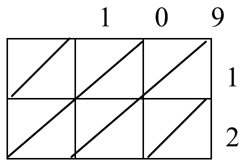
ตอนที่ 2.3 การคูณโดยใช้ตาราง

เรื่องที่ 2.3.1 การคูณแบบธรรมดา

การคูณโดยใช้ตารางตามวิธีที่จะกล่าวต่อไปนี้มีความสะดวก โดยขณะที่คูณไม่ต้องนำตัวทดไปบวกในหลักถัดไป เมื่อจับคู่คูณเลขโดดทั้งหมดแล้วหาผลบวกรวมยอดเป็นผลคูณดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.3.1 จงหาค่าของ 109×12

แนวคิด ขั้นที่ 1 เขียนตัวตั้งไว้ด้านบนของตาราง และเขียนตัวคูณไว้ด้านขวาของตาราง โดยตารางทำเป็นช่องดังนี้

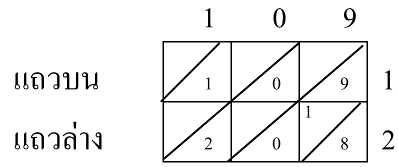


ขั้นที่ 2 ใส่ผลคูณลงในช่อง โดยใส่ช่องล่างก่อน ( )

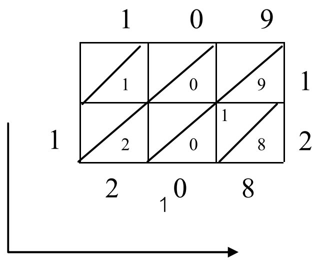
สำหรับตัวทดถ้ามีใส่ในช่องบน ( )

แถวบนในตารางจะเป็นผลคูณของ 109×1 และแถวล่างในตาราง

จะเป็นผลคูณของ 109×2 ดังนี้



ขั้นที่ 3 หาผลบวกตามแนวทแยง // ผลบวกที่ได้จะเป็นผลคูณตามต้องการ

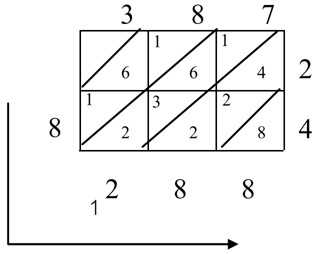


$= 12_1 08 = 1308$

นั่นคือ $109 \times 12 = 1308$ ■

ตัวอย่างที่ 2.3.2 จงหาค่าของ 387×24

แนวคิด

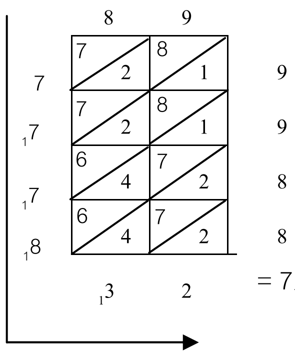


$= 8_1 288 = 9288$

นั่นคือ $387 \times 24 = 9288$ ■

ตัวอย่างที่ 2.3.3 จงหาค่าของ 89×9988

แนวคิด



$= 7_1 7_1 7_1 8_1 32 = 888932$

นั่นคือ $89 \times 9988 = 888932$

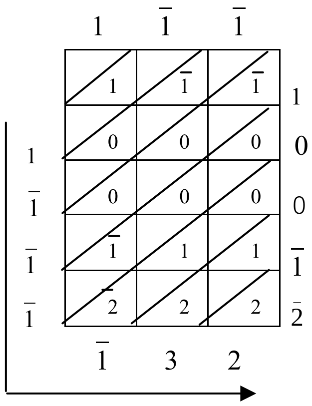
■

เรื่องที่ 2.3.2 การคูณโดยจัดเป็นจำนวนเครื่องหมายคละ

ในกรณีที่ตัวตั้งหรือตัวคูณมีเลขโดดที่เกิน 5 อยู่หลายตัว อาจแปลงเป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตรก่อนแล้วคูณโดยใช้ตารางก็จะทำให้ใช้การคูณ ตัวเลขที่ไม่เกิน 5 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.3.4 จงแปลง 89×9988 เป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตรแล้วหาผลคูณโดยใช้ตาราง

แนวคิด $89 \times 9988 = 1\bar{1}\bar{1} \times 10\bar{1}\bar{2}$



$= 1\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,3\,2$

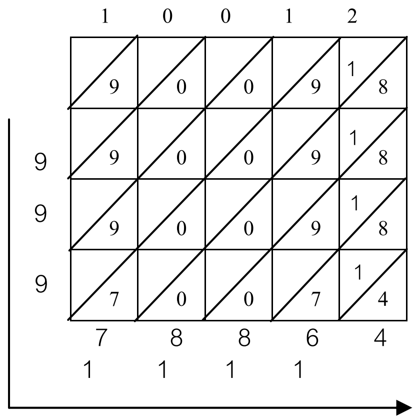
$= 8\,8\,8\,9\,3\,2$

นั่นคือ $89 \times 9988 = 888932$

■

ตัวอย่างที่ 2.3.5 จงหาค่าของ 10012×9997

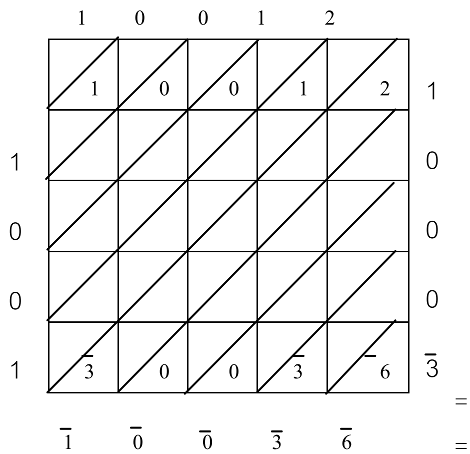
แนวคิด วิธีที่ 1



$= 100089964$

นั่นคือ $10012 \times 9997 = 100089964$

วิธีที่ 2 $10012 \times 9997 = 10012 \times 1000\bar{3}$



$= 1001\bar{1}\bar{0}\bar{0}\bar{3}\bar{6}$

$= 100089964$

นั่นคือ $10012 \times 9997 = 100089964$

■

ข้อสรุป การคูณโดยใช้ตารางนี้เป็นการคูณเลขโดดกับเลขโดดได้ผลลัพธ์เป็นเท่าใด เขียนผลลัพธ์เหล่านั้นลงในช่องตารางโดยไม่ต้องทด หลังจากนั้นจึงบวกทแยง จะได้ผลลัพธ์ของการคูณ ซึ่งทำให้ได้ผลคูณรวดเร็วและผิดพลาดน้อย นอกจากนี้กรณีที่เลขโดดในตัวตั้งหรือตัวคูณมีค่าเกิน 5 สามารถใช้นิขิลัมสูตรแปลงให้ใช้ตัวเลขที่ไม่เกิน 5 แล้วทำการคูณแบบตารางก็จะสะดวกและรวดเร็วขึ้น

แบบฝึกหัดที่ 2.3

จงหาค่าของผลคูณต่อไปนี้

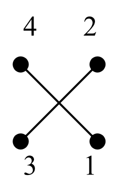
1. 287×315
2. 38644×9998
3. 27413×5615
4. $374 \times 89 \times 463$
5. $27135 \times 246 \times 4138$
6. $99998 \times 819 \times 19210$

ตอนที่ 2.4 การคูณแนวตั้งและการคูณไขว้

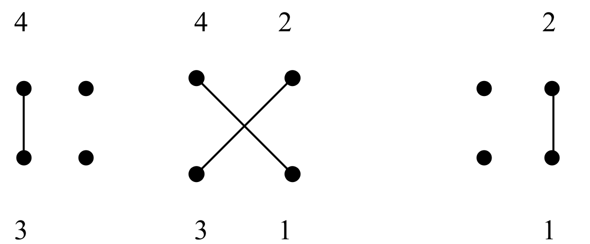
เรื่องที่ 2.4.1 การคูณธรรมดา

การหาผลคูณโดยใช้การคูณแนวตั้งและการคูณไขว้นี้เป็นวิธีการคูณวิธีหนึ่ง ซึ่งรูปแบบการคูณจะเป็นรูปแบบที่สมมาตร ดังตัวอย่างการคูณต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.4.1 42×31 มีผังการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้ดังนี้



เมื่อ ● แทนตำแหน่งของเลขโดดของตัวตั้งและตัวคูณจะมีผังการคูณเป็นรูปสมมาตร และมี 3 ขั้นตอนการคูณจากขวาไปซ้ายดังนี้



ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 1

$4 \times 3 = 12$ $(4 \times 1) + (3 \times 2) = 10$ $2 \times 1 = 2$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณในแต่ละขั้นจะได้ตำแหน่งของเลขโดดในผลลัพธ์ คือ ตำแหน่ง

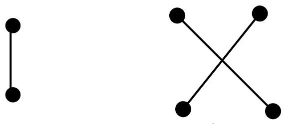
หลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย ตามลำดับจากขั้นที่ 1, 2 และ 3 สำหรับในขั้นใดที่ผลคูณเป็นเลขโดดสองตัว เลขโดดตัวหน้าจะทดไปในหลักที่สูงขึ้นหนึ่งหลัก ดังนี้

$$
\begin{array}{ccc}
 & 4 & 2 \\
 & 3 & 1 \\
\hline
{}_{1}2 & {}_{1}0 & 2 \\
\hline\hline
\end{array}
\quad = \ 1302
$$

■

ตัวอย่างที่ 2.4.2 จงหาผลคูณของ 89×23

แนวคิด เนื่องจากตัวตั้งและตัวคูณเป็นเลขสองหลัก จึงมีผังการคูณดังนี้



ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 1

การคำนวณ

$$
\begin{array}{ccc}
 & 8 & 6 \\
 & 2 & 3 \\
\hline
{}_{1}6 & {}_{3}6 & {}_{1}8 \\
\hline\hline
\end{array}
\times
\quad = 1978
$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $6 \times 3 = 18$

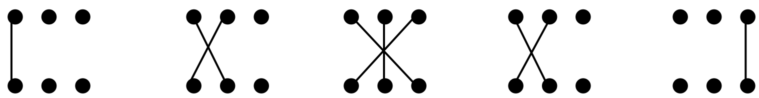
2) $(8 \times 3) + (2 \times 6) = 36$

3) $8 \times 2 = 16$

■

ตัวอย่างที่ 2.4.3 จงหาผลคูณของ 302×514

แนวคิด ผังการคูณแบ่งเป็น 5 ขั้นตอน ดังนี้



ขั้นที่ 5 ขั้นที่ 4 ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 1

(คูณ 1 คู่) (คูณ 2 คู่) (คูณ 3 คู่) (คูณ 2 คู่) (คูณ 1 คู่)

การคำนวณ

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 3 & 0 & 2 \\
 & & & 5 & 1 & 4 \\
\hline
{}_{1}5 & 3 & {}_{2}2 & 2 & 8 & \\
\hline\hline
\end{array}
\times
\quad = 155228
$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $2 \times 4 = 8$

2) $(0 \times 4) + (1 \times 2) = 2$

3) $(3 \times 4) + (0 \times 1) + (5 \times 2) = 22$

4) $(3 \times 1) + (5 \times 0) = 3$

5) $3 \times 5 = 15$

■

ตัวอย่างที่ 2.4.4 จงหาผลคูณของ 321×43

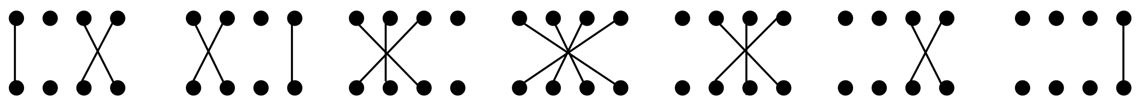
แนวคิด เนื่องจากจำนวนหลักของตัวตั้งมากกว่าตัวคูณ จึงใส่เลข 0 หน้าตัวคูณให้จำนวนเลขโดดของตัวตั้งและตัวคุณเท่ากันเสียก่อน แล้วทำการคำนวณ

$$\begin{array}{r} 3\ \ 2\ \ 1 \\ \times \quad \\ \underline{0\ \ 4\ \ 3} \\ \underline{\underline{{}_{1}2\ \ {}_{1}7\ \ {}_{1}0\ \ 3}} \end{array} \quad = 13803$$

■

ตัวอย่างที่ 2.4.5 จงหาผลคูณ 3251×7604

แนวคิด ผังการคุณแบ่งเป็น 7 ขั้นตอนดังนี้



ขั้นที่ 7 ขั้นที่ 6 ขั้นที่ 5 ขั้นที่ 4 ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 1

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 3\ \ 2\ \ 5\ \ 1 \\ \underline{7\ \ 6\ \ 0\ \ 4} \\ \underline{\underline{{}_{2}1\ \ {}_{3}2\ \ {}_{4}7\ \ {}_{4}9\ \ {}_{1}4\ \ {}_{2}0\ \ 4}} \end{array} = 24720604$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $1 \times 4 = 4$
2) $(5 \times 4) + (0 \times 1) = 20$
3) $(2 \times 4) + (5 \times 0) + (6 \times 1) = 14$
4) $(3 \times 4) + (2 \times 0) + (6 \times 5) + (7 \times 1) = 49$
5) $(3 \times 0) + (2 \times 6) + (7 \times 5) = 47$
6) $(3 \times 6) + (7 \times 2) = 32$
7) $3 \times 7 = 21$

■

ข้อสังเกต ในการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้มีลักษณะดังนี้

1. จำนวนเลขโดดของตัวตั้งและตัวคูณต้องเท่ากัน ในกรณีไม่เท่า ให้เติม 0 หน้าตัวตั้งหรือตัวคูณที่น้อยกว่าให้มีตัวเลขโดดเท่ากับตัวตั้ง หรือตัวคูณที่มีจำนวนเลขโดดมากกว่า

2. ผลจาก 1. จะทำให้จำนวนเลขโดดในการคูณเท่ากับ 2n เมื่อ n = 1,2,3... จะมีขั้นตอนการคูณเท่ากับ 2n - 1 ขั้นตอน

3. ตั้งแต่ขั้นที่ 1 ถึงขั้นที่ n จำนวนการจับคู่เพื่อคูณกันทั้งแนวตั้งและคูณไขว้จะเท่ากับตัวเลขแสดงอันดับที่ของขั้นนั้น ๆ สำหรับขั้นที่ n + 1 จนถึงขั้นที่ 2n - 1 จำนวนการจับคู่คูณกันในแต่ละขั้นที่เพิ่มขึ้นจะลดลงทีละ 1 ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2.4.6 จงหาผลคูณของ 12131 × 20412

แนวคิด เนื่องจากทั้งตัวตั้งและตัวคูณต่างก็เป็นตัวเลข 5 หลัก ดังนั้น ขั้นตอนการคูณมีทั้งหมด 2(5) - 1 = 9 ขั้นตอน ดังนี้

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 1\ 3\ 1 \\ \times \quad 2\ 0\ 4\ 1\ 2 \\ \hline \underline{\underline{2\ 4\ 6\ {}_1 5\ {}_1 0\ {}_1 7\ 9\ 7\ 2}} = 247617972 \end{array}$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $1 \times 2 = 2$

2) $(3 \times 2) + (1 \times 1) = 7$

3) $(1 \times 2) = (3 \times 1) + (4 \times 1) = 9$

4) $(2 \times 2) + (1 \times 1) + (4 \times 3) + (0 \times 1) = 17$

5) $(1 \times 2) + (2 \times 1) + (1 \times 4) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 10$

6) $(1 \times 1) + (2 \times 4) + (0 \times 1) + (2 \times 3) = 15$

7) $(1 \times 4) + (2 \times 0) + (2 \times 1) = 6$

8) $(1 \times 0) + (2 \times 2) = 4$

9) $1 \times 2 = 2$

■

ในกรณีที่ตัวตั้งและตัวคูณมีเลขโดดที่มากกว่าเลข 5 เราสามารถแปลงเป็นเลขโดดที่มีค่าน้อยกว่าเลข 5 ได้โดยใช้นิขิลัมสูตรจะทำให้การคูณง่ายขึ้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

เรื่องที่ 2.4.7 การคูณโดยจัดเป็นจำนวนเครื่องหมายคละ

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาผลคูณของ 39×49

แนวคิด $39 = 4\,\bar{1}$ และ $49 = 5\,\bar{1}$

$$\begin{array}{r} 4\ \bar{1} \\ \times\ \ 5\ \bar{1} \\ \hline 2\ 0\ \bar{9}\ 1 \end{array} = 1911$$

■

ตัวอย่างที่ 2.4.8 จงหาผลคูณของ 291×388

แนวคิด $291 = 3\ \bar{1}\ 1$ และ $388 = 4\ \bar{1}\ \bar{2}$

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 3\ \bar{1}\ 1 \\ \times\ \ 4\ \bar{1}\ \bar{2} \\ \hline 1\ 2\ \bar{7}\ \bar{1}\ 1\ \bar{2} \end{array} = 112908$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $1 \times \bar{2} = \bar{2}$

2) $(\bar{1} \times \bar{2}) + (\bar{1} \times 1) = 1$

3) $(3 \times \bar{2}) + (\bar{1} \times \bar{1}) + (4 \times 1) = \bar{1}$

4) $(3 \times \bar{1}) + (4 \times \bar{1}) = \bar{7}$

5) $3 \times 4 = 12$

■

ตัวอย่างที่ 2.4.9 จงหาผลคูณของ 818×39

แนวคิด $8\ 1\ 8 = 1\ \bar{2}\ 2\ \bar{2}$ และ $3\ 9 = 4\ \bar{1}$

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 1\ \bar{2}\ 2\ \bar{2} \\ \times\ \ 0\ 0\ 4\ \bar{1} \\ \hline 4\ \bar{9}\ {}_{1}0{-}{}_{1}0\ 2 \end{array} = 4\ \bar{8}\ \bar{1}\ 0\ 2 = 3\ 1\ 9\ 0\ 2$$

■

ตัวอย่างที่ 2.4.10 จงหาผลคูณของ 37898 × 19989

แนวคิด $37898 = 4\,\bar{2}\,\bar{1}\,0\,\bar{2}$ และ $19989 = 200\bar{1}\,\bar{1}$

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 4\,\bar{2}\,\bar{1}\,0\,\bar{2} \\ 2\,0\,0\,\bar{1}\,\bar{1} \\ \hline \underline{\underline{8\,\bar{4}\,\bar{2}\,\bar{4}\,\bar{6}\,3\,1\,2\,2}} \end{array} \times \quad = 757543122$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $\bar{2} \times \bar{1} = 2$

2) $(0 \times \bar{1}) + (\bar{1} \times \bar{2}) = 2$

3) $(\bar{1} \times \bar{1}) + (0 \times \bar{1}) + (0 \times \bar{2}) = 1$

4) $(\bar{2} \times \bar{1}) + (\bar{1} \times \bar{1}) + (0 \times 0) + (0 \times \bar{2}) = 3$

5) $(4 \times \bar{1}) + (\bar{2} \times \bar{1}) + (\bar{1} \times 0) + (0 \times 0) + (2 \times \bar{2}) = \bar{6}$

6) $(4 \times \bar{1}) + (\bar{2} \times 0) + (\bar{1} \times 0) + (2 \times 0) = \bar{4}$

7) $(4 \times 0) + (\bar{2} \times 0) + (2 \times \bar{1}) = \bar{2}$

8) $(4 \times 0) + (2 \times \bar{2}) = \bar{4}$

9) $4 \times 2 = 8$

■

ในการคูณจำนวนที่มีจุดทศนิยมสามารถทำการคูณได้โดยปรกติ โดยตำแหน่งของจุดทศนิยมผลคูณเท่ากับผลบวกของตำแหน่งทศนิยมของจำนวนทั้งสองที่คูณกัน

ตัวอย่างที่ 2.4.11 จงหาผลคูณของ 34.1 × 4.54

แนวคิด เนื่องจากตัวตั้งมีทศนิยม 1 ตำแหน่ง และตัวคูณมีทศนิยม 2 ตำแหน่ง ดังนั้นผลลัพธ์มีทศนิยม 3 ตำแหน่ง การคูณเป็นดังนี้

$$\begin{array}{r} 3\;\;4\,.\,1\;\; \\ 4\,.\,5\;\;4 \\ \hline \underline{\underline{12\;{}_{3}1\;{}_{3}.\;6\;{}_{2}1\;\;4}} \end{array} \times \quad = 154.814$$

■

ตัวอย่างที่ 2.4.12 จงหาผลคูณของ 8.18×3.9

แนวคิด เนื่องจากตัวตั้งมีทศนิยม 2 ตำแหน่งตัวคูณมีทศนิยม 1 ตำแหน่ง ดังนั้นผลพัทธ์มีทศนิยม 3 ตำแหน่ง นอกจากนี้

$8.18 = 1\bar{2}.2\bar{2}$ และ $3.9 = 4.\bar{1}$ การคูณเป็นดังนี้

$$
\begin{array}{r}
1\ \bar{2}\ .\ 2\ \bar{2} \\
\underline{0\ 0\ \ \ 4\ .\ \bar{1}} \ \times \\
\underline{\underline{4\ \bar{9}\ .\ {}_{1}0\ \ {}_{\bar{1}}0\ \ 2}}
\end{array}
= 4\bar{8}.\bar{1}02 = 31.902 \qquad \blacksquare
$$

ข้อสรุป

การคูณโดยใช้ผังการคูณนี้ผังการคูณเป็นผังที่เป็นรูปสมมาตร ในกรณีที่ตัวตั้ง และตัวคูณมีจำนวนหลักไม่เท่ากันต้องเติมศูนย์หน้าจำนวนที่มีหลักน้อยกว่าโดยใช้ 0 แทนหลักที่ขาดไป แล้วจึงทำการคูณเลขโดดทีละ 1,2,...n,...,2, 1 คู่ตามผังการคูณ

แบบฝึกหัดที่ 2.4

จงหาผลคูณต่อไปนี้

1. 45×58
2. 314×67
3. 8121×374
4. 31.28×4.35
5. 3561×62.5

สนุกกับตัวเลข (7)

การคูณที่มีเจ็ดกับเก้าได้ของแถมเป็นหนึ่งกับสอง

779 ×	99	=	77121
7779 ×	999	=	7771221
77779 ×	9999	=	777712221
777779 ×	99999	=	77777122221
7777779 ×	999999	=	7777771222221
77777779 ×	9999999	=	777777712222221
777777779 ×	99999999	=	77777777122222221

หน่วยที่ 3
ทักษะการคำนวณ 3 (การหาร)

ตอนที่ 3.1 การหารสังเคราะห์
ตอนที่ 3.2 ทศนิยม

แนวคิด 1. การหารที่ตัวหารน้อยกว่า 10 หรือ 100 หรือ 1000 เล็กน้อยนั้น ใช้วิธีการหารสังเคราะห์จะสะดวกกว่า

2. ในการหาผลหารเป็นทศนิยม จะต้องเติม 0 ต่อท้ายตัวตั้งเท่ากับจำนวนตำแหน่งของทศนิยมที่ต้องการ

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 3 จบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. หาผลหารโดยวิธีการหารสังเคราะห์ได้
2. หาผลหารที่เป็นทศนิยมโดยวิธีการหารสังเคราะห์ได้

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายแนวคิดและแสดงตัวอย่างการหารที่ตัวหารน้อยกว่า 10 หรือ 100 หรือ 1000 เล็กน้อย โดยใช้วิธีการหารสังเคราะห์
2. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่างและแบบฝึกหัด
3. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 3.1 การหารสังเคราะห์

เรื่องที่ 3.1.1 การหารที่ตัวหารเป็นเลขโดดที่มากกว่า 5

ในการคูณโดยเฉพาะเลขโดดที่นำมาคูณกันนั้นมีค่ามากกว่า 5 ถ้าใช้จำนวนเครื่องหมายคละทำให้คูณง่ายขึ้นในทำนองเดียวกันสำหรับการหาร ถ้าตัวหารมีเลขโดดที่มีค่ามากกว่า 5 เมื่อใช้จำนวนเครื่องหมายคละผสมกับการหารสังเคราะห์ก็จะทำให้การหารนั้นง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้โดยจะแสดงวิธีคิดเป็นขั้นตอน

ชนิดที่ 1 ตัวหารเป็นเลขโดดที่มากกว่า 5

ตัวอย่างที่ 3.1.1 จงหาร 34 ด้วย 9

แนวคิด

ขั้นที่ 1 หาจำนวนทบสิบของตัวหารคือจำนวนสิบของ 9 ซึ่งคือ 1 เขียน 1 ไว้ใต้ 9 แล้วเขียนการตั้งหารดังนี้

$$\begin{array}{l} 9\,)\,3\,4 \\ 1 \end{array}$$

ขั้นที่ 2 ใช้ 1 ซึ่งเป็นจำนวนทบสิบของตัวหาร ทำการหารแทนตัวหารเดิม แล้วเขียนขีด | แบ่งตัวตั้ง โดยเขียน | หลังเลขโดด ในตำแหน่งที่เท่ากับจำนวนเลขโดดของตัวหาร ในที่นี้ตัวหารเป็นเลขโดด 1 ตัว ดังนั้น จากตัวตั้งคือ 34 นับเลขโดดจากทางขวาไปทางซ้าย 1 ตัวแล้วเขียนขีด | คั่น จะได้ 3 | 4 ให้ยาวพอสมควรดังนี้

$$\begin{array}{ll|l} 9\,) & 3 & 4 \\ 1 & & \end{array}$$

หมายเหตุ จะใช้ MD แทนตัวหารที่ปรับปรุงใหม่ ซึ่งในที่นี้คือจำนวนทบสิบของตัวหารเดิม และจะใช้ D แทนตัวตั้ง

ขั้นที่ 3 ขีดเส้นใต้บรรทัดที่ 2 แล้วชักเลขโดดทางซ้ายสุดของ D (ในที่นี้คือ 3 และอยู่ทางซ้ายของ | ในตัวตั้ง) ลงมาตรงๆ และเขียนไว้ในบรรทัดที่ 3

$$\begin{array}{lll|l} & 9\,) & 3 & 4 \\ \text{MD} \longrightarrow & 1 & & \\ \cline{3-4} & & 3 & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 คูณเลขโดดที่ชักลงมาในบรรทัดที่ 3 ด้วยเลขโดดตัวซ้ายสุดของ MD (ในที่นี้ MD มีเลขโดดตัวเดียวคือ 1) จะได้ $3 \times 1 = 3$ แล้วเขียนผลคูณไว้บรรทัดที่ 2 ใต้ตัวตั้งในหลักถัดไปทางขวา (ในที่นี้คือหลักหน่วย)

$$\begin{array}{r|l} 9\,)\,3 & 4 \\ 1 \quad & 3 \\ \hline 3 & \end{array}$$

ขั้นที่ 5 บวกเลขในหลักหน่วยของแถวที่ 1 และ 2 จะได้ 4+3 = 7 เขียน 7 ไว้บรรทัดที่ 3 ให้ตรงกับตัวเลขที่บวกกันจะเห็นว่า | อยู่หน้า 7

$$\begin{array}{r|l} 9\,)\,3 & 4 \\ 1 \quad & 3 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 3

เศษคือ 7

ดังนั้น $34 \div 9 = 3$ เศษ 7

■

ตัวอย่างที่ 3.1.2 จงหาร 60 ด้วย 9

แนวคิด

ขั้นที่ 1-2 เนื่องจากตัวหารคือ 9 ดังนั้น MD = 1 เขียนภาพตั้งหารได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|l} 9\,)\,6 & 0 \\ 1 \quad & \end{array}$$

ขั้นที่ 3 ชัก 6 ซึ่งเป็นเลขโดดซ้ายสุดของตัวตั้งลงมาบรรทัดที่ 3

$$\begin{array}{r|l} 9\,)\,6 & 0 \\ 1 \quad & \\ \hline 6 & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 คูณ 6 ที่ชักลงมาด้วย MD คือ 1 จะได้ $6 \times 1 = 6$ แล้วเขียนไว้บรรทัดที่ 2 ในหลักถัดไปทางขวา

$$\begin{array}{r|l} 9)\ 6 & 0 \\ 1\qquad & 6 \\ \hline 6 & \end{array}$$

ขั้นที่ 5 บวกเลขในหลักหน่วยของบรรทัดที่ 1 และ 2 ได้ 0 + 6 = 6 แล้วเขียนไว้บรรทัดที่ 3 จะเห็นว่า | อยู่หน้า 6 ที่เป็นผลบวก

$$\begin{array}{r|l} 9)\ 6 & 0 \\ 1\qquad & 6 \\ \hline 6 & 6 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 6

เศษคือ 6

ดังนั้น 60 ÷ 9 = 6 เศษ 6

■

ตัวอย่างที่ 3.1.3 จงหาร 213 ด้วย 9

แนวคิด

ขั้นที่ 1-2

$$\begin{array}{l|l} 9)\ 2\ 1 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

ขั้นที่ 3 ชัก 2 ที่เป็นเลขโดดซ้ายสุดของตัวตั้งลงมาบรรทัดที่ 3

$$\begin{array}{r|l} 9)\ 2\ 1 & 3 \\ 1\qquad & \\ \hline 2\ \ \ & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 คูณ 2 ที่ชักลงมาด้วย 1 ที่เป็นเลขโดดเพียงตัวเดียวใน MD จะได้ 2 × 1 = 2 เขียน 2 ไว้บรรทัดที่ 2 ในหลักถัดไปทางขวา (ในที่นี้คือหลักสิบ) แล้วหาผลบวกเลขโดดในหลักสิบของบรรทัดที่ 1 และ 2 จะได้ 1 + 2 = 3 เขียนไว้บรรทัดที่ 3 ให้ตรงกับเลขโดดที่บวกกัน

$$\begin{array}{r|l} 9)\ 2\ 1 & 3 \\ 1\quad\ \ 2 & \\ \hline 2\ 3 & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 (ก) นำ 1 ใน MD ไปคูณ 3 ในบรรทัดที่ 3 ที่เป็นผลบวกในหลักสิบจะได้ $3 \times 1 = 3$ เขียน 3 ไว้บนหลักหน่วยในบรรทัดที่ 2

$$\begin{array}{rrr|r} 9\,) & 2 & 1 & 3 \\ 1 & & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & \end{array}$$

ขั้นที่ 5 หาผลบวกของเลขโดด ในหลักหน่วยของบรรทัดที่ 1 และ 2 จะได้ $3 + 3 = 6$ เขียน 6 ลงในบรรทัดที่ 3 ให้ตรงกับเลขโดดที่บวกกัน

$$\begin{array}{rrr|r} 9\,) & 2 & 1 & 3 \\ 1 & & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 23

เศษคือ 6

ดังนั้น $213 \div 9 = 23$ เศษ 6

■

ตัวอย่างที่ 3.1.4 จงหาร 323 ด้วย 9

แนวคิด

$$\begin{array}{rrr|r} 9\,) & 3 & 2 & 3 \\ 1 & & 3 & 5 \\ \hline & 3 & 5 & 8 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 35

เศษคือ 8

ดังนั้น $323 \div 9 = 35$ เศษ 8

■

ตัวอย่างที่ 3.1.5 จงหาร 12121 ด้วย 9

แนวคิด

$$\begin{array}{rrrrr|r} 9\,) & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 1 & 3 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 1346

เศษคือ 7

ดังนั้น $12121 \div 9 = 1346$ เศษ 7

■

ในกรณีที่ทำการหารแล้วได้เศษเกินกว่าตัวหารดั้งเดิม จะต้องทำการหารเศษต่อไปแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ไปบวกกับผลลัพธ์เดิม จะได้ผลลัพธ์ใหม่เป็นคำตอบ และเศษที่ได้ใหม่ที่ไม่เกินตัวหารดั้งเดิมก็จะเป็นเศษของการหารโดยแท้จริงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.1.6 จงหาร 67 ด้วย 9

แนวคิด

9)	6	7
		6
	6	13

จะเห็นว่า ผลลัพธ์คือ 6 เศษ 13 แต่เศษคือ 13 มากกว่าตัวหารดั้งเดิมคือ 9 ดังนั้นจะต้องหาร 13 ด้วย 9 อีกดั้งนี้

9)	1	3
1		1
	1	4

นำ 1 ไปบวกกับผลลัพธ์เดิม จะได้ $6 + 1 = 7$ เป็นผลลัพธ์ใหม่และเศษที่ได้ใหม่คือ 4 เป็นเศษที่แท้จริง

จะได้ผลลัพธ์คือ $6 + 1 = 7$

เศษคือ 4

ดังนั้น $67 \div 9 = 7$ เศษ 4

■

ถ้าเขียนการหาร 2 ครั้งอย่างต่อเนื่องจะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{array}{ll|l|l}
9) & 6 & 7 & \\
1 & & 6 & \\
\hline
 & 6 & 1 & 3 \\
 & & & 1 \\
\hline
 & & 1 & 4 \\
\hline
 & 6 & 1 & 4
\end{array} \quad = \quad 6_1 \,|\, 4 = 7 \,|\, 4$$

ผลลัพธ์คือ 7

เศษคือ 4

ดังนั้น $67 \div 9 = 7$ เศษ 4

■

ตัวอย่างที่ 3.1.7 จงหาร 167 ด้วย 9

แนวคิด

$$\begin{array}{ll|l|l}
9) & 1\ 6 & 7 & \\
1 & 1 & 7 & \\
\hline
 & 1\ 7 & 1 & 4 \\
 & & & 1 \\
\hline
 & 17 & 1 & 5
\end{array} \quad = \quad 17_1 \,|\, 5 = 18 \,|\, 5$$

ผลลัพธ์คือ 18

เศษคือ 5

ดังนั้น $167 \div 9 = 18$ เศษ 5

■

ตัวอย่างที่ 3.1.8 จงหาร 1011638 ด้วย 9

แนวคิด

9)	1	0	1	1	6	3		8	
1		1	1	2	3	9		$_{1}2$	
	1	1	2	3	9	$_{1}2$		$_{2}0$	
	1	1	2	4	0	2	2	0	
								2	
							2	2	
	1	1	2	4	0	2	2	2	= 112402_{2} | 2
									= 112404 | 2

ผลลัพธ์คือ 112404

เศษคือ 2

ดังนั้น 1011638 $\div$ 9 = 112404 เศษ 2

■

ตัวอย่างที่ 3.1.9 จงหาร 1012 ด้วย 8

แนวคิด จำนวนทบสิบของ 8 คือ 2 จึงทำการหารดังนี้

8)	1	0	1	2		
2		2	4	$_{1}0$		
	1	2	5	1	2	
					2	
				1	4	
	1	2	5	1	4	= 125_{1} | 4 = 126 | 4

ผลลัพธ์คือ 126

เศษคือ 4

ดังนั้น 1012 $\div$ 8 = 126 เศษ 4

■

ตัวอย่างที่ 3.1.10 จงหาร 3124 ด้วย 7

แนวคิด

$$
\begin{array}{l|cccc|c|c}
 & 7\,) & 3 & 1 & 2 & 4 & \\
 & 3 & & 9 & {}_{3}0 & {}_{9}6 & \\
\hline
 & & 3 & {}_{1}0 & {}_{3}2 & {}_{10}0 & \\
\hline
 & & 4 & 3 & 2 & 10 & 0 \\
 & & & & & 3 & 9 \\
\hline
 & & & & & 13 & 9 \\
\hline
 & & 4 & 3 & 2 & 13 & 9
\end{array}
= 432 + 13 \mid 9 = 445 \mid 9
$$

แต่เศษ 9 มากกว่า 7 และ $9 \div 7 = 1$ เศษ 2

ดังนั้น $445 \mid 9 = 445 \mid 1 \mid 2 = 445 + 1 \mid 2 = 446 \mid 2$

ผลลัพธ์คือ 446

เศษคือ 2

ดังนั้น $3124 \div 7 = 446$ เศษ 2

■

เรื่องที่ 3.1.2 การหารที่ตัวหารมีตัวเลขมากกว่าหนึ่งตัว

ชนิดที่ 2 ตัวหารมีเลขโดดมากกว่า 1 ตัว ในกรณีนี้จะใช้จำนวนทบร้อย ทบพัน ฯลฯ ของตัวหารเข้าช่วยในการหาร

ตัวอย่างที่ 3.1.11 จงหาร 216 ด้วย 89

แนวคิด ขั้นที่ 1-2 หาจำนวนทบร้อยของ 89 ซึ่งคือ 11 จะได้ MD = 11 เนื่องจาก MD มีเลขโดด 2 ตัว จึงแบ่งตัวตั้ง 216 ด้วย | โดยนับเลขโดดจากทางขวาของตัวตั้งไปทางซ้าย 2 ตัวแล้วเขียน | ข้างหน้า หลังจากนั้นเขียนการตั้งหารจะได้

$$
\begin{array}{ccc|cc}
8\;9 &) & 2 & 1 & 6 \\
1\;1 & & & &
\end{array}
$$

ขั้นที่ 3 ขีดเส้นใต้บรรทัดที่ 2 แล้วชักเลขโดดซ้ายสุดของ D (ในที่นี้คือ 2) ลงมาตรง ๆ และเขียนไว้บรรทัดที่ 3

$$\begin{array}{rr|l} 8\ 9\ ) & 2 & 1\ 6 \\ 1\ 1 & & \\ \hline & 2 & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 นำ 11 ซึ่งเป็น MD ไปคูณกับ 2 ที่ชักลงมา จะได้ $2 \times 11 = 22$ เขียน 22 ไว้บรรทัดที่ 2 ในสองหลักถัดไปทางขวา

$$\begin{array}{rr|l} 8\ 9\ ) & 2 & 1\ 6 \\ 1\ 1 & & 2\ 2 \\ \hline & 2 & \end{array}$$

ขั้นที่ 5 บวก 16 กับ 22 จะได้ $16 + 22 = 38$ เขียนไว้บรรทัดที่ 3 ให้ตรงกับตัวเลขที่บวกกันจะเห็นว่ามี | หน้า 38 ซึ่ง 38 คือเศษ ส่วน 2 ที่ชักลงมาตั้งแต่ต้นคือผลลัพธ์

$$\begin{array}{rr|l} 8\ 9\ ) & 2 & 1\ 6 \\ 1\ 1 & & 2\ 2 \\ \hline & 2 & 3\ 8 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 2

เศษคือ 38

ดังนั้น $216 \div 89 = 2$ เศษ 38

■

ตัวอย่างที่ 3.1.12 จงหาร 112 ด้วย 87

แนวคิด

$$\begin{array}{rr|l} 8\ 7\ ) & 1 & 1\ 2 \\ 1\ 3 & & 1\ 3 \\ \hline & 1 & 2\ 5 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 1

เศษคือ 25

ดังนั้น $112 \div 87 = 1$ เศษ 25

■

ตัวอย่างที่ 3.1.13 จงหาร 34567 ด้วย 89

แนวคิด ขั้นที่ 1-2

8 9) 3 4 5	6 7
1 1	

ขั้นที่ 3 เนื่องจากจะต้องใช้หลายบรรทัดในการคำนวณ จึงขีดเส้นใต้ไว้บรรทัดที่ห่างจากบรรทัดที่ 1 พอสมควร แล้วชัก 3 ซึ่งเป็นเลขโดดซ้ายสุดของตัวตั้งลงมา

8 9) 3 4 5	6 7
1 1	
3	

ขั้นที่ 4 นำ MD = 11 คูณ 3 ที่ชักลงมา จะได้ $3 \times 11 = 33$ เขียนไว้บรรทัดที่ 3 ในสองหลักถัดไปทางขวา

8 9) 3 4 5	6 7
1 1 3 3	
3	

ขั้นที่ 4 (ก) บวก 4 กับ 3 ซึ่งเป็นเลขโดดในบรรทัดที่ 1 และ 2 อยู่ในหลักพันเหมือนกันจะได้ $4 + 3 = 7$ เขียน 7 ลงมาตรงๆ ในบรรทัดล่างสุด

8 9) 3 4 5	6 7
1 1 3 3	
3 7	

ขั้นที่ 4 (ข) นำ MD = 11 คูณ 7 ในบรรทัดสุดท้าย จะได้ $7 \times 11 = 77$ เขียน 77 ไว้ในบรรทัดที่ 3 ในหลักถัดไปทางขวา

8 9) 3 4 5	6 7
1 1 3 3	
7	7
3 7	

ขั้นที่ 4 (ค) บวก 5 กับ 3 กับ 7 ซึ่งเป็นเลขโดดในบรรทัดที่ 1, 2 และ 3 อยู่ในหลักร้อยเหมือนกัน จะได้ 5 + 3 + 7 = 15 เขียน ${}_{1}5$ ลงมาตรงๆ ในบรรทัดล่างสุด (ที่เขียน ${}_{1}5$ เพราะ 15 เป็นเลข 2 หลัก จึงเขียน ${}_{1}5$ เพื่อเตรียมทด 1 ไปหลักทางซ้าย)

$$\begin{array}{cccccc|cc}
8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
1 & 1 & & & 3 & 3 & & \\
& & & & & 7 & 7 & \\
\hline
& & & 3 & 7 & {}_{1}5 & &
\end{array}$$

ขั้นที่ 4 (ง) นำ MD = 11 คูณ ${}_{1}5$ ในบรรทัดสุดท้าย จะได้ ${}_{1}5 \times 11 = {}_{1}5\ {}_{1}5$ ไว้บรรทัดที่ 4 ในสองหลักถัดไปทางขวา

$$\begin{array}{cccccc|cc}
8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
1 & 1 & & & 3 & 3 & & \\
& & & & & 7 & 7 & \\
& & & & & & {}_{1}5 & {}_{1}5 \\
\hline
& & & 3 & 7 & {}_{1}5 & &
\end{array}$$

ขั้นที่ 5 หาผลบวกของ 6 กับ 7 กับ ${}_{1}5$ และ 7 กับ ${}_{1}5$ จะได้

$6 + 7 + {}_{1}5 = {}_{2}8$ และ $7 + {}_{1}5 = {}_{2}2$ แล้วเขียนผลลัพธ์ลงมาบรรทัดสุดท้าย ให้ตรงกับเลขที่บวกกันจะเห็นว่ามี | หน้า ${}_{2}8$

$$\begin{array}{cccccc|cc}
8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
1 & 1 & & & 3 & 3 & & \\
& & & & & 7 & 7 & \\
& & & & & & {}_{1}5 & {}_{1}5 \\
\hline
& & & 3 & 7 & {}_{1}5 & {}_{2}8 & {}_{2}2
\end{array}$$

ขั้นที่ 6 เศษที่ได้คือ ${}_{2}8\ {}_{2}2 = 302$ ซึ่งมีค่าเกิน 89 จึงทำการหารเศษต่อไป ดังนี้

$$\begin{array}{cccc|cc}
8 & 9 &) & 3 & 0 & 2 \\
1 & 1 & & & 3 & 3 \\
\hline
& & & 3 & 3 & 5
\end{array}$$

จะได้ผลลัพธ์คือ 3

เศษคือ 35

ขั้นที่ 7 นำผลลัพธ์ 3 ไปบวกกับผลลัพธ์เดิม คือ $37_{1}5$ จะได้ $37_{1}5 + 3 = 385 + 3 = 388$ คือผลลัพธ์สุดท้ายและเศษสุดท้ายคือ 35 ซึ่งได้จากขั้นที่ 6

จะได้ผลลัพธ์คือ 388

เศษคือ 35

ดังนั้น $34567 \div 89 = 388$ เศษ 35

หมายเหตุ เขียนเป็นวิธีทำแบบต่อเนื่องได้ดังนี้

89) 3 4 5	6 7		
11 3 3			
7	7		
	$_{1}5\ _{1}5$		
$3\ 7\ _{1}5$	$_{2}8\ _{2}2$		
$3\ 7\ _{1}5$	3	0 2	
		3 3	
	3	3 5	
$3\ 7\ _{1}5$	3	3 5	= 385 + 3 | 35
			= 388 | 35

ผลลัพธ์คือ 388

เศษคือ 35

ดังนั้น $34567 \div 89 = 388$ เศษ 35

■

ตัวอย่างที่ 3.1.14 จงหาร 1011638 ด้วย 987

แนวคิด MD ของ 987 คือ 013 (ต้องเขียนเป็นเลข 3 หลักเหมือนตัวหาร จึงเติม 0 หน้า 13)

$$\begin{array}{rr|l}
9\,8\,7\,) & 1\,0\,1\,1 & 6\,3\,8 \\
0\,1\,3 & 0\,1\,3 & \\
 & 0\,0 & 0 \\
 & 0 & 2\,6 \\
 & & 0\,5\,2 \\ \hline
 & 1\,0\,2\,4 & 8_1\,4_1\,0
\end{array} \quad = 1024 \mid 950$$

ผลลัพธ์คือ 1024

เศษคือ 950

ดังนั้น $1011638 \div 987 = 1024$ เศษ 950

■

ตัวอย่างที่ 3.1.15 จงหาร 300000 ด้วย 9888

แนวคิด

$$\begin{array}{rr|l}
9\,8\,8\,8\,) & 3\,0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,1\,1\,2 & 0 & 3\,3\,6 \\
 & & 0\,0\,0\,0 \\ \hline
 & 3\,0 & 3\,3\,6\,0
\end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 30

เศษคือ 3360

ดังนั้น $300000 \div 9888 = 30$ เศษ 3360

■

ในกรณีที่ตัวตั้งมีเลขโดดที่มีค่ามากกว่า 5 อยู่หลายตัว เราอาจจะแปลงเลขโดดเหล่านั้นโดยใช้ขีดบน เพื่อคิดคำนวณโดยใช้เลขโดดที่น้อยกว่า 5 จะสะดวกกว่าดังนี้

ตัวอย่างที่ 3.1.16 จงหาร 98564318 ด้วย 9886

แนวคิด 98564318 = $1\ 0\ \bar{1}\ \bar{4}\ \bar{4}\ 4\ 3\ 2\ \bar{2}$

$$9\ 8\ 8\ 6\ )\ 9\ 8\ 5\ 6\ 4\ 3\ 1\ 8$$

$$\begin{array}{r|l}
0\,1\,1\,4\,)\,1\,0\,\bar{1}\ \bar{4}\ \bar{4} & 4\ 3\ 2\ \bar{2} \\
0\ 1\ \ 1\ 4 & \\
0\ \ 0\ 0 & 0 \\
0\ 0 & 0\,0 \\
0 & \bar{3}\ \bar{3}_{\bar{1}}\ \bar{2} \\
 & 0\,0\ \ 0\ 0 \\
\hline
1\ 0\ 0\ \bar{3}\ \ 0 & 1\ 0_{\bar{1}}\ 0\ \ \bar{2}
\end{array}
= 1\,0\,0\,\bar{3}\ 0\,|\,1\ \bar{2}\ 0\ \bar{2}$$

$$= 9970\,|\,0898$$

ผลลัพธ์คือ 9970

เศษคือ 898

ดังนั้น 98564318 ÷ 9886 = 9970 เศษ 898

■

สนุกกับตัวเลข (9)

เก้าคูณกับเก้าได้ เก้า แปด ศูนย์ หนึ่ง

9×9	=	81
99×99	=	9801
999×999	=	998001
9999×9999	=	99980001
99999×99999	=	9999800001
999999×999999	=	99999 8000001
9999999×9999999	=	99999980000001
99999999×99999999	=	9999999800000001
999999999×999999999	=	999999998000000001

ตัวอย่างที่ 3.1.17 จงหาร 9876534201 ด้วย 8876

แนวคิด 9876534201 = $1\ 0\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{4}\ 5\ 3\ 4\ 2\ 0\ 1$

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{8\ 8\ 7\ 6\ )\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 3\ 4\ 2\ 0\ 1} \\
1\ 1\ 2\ 4\ )\ 1\ 0\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{4}\ 5\ 3 & 4\ \ 2\ \ 0\ \ 1 \\
1\ 1\ 2\ 4\qquad\quad & \\
1\ 1\ 2\ 4\quad\ \ & \\
1\ 1\ 2\ 4 & \\
2\ 2\ 4 & 8 \\
5\ 5 & {}_{1}0\ {}_{2}0 \\
{}_{1}8 & {}_{1}8\ {}_{3}6\ {}_{7}2 \\
 & {}_{3}4\ {}_{3}4\ {}_{6}8\ {}_{13}6 \\
\hline
1\ 1\ 1\ 2\ 5\ {}_{1}8\ {}_{3}4 & {}_{7}4\ {}_{9}2\ {}_{14}0\ {}_{13}7 \\
1\ 1\ 1\ 2\ 6\ {}_{1}1\ 4 & {}_{8}3\ \ 2\ {}_{15}3\ \ 7 \\
1\ 1\ 1\ 2\ 7\ 1\ 4 & {}_{8}4\ \ 7\ \ 3\ \ 7 \\
 & 8 \mid 4\ 7\ 3\ 7 \\
 & \quad\mid 8\ 8\ {}_{1}6\ {}_{3}2 \\
 & 8 \mid {}_{1}2\ {}_{1}5\ {}_{1}9\ {}_{3}9 \\
\hline
1\ 1\ 1\ 2\ 7\ 2\ 2 & \quad\mid {}_{1}3\ 7\ 2\ 9 \\
 & 1 \mid 3\ 7\ 2\ 9 \\
 & \quad\mid 1\ 1\ 2\ 4 \\
 & 1 \mid 4\ 8\ 4\ {}_{1}3 \\
\hline
1\ 1\ 1\ 2\ 7\ 2\ 3 & 4\ \ 8\ \ 5\ \ 3
\end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 1112723

เศษคือ 4853

ดังนั้น 9876534201 $\div$ 8876 = 1112723 เศษ 4853

■

ตัวอย่างที่ 3.1.18 จงหาร 157689 ด้วย 887

แนวคิด 157689 $= 2\,\bar{4}\,\bar{2}\,\bar{3}\,\bar{1}\,\bar{1}$

$$
\begin{array}{r|c|l}
887\,)\,1\;5\;7 & \multicolumn{2}{l}{6\;\;8\;\;9} \\
113\,)\,2\;\bar{4}\;\bar{2} & \multicolumn{2}{l}{\bar{3}\;\;\bar{1}\;\;\bar{1}} \\
2\;2 & \multicolumn{2}{l}{6} \\
\bar{2} & \multicolumn{2}{l}{\bar{2}\;\bar{6}} \\
 & \multicolumn{2}{l}{\bar{2}\;\;\bar{2}\;\;\bar{6}} \\
\hline
2\;\bar{2}\;\bar{2} & \multicolumn{2}{l}{\bar{1}\;\;\bar{9}\;\;\bar{7}} \\
1\;7\;8 & \multicolumn{2}{l}{\bar{1}8\;\;0\;\;3} \\
\hline
1\;7\;8 & \bar{1} & 8\;0\;3 \\
 & & \bar{1}\;\bar{1}\;\;\bar{3} \\
 & \bar{1} & 7\;\bar{1}\;\;0 \\
\hline
1\;7\;8 & \bar{1} & 6\;9\;0 \\
1\;7\;7 & & 6\;9\;0
\end{array}
$$

ผลลัพธ์คือ 177

เศษคือ 690

ดังนั้น 157689 $\div$ 887 = เศษ 690

■

สนุกกับตัวเลข (10)

ศูนย์ ระหว่างหนึ่ง กับ แปด

12×9	=	108
112×99	=	11088
1112×999	=	1110888
11112×9999	=	111108888
111112×99999	=	11111088888
1111112×999999	=	1111110888888
11111112×9999999	=	111111108888888
$111111112 \times 99999999$	=	11111111088888888
$1111111112 \times 999999999$	=	

แบบฝึกหัดที่ 3.1

จงหาผลหารต่อไปนี้ (ตอบในรูปผลลัพธ์ และเศษ)

1. $68 \div 9$
2. $221 \div 9$
3. $3128 \div 8$
4. $6153 \div 89$
5. $212132 \div 989$

สนุกกับตัวเลข (11)

ซ้ำแล้วซ้ำอีก

$1/89 = 0.\dot{0}1234567\dot{9}$

$1/891 = 0.\dot{0}11223344\ 55667789$

$1/8991 = 0.\dot{0}001112223\ \ 33444555666777888\dot{9}$

$1/89991 = 0.\dot{0}0001111222\ 2333344445555666677\ 77888\dot{9}$

$1/899991 =$

$0.\dot{0}0000111112\ 2222333\ 33444445555566667\ 77778888\dot{9}$

$1/27 = 0.\dot{0}3\dot{7}$

$1/297 = 0.\dot{0}0336\dot{7}$

$1/2997 = 0.\dot{0}0033366\dot{7}$

$1/29997 = 0.\dot{0}0003333666\dot{7}$

$1/299997 = 0.\dot{0}0000333336\ \ 666\dot{7}$

ตอนที่ 3.2 ทศนิยม

เรื่องที่ 3.2.1 ทศนิยม

การหารสังเคราะห์สามารถหาผลลัพธ์ในระบบทศนิยมได้โดยใส่จุดหลังตัวตั้งและเติม 0 เท่ากับจำนวนตำแหน่งของทศนิยมที่ต้องการดังนี้

ตัวอย่างที่ 3.1.19 จงหาค่าของ 345675 ÷ 9 ต้องการทศนิยม 10 ตำแหน่ง 1

แนวคิด 9) 3 4 5 6 7 | 5

1 3 $7_1 2_1 8$ | $_2 5$

3 $7_1 2_1 8_2 5$ |

3 8 4 0 5 | 3 0

| 3

3 8 4 0 5 | 3 | 3

3 8 4 0 5 + 3 | 3

3 8 4 0 8 | 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 0 (หาร 3 ที่เป็นเศษ

3 3 3 3 3 3 3 3 3 | 3 โดยเติม 0 หลัง 3

3 3 3 3 3 3 3 3 3 | 3 ที่เป็นเศษ 10 ตัว

3 8 4 0 8. 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 แล้วเขียน | หน้า

0 ตัวขาวสุด)

ดังนั้น 345675 ÷ 9 = 38408.3333333333

■

สนุกกับตัวเลข (12)

ศูนย์ ระหว่างแปด กับ หนึ่ง

89×9	=	801
889×99	=	88011
8889×999	=	8880111
88889×9999	=	888801111
888889×99999	=	88888011111
8888889×999999	=	8888880111111
88888889×9999999	=	888888801111111
888888889×99999999	=	88888888011111111

ตัวอย่างที่ 3.1.20 จงหาค่าของ 2341 ÷ 89 ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง

แนวคิด

$$
\begin{array}{r|l}
89\ )\ 23 & 41 \\
11 \quad\quad 2 & 2 \\
 & 55 \\
\hline
25 & {}_{1}16 \\
25\ 1 & 16 \\
 & 11 \\
\hline
1 & 27 \\
\hline
25+1 & 27 \\
26 & 27000 \\
 & \ \ 22 \\
 & \ \ \ \ 99 \\
 & \ \ \ \ {}_{1}1\,{}_{1}1 \\
\hline
 & 29\,{}_{1}1{}_{2}0{}_{1}1 \\
 & 30311 \\
\hline
26 & 303
\end{array}
$$

(หารเศษ 27 เมื่อต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง เติม 0 จำนวน 3 ตัวหลัง 27 แล้วทำการหาร)

26.303

ดังนั้น 2341 ÷ 89 = 26.303

■

สนุกกับตัวเลข (13)

ทำอย่างไรก็หนีไม่พ้นแปด

$(0 \times 9) + 8 = 8$

$(9 \times 9) + 7 = 88$

$(98 \times 9) + 6 = 888$

$(987 \times 9) + 5 = 8888$

$(9876 \times 9) + 4 = 88888$

$(98765 \times 9) + 3 = 888888$

$(987654 \times 9) + 2 = 8888888$

$(9876543 \times 9) + 1 = 88888888$

$(98765432 \times 9) + 0 = 888888888$

$(987654321 \times 9) + -1 = 88888888888$

ตัวอย่างที่ 14.20 จงหาค่าของ 2467 ÷ 8 ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง

แนวคิด

$8\ )\ 2\ 4\ 6 \mid 7$

$2 \quad 4\ {}_{1}6 \mid {}_{4}4$

$2\ 8\ {}_{2}2 \mid {}_{5}1$

$3\ 0\ 2 \mid 5 \mid 1$

${}_{1}0$

$5 \mid {}_{1}1$

$3\ 0\ 7 \mid {}_{1}1$

$3\ 0\ 7 \mid 1 \mid 1$

2

$1 \mid 3$

$3\ 0\ 8 \mid 3\ 0\ 0$

$6\ {}_{1}2$

$3\ 6\ {}_{1}2$

$3\ 7\ 2$

$3\ 0\ 8 \mid 3\ 7\ 2$

$3\ 0\ 8\ .\ 3\ 7$

ดังนั้น 2467 ÷ 8 = 308.37

■

สนุกกับตัวเลข (14)

การบวกแบบพาลินโดรมและกำลังสอง

1	=	1	=	1^2
1+2+1	=	4	=	2^2
1+2+3+2+1	=	9	=	3^2
1+2+3+4+3+2+1	=	16	=	4^2
1+2+3+4+5+4+3+2+1	=	25	=	5^2
1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1	=	36	=	6^2
1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1	=	49	=	7^2
1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1	=	64	=	8^2
1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1	=	81	=	9^2

ตัวอย่างที่ 14.21 จงหาค่าของ 64532 ÷ 98 ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง

แนวคิด

9 8) 6 4 5	3 2
0 2 $0\,{}_{1}2$	
0	8
	$0\,{}_{3}4$
$6\;4\,{}_{1}7$	${}_{1}1\,{}_{3}6$
6 5 7	${}_{1}4\;6$
6 5 7	1 | 4 6
	0 2
	1 | 4 8
6 5 8	4 8 0 0
	0 8
	$0\,{}_{1}6$
	$4\;8\;8\,{}_{1}6$
	4 8 9 6
6 5 8	4 8 9 6
6 5 8	. 4 8 9

ดังนั้น $64532 \div 98 = 658.489$ ■

ข้อสรุป

การหารโดยวิธีนี้เหมาะสำหรับตัวหารที่มีค่ามาก ในขณะที่จำนวนทบสิบหรือทบร้อยทบพัน ฯลฯ ของตัวหารเหล่านั้นมีตัวเลขโดดแต่ละตัวมีค่าน้อย นอกจากนี้การหารสังเคราะห์จะเป็นการปฏิบัติการกลับกับหารธรรมดา กล่าวคือ ใช้การคูณ และการบวก ในขณะที่การหารธรรมดาต้องใช้การหาร และการลบ การหารโดยวิธีนี้จึงรวดเร็วกว่า

แบบฝึกหัดที่ 3.2

จงหาผลหารต่อไปนี้ (ตอบในรูปทศนิยมห้าตำแหน่ง)

1. $68 \div 9$
2. $221 \div 9$
3. $3128 \div 8$
4. $6153 \div 89$
5. $212132 \div 989$

หน่วยที่ 4
การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 4.1 กระบวนการแก้ปัญหา
ตอนที่ 4.2 การสร้างสรรค์ปัญหา

แนวคิด 1. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีกระบวนการแก้ปัญหาตามขั้นตอนดังนี้

(1) ทำความเข้าใจปัญหา

(2) วางแผนแก้ปัญหา

(3) ดำเนินการตามแผนที่วางไว้

(4) ตรวจสอบผลเฉลยหรือคำตอบ

(5) สร้างสรรค์ปัญหาขึ้นใหม่จากปัญหาที่มีอยู่เดิม

2. การออกแบบแก้ปัญหาจะทำให้ผู้ออกแบบทราบว่าจะต้องใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง และสามารถสร้างสรรค์การแก้ปัญหาได้หลากหลายวิธี

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 4 จบแล้วนักเรียนสามารถ

1. ทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาได้
2. วางแผนและออกแบบการแก้ปัญหาได้
3. แก้ปัญหาได้อย่างชัดเจน รัดกุม ถูกต้อง
4. สร้างสรรค์การแก้โจทย์ปัญหา และดัดแปลงโจทย์ปัญหาเดิมเป็นโจทย์ปัญหาใหม่ได้

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์ยกตัวอย่างโจทย์ให้นักเรียนอภิปรายแนวคิดของวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่ามีกระบวนการแก้ปัญหาอย่างไร
2. อาจารย์สรุปกระบวนการแก่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วแสดงตัวอย่างการแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนตามกระบวนการแก้ปัญหาที่สรุปไว้
3. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มให้ออกแบบการแก้ปัญหา โดยมีการนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาของแต่ละกลุ่มหน้าชั้นเรียน
4. นักเรียนนำกิจกรรมตามตัวอย่างและแบบฝึกหัด
5. นักเรียนประเมินผลพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 4.1 กระบวนการแก้ปัญหา

เรื่องที่ 4.1.1 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น ขั้นแรกจะต้องอ่านโจทย์ปัญหาให้เข้าใจก่อน ซึ่งในปัญหาอาจจะมีคำศัพท์ หรือบทนิยามที่กำหนดให้ จำเป็นที่จะต้องทำความเข้าใจก่อน แล้วดูข้อกำหนดที่ให้มา และโจทย์ถามอะไร เมื่อเข้าใจครบแล้วอย่าเพิ่งแก้ปัญหาทันที ควรวางแผนก่อนว่าต้องใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง แล้วดำเนินการตามแผนสุดท้ายตรวจสอบผลเฉลย หรือคำตอบที่ได้ว่าไม่มีข้อขัดแย้งกับที่กำหนดให้ ก็น่าจะเป็นผลเฉลยหรือคำตอบที่ถูกต้อง ส่วนใหญ่เรามักจะหยุดกันแค่นี้ แต่ถ้ารู้จักดัดแปลงปัญหาที่มีอยู่เดิมแล้วตั้งคำถามใหม่ เราจะได้ปัญหาที่ชวนคิดมากขึ้นและได้ความรู้มากมาย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ปัญหาที่ 1

จงเรียงอันดับของจำนวนต่อไปนี้ให้ถูกต้อง จากน้อยไปมาก 2^{514}, 4^{258}, 8^{171}, 16^{128} และ 32^{103}

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

เมื่อศึกษาโจทย์แล้วพบว่า มีจำนวนห้าจำนวน เขียนอยู่ในรูปเลขยกกำลัง และจะต้องเรียงอันดับจำนวนทั้งห้านี้จากซ้ายไปขวา และเรียงจาก น้อยไปมาก

ขั้นวางแผน

จากจำนวนทั้งห้าพบว่าเปลี่ยนแปลง เป็นเลขยกกำลังที่มีฐาน เป็น 2 ได้ทั้งหมด จึงจะใช้ความรู้เรื่องอสมการในเลขยกกำลัง ดังนี้

“ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 b และ c เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $b < c$ แล้ว จะได้ $a^b < a^c$” และ “ ถ้า a, bและ c เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว $(a^b)^c = a^{bc}$”

ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

พิจารณาเลขยกกำลัง แล้วเปลี่ยนแปลงให้มีฐานเป็น 2 จะได้

2^{514}

$4^{258} = 2^{2(258)} = 2^{516}$

$8^{171} = 2^{3(171)} = 2^{513}$

$16^{128} = 2^{4(128)} = 2^{512}$

$32^{103} = 2^{5(103)} = 2^{515}$

เนื่องจาก 512 < 513 < 514 < 515 < 516 จึงได้

$2^{512} < 2^{513} < 2^{514} < 2^{515} < 2^{516}$

นั่นคือ $16^{128} < 8^{171} < 2^{514} < 32^{103} < 4^{528}$ จึงเรียงอันดับจำนวนทั้งห้าจากน้อยไปมากได้ดังนี้

$16^{128}, 8^{171}, 2^{514}, 32^{103}, 4^{528}$

■

ปัญหาที่ 2

เซต $A = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in N, 1 \le p \le 10 \wedge 1 \le q \le 10 \right\}$ มีสมาชิกทั้งหมดกี่ตัว

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

เซตของปัญหาคือ A สิ่งที่โจทย์ต้องการ คือ จำนวนสมาชิกของเซต A นอกจากนี้พบว่าสมาชิกของเซต A เป็นจำนวนที่เขียนแทนได้ด้วยเศษส่วน โดยที่ตัวเศษและตัวส่วนต่างก็เป็นจำนวนเต็มที่มีค่าได้ ตั้งแต่ 1 ถึง 10

ขั้นวางแผน

1. แจกแจงเศษส่วนทั้งหมด สมมติมี a เศษส่วน
2. หาเศษส่วนที่มีค่าเท่ากัน ในแต่ละค่าไว้เป็นกลุ่มเดียวกัน
3. นับจำนวนกลุ่มที่ได้ทั้งหมดสมมติเป็น b
4. นับเศษส่วนทั้งหมดที่มีค่าซ้ำกัน สมมติเป็น c
5. หาค่าของ (a+b-c) จะได้คำตอบที่ต้องการ

ขั้นดำเนินการ

1. เศษส่วนทั้งหมดมี $10 \times 10 = 100$
2. จัดกลุ่มเศษส่วนที่มีค่าเท่ากันไว้ด้วยกัน

กลุ่มที่ 1 $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \frac{10}{10}$

กลุ่มที่ 2 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$

กลุ่มที่ 3 $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}$

กลุ่มที่ 4 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$

กลุ่มที่ 5 $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3}$

กลุ่มที่ 6 $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

กลุ่มที่ 7 $\frac{4}{1} = \frac{8}{2}$

กลุ่มที่ 8 $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$

กลุ่มที่ 9 $\frac{5}{1} = \frac{10}{2}$

กลุ่มที่ 10 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

กลุ่มที่ 11 $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6}$

กลุ่มที่ 12 $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

กลุ่มที่ 13 $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$

กลุ่มที่ 14 $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

กลุ่มที่ 15 $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$

กลุ่มที่ 16 $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

กลุ่มที่ 17 $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$

กลุ่มที่ 18 $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

กลุ่มที่ 19 $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$

พบว่ามี 19 กลุ่ม ที่มีเศษส่วนซ้ำ และเศษส่วนที่ซ้ำมีทั้งหมด 56 ตัว ดังนั้นเศษส่วนที่มีค่าแตกต่างกันมีทั้งหมด 100+19-56 = 63 จำนวนนั่นคือ เซต A มีสมาชิก 63 ตัว

■

ปัญหาที่ 3

สำหรับจำนวนเต็มบวกใดๆ $n! = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\,2\,1$ ตัวอย่าง $4! = 4\cdot 3\,2\,1$ ถ้า หาร 2545! ด้วย 2546 และ r เป็นเศษที่ได้จากการหารนี้ r มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

โจทย์บอกความหมายของ n! เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกมาให้ พร้อมทั้งแสดงตัวอย่าง จึงทำให้เข้าใจความหมายของ n! ได้ง่าย สิ่งที่โจทย์ต้องการคือ หาค่าเศษที่ได้จากการหาร 2545! ด้วย 2546

ขั้นวางแผน พิจารณา 2545! พบว่า

$2545! = 2545 \times 2544 \times 2543 \times .... \times 3 \times 2 \times 1$

ดังนั้นถ้า 2546 แยกตัวประกอบที่มากกว่า 1 ได้จะทำให้ตัวประกอบของ 2546 ทุกตัวมีค่า

น้อยกว่า 2545 ดังนั้นตัวประกอบทุกตัวของ 2546 ที่ไม่ใช่ 2546 จะเป็นจำนวนในผลคูณที่ประกอบกันเป็น 2545! ย่อมส่งผลให้ 2546 หาร 2545! ลงตัวจึงทำให้เศษ r มีค่าเท่ากับ 0

ขั้นดำเนินการ

พิจารณา $2546 = 2 \times 1273$

ซึ่ง 2 และ 1273 ต่างก็เป็นตัวประกอบที่ต่างกันของ 2545!

ดังนั้น 2×1273 หาร 2545! ได้ลงตัว

นั่นคือ 2545! หารด้วย 2546 ลงตัวจึงไม่มีเศษ

ดังนั้น $r = 0$

■

ปัญหาที่ 4

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง

$a * b = a^b$ ค่า $\dfrac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

โจทย์กำหนดการดำเนินการทวิภาค * บนเซตของจำนวนเต็มมาให้คือ $a * b = a^b$ เช่น $2 * 3 = 2^3 = 8$ โจทย์ต้องการหาค่าของ $\dfrac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2}$

ขั้นวางแผน

จากเศษส่วนหาค่าตัวเศษ โดยทำวงเล็บในก่อนออกมาทีละขั้น ต่อไปหาค่าตัวส่วนในทำนองเดียวกัน แล้วหาผลหารของตัวเศษ และตัวส่วนจะได้ค่าที่ต้องการ

นอกจากนี้เนื่องจาก มีวงเล็บซ้อนกัน จะพบว่า

$(a * b) * c = (a^b)^c = a^{bc}$

และ $a * (b * c) = a^{\left(b^c\right)}$ จึงต้องนำสมบัติทั้งสองนี้ไปใช้ด้วย

ขั้นดำเนินการ

จาก $2 * (2 * 2) = 2^{(2)^2} = 2^4 = 16$

จะ $2*(2*(2*2)) = 2^{\left(2*(2*2)\right)} = 2^{16}$

จาก $(2 * 2) * 2 = \left(2^2\right)^2 = 4^2 = 16$

จะได้ $((2*2)*2)*2 = 16^2 = \left(2^4\right)^2 = 2^8$

ดังนั้น $\dfrac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2} = \dfrac{2^{16}}{2^8} = 2^8 = 256$ ■

ปัญหาที่ 5

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 < 2x + 3 < 1$ และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 < y + 6 < 7$

จงหาช่วงที่เป็นเซตคำตอบของ $x + y$, $x - y$, $y - x$, $\frac{x}{y}$ และ $\frac{y}{x}$

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

โจทย์บอกค่าของ x และ y ในรูปอสมการเชิงเส้น แล้วให้หาช่วงที่เป็นเซตคำตอบของผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหาร ระหว่าง x กับ y

ขั้นวางแผน

1. หาค่า x และ y ในรูปอสมการ
2. ใช้เงื่อนไข สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d, x, y, z และ w

(1) ถ้า $a < x < b$ แล้ว $-b < -x < -a$

(2) ถ้า $a < x < b$ และ $c < y < d$ แล้ว $a + c < x + y < b + d$

(3) ถ้า $0 < a < x < b$ และ $0 < c < y < d$ แล้ว $0 < ac < xy < bd$

(4) ถ้า $a < x < b < 0$ และ $c < y < d < 0$ แล้ว $0 < bd < xy < ac$

(5) ถ้า $0 < a < x < b$ และ $c < y < d < 0$ แล้ว $bc < xy < ad < 0$

(6) ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(7) ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ เป็นต้น

ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

จาก $-1 < 2x + 3 < 1$

จะได้ $-1 - 3 < 2x + 3 - 3 < 1 - 3$

ดังนั้น $-4 < 2x < -2$

นั่นคือ $-2 < x < -1$ ....①

จาก $-1 < y + 6 < 7$

จะได้ $-1 - 6 < y + 6 - 6 < 7 - 6$

จะได้ $-7 < y < 1$ ....②

หาค่าของ $x + y$

จาก ① และ ② และเงื่อนไข 2(2)

จึงได้ $(-2) + (-7) < x + y < (-1) + 1$

นั่นคือ $-9 < x + y < 0$

ดังนั้นเซตคำตอบของ $x + y$ คือ $(-9, 0)$

หาค่าของ $x - y$

จาก ① และ ② จะได้ $-1 < -y < 7$ ....③

① + ③; $(-2) + (-1) < x - y < (-1) + 7$

จะได้ $-3 < x - y < -6$

ดังนั้นเซตคำตอบของ $x - y$ คือ $(-3, 6)$

หาค่าของ $y - x$

จาก $-3 < x - y < -6$

จึงได้ $-6 < y - x < 3$

ดังนั้นเซตคำตอบของ $y - x$ คือ $(-6, 3)$

หาค่าของ xy

พิจารณา $-7 < y < 1$ จะได้ $-7 < y < 0$ หรือ $y = 0$ หรือ $0 < y < 1$

และจาก $-2 < x < -1 < 0$ จะมีกรณีที่พิจารณาได้ดังนี้

กรณีที่ 1 $-7 < y < 0$ และ $-2 < x < -1$

จะได้ $(0)(1) < xy < (-7)(-2)$ (โดยเงื่อนไข 2(4))

ดังนั้น $0 < xy < 14$

กรณีที่ 2 $y = 0$ และ $-2 < x < -1$

จะได้ $xy = 0$

กรณีที่ 3 $0 < y < 1$ และ $-2 < x < -1$

จะได้ $(1)(-2) < xy < (0)(-1)$ โดยเงื่อนไข 2 (5)

ดังนั้น $-2 < xy < 0$

จากทั้งสามกรณีจะได้เซตคำตอบของ xy คือ $(0, 14) \cup \{0\} \cup (-2, 0)$ หรือ $(-2, 14)$

หาค่าของ $\frac{x}{y}$

ในการหาค่าของ $\frac{x}{y}$ นั้นจะต้องตัดกรณีที่ $y = 0$ ออกไปจึงพิจารณา กรณีที่ $-7 < y < 0$ และกรณีที่ $0 < y < 1$ เท่านั้น

กรณีที่ 1 $-7 < y < 0$ จะได้ $\frac{1}{y} < -\frac{1}{7}$

จาก $-2 < x < -1$ จะได้ $\frac{1}{7} < \frac{x}{y}$ โดยเงื่อนไข 2(4)

กรณีที่ 2 $0 < y < 1$ จะได้ $1 < \frac{1}{y}$

จาก $-2 < x < -1$ จะได้ $\frac{x}{y} < -1$ โดยเงื่อนไข 2(5)

จากทั้งสองกรณีจะได้เซตคำตอบของ $\frac{x}{y}$ คือ

$\left(\frac{1}{7},\infty\right) \cup (-\infty, -1)$ หรือ $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{7},\infty\right)$

หาค่าของ $\frac{y}{x}$

พิจารณา $-2 < x < -1$ จะได้ $-1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $x \neq 0$ การหาค่าของ $\frac{y}{x}$ จึงพิจารณากรณีของ y ทั้งสามกรณีเช่นเดียวกับการหาค่าของ xy ดังนี้

กรณีที่ 1 $-7 < y < 0$ และ $-1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$

จะได้ $(0)\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{y}{x} < (-7)(-1)$ (โดยเงื่อนไข 2(4))

นั่นคือ $0 < \frac{y}{x} < 7$

กรณีที่ 2 $0 < y < 1$ และ $-1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$

จะได้ $(1)(-1) < \frac{y}{x} < 0\left(-\frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $-1 < \frac{y}{x} < 0$

กรณีที่ 3 $y = 0$ จะได้ $\frac{y}{x} = 0$

จากทั้งสามกรณี จะได้เซตคำตอบของ $\frac{y}{x}$ คือ

$(-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 7)$ หรือ $(-1, 7)$

■

ตอนที่ 4.2 การสร้างสรรค์ปัญหา

เรื่องที่ 4.2.1 การดัดแปลงปัญหาคณิตศาสตร์

จากปัญหาทั้งห้าปัญหาที่กล่าวมาแล้ว ถ้าเปลี่ยนแปลงคำถาม หรือดัดแปลงโจทย์จะทำให้มีปัญหาที่ชวนคิดหลายหลายขึ้นมาทันที

จากปัญหาที่ 1

จงเรียงอันดับของจำนวนต่อไปนี้ให้ถูกต้องจากน้อยไปมาก 2^{514} , 4^{258}, 8^{171}, 16^{128} และ 32^{103}

ดัดแปลงเป็น

จงเรียงอันดับของจำนวนต่อไปนี้ให้ถูกต้องจากน้อยไปมาก 514^2 , 258^4, 171^8, 128^{16} และ 103^{32}

จากปัญหาจะเห็นว่า เงื่อนไขความรู้เปลี่ยนไป คือ ต้องใช้เงื่อนไข "สำหรับจำนวนจริงบวก a, b และ c ถ้า $a < b$ แล้ว $a^c < b^c$"

พิจารณา $258^4 = \left((258)^2\right)^2 = (66564)^2$

$$171^8 = \left((171)^4\right)^2 = (2221461)^2$$

$(128)^{16} = \left((128)^8\right)^2 = n^2$ โดยที่ $n = 128^8$ มากกว่า 2221461

$(103)^{32} = \left((103)^{16}\right)^2 = m^2$ โดยที่ $m = 103^{16}$มากกว่า 128^8

ดังนั้น $514^2 < 258^4 < 171^8 < 128^{16} < 103^{32}$ อันดับของจำนวนจากน้อยไปมากคือ 514^2 , 258^4, 171^8, 128^{16} และ 103^{32}

■

จากปัญหาที่ 2

เซต $A = \left(\frac{p}{q} \mid p, q \in N, 1 \le p \le 10 \wedge 1 \le q \le 10\right)$มีสมาชิกทั้งหมดกี่ตัว ดัดแปลงเป็น

กำหนด $A = \left(\frac{p}{q} \mid p, q \in N, 1 \le p \le 10 \wedge 1 \le q \le 10\right)$ จงหา ความน่าจะเป็นในการเลือกสมาชิกสองตัวที่แตกต่างกันของ A ที่มีผลบวกเท่ากับ 1

จากปัญหาจะเห็นว่า นำปัญหาเดิมมาคิดเพิ่มเติม ด้วยการเลือกสมาชิกใน A ซึ่งเป็นเศษส่วนสองจำนวนที่แตกต่างกันมาบวกกัน ให้มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อเลือกได้แล้วจึงหาความน่าจะเป็นในการเลือกนั้น ซึ่งต้องใช้จำนวนสมาชิกของ A ทั้งหมดจากปัญหาที่ 2 ก่อนหน้านี้ ซึ่งต้องใช้จำนวนสมาชิก 63 ตัว หลังจากนั้นใช้วิธีจัดหมู่เลือกสมาชิก 2 ตัว ของเซต A จากสมาชิกทั้งหมด เพื่อเป็นปริภูมิตัวอย่างได้เท่ากับ

$$\binom{63}{2} = \frac{63 \times 62}{2} = \quad 63 \times 31$$

หลังจากนั้นแจกแจงคู่สมาชิกของ A ที่แตกต่างกันแต่มีผลบวกเท่ากับ 1 ซึ่งแจกแจงได้ดังนี้

$$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}, \left\{\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right\}, \left\{\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right\}, \left\{\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right\}, \left\{\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right\}, \left\{\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{9},\frac{8}{9}\right\}, \left\{\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right\}, \left\{\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right\}, \left\{\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right\}, \left\{\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right\}, \left\{\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right\}$$

$$\left\{\frac{3}{5},\frac{5}{8}\right\}, \left\{\frac{3}{10},\frac{7}{10}\right\}, \left\{\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right\}$$

ซึ่งมีทั้งหมด 15 คู่ สมาชิกจะเห็นว่าการแจกแจงนี้ ไม่คิดอันดับเพราะเป็นเหตุการณ์ของวิธีจัดหมู่

ดังนั้นความน่าจะเป็นในการเลือกสมาชิกสองตัวที่แตกต่างกันของ A ที่มีผลบวกเท่ากับ 1 คือ

$$\frac{15}{63 \times 31} = \frac{15}{1953}$$

■

จากปัญหาที่ 3

สำหรับจำนวนเต็มบวกใดๆ $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

ตัวอย่าง $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

ถ้าหาร 2545! ด้วย 2546 และ r เป็นเศษส่วนที่ได้จากการหารนี้ r มีค่าเป็นเท่าใด

ดัดแปลงเป็น

จำนวนเฉพาะที่เล็กที่สุดหาร 2545! ไม่ลงตัวคือจำนวนใด

จากปัญหาที่ 3 เดิมพบว่า 2546 หาร 2545! ได้ลงตัว และ 2546 เป็นจำนวนประกอบ เห็นได้ชัดว่าจำนวนเฉพาะตัวถัดไปที่มีค่ามากกว่า 2546 จะหาร 2545! ไม่ลงตัว ทั้งนี้เพราะจำนวนเฉพาะตัวนั้น จะไม่ใช่ตัวประกอบของ 2545!

จำนวนเฉพาะตัวถัดไปที่มากกว่า 2546 คือ 2549 เป็นจำนวนเฉพาะ ตัวที่เล็กที่สุดที่หาร 2545! ไม่ลงตัว

หมายเหตุ เซตของจำนวนเฉพาะในช่วง 2500 – 2599 คือ

{2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2591, 2593}

■

จากปัญหาที่ 4 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง

$a * b = a^b$ ค่าของ $\dfrac{2*\left(2*(2*2)\right)}{\left((2*2)*2\right)*2}$ เท่ากับเท่าใด

ดัดแปลงเป็น

กำหนดให้ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซตของจำนวนเต็ม
บวก N นิยามโดย $a * b = a^b$
(1) มีเอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน N หรือไม่
(2) $*$ มีสมบัติการสลับที่บน N หรือไม่

จาก $a * b = a^b$ ทุก $a, b \in N$

(1) จะเห็นได้ว่า $a * 1 = a^1 = a$ ดูเหมือนว่า 1 น่าจะเป็นเอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน N แต่นิยามของเอกลักษณ์ สำหรับการดำเนินการ บนเซต A ใดๆ คือ สำหรับ $i \in A$ จะได้ $a * i = i * a = a$ จาก $*$ บน N พบว่า

$a * 1 = a^1 = a$

แต่ $1 * a = 1^a = 1 \neq a$

ดังนั้น 1 ไม่ใช่เอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน N

สมมติว่ามี $n \in N$ ซึ่ง n เป็นเอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน A

ดังนั้น $a * n = n * a = a$ ทุก $a \in N$

จะได้ $a^n = n^a$ ทุก $a \in N$ แต่ข้อความนี้ไม่เป็นจริง

จึงสรุปได้ว่า ไม่มี n ตัวใดใน N ที่เป็นเอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน N

(2) เนื่องจาก $a^b \neq b^a$ เมื่อ $a \neq b$ ทุก $a, b \in y$

จึงสรุปได้ว่า $*$ ไม่มีสมบัติการสลับที่บน N

■

จากปัญหาที่ 5

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 < 2x + 3 < 1$ และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 < y + 6 < 7$

จงหาช่วงที่เป็นเซตคำตอบของ $x + y, x - y, y - x, xy, \frac{x}{y}$ และ $\frac{y}{x}$

ดัดแปลงเป็น

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $-1 \leq 2x + 3 \leq 1$ และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 \leq y + 6 \leq 7$
จงหาค่ามากที่สุด และค่าน้อยที่สุดของ $x + y, x - y, y - x, xy, \frac{x}{y}$ และ $\frac{y}{x}$ ถ้ามี

จากปัญหาที่ 5 เดิม เมื่อเปลี่ยนเงื่อนไขจาก " < " เป็น " ≤ "

ดังนั้นค่าของ x และ y เดิมจาก $-2 < x < -1$ และ $-7 < y < 1$

จึงเปลี่ยนเป็น $-2 \le x \le -1$ และ $-7 \le y \le 1$

ส่งผลให้จากเดิม $-9 < x + y < 0$

เปลี่ยนเป็น $-9 \le x + y \le 0$

ทำให้ค่าต่ำสุดของ $x + y$ คือ -9

และค่าสูงสุดของ $x + y$ คือ 0

จากเดิม $-3 < x - y < 6$

เปลี่ยนเป็น $-3 \le x - y \le 6$

ทำให้ต่ำสุดของ $x - y$ คือ -3

และค่าสูงสุดของ $x - y$ คือ 6

จากเดิม $-6 < y - x < 3$

เปลี่ยนเป็น $-6 \le y - x \le 3$

ทำให้ค่าต่ำสุดของ $y - x$ คือ -6

และค่าสูงสุดของ $y - x$ คือ 3

จากเดิม $-2 < xy < 14$

เปลี่ยนเป็น $-2 \le xy \le 14$

ทำให้ต่ำสุดของ xy คือ -2

และค่าสูงสุดของ xy คือ 14

จากเดิม $-\infty < \frac{x}{y} < -1$ หรือ $\frac{1}{7} < x < \infty$

เปลี่ยนเป็น $-\infty < \frac{x}{y} \le -1$ หรือ $\frac{1}{7} \le x < \infty$

จะเห็นได้ว่า $\frac{x}{y}$ ไม่มีค่าต่ำสุด และไม่มีค่าสูงสุด

จากเดิม $-1 < \frac{x}{y} < 7$

เปลี่ยนเป็น $-1 \le \frac{y}{x} \le 7$

ทำให้ค่าต่ำสุดของ $\frac{y}{x}$ คือ -1

และค่าสูงสุดของ $\frac{y}{x}$ คือ 7

■

จากปัญหาทั้ง 5 ข้อ ดังที่แนะนำมานี้จะเห็นได้ว่า เราสามารถดัดแปลงปัญหาเดิมเป็นปัญหาใหม่ได้ โดยที่ปัญหาที่ดัดแปลงใหม่ อาจใช้พื้นฐานความรู้เดิม จากปัญหาเดิม มาแก้ปัญหาที่ดัดแปลงแล้ว และนอกจากนี้ ต้องให้ความรู้พื้นฐานอื่นเพิ่มเติมก็ได้ อันเป็นการทำให้กระบวนการแก้ปัญหา มีการสร้างสรรค์มากขึ้น

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงออกแบบการแก้ปัญหา และแก้ปัญหาต่อไปนี้

กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, ..., 100\}$

$A = \{X \in U \mid 2$ หารลงตัว$\}$

$B = \{X \in U \mid 3$ หารลงตัว$\}$

$|\, n(A - B) - n\,(B - A)\,|$ เท่ากับเท่าใด

2. จงดัดแปลงปัญหาในข้อ 1 เป็นปัญหาใหม่ แล้วออกแบบการแก้ปัญหา และแก้ปัญหาที่ดัดแปลงนี้

หน่วยที่ 5
ระเบียบวิธีพิสูจน์

ตอนที่ 5.1 การพิสูจน์ประโยค ถ้า...แล้ว...

ตอนที่ 5.2 การพิสูจน์ประโยคที่มีตัวเชื่อมผสม

ตอนที่ 5.3 การพิสูจน์ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

แนวคิด

1. ประโยค "ถ้า...แล้ว..." จะมีกำหนดให้เป็นเหตุให้ได้ผลเป็นข้อสรุป ซึ่งอาจจะมีกำหนดให้มากกว่าหนึ่งอย่าง และข้อสรุปอาจจะมีมากกว่าหนึ่งอย่าง
2. การพิสูจน์ประโยค "ถ้า...แล้ว..." ว่าเป็นจริง จำเป็นต้องใช้ความสมเหตุสมผล บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทเสริม หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อน
3. การพิสูจน์ อาจจำเป็นต้องใช้การแจงกรณี ข้อขัดแย้ง ข้อความแย้งสลับที่ ช่วยในการพิสูจน์
4. การพิสูจน์ประโยค "ถ้า...แล้ว..." อาจใช้การคิดแบบย้อนกลับมาช่วยการพิสูจน์ได้
5. ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณจะประกอบด้วย ตัวบ่งปริมาณสำหรับสมาชิกทุกตัว สมาชิกบางตัว

   ในการพิสูจน์ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ สำหรับสมาชิกทุกตัวว่าเป็นจริงนั้น เซตคำตอบของประโยคเปิดต้องเท่ากับเอกภพสัมพัทธ์

   ในการพิสูจน์ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณสำหรับสมาชิกบางตัวว่าเป็นจริงนั้นเซตคำตอบต้อง ไม่เท่ากับเซตว่าง

   นอกจากนี้สำหรับตัวบ่งปริมาณเฉพาะคือ "มีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น" เซตคำตอบจะมีสมาชิกเพียงตัวเดียว

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 5 จบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. ออกแบบการพิสูจน์และพิสูจน์ประโยค ถ้า...แล้ว... ได้ในเนื้อหาความรู้ตามระดับชั้นที่เรียน
2. ออกแบบการพิสูจน์และพิสูจน์ประโยคที่มีตัวเชื่อมผสมได้ในเนื้อหาตามระดับชั้นที่เรียน
3. ออกแบบการพิสูจน์และพิสูจน์ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณในเนื้อหาตามระดับชั้นที่เรียน

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายแนวคิดและขั้นตอนวิธีการพิสูจน์
2. อาจารย์ให้ตัวอย่างการพิสูจน์ประโยค ถ้า... แล้ว ...การพิสูจน์ประโยคที่มีตัวเชื่อมผสม การพิสูจน์ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ
3. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ให้นักเรียนบางกลุ่มออกแบบการพิสูจน์และพิสูจน์ประโยค ถ้า... แล้ว... บางกลุ่มออกแบบการพิสูจน์และพิสูจน์ประโยคที่มีตัวเชื่อมผสม บางกลุ่มออกแบบการพิสูจน์ และพิสูจน์ประโยค ที่มีตัวบ่งปริมาณ โดยใช้เนื้อหาตามระดับชั้นที่เรียน
4. นักเรียนนำเสนอผลงานของกลุ่มหน้าชั้นเรียน
5. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่างและแบบฝึกหัด
6. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกหัด
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 5.1 การพิสูจน์ประโยค ถ้า...แล้ว...

เรื่องที่ 5.1.1 ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์

ในการพิสูจน์ประโยคทางคณิตศาสตร์นั้น มีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจประโยคที่จะต้องพิสูจน์ โดยศึกษาสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่จะต้องพิสูจน์ บทนิยามที่เกี่ยวข้องและความหมายที่สมมูลกับประโยคที่จะทำการพิสูจน์

ขั้นที่ 2 วิเคราะห์ข้อมูลที่ใช้ ศึกษาความรู้ของเนื้อหาพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง จำลองโครงสร้างทางตรรกวิทยาของรูปประโยคการพิสูจน์ การมองย้อนกลับ

ขั้นที่ 3 ใช้เทคนิคการอ้างเหตุผลแบบต่าง ๆ

ขั้นที่ 4 ออกแบบการพิสูจน์แล้วดำเนินการพิสูจน์

ขั้นที่ 5 ตรวจสอบความสมเหตุสมผลทุกขั้นตอนการพิสูจน์ ถ้าไม่สมเหตุสมผล ย้อนไปศึกษาขั้นที่ 1,2,3 หรือ 4 ใหม่ แล้วแก้ไขให้ถูกต้อง

สิ่งที่เป็นประโยชน์และช่วยในการพิสูจน์ มีดังนี้

1. ข้อความแย้งสลับที่ของทั้ง บทนิยาม ทฤษฎีบท สัจพจน์ และข้อความที่จะพิสูจน์
2. นิเสธของทั้ง บทนิยาม ทฤษฎีบท สัจพจน์ และข้อความที่จะพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 5.1.1 จงเขียนขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ขั้นที่ 1-3 ของข้อความ

"ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่"

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจ

สิ่งที่กำหนดให้คือ "a เป็นจำนวนเต็มใดๆ" ในที่นี้เอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนเต็ม สิ่งที่จะต้องพิสูจน์คือ "$a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่" บทนิยามที่เกี่ยวข้องคือ จำนวนคู่ จำนวนคี่ ความหมายที่สมมูลกับประโยคที่จะทำการพิสูจน์ คือ "ถ้า a เป็นจำนวนคี่ หรือจำนวนคู่แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่"

ขั้นที่ 2 วิเคราะห์ข้อมูลที่ใช้

ความรู้เนื้อหาพื้นฐานที่ใช้ คือ

(1) a เป็นจำนวนคี่ก็ต่อเมื่อ $a = 2n + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n

(2) a เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ $a = 2n$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n

(3) สมบัติปิดของการบวกและการคูณจำนวนเต็ม

(4) กำลังสองของนิพจน์

รูปประโยคและโครงสร้างการพิสูจน์

(1) $P \rightarrow (R_1 \vee R_2)$

(2) $(R_1 \rightarrow Q) \wedge (R_2 \rightarrow Q)$

เมื่อ P คือ "a เป็นจำนวนเต็ม"

R_1 คือ "a เป็นจำนวนคี่"

R_2 คือ "a เป็นจำนวนคู่"

Q คือ "$a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่'

ขั้นที่ 3 ใช้เทคนิคการอ้างเหตุผล

(1) ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ a เป็นจำนวนคี่ หรือ a เป็นจำนวนคู่

(2) 2.1 กรณีที่ a เป็นจำนวนคี่ ใช้บทนิยามจำนวนคี่แล้ว ดำเนินการทางพีชคณิต จนได้ a = 2m สำหรับบางจำนวนเต็ม m

2.2 กรณีที่ a เป็นจำนวนคู่ ใช้บทนิยามจำนวนคู่แล้ว ดำเนินการทางพีชคณิต จนได้ a = 2m สำหรับบางจำนวนเต็ม m

(3) จาก (1) และ (2) สรุปได้ตามต้องการ

■

ตัวอย่างที่ 5.1.2 จงเขียนขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ ขั้นที่ 1 – 3 ของข้อความ

"ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ ซึ่ง $A \subseteq B$ แล้ว $A \cap B' = \varnothing$"

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจ

สิ่งที่กำหนดให้คือ "A และ B เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $A \subseteq B$"

สิ่งที่จะต้องพิสูจน์ คือ "$A \cap B' = \varnothing$"

บทนิยามที่เกี่ยวข้อง คือ สับเซต คลอมพลีเมนต์ อินเตอร์เซกชัน และเซตว่าง

ความหมายที่สมมูลกับข้อความที่พิสูจน์ คือ "ถ้า $A \cap B' \neq \varnothing$ แล้ว $A \nsubseteq B$"

ขั้นที่ 2 วิเคราะห์ข้อมูลที่ใช้

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ คือ

(1) $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$

(2) $X = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ ทุก $x \in U$ จะได้ $x \notin X$

(3) $X \cap Y' = \{x \in U \mid x \in X$ และ $x \notin Y\}$

รูปประโยคและโครงสร้างการพิสูจน์

(1) $P \rightarrow Q$
(2) $\sim Q \rightarrow \sim P$ ซึ่งสมมูลกับ (1)

เมื่อ P คือ "$A \subseteq B$"

Q คือ "$A \cap B' = \varnothing$"

~Q คือ "$A \cap B' \neq \varnothing$"

~P คือ "$A \nsubseteq B$"

ขั้นที่ 3 ใช้เทคนิคการอ้างเหตุผล

เนื่องจากจะต้องสรุปว่า "$A \cap B' = \varnothing$" จึงไม่สามารถนำ x มาเป็นสมาชิกของ $A \cap B'$ ได้ เพราะ $A \cap B' = \varnothing$ ซึ่งไม่มีสมาชิก จึงจะพิสูจน์ข้อความ "$\sim Q \rightarrow \sim P$" แทน ซึ่งเป็นข้อความแย้งสลับที่ของข้อความ "$P \rightarrow Q$"

นั่นคือ จะพิสูจน์ "ถ้า $A \cap B' \neq \varnothing$ แล้ว $A \nsubseteq B$"

ความรู้พื้นฐานที่ใช้คือ

(1) $X \neq \varnothing$ ก็ต่อเมื่อมี x ซึ่ง $x \in X$

(2) $A \nsubseteq B$ ก็ต่อเมื่อมี x ซึ่ง $x \in A$ แต่ $x \notin B$

การพิสูจน์ดำเนินการดังนี้

ให้ $A \cap B' \neq \varnothing$

แล้วสรุปให้ได้ว่า $A \nsubseteq B$ จะเป็นการจบการพิสูจน์

■

เรื่องที่ 5.1.2 การพิสูจน์ประโยค ถ้า...แล้ว...

จากเรื่องที่ 5.1.1 กล่าวถึงขั้นตอนการพิสูจน์ ในเรื่องนี้จะเป็นแบบรูปการพิสูจน์ประโยค ถ้า P แล้ว Q ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ในรูป $P \rightarrow Q$

การพิสูจน์ประโยค $P \rightarrow Q$

อยู่ในรูป กำหนดให้ P

- •
- •
- •

→ ใช้ความสมเหตุสมผล
→ บทนิยาม, สัจพจน์
→ ทฤษฎีที่มีมาก่อน
→ ทฤษฎีบทเสริม (การพิสูจน์ย่อย)

Comment [p1]:

ข้อสรุป Q

ความสมเหตุสมผล อาจใช้

- การแจงกรณี $R_1 \vee R_2 \vee \ldots \vee R_n$ อยู่ในรูป

$P \rightarrow ((R_1 \vee R_2 \vee \ldots \vee R_n) \rightarrow Q)$

นั่นคือต้องแสดง $P \rightarrow (R_1 \vee R_2 \vee \ldots \vee R_n)$

และ $(R_1 \rightarrow Q) \wedge (R_2 \rightarrow Q) \wedge \ldots \wedge (R_n \rightarrow Q)$

- ข้อขัดแย้ง สมมติ $\sim Q$ แล้วได้ $S \wedge \sim S$ เกิดการขัดแย้งสมมติ จึงผิด

นั่นคือ สรุปได้ Q

- ข้อความแย้งสลับที่ กล่าวคือ พิสูจน์ $\sim Q \rightarrow \sim P$ แทนการพิสูจน์ $P \rightarrow Q$

ตัวอย่างที่ 5.1.3 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่"

รูปประโยคโครงสร้างการพิสูจน์

(1)	$P \rightarrow (R_1 \vee R_2)$
(2)	$(R_1 \rightarrow Q) \wedge (R_2 \rightarrow Q)$

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ a เป็นจำนวนคี่หรือจำนวนคู่

กรณีที่ 1 ถ้า a เป็นจำนวนคี่

จะได้ $a = 2n + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n

ดังนั้น $a^2 + a = (2n + 1)^2 + (2n + 1)$

$= 4n^2 + 4n + 1 + 2n + 1$

$= 4n^2 + 6n + 2$

$= 2(2n^2 + 3n + 1)$

จึงได้ $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 ถ้า a เป็นจำนวนคู่

จะได้ $a = 2n$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n

ดังนั้น $a^2 + a = (2n)^2 + 2n$

$= 4n^2 + 2n$

$= 2(2n^2 + n)$

จึงได้ $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่

จากทั้งสองกรณีจะได้ ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว

$a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่

ความรู้ที่ใช้	1. บทนิยามจำนวนคี่จำนวนคู่
	2. กำลังสองของนิพจน์

■

ตัวอย่างที่ 5.1.4 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว $a + \frac{1}{a} \geq 2$"

การคิดย้อนเพื่อหาแนวทางการพิสูจน์

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ถ้าได้} & a + \frac{1}{a} \geq 2 \\ \text{จะต้องได้} & a^2 + 1 \geq 2a \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{อสมการคงเดิม} \\ \text{เพราะ } a > 0\end{array}$$

$a^2 - 2a + 1 \geq 0$

$(a - 1)^2 \geq 0$

รูปประโยคและโครงสร้างการพิสูจน์
(1) $(P \wedge P_1) \rightarrow Q$ เมื่อ P_1 เป็นความจริงที่พิสูจน์แล้ว
กรณีนี้ P_1 เป็นตัวช่วย

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก (P)

เนื่องจาก $(a - 1)^2 \geq 0$ (P_1)

จะได้ $a^2 - 2a + 1 \geq 0$

ดังนั้น $a^2 + 1 \geq 2a$

จึงได้ $\frac{a^2+1}{a} \geq \frac{2a}{a}$

$a + \frac{1}{a} \geq 2$ (Q)

ความรู้ที่ใช้	(1) สำหรับจำนวนจริง b ใด ๆ จะได้ $b^2 \geq 0$
	(2) สำหรับจำนวนจริง b, c และ d ซึ่ง $d > 0$
	ถ้า $b > c$ แล้ว $bd > cd$

■

ตัวอย่างที่ 5.1.5 จงพิสูจน์ “สำหรับเซต A และ B ใด ๆ ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cap B' = \varnothing$”

รูปประโยคและโครงสร้างการพิสูจน์
แบบที่ (1) จะพิสูจน์ $P \rightarrow Q$
โดยพิสูจน์ข้อความแย้งสลับที่ $\sim Q \rightarrow \sim P$

พิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $A \cap B' \neq \varnothing$

ดังนั้นมี x ซึ่ง $x \in A \cap B'$

จะได้ $x \in A$ และ $x \in B'$ (บทนิยาม $\cap$)

แสดงว่า $x \in A$ และ $x \notin B$ (บทนิยาม ')

นั่นคือ $A \not\subseteq B$ (นิเสธของ $\subseteq$)

จึงได้ “ถ้า $A \cap B' \neq \varnothing$ แล้ว $A \not\subseteq B$”

โดยข้อความแย้งสลับที่จะได้ “ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cap B' = \varnothing$”

รูปประโยคและโครงสร้างการพิสูจน์ แบบที่ (2) จะพิสูจน์ $P \rightarrow Q$ โดยให้ P และสมมุติ ~Q แล้วได้ข้อขัดแย้ง $R \wedge \sim R$ สมมติจึงผิด นั่นคือ ได้ข้อสรุป Q

ให้ $A \subseteq B$

สมมติ $A \cap B' \neq \phi$

จึงมี x ซึ่ง $x \in A$ และ $x \in B'$

แสดงว่า $x \in B$ และ $x \in B'$ (เพราะ $A \subseteq B$)

ดังนั้น $x \in B$ และ $x \notin B$ ได้ข้อขัดแย้ง

สมมติ $A \cap B' \neq \phi$ จึงผิด นั่นคือ $A \cap B' = \varnothing$

จึงได้ "ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cap B' = \varnothing$"

■

การพิสูจน์ประโยคที่เหตุเป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 5.1.6 จงพิสูจน์ว่า " $\varnothing \subseteq A$ สำหรับทุกเซต A"

วิเคราะห์การพิสูจน์ ต้องใช้บทนิยามการเป็นสับเซต $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก x ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$ มีกรณีเหตุเป็นเท็จ กล่าวคือ $x \in \varnothing$

พิสูจน์ สำหรับเซต A ใด ๆ

ให้ $a \in \varnothing$ จะได้ "$a \in \varnothing$" เป็นเท็จ สำหรับทุก a

ดังนั้น "$a \in \varnothing \rightarrow a \in A$" เป็นจริงสำหรับทุก a

นั่นคือ $\varnothing \subseteq A$

วิธีที่ 2 พิสูจน์ P โดยสมมติ ~P แล้วเกิดข้อขัดแย้ง $R \wedge \sim R$ จึงสรุปได้ว่า P

พิสูจน์ สมมติ $\varnothing \nsubseteq A$

ดังนั้น มี x ซึ่ง $x \in \varnothing$ และ $x \notin A$ (นิเสธของ $\subseteq$)

แต่ $x \in \varnothing$ ขัดแย้งกับ $x \notin \varnothing$ (สมบัติของ $\varnothing$) ■

ดังนั้น $\cancel{\varnothing \nsubseteq A}$ จึงผิด

นั่นคือ $\varnothing \subseteq A$

ตัวอย่างที่ 5.1.7 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

วิเคราะห์เพื่อการพิสูจน์

ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ต้องรู้บทนิยามของฟังก์ชันเพิ่ม

บทนิยาม 1 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มก็ต่อเมื่อสำหรับ $x_1, x_2 \in D_f$
ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

ในการสรุปว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ต้องแสดงก่อนว่า

f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ซึ่งก่อนหน้านี้ f ต้องเป็นฟังก์ชัน 1-1 ต้องรู้บทนิยามฟังก์ชัน 1-1

บทนิยาม 2 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ

สำหรับ $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ หรือสำหรับทุก $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$

จากกำหนดให้ f เป็นเพียงฟังก์ชันเพิ่ม ต้องการ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ข้อความนี้จึงน่าจะเป็นจริง

กล่าวคือ "ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1"

จึงต้องพิสูจน์ทฤษฎีบทเสริม

"ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1"

ส่งผลให้ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

เมื่อ f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันสิ่งที่ทราบคือ

(1) $D_f = R_{f^{-1}}$ และ $R_f = D_{f^{-1}}$

(2) $y = f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $x = f^{-1}(y)$

สุดท้ายต้องแสดงว่า สำหรับทุก $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$ ถ้า $y_1 < y_2$ แล้ว $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

พิสูจน์ รูปประโยคและโครงสร้างการพิสูจน์

(1) $P \longrightarrow P_1$ (P_1 (ทฤษฎีบทเสริม) ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1)

(2) $P_1 \longrightarrow Q_1$ (ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน)

(3) แสดง Q_2 (f^{-1} เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1

ให้ $x_1, x_2 \in D_f$ และ $x_1 \neq x_2$

ดังนั้น $x_1 < x_2$ เป็นการเพียงพอ กรณี $x_2 < x_1$ แสดงได้ทำนองเดียวกัน

(เพราะ x_1, x_2 เป็นสมาชิกใด ๆใน D_f)

ถ้า $x_1 < x_2$ จะได้ $f(x_1) < f(x_2)$ (f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

จึงได้ $f(x_1) \neq f(x_2)$

จาก $x_1 \neq x_2$ แล้วได้ $f(x_1) \neq f(x_2)$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1

จากทฤษฎีบทที่มีมาก่อนกล่าวว่า

"ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน"

จึงได้ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน นอกจากนี้จะได้ $D_f = R_f^{-1}$ และ $R_f = D_f^{-1}$

จะแสดง f^{-1} เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ให้ $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$ และ $y_1 < y_2$

จะต้องแสดงว่า $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

เนื่องจาก $y_1, y_2 \in R_f$ จึงมี x_1 และ x_2 ซึ่ง

$y_1 = f(x_1)$ และ $y_2 = f(x_2)$

จึงได้ $f(x_1) < f(x_2)$ ...(*)

นอกจากนี้จาก $y_1 = f(x_1)$ จะได้ $f^{-1}(y_1) = x_1$

และจาก $y_2 = f(x_2)$ จะได้ $f^{-1}(y_2) = x_2$

จะแสดง $x_1 < x_2$

จะพิสูจน์ P
โดยสมมติ
~P เกิดข้อ
ขัดแย้ง
$R \wedge \sim R$
สมมติจึงผิด
นั่นคือ ได้ P

สมมติ $x_1 \not< x_2$

จะได้ $x_1 \geq x_2$

ถ้า $x_1 = x_2$ จะได้ $f(x_1) = f(x_2)$ (f เป็นฟังก์ชัน)

ขัดแย้งกับกับ (*)

ถ้า $x_1 > x_2$ จะได้ $f(x_1) > f(x_2)$ (f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

ขัดแย้งกับ (*)

ดังนั้น สมมติผิด นั่นคือ $x_1 < x_2$

จึงได้ $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

จากถ้า $y_1 < y_2$ แล้วได้ $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

■

ตอนที่ 5.2 การพิสูจน์ประโยคที่มีตัวเชื่อมผสม

เรื่องที่ 5.2.1 การพิสูจน์ประโยคในรูป $P \rightarrow (Q \vee R)$

> **วิธีพิสูจน์** ให้ P
>
> (1) ถ้าได้ Q จบการพิสูจน์
>
> และ (2) ถ้าได้ ~ Q ต้องใช้ P ร่วมกับ ~ Q แล้วสรุปให้ได้ R จึงจะจบการพิสูจน์
>
> (หรือสลับระหว่าง Q กับ R ใน (1) และ (2) ก็ได้)

ตัวอย่างที่ 5.2.1 จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ

ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่ง $ab = 0$

ถ้า $a = 0$ จบการพิสูจน์

ถ้า $a \neq 0$ จะต้องแสดงว่า $b = 0$

จาก $ab = 0$ และ $a \neq 0$

ดังนั้น $\frac{ab}{a} = \frac{0}{a}$

จะได้ $b = 0$

■

เรื่องที่ 5.2.2 การพิสูจน์ประโยคในรูป $(P \vee Q) \rightarrow R$

> **วิธีพิสูจน์** ต้องแสดง
>
> (1) $P \rightarrow R$
>
> และ (2) $Q \rightarrow R$
>
> จาก (1) และ (2) จึงได้ $(P \vee Q) \rightarrow R$

ตัวอย่างที่ 5.2.2 จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ

ถ้า $a = 0$ หรือ $b = 0$ แล้ว $ab = 0$

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

กรณีที่ 1 ถ้า $a = 0$ จะได้ $ab = 0$

กรณีที่ 2 ถ้า $b = 0$ จะได้ $ab = 0$

ดังนั้น จากทั้ง 2 กรณี ถ้า $a = 0$ หรือ $b = 0$ แล้ว $ab = 0$

■

เรื่องที่ 5.2.3 การพิสูจน์ประโยคในรูป $P \leftrightarrow Q$

วิธีพิสูจน์ ต้องแสดง (1) $P \rightarrow Q$ และ (2) $Q \rightarrow P$ จาก (1) และ (2) จึงได้ $P \leftrightarrow Q$

ตัวอย่างที่ 5.2.3 จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} > 0$

พิสูจน์ (1) ให้ $a > 0$ จะแสดง $\frac{1}{a} > 0$

จะพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

สมมติ $\frac{1}{a} \leq 0$

ถ้า $\frac{1}{a} = 0$ จะได้ $a \cdot \frac{1}{a} = 0$ ขัดแย้งกับ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

ถ้า $\frac{1}{a} < 0$ จะได้ $a \cdot \frac{1}{a} < 0$ ขัดแย้งกับ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

สมมติ $\frac{1}{a} \leq 0$ จึงผิด

ดังนั้น $\frac{1}{a} > 0$

(2) ให้ $\frac{1}{a} > 0$ จะแสดง $a > 0$

สมมติ $a \leq 0$

ถ้า $a = 0$ จะได้ $a \cdot \frac{1}{a} = 0$ ขัดแย้งกับ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

ถ้า $a < 0$ จะได้ $a \cdot \frac{1}{a} < 0$ ขัดแย้งกับ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

สมมติจึงผิด

ดังนั้น $a > 0$

จาก (1) และ (2) จึงได้ $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} > 0$

■

ตอนที่ 5.3 การพิสูจน์ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

เรื่องที่ 5.3.1 ประโยคในรูป $\forall x\,[P(x)]$

> **วิธีพิสูจน์** แสดง $P(a)$ เป็นจริงทุก a ในเอกภพสัมพัทธ์ U
>
> (เซตคำตอบของ $P(x)$ เท่ากับเอกภพสัมพัทธ์ U)

ตัวอย่างที่ 5.3.1 จงพิสูจน์ว่า $x^2 \geq 0$ ทุกจำนวนจริง x

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ $x = 0$ หรือ $x > 0$ หรือ $x < 0$

กรณีที่ 1 ถ้า $x = 0$ จะได้ $x^2 = 0$

กรณีที่ 2 ถ้า $x > 0$ จะได้ $x^2 > 0$

กรณีที่ 3 ถ้า $x < 0$ จะได้ $x^2 > 0$

จากทั้ง 3 กรณี จะให้ $x^2 \geq 0$ ทุกจำนวนจริง x

■

เรื่องที่ 5.3.2 ประโยคในรูป $\exists! x\,[P(x)]$

หมายถึง มีสมาชิก x เพียง 1 ตัวเท่านั้นที่ $P(x)$ เป็นจริง

> **วิธีพิสูจน์**
>
> (1) พิสูจน์ $\exists x\,[P(x)]$ เป็นจริง
>
> และ (2) พิสูจน์ สำหรับ x_1 และ x_2 ถ้า
>
> $P(x_1)$ เป็นจริงและ $P(x_2)$ เป็นจริงแล้ว $x_1 = x_2$

ตัวอย่างที่ 5.3.2 จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ

จะมีจำนวนจริง b เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$a \cdot b = a$

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เนื่องจากมีจำนวนจริง 1 ซึ่ง $a \cdot 1 = a$

จึงแสดงแต่เพียงว่า ถ้ามีจำนวนจริง e ซึ่ง $a \cdot e = a$ แล้ว $e = 1$

สมมติมี e ซึ่ง $a \cdot e = a$

จะได้ $a \cdot e - a = 0$

$a(e - 1) = 0$

แต่ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จึงมีกรณีที่ $a \neq 0$

ดังนั้น $(e - 1) = 0$

จะได้ $e = 1$

ดังนั้น จำนวนจริง b ในข้อความที่ให้พิสูจน์ คือ

1 เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

■

แบบฝึกหัด 5.3

จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a^3 + a^2 + a + 1$ เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนคี่

2. สำหรับเซต A และ B ใด ๆ $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

3. สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 จะมีจำนวนจริง y เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ซึ่ง $xy = 1$

หน่วยที่ 6
อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
(Mathematical Induction)

ตอนที่ 6.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

แนวคิด
1. ปัญหาทางคณิตศาสตร์บางปัญหาที่เกี่ยวข้องกับแบบรูปของจำนวนเต็ม อาจใช้การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้
2. อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นการพิสูจน์เกี่ยวกับข้อความ $\forall nP(n)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็ม n_o และ n ซึ่ง $n \geq n_o$ โดยเริ่มต้นพิสูจน์ $P(n_o)$ เป็นจริง ต่อจากนั้นสมมติให้ P(k)เป็นจริง เมื่อ $k \geq n_o$ แล้วพิสูจน์ว่า $P(k + 1)$ เป็นจริงจะสรุปได้ว่า P(n) เป็นจริงทุก $n \geq n_o$
3. ข้อความ $\forall nP(n)$ เป็นเท็จก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม $k \geq n_o$ ที่ทำให้ P(k) เป็นเท็จ

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 6 จบแล้ว นักเรียนสามารถ
1. เขียนข้อความในรูป P(n) ได้
2. พิสูจน์ข้อความ $\forall nP(n)$ เป็นจริงได้
3. หาจำนวนเต็ม k ซึ่ง P(k) เป็นเท็จ สำหรับข้อความ $\forall nP(n)$ ที่เป็นเท็จได้

กิจกรรมระหว่างเรียน
1. อาจารย์อธิบายแบบรูปของจำนวนเต็ม
2. อาจารย์อธิบายและให้ตัวอย่างการใช้การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
3. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่างและแบบฝึกหัด
4. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน
1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 6.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

เรื่องที่ 6.1.1 ข้อความ $\forall nP(n)$

ในการศึกษาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษานั้น บางครั้งจะพบแบบรูปที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม เช่น จากการสังเกตผลบวกของจำนวนคี่

$$\begin{array}{rcccl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 1+3 & = & 4 & = & 2^2 \\ 1+3+5 & = & 9 & = & 3^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

แล้วทำนายแบบรูปทั่วไปว่า

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

การทำนายนี้อาจจะผิดก็ได้

เครื่องมือที่ใช้พิสูจน์การทำนายลักษณะนี้ในทางคณิตศาสตร์ คืออุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการพิสูจน์ว่าข้อความ $\forall n\, P(n)$ เป็นจริง เมื่อ $n \in I$ และ $n \geq n_0$ โดย n_0 เป็นจำนวนเต็มเจาะจงจำนวนหนึ่ง

การพิสูจน์ว่าข้อความ $\forall n\, P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม n ซึ่ง $n \geq n_0$ มีขั้นตอนดังนี้

> **ขั้นที่ 1** จะต้องแสดงว่า $P(n_0)$ เป็นจริง
>
> **ขั้นที่ 2** จะต้องแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง
>
> จากทั้ง 2 ขั้นตอน จะสรุปได้ว่า $\forall n\, P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n \geq n_0$

หมายเหตุ

ข้อความ $\forall n\, P(n)$ สำหรับทุก $n \geq n_0$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ

(1) $P(n_0)$ เป็นเท็จ

หรือ (2) มี $K \geq n_0$ ที่ทำให้ข้อความ $P(k)$ เป็นเท็จ

ก่อนที่จะพิสูจน์ว่า ประโยค $\forall n\, P(n)$ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ จำเป็นต้องฝึกเขียนประโยค $P(i)$ เมื่อ $i \in \{n_o,\ldots,k,k+1\}$ ก่อน

ตัวอย่างที่ 6.1.1 กำหนด P(n) แทน $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

จงเขียน P(1), P(2), P(k) และ P(k+1)

วิธีทำ เนื่องจากประโยค P(n) นี้เขียนในรูปสมการ ซึ่งนิพจน์ทางซ้ายของสมการเป็นอนุกรม ทางขวาเป็นสูตร จึงเขียนได้ดังนี้

P(1) คือ $1 = 1^2$

P(2) คือ $1 + 3 = 2^2$

P(k) คือ $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$

P(k+1) คือ $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$

หรือ $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$

■

ตัวอย่างที่ 6.1.2 กำหนด P(n) แทน $3 \mid (2^{2n}-1)$ จงเขียน P(1), P(2), P(k) และ P(k+1)

วิธีทำ ข้อความ P(n) อยู่ในรูปสัญลักษณ์เกี่ยวข้องเฉพาะจำนวนเต็มบวก n จึงแทน n ด้วย 1, 2, k และ k+1 ลงใน P(n)

จะได้ P(1) คือ $3 \mid (2^{2\cdot1}-1)$

P(2) คือ $3 \mid (2^{2\cdot2}-1)$

P(k) คือ $3 \mid (2^{2\cdot k}-1)$

P(k+1) คือ $3 \mid (2^{2\cdot(k+1)}-1)$

■

ตัวอย่างที่ 6.1.3 จงเขียนข้อความ P(n), P(1), P(2), P(k) และ P(k+1) ให้สอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

1. $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2$ ทุกจำนวนเต็มบวก n
2. $2^{n+1} \geq n^2$ ทุกจำนวนเต็มบวก n
3. $n^3 + 2n$ หารด้วย 3 ลงตัว ทุกจำนวนเต็มบวก n

วิธีทำ 1. ให้ P(n) แทน $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2$

จะได้ P(1) คือ $2^1 = 2^{1+1} - 2$

P(2) คือ $2^1 + 2^2 = 2^{2+1} - 2$

P(k) คือ $2^1 + 2^2 + ... 2^k = 2^{k+1} - 2$

P(k+1) คือ $2^1 + 2^2 + ... + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2$

2. ให้ P(n) แทน $2^{n+1} \geq n^2$

จะได้ P(1) คือ $2^{1+1} \geq 1^2$

P(2) คือ $2^{2+1} \geq 2^2$

P(k) คือ $2^{k+1} \geq k^2$

P(k+1) คือ $2^{k+2} \geq (k+1)^2$

3. ให้ P(n) แทน $n^3 + 2n$ หารด้วย 3 ลงตัว

จะได้ P(1) คือ $1^3 + 2 \cdot 1$ หารด้วย 3 ลงตัว

P(2) คือ $2^3 + 2 \cdot 2$ หารด้วย 3 ลงตัว

P(k) คือ $k^3 + 2 \cdot k$ หารด้วย 3 ลงตัว

P(k+1) คือ $(k+1)^3 + 2 \cdot (k+1)$ หารด้วย 3 ลงตัว

■

ตัวอย่างที่ 6.1.4 จงเขียนข้อความ P(n), P(n_0), P(n_1),..., P(k) และ P(k+1) โดยที่ $n_0 < n_1 \leq k$ ทุกจำนวนเต็มที่กำหนดในข้อความต่อไปนี้

1. $n(n^2-1)$ หารด้วย 24 ลงตัว ทุก n ที่เป็นจำนวนคี่บวก
2. $n^2 < n!$ ทุก $n < 4$
3. $1.0! + 1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n! = (n+1)!$

วิธีทำ 1. ให้ P(n) แทน $n(n^2-1)$ หารด้วย 24 ลงตัว ทุก n ที่เป็นจำนวนคี่บวก

เนื่องจาก P(n_0) คือ P(1) จึงได้ P(1) คือ $1(1^2-1)$ หารด้วย 24 ลงตัว

P(n_1) คือ P(3) จึงได้ P(3) คือ $3(3^2-1)$ หารด้วย 24 ลงตัว

P(k) คือ $k(K^2-1)$ หารด้วย 24 ลงตัว

P(k+1) คือ $(k+1)((k+1)^2-1)$ หารด้วย 24 ลงตัว

2. ให้ P(n) แทน $n^2 < n!$ ทุก $n < 4$

เนื่องจาก P(n_0) คือ P(4) จึงได้ P(4) คือ $4^2 < 4!$

P(n_1) คือ P(5) จึงได้ P(5) คือ $5^2 < 5!$

P(k) คือ $k^2 < k!$

$P(k+1)$ คือ $(k+1)^2 < (k+1)!$

3. ให้ $P(n)$ แทน $1\cdot0!+1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+...+n\cdot n! = (n+1)!$

เนื่องจาก $P(n_0)$ คือ $P(0)$ จึงได้ $P(0)$ คือ $1\cdot0! = (0+1)!$

$P(n_1)$ คือ $P(1)$ จึงได้ $P(1)$ คือ $1.0!+1\cdot1! = (1+1)!$

$P(k)$ คือ $1\cdot0!+1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+...+k\cdot k! = (k+1)!$

$P(k+1)$คือ$1\cdot0!+1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+...+k\cdot k!+(k+1)(k+1)!= (k+2)!$

■

แบบฝึกหัด 6.1.1

จงเขียน $P(n_0)$, $P(n_1)$,...,$P(k)$ และ $P(k+1)$ สอดคล้องกับข้อความอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ต่อไปนี้

1. $3^n > 3n$ ทุก $n \geq 2$
2. $11^{n+2}+12^{2n+1}$ หารด้วย 133 ลงตัว ทุก $n \geq 1$
3. $1.2+2.3+3.4+...+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ทุก $n \in N$
4. $(1+x)^n = 1+x+x^2+...+x^3$ เมื่อ $x \neq 1$ ทุก $n \in N$

เรื่องที่ 6.1.2 การพิสูจน์ค่าความจริงของข้อความในรูป $\forall nP(n)$

เนื่องจากข้อความในรูป $\forall nP(n)$ อาจจะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จดังที่กล่าวมาแล้ว ในเรื่องนี้จึงเป็นกระบวนการหาค่าความจริงของข้อความ $\forall nP(n)$

ตัวอย่างที่ 6.1.5 จงพิสูจน์ว่า $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in N$ $(n \geq 1)$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

ขั้นที่ 1

จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $1 = 1^2$ เป็นจริง

และ $P(1)$ แทน $1 = 1^2$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2

จะแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริงสำหรับ $k \geq 1$ แล้ว P(k+1) เป็นจริง

ให้ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$ เป็นจริง

จะได้ $1+3+5+...+ (2k-1)+(2(k+1)-1) = k^2 + (2(k+1)-1)$ เป็นจริง

แสดงว่า $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1)+(2k+1) = k^2+2k+1$ เป็นจริง

$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1)+(2k+1) = (k+1)^{2-}$ เป็นจริง

เนื่องจาก P(k+1) แทน $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$

ดังนั้น P(k+1) เป็นจริง

จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 สรุปได้ว่า

$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$ เป็นจริงทุกจำนวนเต็มบวก n

■

ตัวอย่างที่ 6.1.6 จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทน

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ขั้นที่ 1

จะแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เนื่องจาก $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ เป็นจริง

และ P(1) แทน $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

ขั้นที่ 2

จะแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริงสำหรับ $k \geq 1$ แล้ว P(k+1) เป็นจริง

ให้ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ เป็นจริง

จะได้ $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ เป็นจริง

แสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$ เป็นจริง

$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$ เป็นจริง

$=\frac{k+1}{k+2}$ เป็นจริง

เนื่องจาก P(k+1) แทน $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$

ดังนั้น P(k+1) เป็นจริง

จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 สรุปได้ว่า $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ เป็นจริงทุกจำนวนเต็มบวก n

■

ตัวอย่างที่ 6.1.7 จงพิสูจน์ว่า $2^n \geq 2$ ทุก $n \geq 1$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทน $2^n \geq 2$

ขั้นที่ 1

จะแสดง P(1) เป็นจริง

เนื่องจาก $2^1 \geq 2$ เป็นจริง

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

ขั้นที่ 2

จะแสดง ถ้า P(k) เป็นจริงสำหรับ $k \geq 1$ แล้ว P(k+1) เป็นจริง

ให้ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $2^k \geq 2$ เป็นจริง

จะได้ $2 \cdot 2^k \geq 2$ เป็นจริง

นั่นคือ $2^{k+1} \geq 2$ เป็นจริง

แสดงว่า P(k+1) เป็นจริง

จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 สรุปได้ว่า $2^n \geq 2$ ทุก $n \geq 1$

■

ตัวอย่างที่ 6.1.8 จงพิสูจน์ว่า $2n \le 2^n$ ทุก $n \ge 1$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทน $2n \le 2^n$

ขั้นที่ 1

จะแสดง P(1) เป็นจริง

เนื่องจาก $2 \cdot 1 \le 2^1$ เป็นจริง

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

ขั้นที่ 2

จะแสดง ถ้า P(k) เป็นจริงสำหรับ $k \ge 1$ แล้ว P(k+1) เป็นจริง

ให้ P(k) เป็นจริง สำหรับ $k \ge 1$

ดังนั้น $2k \le 2^k$ เป็นจริง

เนื่องจาก $2 \le 2^k$ เป็นจริง จากตัวอย่างที่ 6.1.7

จะได้ $2k + 2 \le 2^k + 2^k$ เป็นจริง

$2(k+1) \le 2 \cdot 2^k$ เป็นจริง

$2(k+1) \le 2^{k+1}$ เป็นจริง

จะได้ P(k+1) เป็นจริง

จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 สรุปได้ว่า $2n \le 2^n$ ทุก $n \ge 1$

■

ตัวอย่างที่ 6.1.9 จงพิสูจน์ว่า $2n^3 + 3n^2 + n + 6 \ge 0$ สำหรับทุก $n \ge -2$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทน $2n^3 + 3n^2 + n + 6 \ge 0$

ขั้นที่ 1

จะแสดง P(–2) เป็นจริง

เนื่องจาก $2(-2)^3 + 3(-2)^2 + (-2) + 6 \ge 0$ เป็นจริง

และ P(–2) คือ $2(-2)^3 + 3(-2)^2 + (-2) + 6 \ge 0$

ดังนั้น P(–2) เป็นจริง

ขั้นที่ 2

จะแสดง ถ้า P(k) เป็นจริงสำหรับ $k \ge -2$ แล้ว P(k+1) เป็นจริง

ให้ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $2k^3 + 3k^2 + k + 6 \geq 0$

พิจารณา $2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + (k+1) + 6$

$= (2k^3 + 3k^2 + k+6)+(6k^2+ 12k+6)$ เป็นจริง

$= (2k^3 + 3k^2 + k+6)+6(k+1)^2$ เป็นจริง

เนื่องจาก $2k^3 + 3k^2 + k + 6 \geq 0$ และ $6(k+1)^2 \geq 0$ เป็นจริง

ดังนั้น $(2k^3 + 3k^2 + k+6)+6(k+1)^2 \geq 0$ เป็นจริง

นั่นคือ $2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + (k+1) + 6 \geq 0$ เป็นจริง

จะได้ P(k+1) เป็นจริง

จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 สรุปได้ว่า $2n^3 + 3n^2 + n + 6 \geq 0$ สำหรับทุก $n \geq -2$

■

ตัวอย่างที่ 6.1.10 จงแสดงว่าข้อความ $n^2 < 2^n$ ไม่จริงสำหรับ $-1 \leq n$

แนวคิด

ให้ P(n) แทนข้อความ $n^2 < 2^n$ สำหรับ $-1 \leq n$

จะเห็นว่า P(–1) คือ $(-1)^2 < 2^{-1}$

จะได้ $1 < \frac{1}{2}$ เป็นเท็จ

ดังนั้น P(–1) เป็นเท็จ

แสดงว่า $n^2 < 2^n$ ไม่จริงสำหรับ $-1 \leq n$

■

ตัวอย่างที่ 6.1.11 จงแสดงว่า ข้อความ $2^n \leq n^2$ ไม่จริงสำหรับ $2 \leq n$

แนวคิด

ให้ P(n) แทนข้อความ $2^n \leq n^2$ สำหรับ $2 \leq n$

พิจารณา $n = 5$

จะเห็นว่า P(5) คือ $2^5 \leq 5^2$

จะได้ $32 \leq 25$ เป็นเท็จ

ดังนั้น P(5) เป็นเท็จ

แสดงว่า $2^n \leq n^2$ ไม่จริงสำหรับ $2 \leq n$

■

แบบฝึกหัด 6.1.2

1. จงใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ พิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

   1.1 $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   1.2 $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

   1.3 $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}[n(n+1)]^2$

   1.4 $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{1\,n(n+1)(n+2)}{3}$

   1.5 $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2$

   1.6 $n^3 + 2n$ หารด้วย 3 ลงตัว

   1.7 $n(n^2-1)$ หารด้วย 24 ลงตัว ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวก

   1.8 $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ หารด้วย 133 ลงตัว

   1.9 $\sin\alpha + \sin 2\alpha + ... + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\infty}{\sin\frac{\infty}{2}}\sin\frac{\infty}{2}$

   1.10 $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3.3! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$

2. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

   2.1 $2^n > 2n + 1$ ทุก $n > 2$

   2.2 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ ทุก $n > 1$

   2.3 $2^{n+1} \geq n^2$ ทุก $n \in N$

   2.4 $3^n > 3n$ ทุก $n \geq 2$

   2.5 $n^2 < n!$ ทุก $n \geq 4$

3. ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด จงให้เหตุผล

   3.1 $\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n$ เมื่อ $|x| \neq 1$ ทุก $n \in N$

   3.2 $(1+x)^n > 1 + nx$ เมื่อ $x > -1, x \neq 0$ และ $n \geq 1$

   3.3 $2^n < 2(n+10)$ ทุก $n \in N$

4. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   จงหา A^n พร้อมทั้งพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

5. กำหนด $f(x) = \frac{1}{1-x}$ เมื่อ $x \neq 1$ จงหา $f^{(n)}(x)$ พร้อมทั้งพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ภาคผนวก

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ $s \subset N$ และ s มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $1 \in s$
2. $\forall k\, [k \in s \rightarrow k+1 \in s]$

สรุปได้ว่า $s = N$

ข้อพิสูจน์ สมมติว่า $s \neq N$ ดังนั้นจะต้องมีจำนวนเต็มบวกอย่างน้อยหนึ่งจำนวน ซึ่งไม่อยู่ในเซ็ต s

ให้ $M = \{x \in N \mid x \notin s\} = N - s$

ดังนั้น $M \neq \varnothing$

และ $M \cap s = \varnothing$

จากหลักการเป็นอันดับดีแล้ว ถ้า $M \subset N$ และ $M \neq \varnothing$ แล้ว M จะมีจำนวนที่น้อยที่สุด กล่าวคือ $\exists m \forall X\, [m \in M \wedge X \in M \rightarrow m \leq X]$ M จะมีจำนวนที่น้อยที่สุด หนึ่งจำนวน สมมติว่าเป็นm นั่นคือ ถ้า $x \in M$ แล้ว $x \geq m$

$m \neq 1$ เพราะว่า $1 \in s$, $m \in M$ และ $M \cap s = \varnothing$

ดังนั้น $m > 1$ ได้ว่า $m - 1 > 0$

แต่ $m - 1 < m$ ดังนั้น $m - 1 \notin M$ เพราะ m เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดใน M

แสดงว่า $m - 1 \in s$

โดยคุณสมบัติข้อ 2 ได้ว่า $(m - 1) + 1 \in s$

นั่นคือ $m \in s$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $m \in M$ จะทำให้ $m \notin s$ เพราะ $M \cap s = \varnothing$

ดังนั้น ที่เราสมมติไว้ว่า $s \neq N$ จึงไม่จริง

แสดงว่า $s = N$

■

ทฤษฎีบทที่ 2 (ทฤษฎีเบื้องต้นของอุปนัยวิธีทางคณิตศาสตร์)

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ P(n) แทนข้อความ (อาจเป็นจริง หรือไม่เป็นจริง) ที่เกี่ยวข้องกับ n ถ้า

1. P(1) เป็นจริง
2. สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใด ๆ ถ้า P(k) เป็นจริงแล้วได้ P(k+1) เป็นจริงด้วย

   สรุปได้ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

ข้อพิสูจน์ ให้ $s = \{n \in N \mid P(n)$ เป็นจริง,$\}$

$s \neq \varnothing$ เพราะว่า $1 \in s$ โดยคุณสมบัติ ข้อ 1.

จากคุณสมบัติข้อ 2 ถ้า $k \in s$ แล้ว $k + 1 \in s$ ด้วย

โดยทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ $s = N$

นั่นคือ P(n) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

■

หน่วยที่ 7
อสมการ

ตอนที่ 7.1 อสมการที่เกี่ยวกับพีชคณิต
ตอนที่ 7.2 อสมการเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์

แนวคิด 1. สมการและอสมการ เป็นสิ่งสำคัญในระบบคณิตศาสตร์ สำหรับอสมการนั้นสามารถนิยามได้จาก สมการ
2. ในระบบจำนวนจริงสมบัติของอสมการนำไปประยุกต์ใช้อย่างมากมายทั้งในวิชาคณิตศาสตร์ และวิชาอื่นๆ
3. โดยทั่วๆไปผลเฉลยของอสมการนิยมเขียนในรูปเซตคำตอบ
4. อสมการที่เกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์เป็นพื้นฐานสำคัญที่นำไปใช้ในวิชา แคลคูลัส และการวิเคราะห์

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 7 จบแล้ว นักเรียนสามารถ
1. นิยามอสมการได้
2. ระบุสมบัติพื้นฐานของอสมการของจำนวนจริงได้
3. หาเซตคำตอบของอสมการที่มีหลายตัวประกอบได้
4. พิสูจน์ ข้อความเกี่ยวกับอสมการเชิงพีชคณิตได้
5. พิสูจน์ ข้อความเกี่ยวกับอสมการของค่าสัมบูรณ์ได้

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายความหมายและสมบัติของอสมการ แสดงตัวอย่างวิธีการแก้โจทย์ปัญหาอสมการที่เกี่ยวกับพีชคณิต และอสมการเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์
2. นักเรียนทำกิจกรรมระหว่างเรียน และแบบฝึกหัด
3. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 7.1 อสมการที่เกี่ยวกับพีชคณิต

เรื่องที่ 7.1.1 ความหมายและ สมบัติของอสมการ

1. ความหมายของอสมการ ความหมายพื้นฐานของอสมการ นิยามได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ

a มากกว่า b ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก c ที่ทำให้ $a = b + c$

a มากกว่า b เขียนแทนด้วย $a > b$

บทนิยาม 2 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ

b น้อยกว่า a ก็ต่อเมื่อ a มากกว่า b

b น้อยกว่า a เขียนแทนด้วย $b < a$

บทนิยาม 3 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ

a มากกว่าหรือเท่ากับ b ก็ต่อเมื่อ a มากกว่า b หรือ a เท่ากับ b

a มากกว่าหรือเท่ากับ b เขียนแทนด้วย $a \geq b$

บทนิยาม 4 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ

b น้อยกว่าหรือเท่ากับ a ก็ต่อเมื่อ b น้อยกว่า a หรือ b เท่ากับ a

b น้อยกว่าหรือเท่ากับ a เขียนแทนด้วย $b \leq a$

บทนิยาม 2, 3 และ 4 อาจเขียนใหม่ได้ดังนี้

บทนิยาม 2′ $b < a$ ก็ต่อเมื่อ มี $c \in R^+$ ที่ทำให้ $b + c = a$

บทนิยาม 3′ $a \geq b$ ก็ต่อเมื่อ มี $c \in R^+ \cup \{0\}$ ที่ทำให้ $a = b + c$

บทนิยาม 4′ $b \leq a$ ก็ต่อเมื่อ มี $c \in R^+ \cup \{0\}$ ที่ทำให้ $b + c = a$

2 สมบัติของอสมการ

กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
2. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
3. ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
4. ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
5. ถ้า $a > b > 0$ และ $c > 0$ แล้ว $a^c > b^c > 0$
6. ถ้า $a > 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $a^x > a^y > 0$
7. ถ้า $0 < a < 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $0 < a^x < a^y$
8. ถ้า $a > 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $\log_a x > \log_a y$

9. ถ้า $0 < a < 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $\log_a x < \log_a y$

10. $a^{2n} \geq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

11. $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} > 0$

12. $a < 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} < 0$

13. สำหรับจำนวนจริง a และ b ซึ่ง $a < b$

$(x - a)(x - b) < 0$ ก็ต่อเมื่อ $a < x < b$

14. สำหรับจำนวนจริง a และ b ซึ่ง $a < b$

$(x - a)(x - b) > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x < a$ หรือ $x > b$

เรื่องที่ 7.1.2 ตัวอย่างวิธีการแก้ปัญหาโจทย์อสมการ

ข้อตกลง กำหนดให้เอกภพสัมพันธ์ คือ เซตของจำนวนจริง สำหรับจำนวนที่เขียนโดยไม่เจาะจง จำนวนเหล่านั้นคือจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 7.1 จงพิสูจน์ว่า $a^{2n+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $a > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ (1) จะแสดงว่า ถ้า $a^{2n+1} > 0$ แล้ว $a > 0$

กำหนดให้ $a^{2n+1} > 0$

จะได้ $a^{2n} \cdot a > 0$

สมมติ $a \leq 0$ จะมีกรณีดังนี้ คือ $a < 0$ หรือ $a = 0$

ถ้า $a < 0$ จะได้ $\frac{1}{a} < 0$

ดังนั้น $\frac{a^{2n} \cdot a}{a} < 0$

$a^{2n} < 0$ ขัดแย้งกับ $a^{2n} \geq 0$

$a < 0$ จึงเป็นไปไม่ได้

ถ้า $a = 0$ จะได้ $a^{2n+1} = 0$ ขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $a^{2n+1} > 0$

$a = 0$ จึงเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ $a > 0$

(2) จะแสดงว่า ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^{2n+1} > 0$

กำหนดให้ $a > 0$

จะได้ $a^{2n} > 0$ ดังนั้น $a^{2n} \cdot a > 0$

จึงได้ $a^{2n+1} > 0$

จาก (1) และ (2) จึงสรุปได้ว่า

$a^{2n+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $a > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

หมายเหตุ สำหรับข้อความ $a^{2n+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

■

ตัวอย่างที่ 7.2 จงพิสูจน์ว่า $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \neq a$ และ $x - b > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก m และ n

พิสูจน์ (1) จะแสดงว่า ถ้า $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$ แล้ว $x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$

กำหนดให้ $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$

พิจารณา $x - a$

ถ้า $x - a = 0$ จะทำให้ $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} = 0$

ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$

ดังนั้น $x - a \neq 0$ …①

จะได้ $(x-a)^{2n} > 0$

ดังนั้น $\dfrac{(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1}}{(x-a)^{2n}} > 0$

แสดงว่า $(x-b)^{2m+1} > 0$

โดยตัวอย่างที่ 7.1 พิสูจน์มาแล้ว จะได้ $x - b > 0$ …②

จาก ① และ ② จึงได้ $x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$

(2) จะแสดงว่า ถ้า $x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$ แล้ว $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$

เนื่องจาก $x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$

จะได้ $(x-a)^{2n} > 0$ และ $(x-b)^{2m+1} > 0$

ดังนั้น $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$

จาก (1) และ (2) จึงสรุปได้ว่า

$(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x - a \neq 0$ และ $x - b > 0$

หมายเหตุ สำหรับข้อความ $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \neq a$ และ $x - b < 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก m และ n ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

■

ตัวอย่างที่ 7.3 จงหาเซตคำตอบของ $\dfrac{(x-3)^{101}(x+7)^{4}}{(x+4)^{32}} \le 0$

วิธีทำ $\dfrac{(x-3)^{101}(x+7)^{4}}{(x+4)^{32}} \le 0$ ก็ต่อเมื่อ $(x-3)^{101}(x+7)^{4} \le 0$ และ $x+4 \ne 0$

ก็ต่อเมื่อ ($x-3 \le 0$ หรือ $x+7=0$) และ $x \ne -4$

ก็ต่อเมื่อ ($x \le 3$ หรือ $x=-7$) และ $x \ne -4$

ก็ต่อเมื่อ $x < -4$ หรือ $-4 < x \le 3$

ดังนั้นเซตคำตอบคือ $\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -4$ หรือ $-4 < x \le 3 \}$

■

แบบฝึกหัดที่ 7.1

1. จงพิสูจน์ว่า $a^{2n+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n
2. จงพิสูจน์ว่า $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \ne a$ และ $x-b<0$ ทุกจำนวนเต็มบวก m และ n
3. จงหาเซ็ตคำตอบของ อสมการต่อไปนี้

   (1) $(x-3)^{20}(x+4)^{33} < 0$

   (2) $(x-4)^{21}(x+2)^{11} > 0$

   (3) $\dfrac{(X-1)^{45}}{(X-5)^{8}(X+4)^{21}} \ge 0$

   (4) $\dfrac{(X-2)^{27}(X+3)^{16}}{(X-4)^{18}} \le 0$

ตอนที่ 7.2 อสมการเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์

เรื่องที่ 7.2.1 อสมการพื้นฐานของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง

บทนิยาม 5 สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ กำหนดโดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \ge 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

จากบทนิยามข้างต้น สามารถนำมาสรุปเป็นสมบัติเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ ของจำนวนจริง และพิสูจน์ได้ดังนี้

กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ a เป็นจำนวนจริงบวก

จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) $x \le |x|$

(2) ถ้า $|x| \le a$ แล้ว $-a \le x \le a$

(3) ถ้า $|x| \ge a$ แล้ว $x \le -a$ หรือ $x \ge a$

(4) $x + y \le |x| + |y|$

(5) $x + y \le |x + y|$

(6) $|x + y| \le |x| + |y|$

(7) $|x| - |y| \le |x - y|$

(8) $||x| - |y|| \le |x - y|$

พิสูจน์ (1) $x \le |x|$

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** $x \ge 0$

จะได้ $x = |x|$

กรณีที่ 2 $x < 0$

จะได้ $0 < -x$ และ $-x = |x|$

แต่ $x < -x$

ดังนั้น $x < |x|$

จากกรณีทั้งสอง จึงสรุปได้ว่า $x \le |x|$

(2) ถ้า $|x| \le a$ แล้ว $-a \le x \le a$

พิสูจน์ ให้ $|x| \le a$

กรณีที่ 1 $x \ge 0$

จะได้ $x = |x| \le a$

ดังนั้น $0 \le x \le a$

กรณีที่ 2 $x < 0$

จะได้ $0 < -x$ และ $-x = |x|$

แต่ $|x| \le a$

ดังนั้น $0 < -x \le a$

แสดงว่า $-a \le x < 0$

จากกรณีทั้งสอง จึงสรุปได้ว่า $-a \le x \le a$

(3) ถ้า $|x| \ge a$ แล้ว $x \le -a$ หรือ $x \ge a$ การพิสูจน์ทำเป็นแบบฝึกหัด

(4) ถ้า $x + y \le |x| + |y|$ การพิสูจน์ทำเป็นแบบฝึกหัด

(5) $x + y \le |x + y|$ การพิสูจน์ทำเป็นแบบฝึกหัด

(6) $| x + y | \leq | x | + | y |$

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** $x + y \geq 0$

จะได้ $x + y = | x + y |$

จากข้อ(4) จะได้ $x + y \leq | x | + | y |$

ดังนั้น $| x + y | \leq | x | + | y |$

กรณีที่ 2 $x + y < 0$

จะได้ $-(x + y) = | x + y |$

ดังนั้น $(-x) + (-y) = | x + y |$

จากข้อ (4) จะได้ $(-x) + (-y) \leq | -x | + | -y |$

แต่ $| -x | = | x |$ และ $| -y | = | y |$

ดังนั้น $(-x) + (-y) \leq | x | + | y |$

นั่นคือ $| x + y | \leq | x | + | y |$

จากกรณีทั้งสอง จึงสรุปได้ว่า $| x + y | \leq | x | + | y |$

(7) $| x | - | y | \leq | x - y |$

พิสูจน์ เนื่องจาก $| x | = | (x - y) + y |$

จากข้อ (6) จะได้ $| (x - y) + y | \leq | x - y | + | y |$

ดังนั้น $| x | \leq | x - y | + | y |$

นั่นคือ $| x | - | y | \leq | x - y |$

(8) $|| x | - | y || \leq | x - y |$

พิสูจน์ จากข้อ (7) จะได้ $| x | - | y | \leq | x - y |$ ...①

และ $| y | - | x | \leq | y - x |$

ดังนั้น $-(| x | - | y |) \leq | y - x |$

แต่ $| x - y | = | y - x |$

จึงได้ $-(| x | - | y |) \leq | x - y |$

แสดงว่า $-| x - y | \leq | x | - | y |$ ...②

จาก ① และ ② จะได้ $-| x - y | \leq | x | - | y | \leq | x - y |$

โดย ข้อ (2) จึงได้ $|| x | - | y || \leq | x - y |$

■

แบบฝึกหัด 7.2

1. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

   (1) ถ้า $|x| \geq a$ แล้ว $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

   (2) $x + y \leq |x| + |y|$

   (3) $x + y \leq |x + y|$

2. จงหาเซต คำตอบของ อสมการ $|x^3 - 1| > 1 - x$

เรื่องที่ 7.2.2 อสมการค่าสัมบูรณ์ที่มีเงื่อนไข

ในการเรียนระดับสูง โดยเฉพาะการพิสูจน์ ลิมิตของฟังก์ชัน จำเป็นต้องใช้อสมการค่าสัมบูรณ์ที่มีเงื่อนไข ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7.4 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 4| < 2$ แล้ว $|x^2 + x - 20| < 22$

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนจริง และ $|x - 4| < 2$

จะได้ $-2 < x - 4 < 2$

$2 < x < 6$

$7 < x + 5 < 11$

ดังนั้น $|x + 5| < 11$

จะได้ $|x - 4||x + 5| < 2 \times 11$

$|(x - 4)(x + 5)| < 22$

นั่นคือ $|x^2 + x - 20| < 22$

■

ตัวอย่างที่ 7.5 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 5| < \frac{1}{2}$ แล้ว $\left|\frac{x-3}{x-4} - 2\right| < 1$

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนจริง และ $|x - 5| < \frac{1}{2}$

จะได้ $-\frac{1}{2} < x - 5 < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < x - 4 < \frac{3}{2}$

ดังนั้น $\frac{1}{2} < |x - 4| < \frac{3}{2}$

จะได้ $\frac{2}{3} < \frac{1}{|x-4|} < 2$

พิจารณา $\left|\frac{x-3}{x-4} - 2\right| = \left|\frac{x-3-2x+8}{x-4}\right|$

$$= \left|\frac{-x+5}{x-4}\right|$$

$$= \frac{|-x+5|}{|x-4|}$$

$$= \frac{|x-5|}{|x-4|}$$

จาก $|x-5| < \frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{|x-4|} < 2$

ดังนั้น $\frac{|x-5|}{|x-4|} < 1$

นั่นคือ $\left|\frac{x-3}{x-4} - 2\right| < 1$

■

แบบฝึกหัด 7.3

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า

1. ถ้า $|x-3| < 1$ แล้ว $|x^2 - x - 6| < 6$
2. ถ้า $|x+4| < 1$ แล้ว $|x^3 + x^2 - x| < 90$
3. ถ้า $|x-4| < \frac{1}{4}$ แล้ว $\left|\frac{2x-7}{x-3} - 1\right| < \frac{1}{3}$

หน่วยที่ 8
ปัญหาท้าทายปัญญา

ตอนที่ 8.1 ปัญหาท้าทายปัญญา
ตอนที่ 8.2 ผลเฉลย

แนวคิด 1. ปัญหาท้าทายปัญญา เป็นปัญหานอกเหนือจากเนื้อหาในบทเรียน มีผลเฉลยได้หลายรูปแบบ ช่วยให้ผู้แก้ปัญหามีมุมมองและวิธีแก้ปัญหาที่หลากหลาย และสร้างสรรค์

2. ลำดับของจำนวนที่เกิดจากการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ สามารถนำมาเป็นปัญหาให้คิดได้ นอกจากนี้ผลเฉลยของผู้ตั้งปัญหา กับผู้แก้ปัญหาอาจจะแตกต่างกันได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการให้เหตุผลของแต่ละคน

3. ลำดับของตัวอักษร สามารถมาทำเป็นรหัสให้แก้ปัญหาได้

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 8 จบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. วิเคราะห์ปัญหาได้อย่างมีเหตุผล
2. แก้ปัญหาอย่างมี มิติสัมพันธ์
3. มีมุมมองปัญหาได้หลากหลายแง่มุม
4. หาผลเฉลยของบางปัญหาได้ มากกว่าหนึ่งผลเฉลย

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์แจกเอกสารปัญหาท้าทายปัญญา ให้เวลานักเรียนหาผลเฉลย นักเรียนสามารถหาผลเฉลยได้มากกว่าหนึ่งผลเฉลย โดยต้องสามารถบอกเหตุผลในการหาผลเฉลย แต่ละผลเฉลยได้
2. อาจารย์เลือกนักเรียนที่หาผลเฉลยได้แตกต่างกันในปัญหาข้อเดียวกัน ไปแสดงเหตุผลการวิเคราะห์ปัญหา เพื่อหาผลเฉลยของตนเองที่หน้าชั้นเรียน
3. นักเรียนอภิปรายวิธีวิเคราะห์ปัญหาอย่างมีเหตุผล จากมุมมองที่แตกต่างกัน

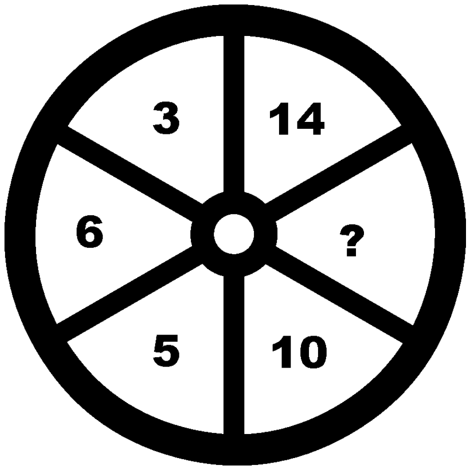
สื่อการสอน

1. เอกสารปัญหาท้าทายปัญญา
2. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากผลเฉลย และการแสดงเหตุผลการวิเคราะห์ปัญหาเพื่อหาผลเฉลย

ปริศนา 1 จำนวนใดหายไปจากวงล้อ



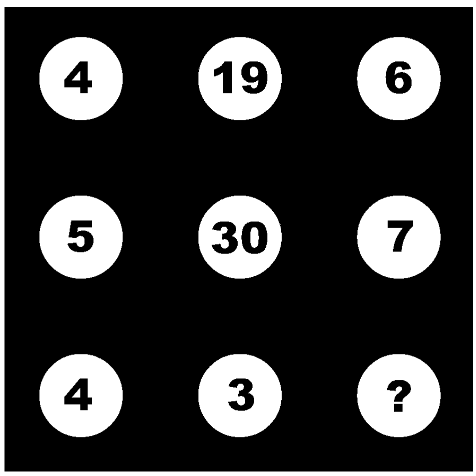
เหตุผล ....

ปริศนา 2 ตัวอักษรใดทำให้ลำดับสมบูรณ์

B F J P ?

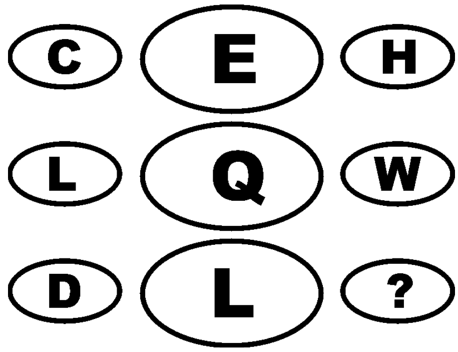
เหตุผล ....

ปริศนา 3 จำนวนใดหายไป



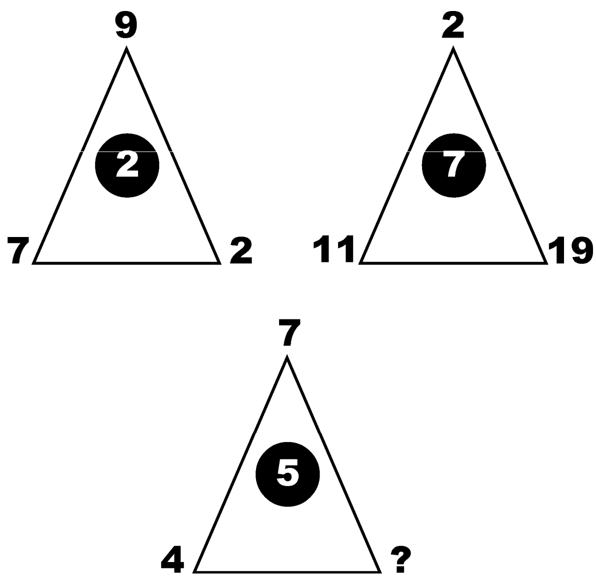
เหตุผล ....

ปริศนา 4 ปริศนานี้ต้องการตัวอักษรใดจึงจะสมบูรณ์



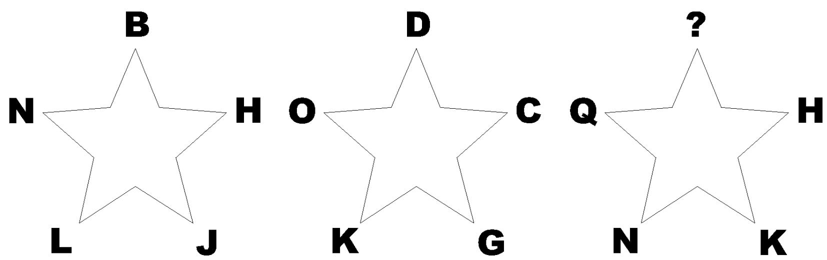
เหตุผล ....

ปริศนา 5 จำนวนอะไรที่หายไปที่มุมล่างขวาของรูปสามเหลี่ยมด้านล่าง



เหตุผล ....

ปริศนา 6 ตัวอักษรใดที่อยู่บนดวงดาวสุดท้าย



เหตุผล ....

ปริศนา 7 จำนวนใดที่ทำให้ตารางนี้สมบูรณ์

0	6	0	3	1	0
1	3	0	8	0	7
1	9	1	1	1	7
3	2	1	9	2	4
5	1	3	0	4	1
8	3	4	9	6	?

เหตุผล ....

ปริศนา 8 จงเติมตัวเลขข้างล่างนี้ให้สมบูรณ์

5

7

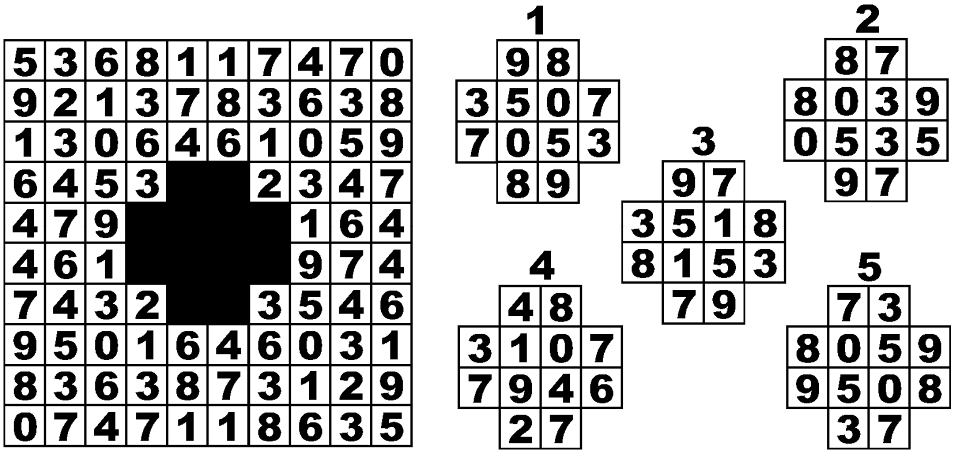
11

19

?

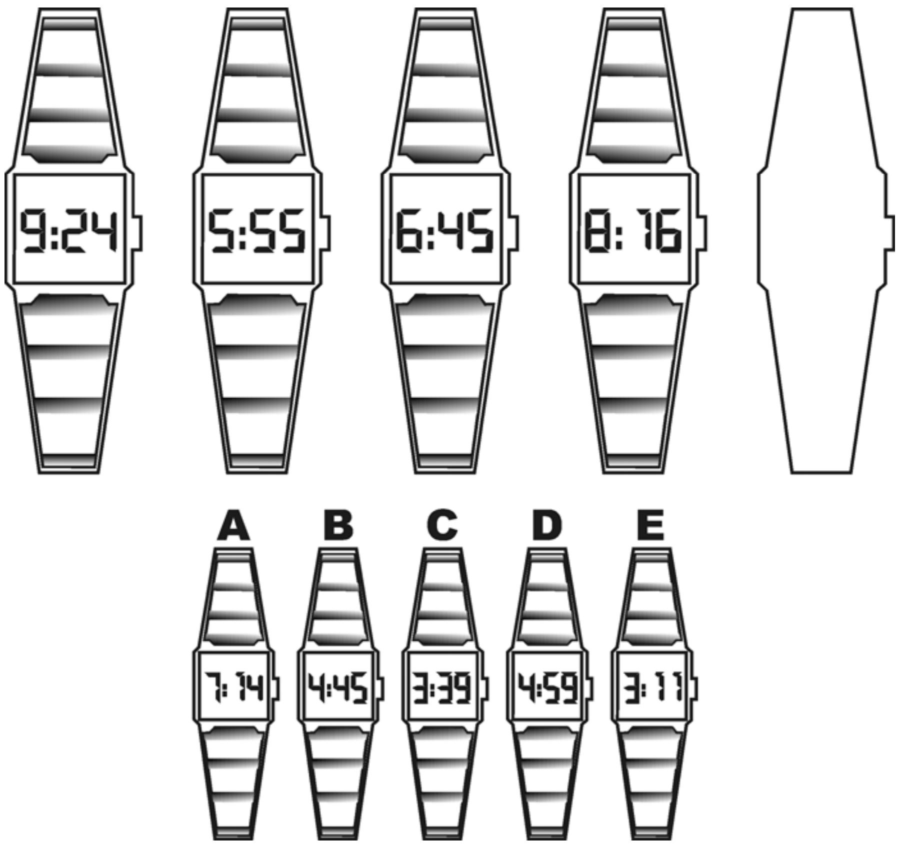
เหตุผล ....

ปริศนา 9 กากบาทชุดใดที่แทนกากบาทสีดำ



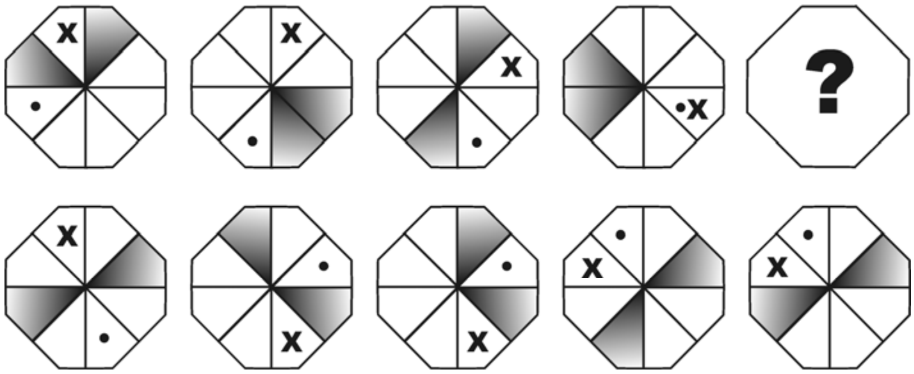
เหตุผล ....

ปริศนา 10 นาฬิกาเรือนใดที่เป็นนาฬิกาที่อยู่ในช่องว่าง



เหตุผล ....

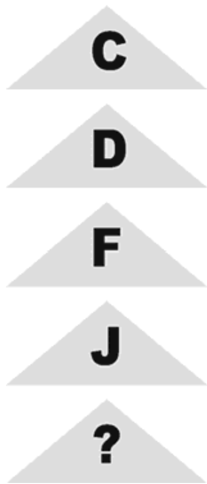
ปริศนา 11 แบบรูปข้างล่างแบบใดที่แทนแบบรูปที่มีเครื่องหมายคำถาม



A B C D E

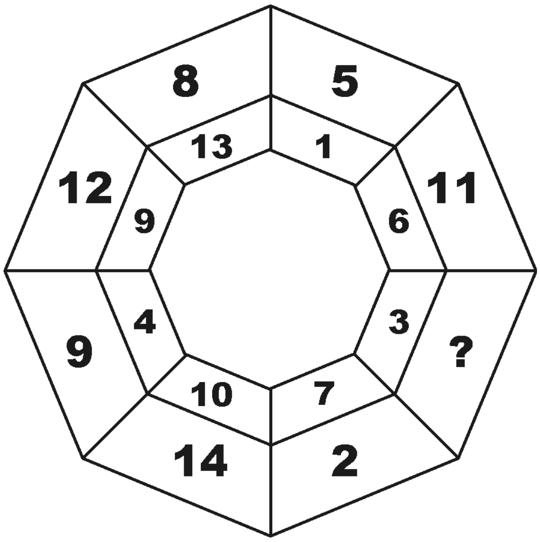
เหตุผล ....

ปริศนา 12 จงทำลำดับเชิงตรรกศาสตร์นี้ให้สมบูรณ์



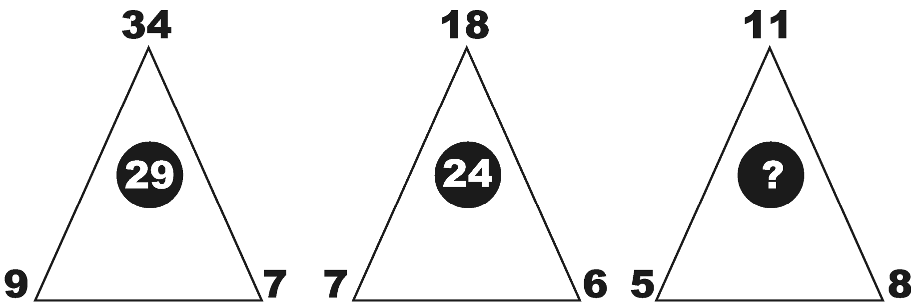
เหตุผล ....

ปริศนา 13 จำนวนใดหายไป



เหตุผล ....

ปริศนา 14 จงไขปริศนานี้



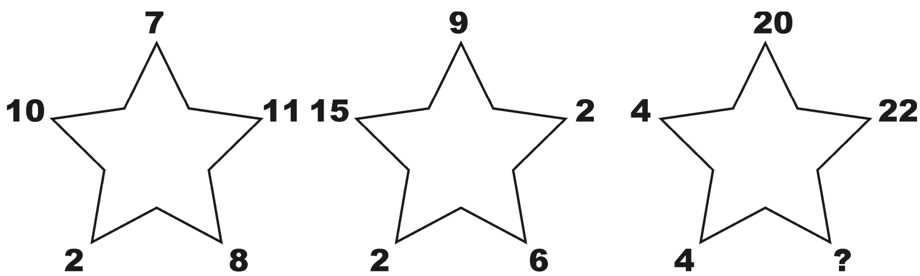
เหตุผล ....

ปริศนา 15 จำนวนใดที่แทนเครื่องหมายคำถาม ?

9	3	2	4	F	4	5	2	1
4	9	8	4	M	6	1	0	5
11	2	9	8	T	2	1	4	3
5	7	3	5	E	6	2	4	3
6	4	6	5	H	2	1	3	7
5	7	4	8	C	8	3	6	4
2	6	4	8	?	3	1	2	4

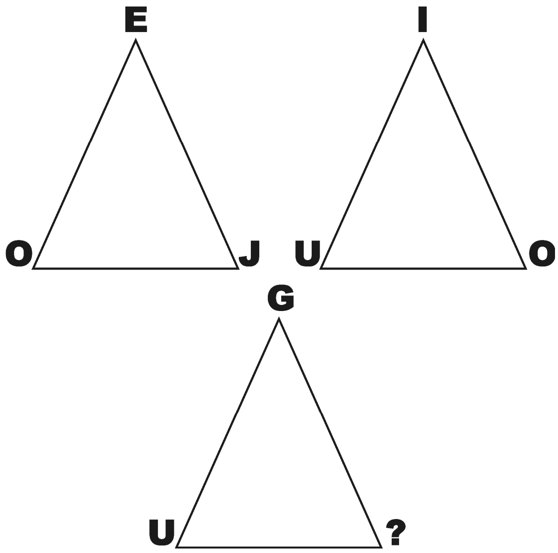
เหตุผล ....

ปริศนา 16 จำนวนใดที่หายไปจากดวงดาวดวงสุดท้าย



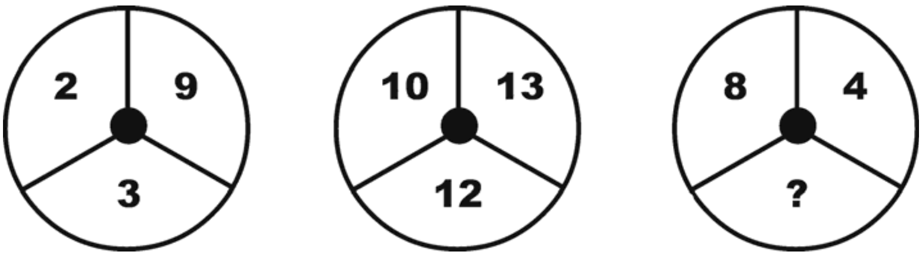
เหตุผล ....

ปริศนา 17 ตัวอักษรใดหายไป



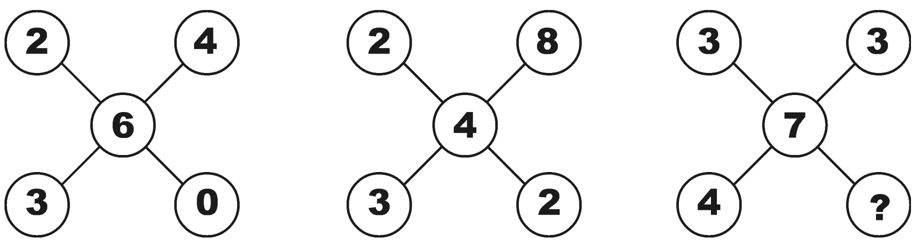
เหตุผล ....

ปริศนา 18 จำนวนใดหายไป



เหตุผล ....

ปริศนา 19 จำนวนใดหายไปในรูปสุดท้าย



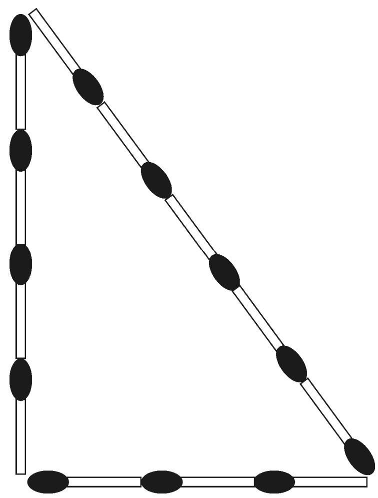
เหตุผล ....

ปริศนา 20 จงทำลำดับเชิงตรรกศาสตร์นี้ให้สมบูรณ์

5	9	6	7
6	4	11	10
6	3	10	7
7	8	5	?

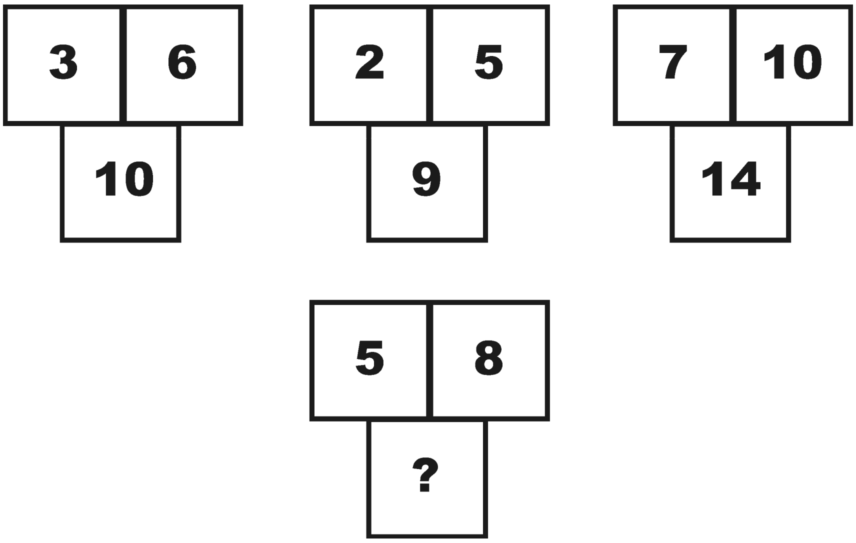
เหตุผล ....

ปริศนา 21 จงย้ายก้านไม้ขีด 4 ก้าน ทำให้พื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่เดิม



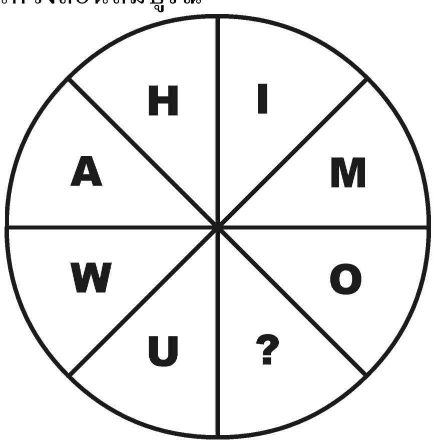
เหตุผล ....

ปริศนา 22 จำนวนใดหายไป



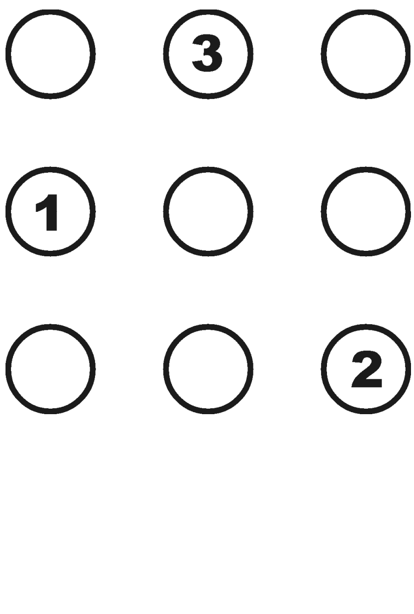
เหตุผล ....

ปริศนา 23 จงเติมตัวอักษรเพื่อให้วงล้อนี้สมบูรณ์



เหตุผล ....

ปริศนา 24 จงเติมเลขโดด 1 ถึง 9 ลงในปริศนา เพื่อให้ผลบวกตามแนวนอน แนวตั้ง และแนวทแยงมีค่าเท่ากัน



เหตุผล ....

ตอนที่ 8.2 ผลเฉลย

ในปัญหาท้าทายปัญญานี้ เนื่องจากเป็นลำดับจำกัดของจำนวนหรือตัวอักษรจึงอาจมีผลเฉลยได้แตกต่างกันหลายแบบ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับเหตุผลถ้าสมเหตุสมผลแล้วผลเฉลยนั้นก็ถือว่าถูกถึงแม้ว่าจะแตกต่างกันในรูปทั่วไปก็ตาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

พิจารณาลำดับต่อไปนี้

1 , 2 , 3 , ?

? มีค่าเท่าใด

เฉลย 1 ? คือ 4

เหตุผล เนื่องจาก 1 , 2 , 3 เป็นลำดับที่มีค่าเพิ่มขึ้นทีละ 1 ในพจน์ที่เพิ่มขึ้น ดังนั้น ? เพิ่มขึ้น 1 จาก 3 จึงได้ ? คือ 4

เฉลย 2 ? คือ 5

เหตุผล เนื่องจาก 1 , 2 , 3 มีสองพจน์แรก คือ 1 กับ 2 พจน์ที่สามได้จากสองพจน์แรกบวกกันคือ

1 + 2 = 3 ดังนั้น พจน์ที่สี่ ย่อมได้จากสองพจน์ข้างหน้าบวกกันคือ 2 + 3 = 5 จึงได้ ? คือ 5

เฉลย 3 ? คือ 6

เหตุผล เนื่องจาก 1 , 2 , 3 มี สองพจน์แรกคือ 1 กับ 2 พจน์ต่อ ๆ ไป จะได้จากพจน์ข้างหน้าบวกกันทั้งหมด

เช่น พจน์ที่สามได้จาก 1 + 2 = 3 ดังนั้นพจน์ที่ 3 คือ 3

พจน์ที่สี่ได้จาก 1 + 2 + 3 = 6 จึงได้ ? คือ 6

เฉลย 4 ? คือ 7

เหตุผล เนื่องจาก 1 , 2 , 3 มีสองพจน์แรกคือ 1 กับ 2 พจน์ต่อไปจะได้จากผลคูณของสองพจน์แรก แล้วบวกกับ 1

เช่น พจน์ที่สามได้จาก $(1 \times 2) + 1 = 3$ ดังนั้น พจน์ที่สามคือ 3

พจน์ที่สี่ได้จาก $(2 \times 3) + 1 = 7$ จึงได้ ? คือ 7

เฉลย5 ? คือ 8

เหตุผล เนื่องจาก ลำดับ 1 , 2 , 3 มีพจน์ที่ n คือ

$$a_n = n + \frac{2}{3}(n-1)(n-2)(n-3)$$ เมื่อ a_n คือพจน์ที่ n

จะเห็นว่า $a_1 = 1 + \frac{2}{3}(1-1)(1-2)(1-3) = 1 + 0 = 1$

$a_2 = 2 + \frac{2}{3}(2-1)(2-2)(2-3) = 2 + 0 = 2$

$a_3 = 3 + \frac{2}{3}(3-1)(3-2)(3-3) = 3 + 0 = 3$

จะได้ $a_4 = 4 + \frac{2}{3}(4-1)(4-2)(4-3) = 4 + 4 = 8$

นอกจากผลเฉลยที่แตกต่างกันแล้ว อาจจะมีผลเฉลยเท่ากันแต่สำนวนต่างกัน เช่น ในเฉลย 5 อาจมีพจน์ที่ n คือ $a_n = 2^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{2}$

จะได้ $a_1 = 2^{1-1} + \frac{(1-1)(1-2)(1-4)}{2} = 2^0 + 0 = 1$

$a_2 = 2^{2-1} + \frac{(2-1)(2-2)(2-4)}{2} = 2^1 + 0 = 2$

$a_3 = 2^{3-1} + \frac{(3-1)(3-2)(3-4)}{2} = 2^2 - 1 = 3$

$a_4 = 2^{4-1} + \frac{(4-1)(4-2)(4-4)}{2} = 2^3 + 0 = 8$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างผลเฉลยของปริศนาทั้ง 24 ปริศนา

ปริศนา 1

เฉลย 1 ? คือ 7

เหตุผล ในส่วนของวงกลม 6 ส่วนจะมีจำนวนคี่และจำนวนคู่ปรากฏอยู่สลับกัน ถ้าพิจารณาการเรียงของจำนวนแบบทวนเข็มนาฬิกา

ชุดของจำนวนคู่จะเพิ่มขึ้นทีละ 4 เป็น 6 , 10 , 14

ชุดของจำนวนคี่จะเพิ่มขึ้นทีละ 2 เป็น 3 , 5 , ?

ดังนั้น ? คือ 7

เฉลย 2 ? คือ 10

เหตุผล ในส่วนของวงกลม 6 ส่วน ถ้าจับคู่จากส่วนล่างขึ้นส่วนกลาง และส่วนบน ทีละคู่ ผลบวกจะเพิ่มขึ้นทีละ 1 ดังนี้

5 + 10 = 15

6 + ? = 16

3 + 14 = 17

ดังนั้น ? คือ 10

เฉลย 3 ? คือ 11

เหตุผล ในส่วนของวงกลม 6 ส่วน ถ้าจับคู่ส่วนที่อยู่ตรงข้ามกันแล้วดูผลบวก จะได้ผลบวกเป็นจำนวนเฉพาะที่เรียงกันดังนี้

3 + 10 = 13

6 + ? = 17

5 + 14 = 19

ดังนั้น ? คือ 11

■

ปริศนา 2

เฉลย 1 ? คือ V

เหตุผล เนื่องจากสระในภาษาอังกฤษมี 5 ตัวคือ A , E , I , O , U จะเห็นว่าลำดับ B , F , J , P , ? เป็นลำดับตัวอักษรในภาษาอังกฤษที่ถัดจากตัวอักษรที่เป็นสระไปหนึ่งตัว

ตัวอักษรถัดจาก A คือ B ถัดจาก E คือ F ถัดจาก I คือ J ถัดจาก O คือ P และถัดจาก U คือ V

ดังนั้น ? คือ V

เฉลย 2 ? คือ P

เหตุผล ถ้าให้ A แทน 1 , B แทน 2 , C แทน 3 ,..., Z แทน 26 จะพบว่า ลำดับ B , F , J , P , ? คือ ลำดับ

2 , 6 , 10 , 16 , ?

ถ้าพจน์กลางคือ 10 เป็นค่าเฉลี่ยของผลบวกทุกพจน์จะได้

ผลบวก $2 + 6 + 10 + 16 + ? = 10 \times 5 = 50$

จะได้ ? = 16 แต่ 16 แทนด้วย P

ดังนั้น ? คือ P

■

ปริศนา 3

เฉลย 1 ? คือ 2

เหตุผล ผลคูณของจำนวนในวงกลมที่อยู่ริมสองข้างของแต่ละแนวนอนจะเท่ากับจำนวนที่อยู่ในวงกลมกลางบวกด้วย 5 ของแถวนั้นดังนี้

$4 \times 6 = 24 = 19 + 5$

$5 \times 7 = 35 = 30 + 5$

$4 \times ? = 8 = 3 + 5$

ดังนั้น ? คือ 2

เฉลย 2 ? คือ 16

เหตุผล ผลบวกของจำนวนในวงกลมที่เรียงตัวเป็นเครื่องหมายบวกตามแนวนอนและแนวตั้งจะมีค่าเพิ่มขึ้น 10 ดังนี้

แนวนอน	$5 + 30 + 7 = 42$
แนวตั้ง	$3 + 30 + 19 = 52$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนในวงกลมที่เรียงตัวเป็นเครื่องหมายคูณ ตามแนวทแยงล่างซ้ายไปบนขวา และล่างขวาไปบนซ้าย จะต้องมีค่าเพิ่มขึ้น10 ดังนั้น

แนวทแยงล่างซ้ายไปบนขวา $4 + 30 + 6 = 40$

แนวทแยงล่างขวาไปบนซ้าย $? + 30 + 4 = 50$

ดังนั้น ? คือ 16

■

ปริศนา 4

เฉลย 1 ? คือ U

เหตุผล 1 ถ้าให้ A แทน 1 , B แทน 2 , C แทน 3 , … , Z แทน 26 แล้วขึ้นต้นใหม่เป็น A แทน 27 , B แทน 28 , C แทน 29 , … , Z แทน 52

จะได้แถวทั้ง 3 คือ

3	5	8
12	17	23
30	38	?

จะพบว่า ถ้าเขียนเรียงจากแถวที่ 1 ต่อด้วยแถวที่ 2 และแถวที่ 3

จะได้ 3 5 8 12 17 23 30 38 ? = 47

การเพิ่ม 2 3 4 5 6 7 8 9

จากการเพิ่ม จะพบว่า 38 + 9 = 47 ซึ่งในการแทนค่าตัวอักษร ชุดที่ 2

จาก A = 27 B = 28 พบว่า U = 47

ดังนั้น ? คือ U

เฉลย 2 ? คือ Z

เหตุผล 2 ถ้าให้ A แทน 1 , B แทน 2 , C แทน 3 , … , Z แทน 26

จะได้แถวทั้ง 3 คือ

3	5	8
12	17	23
4	12	?

จะพบว่า ถ้าหาผลบวกตามแนวทแยงหลักที่ 1 และ 2 ทีละสองแถวค่าจะเพิ่มขึ้น 3 และผลบวกตามแนวทแยงหลักที่ 2 และ 3 ทีละสองแถวก็จะมีค่าเพิ่มขึ้น 3

$$\left.\begin{array}{l} 12 + 5 = 17 \\ 3 + 17 = 20 \end{array}\right\}\text{เพิ่มขึ้น 3} \qquad \left.\begin{array}{l} 8 + 17 = 25 \\ 5 + 23 = 28 \end{array}\right\}\text{เพิ่มขึ้น 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4 + 17 = 21 \\ 12 + 12 = 24 \end{array}\right\}\text{เพิ่มขึ้น 3} \qquad \left.\begin{array}{l} 12 + 23 = 35 \\ 12 + ? = 38 \end{array}\right\}\text{เพิ่มขึ้น 3}$$

จะได้ ? = 26

ซึ่ง Z แทน 26

ดังนั้น ? คือ Z

■

ปริศนา 5

เฉลย 1 ? คือ 17

เหตุผล จากรูปสามเหลี่ยมด้านบนสองรูป ผลต่างของจำนวนในตำแหน่งเดียวกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองคือ จำนวนในตำแหน่งเดียวกันนั้นของรูปสามเหลี่ยมรูปที่สามด้านล่าง

ตำแหน่ง	รูปที่ 1	รูปที่ 2	ผลต่าง	รูปที่ 3
มุมยอด	9	2	$\lvert 9-2 \rvert = 7$	7
ภายใน	2	7	$\lvert 2-7 \rvert = 5$	5
มุมล่างซ้าย	7	11	$\lvert 7-11 \rvert = 4$	4
มุมล่างขวา	2	19	$\lvert 2-19 \rvert = 16$	? = 17

ดังนั้น ? คือ 17

เฉลย 2 ? คือ 4

เหตุผล ผลบวกของจำนวนในตำแหน่งเดียวกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสามจะเพิ่มขึ้นทีละ 4 โดยเริ่มต้นจากตำแหน่งภายใน ไปมุมยอดมุมล่างซ้าย และ มุมล่างขวา ดังนี้

ตำแหน่ง	รูปที่ 1	รูปที่ 2	รูปที่ 3	ผลบวก	เพิ่มขึ้น
ภายใน	2	7	5	14	} 4
มุมยอด	9	2	7	18	} 4
มุมล่างซ้าย	7	11	4	22	} 4
มุมล่างขวา	3	19	?	26	

จาก $3 + 19 + ? = 26$

ดังนั้น ? คือ 4

■

ปริศนา 6

เฉลย 1 ? คือ C

เหตุผล ตัวอักษรที่มุมยอดของรูปดาวจะเป็นตัวกำหนดการเพิ่มขึ้น ของตัวอักษรในลำดับของแต่ละรูปดาว ซึ่งทิศทางของลำดับจะเริ่มต้นที่ไหล่ด้านขวาของรูปดาวแล้ววนแบบตามเข็มนาฬิกา ดังนี้

รูปที่	ตัวกำหนดการเพิ่มขึ้นของลำดับ	ลำดับ
1	B = 2	H J L N 8 10 12 14
2	D = 4	C G K O 3 7 11 15
3	? =	H K N Q 8 11 14 17

จะเห็นว่าลำดับในรูปที่ 3 คือ 8 , 11 , 14 , 17 เพิ่มขึ้นทีละ 3 ซึ่ง C = 3

ดังนั้น ? คือ C

เฉลย 2 ? คือ N

เหตุผล ผลบวกของจำนวนที่มุมยอดของรูปดาวสองรูปริมในตำแหน่งที่ตรงกัน ลบด้วยจำนวนที่มุมยอด ของรูปดาวตรงกลางมีค่าเพิ่มขึ้นตำแหน่งละ 1 โดยเริ่มต้นจากมุมบนแบบตามเข็มนาฬิกา

รูป	ลำดับ				
ซ้าย ขวา กลาง	B = 2 ? D = 4	H = 8 H = 8 C = 3	J = 10 K = 11 G = 7	L =12 N = 14 K = 11	N = 14 Q = 17 O = 15
ผลลัพธ์	2 + ? - 4 = 12	8 + 8 - 3 = 13	10 + 11 - 7 = 14	12 + 14 - 11 = 15	14 + 17 - 15 = 16

จะเห็นว่า 2 + ? – 4 = 12

จึงได้ ? คือ 14 ซึ่ง N = 14

ดังนั้น ? คือ N

■

ปริศนา 7

เฉลย 1 ? คือ 5

เหตุผล

สำนวนที่ 1 จำนวนในแถวที่ 3 ของตารางได้จากผลบวกของจำนวนในแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 ของตาราง ขณะเดียวกันจำนวนในแถวที่ 6 ของตารางได้จากผลบวกของจำนวนในแถวที่ 4 กับแถวที่ 5 ของตาราง

จะเห็นได้ว่า 4 + 1 = ? = 5

ดังนั้น ? คือ 5

สำนวนที่ 2 ผลบวกเลขโดดในแต่ละแถวนับจากแถวบนลงแถวล่าง

เช่น แถวที่ 1 0 + 6 + 0 + 3 + 1 + 0 = 10 ⟶ 1 + 0 = 1

แถวที่ 2 1 + 3 + 0 + 8 + 0 + 7 = 19 ⟶ 1 + 9 = 10 ⟶ 1 + 0 = 1

แถวที่ 3 ได้ผลเป็น 2

แถวที่ 4 ได้ผลเป็น 3

แถวที่ 5 ได้ผลเป็น 5

พิจารณาจากผลที่ได้ของเลขโดดจากแถวที่ 1 ถึงแถวที่ 5 เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้

1 , 1 , 2 , 3 , 5 พบว่าพจน์ที่สาม, สี่, และห้า ได้จากผลบวกของสองพจน์ที่อยู่ข้างหน้า ดังนั้น พจน์ที่หก คือ 3 + 5 = 8

นั่นคือ 8 + 3 + 4 + 9 + 6 + ? = 30 + ? ⟶ 3 + 0 + ? = 8

ดังนั้น ? คือ 5

■

ปริศนา 8

เฉลย 1 ? คือ 35

เหตุผล จากแผนภาพ

5 7 11 19 ?

2 4 8 16

ผลต่างของลำดับ มีค่าเพิ่มขึ้นเป็น $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$

จะได้ $? = 19 + 2^4 = 19 + 16 = 35$

ดังนั้น ? คือ 35

เฉลย 2 ? คือ 29

เหตุผล จากแผนภาพ

5 7 11 19 ?

\ + / \ + / \ + / \ + /

12 18 30 48

6 12 18

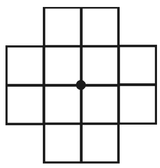
จะได้ $19 + ? = 48$

ดังนั้น ? คือ 29

■

ปริศนา 9

เฉลย 1 ? คือ ชุด 1 หรือ ชุด 3 หรือ ชุด 5

เหตุผล จำนวนที่เหมือนกันใน  ต้องอยู่ในตำแหน่งที่สมมาตรกับจุดกึ่งกลางของรูป

เฉลย 2 ? คือ ชุด 5

เหตุผล ถ้าแบ่งรูปใหญ่เป็น 4 ส่วนเท่ากันแต่ละส่วนเป็นตารางขนาด 5×5 จะพบว่าส่วนที่แหว่งเมื่อนำจำนวนในกากบาทชุด 5 มาเติมแล้ว จะทำให้จำนวนในแต่ละ ตารางขนาด 5×5 นั้น หมุน 90° แบบตามเข็มนาฬิกา และเคลื่อนที่วนแบบทวนเข็มนาฬิกา

■

ปริศนา 10

เฉลย 1 นาฬิกา C

เหตุผล เมื่อพิจารณาเวลาในนาฬิกาแต่ละเรือน จะพบว่า

ผลบวกเลขโดดเท่ากับ 15

ดังนั้น $9{:}24 \longrightarrow 9 + 2 + 4 = 15$

$5{:}55 \longrightarrow 5 + 5 + 5 = 15$

$6{:}45 \longrightarrow 6 + 4 + 5 = 15$

$8{:}16 \longrightarrow 8 + 1 + 6 = 15$

นาฬิกา C เวลา $3{:}39 \longrightarrow 3 + 3 + 9 = 15$

เฉลย 2 นาฬิกา A , C และ D

เหตุผล เมื่อนำเวลาในนาฬิกาแต่ละเรือนมาเขียนเป็นจำนวนจะได้ 924 , 555 , 645 , 816 ซึ่งแต่ละจำนวนจะหารด้วย 3 ลงตัว จากนาฬิกา A , C , D จะได้จำนวนทั้ง 3 คือ 714 , 339 และ 459 ซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว

■

ปริศนา 11

เฉลย 1 ? คือ รูป C

เหตุผล ● เคลื่อนที่แบบทวนเข็มนาฬิกาทีละ 1 ช่อง

× เคลื่อนที่แบบตามเข็มนาฬิกาทีละ 1 ช่อง

ส่วนที่แรเงาตั้ง เคลื่อนที่แบบตามเข็มนาฬิกาทีละ 2 ช่อง

ส่วนที่แรเงานอน เคลื่อนที่แบบทวนเข็มนาฬิกาทีละ 3 ช่อง

เฉลย 2 ? คือ รูป D หรือ E

เหตุผล รูปจากโจทย์ ● และ × จะอยู่ในช่องที่ห่างกัน ตรงข้ามกัน และช่องเดียวกัน ยังขาดในช่องที่อยู่ติดกัน ซึ่งคือรูป D และ E

■

ปริศนา 12

เฉลย 1 ? คือ R

เหตุผล

สำนวนที่ 1

ลำดับ	C	D	F	J	?
ค่า	3	4	6	10	

ซึ่ง 3 , 4 , 6 , 10 มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_1 = 3$ และ $a_n = 2a_{n-1} - 2$ เมื่อ $n \geq 2$

จะได้ $a_1 = 3$

$a_2 = 2a_1 - 2 = 6 - 2 = 4$

$a_3 = 2a_2 - 2 = 8 - 2 = 6$

$a_4 = 2a_3 - 2 = 12 - 2 = 10$

$a_5 = 2a_4 - 2 = 20 - 2 = 18$

ซึ่ง R แทน 18

ดังนั้น ? คือ R

สำนวนที่ 2

เหตุผล จากแผนภาพต่อไปนี้

C D F J ?

กับตำแหน่งตัวอักษร 3 4 6 10

1 2 4 8

2^0 2^1 2^2 2^3

จะเห็นว่า ? = 10 + 8 = 18

ดังนั้น ? คือ R

เฉลย 2 ? คือ V

เหตุผล จากแผนภาพต่อไปนี้

C D F J ?

กับตำแหน่งตัวอักษร 3 4 6 10

ลำดับ 3 , 4 , 6 , 10 มี $a_1 = 3$

$$a_n = a_{n-1} + 2^{n-2} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

เมื่อ $n \geq 2$

จะได้ $a_1 = 3$

$a_2 = a_1 + 2^{2-2} + 0 \quad = 3 + 1 + 0 \quad = 4$

$a_3 = a_2 + 2^{3-2} + 0 \quad = 4 + 2 + 0 \quad = 6$

$a_4 = a_3 + 2^{4-2} + 0 \quad = 6 + 4 + 0 \quad = 10$

$a_5 = a_4 + 2^{5-2} + (4 \times 3 \times 2 \times 1) \quad = 10 + 8 + 4 = 22$

ซึ่ง V แทน 22

ดังนั้น ? คือ V

■

ปริศนา 13

เฉลย 1 ? คือ 6

เหตุผล รูปแปดเหลี่ยมนี้ มีผลบวกของจำนวนที่อยู่ตรงกันข้ามรวมสี่จำนวน เท่ากับ 30

เช่น 11 + 6 + 4 + 9 = 30

5 + 1 + 10 + 14 = 30

8 + 13 + 7 + 2 = 30

จะได้ 12 + 9 + 3 + ? = 30

ดังนั้น ? คือ 6

เฉลย 2 ? คือ 0 หรือ 6

เหตุผล ผลต่างของจำนวนที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูใหญ่ และรูปสี่เหลี่ยมคางหมูเล็กที่อยู่ติดกัน มีค่าเท่ากับคู่ที่อยู่ตรงข้าม

เช่น $|11-6| = |9-4| = 5$

$|5-1| = |10-14| = 4$

$|8-13| = |7-2| = 5$

$|12-9| = |3-?| = 3$

ดังนั้น ? คือ 0 หรือ 6

■

ปริศนา 14

เฉลย ? คือ 29

เหตุผล

สำนวนที่ 1 ในรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูป ผลคูณของจำนวนที่ฐานของรูปสามเหลี่ยม ลบด้วยจำนวนที่มุมยอด จะเท่ากับจำนวนภายในรูปสามเหลี่ยม

สำนวนที่ 2 ในรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูป ผลบวกของจำนวนที่มุมยอดกับจำนวนที่อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมจะเท่ากับผลคูณของจำนวนที่ฐาน

■

ปริศนา 15

เฉลย 1 ? คือ 3

เหตุผล

สำนวนที่ 1 ในแต่ละแถว ผลบวกของจำนวนทางซ้ายของตัวอักษร จะต่างจาก ผลบวกของจำนวนทางขวาของตัวอักษร เท่ากับค่าของตำแหน่งของตัวอักษรนั้นๆ

เช่น $(9 + 3 + 2 + 4) - (4 + 5 + 2 + 1) = 6$ ซึ่ง F อยู่ในตำแหน่งที่ 6

$(4 + 9 + 8 + 4) - (6 + 1 + 0 + 5) = 13$ ซึ่ง M อยู่ในตำแหน่งที่ 13

จะได้ $(2 + 6 + 4 + 8) - (3 + 1 + 2 + 4) = 10$ ซึ่ง J อยู่ในตำแหน่งที่ 10

ดังนั้น ? คือ J

สำนวนที่ 2 ในแต่ละแถว ผลบวกของจำนวนทางซ้ายของตัวอักษรลบด้วยค่าประจำตำแหน่งของตัวอักษรนั้น จะเท่ากับผลบวกจำนวนทางขวาของตัวอักษร

เช่น แถว F ค่าประจำตำแหน่งของ F คือ 6

จะได้ $(9 + 3 + 2 + 4) - 6 = (4 + 5 + 2 + 1)$

แถว M ค่าประจำตำแหน่งของ M คือ 13

จะได้ $(4 + 9 + 8 + 4) - 13 = (6 + 1 + 0 + 5)$

พิจารณาแถว ?

$(2 + 6 + 4 + 8) - ? = (3 + 1 + 2 + 4) = 10$

จะได้ ? อยู่ในตำแหน่งที่ 10

ดังนั้น ? คือ J

■

ปริศนา 16

เฉลย ? คือ 6

เหตุผล

สำนวนที่ 1 ในแต่ละรูปดาว ผลบวกของจำนวนสามจำนวนที่หัวและแขนของ ดาวจะมีค่าเท่ากับจำนวนที่มีตัวเลขอยู่ในตำแหน่งที่ขาทั้งสองของดาว

เช่น $7 + 10 + 11 = 28$

$9 + 15 + 2 = 26$

จะได้ $20 + 4 + 22 = 46 = 4\ ?$

ดังนั้น ? คือ 6

สำนวนที่ 2 ในแต่ละรูปดาว ถ้านำสามจำนวนข้างบนมาเขียนเรียงกันแล้วหาผลบวกจนเป็นเลขโดด จะเท่ากับเลขโดด ที่ได้จากผลบวกของสองจำนวนข้างล่าง

เช่น $10711 \rightarrow 1 + 0 + 7 + 1 + 1 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$

และ $2 + 8 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$

$1592 \rightarrow 1 + 5 + 9 + 2 = 17 \rightarrow 1 + 7 = 8$ และ $2 + 6 = 8$

จะได้ $42022 \rightarrow 4 + 2 + 0 + 2 + 2 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$

และ $4 + ? \rightarrow 1$

จาก $4 + ? \rightarrow 1$ พบว่า $4 + 6 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$

ดังนั้น ? คือ 6

■

ปริศนา 17

เฉลย 1 ? คือ N

เหตุผล ค่าของตัวอักษรที่มุมยอดของรูปสามเหลี่ยม จะเท่ากับผลต่างของค่าของตัวอักษรที่ฐานทั้งสองของรูปสามเหลี่ยม ดังนี้

ตำแหน่ง	รูปที่ 1	รูปที่ 2	รูปที่ 3
มุมยอด	E = 5	I = 9	G = 7
ฐาน(1)	O = 15	U = 21	U = 21
ฐาน(2)	J = 10	O = 12	? = 14 = N

เฉลย 2 ? คือ Z

เหตุผล ผลรวมค่าของตัวอักษรในรูปสามเหลี่ยมที่ 1 หารด้วย 6 ได้ผลลัพธ์เป็น 5

ผลรวมค่าของตัวอักษรในรูปสามเหลี่ยมที่ 2 หารด้วย 6 ได้ผลลัพธ์เป็น 7

ผลรวมค่าของตัวอักษรในรูปสามเหลี่ยมที่ 3 หารด้วย 6 ได้ผลลัพธ์เป็น 9

รูปที่ 1	รูปที่ 2	รูปที่ 3
E + O + J = 5 + 15 + 10 = 30 ซึ่ง $\frac{30}{6} = 5$	I + U + O = 9 + 21 + 12 = 42 ซึ่ง $\frac{42}{6} = 7$	G + U + ? = 17 + 21 + ? = 28 + ? ซึ่ง $\frac{28+?}{6} = 9$

จึงได้ ? = 26

ดังนั้น ? คือ Z

■

ปริศนา 18

เฉลย 1 ? คือ 9

เหตุผล ผลบวกของจำนวนที่อยู่ในส่วนของวงกลมที่มีตำแหน่งตรงกัน ของวงกลมริมทั้งสอง จะเท่ากับจำนวนที่อยู่ในส่วนของวงกลม วงกลางที่มีตำแหน่งตรงกันกับจำนวนที่บวกกัน

ซึ่งจะได้ 2 + 8 = 10 , 9 + 4 = 13 , 3 + ? = 12

ดังนั้น ? คือ 9

เฉลย 2 ? คือ 2 หรือ 9

เหตุผล ผลบวกของจำนวนในแต่ละวงกลมจะหารด้วย 7 ลงตัว สำหรับวงกลมริมทั้งสองนั้น จำนวนในแต่ละส่วนของวงกลมต้องเป็นเลขโดด ดังนี้

2 + 9 + 3 = 14 หารด้วย 7 ลงตัว

10 + 13 + 12 = 35 หารด้วย 7 ลงตัว

8 + 4 + ? หารด้วย 7 ลงตัว

ดังนั้น 8 + 4 + ? = 14 จะได้ ? คือ 2 ซึ่งเป็นเลขโดด

หรือ 8 + 4 + ? = 21 จะได้ ? คือ 9 ซึ่งเป็นเลขโดด

■

ปริศนา 19

เฉลย 1 ? คือ 0

เหตุผล ในกากบาทแต่ละรูป จำนวนที่เป็นเลขสองหลักด้านบนของกากบาท บวกกับจำนวนตรงกลางจะได้ จำนวนที่อยู่ด้านล่างของกากบาทนั้นๆ

นั่นคือ 24 + 6 = 30 28 + 4 = 32 33 + 7 = 4 ? = 40

ดังนั้น ? คือ 0

เฉลย 2 ? คือ 6

เหตุผล ผลบวกของจำนวนที่เป็นเลขโดด ในกากบาทแต่ละรูปจะหารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 และผลบวกเหล่านั้นต้องต่างกันด้วย

นั่นคือ 2 + 4 + 6 + 3 + 0 = 15 ซึ่ง 15 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

2 + 8 + 4 + 3 + 2 = 19 ซึ่ง 19 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

3 + 3 + 4 + 7 + ? = 17 + ? ซึ่ง 17 + ? หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

นั่นคือ 17 + 6 = 23 ซึ่ง 23 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

ดังนั้น ? คือ 6

หมายเหตุ กรณีนี้ ? คือ 2 ไม่ได้ เพราะจะทำให้ 17 + 2 = 19 มีค่าเท่ากับผลบวกของจำนวนในกากบาทที่ 2

■

ปริศนา 20

เฉลย 1 ? คือ 4

เหตุผล ในแต่ละหลัก ผลบวกของจำนวนคู่เท่ากับผลบวกของจำนวนคี่

ดังนี้

หลักที่ 1	หลักที่ 2	หลักที่ 3	หลักที่ 4
6 + 6 = 5 + 7	4 + 8 = 9 + 3	6 + 10 = 11 + 5	10 + ? = 7 + 7

ดังนั้น ? คือ 4

เฉลย 2 ? คือ 8

เหตุผล ผลบวกของจำนวนในหลักที่ 1 กับหลักที่ 2 มีค่าเท่ากัน และผลบวกของจำนวนในหลักที่ 3 กับหลักที่ 4 มีค่าเท่ากัน

ดังนี้

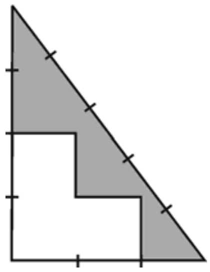
หลักที่ 1 = หลักที่ 2	หลักที่ 3 = หลักที่ 4
5 + 6 + 6 + 7 = 9 + 4 + 3 + 8	6 + 11 + 10 + 5 =7 + 10 + 7 + ?

ดังนั้น ? คือ 8

■

ปริศนา 21

เฉลย และเหตุผล



รูปเดิมมีพื้นที่ $\frac{3\times4}{2}$ = 6 ตารางหน่วย

รูปใหม่มีพื้นที่ 6 – 3 = 3 ตารางหน่วย

■

ปริศนา 22

เฉลย ? คือ 12

เหตุผล

สำนวนที่ 1 ในแต่ละรูป เมื่อเริ่มต้นจากจำนวนในรูปสี่เหลี่ยมมุมบนซ้ายเคลื่อนที่แบบตามเข็มนาฬิกา ค่าของจำนวนจะเพิ่มขึ้นเป็น 3 และ 4 ทุกรูป ดังนี้

รูปที่	ลำดับ
1	$3 \rightarrow 6 \rightarrow 10$ เพิ่มขึ้น 3 และ 4
2	$2 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ เพิ่มขึ้น 3 และ 4
3	$7 \rightarrow 10 \rightarrow 14$ เพิ่มขึ้น 3 และ 4
4	$5 \rightarrow 8 \rightarrow ?$ เพิ่มขึ้น 3 และ 4

ดังนั้น ? คือ 12

สำนวนที่ 2 ในแต่ละรูป สองเท่าของจำนวนในรูปสี่เหลี่ยม มุมบนขวาน้อยกว่าผลบวกของจำนวนในรูปสี่เหลี่ยมที่เหลืออยู่ 1 ดังนี้

รูปที่	สมการ
1	$(2 \times 6) + 1 = 10 + 3$
2	$(2 \times 5) + 1 = 9 + 2$
3	$(2 \times 10) + 1 = 14 + 7$
4	$(2 \times 8) + 1 = ? + 5$

ดังนั้น ? คือ 12

■

ปริศนา 23

เฉลย ? คือ R

เหตุผล

สำนวนที่ 1 ค่าของตัวอักษรที่อยู่ในวงกลม ช่องเว้นช่อง สองชุด

ชุดแรกมีค่าเพิ่มขึ้น 6 ชุดที่สองมีค่าเพิ่มขึ้น 5 ดังนี้

ชุดที่ 1	I → O → U → A 9 15 21 27	(A มีค่าเป็น 1 รอบต่อไปคือ 27)
ชุดที่ 2	H → M → ? → W 8 13 18 23	จะได้ ? = 18

ดังนั้น ? คือ R

สำนวนที่ 2 ค่าตัวอักษรจะเพิ่มขึ้นทีละคู่ โดยเพิ่มจาก 1 เป็น 2 เป็น 3 และเป็น 4 ดังนี้

H → I M → O ? → U W → A

8 9 13 15 18 21 23 27

1 2 3 4

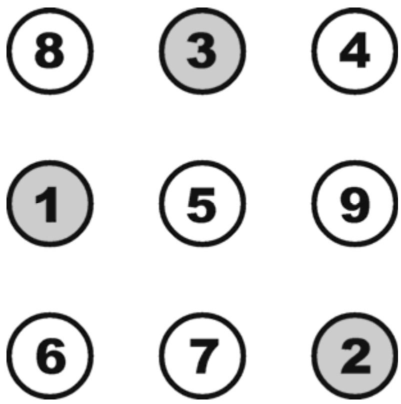
จึงได้ ? = 18

ดังนั้น ? คือ R

■

ปริศนา 24

เฉลย และเหตุผล



จัตุรัสกลนี้มีผลบวก ในแต่ละแนวเท่ากับ 15 ค่ากลางของเลขโดด 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 คือ 5 กำหนดไว้ในวงกลมกลาง วงกลมที่แรเงาและมีตัวเลขระบุไว้เป็นตัวเลขที่กำหนดส่วนที่เหลือในแต่ละแนวจึงเติมตัวเลขให้ครบ 15 จะได้ ผลตามต้องการ

■

หน่วยที่ 9
ลำดับของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต

ตอนที่ 9.1 ลำดับของจำนวนเชิง รูปสามเหลี่ยม และจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ตอนที่ 9.2 ลำดับของจำนวนเชิงรูปพีรามิด ฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ตอนที่ 9.3 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต

แนวคิด 1. แบบรูปทางคณิตศาสตร์ เป็นรูปธรรมที่สื่อให้เกิดกระบวนการทางความคิดได้อย่างสร้างสรรค์ และมีเสรีภาพนำไปสู่ปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ พัฒนาความรู้ให้กว้างและลึกซึ้งขึ้น ทำให้มีการพัฒนาการในกระบวนการแก้ปัญหาที่ดี

2. ลำดับของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิตเป็นแบบรูปหนึ่งทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และพีรามิด เป็นต้น

3. จำนวนเชิงรูปเรขาคณิตสามารถเขียนเป็น ผลบวกของจำนวนและรูปทั่วไปได้ นอกจากนี้ จำนวนเหล่านี้ยังมีความสัมพันธ์กันได้ หลากหลายรูปแบบ

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 9 จบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. สร้างรูปเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับ จำนวนเชิงรูปเรขาคณิตได้
2. หาค่าของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิตได้
3. หาความสัมพันธ์หระหว่างจำนวนเชิงรูปเรขาคณิตได้
4. ใช้สัญลักษณ์ $\sum$ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเชิงรูปเรขาคณิตได้

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายความหมายของรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ลำดับของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต พร้อมทั้งให้ตัวอย่างลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จำนวนเชิงรูปพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
2. นักเรียนอภิปรายความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต ทั้งความสัมพันธ์จากผลบวก และความสัมพันธ์จากรูปทั่วไป
3. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่าง และแบบฝึกหัดเพื่อหาผลบวกของจำนวน และรูปทั่วไปของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

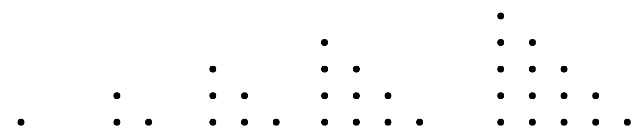
ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 9.1 ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม และจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เรื่องที่ 9.1.1 ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม

1. ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม

เมื่อเขียนจุด • ให้เรียงตัวกันเป็นรูปสามเหลี่ยมจะได้ จำนวนจุดที่แทนจำนวนเรียงตัวเป็นลำดับดังนี้



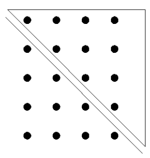
จำนวน	1	3	6	10	5	
ลำดับที่	1	2	3	4	5	... n

ได้ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม คือ 1, 3, 6, 10, 15,…, $\frac{1}{2}n(n+1)$

ทำไมจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n มีรูปทั่วไป คือ $\frac{1}{2}n(n+1)$

รูปทั่วไปนี้อาจแสดงเหตุผลประกอบได้ดังนี้

ถ้าเขียนจุดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 4×5 จุด แล้วแบ่งเป็นจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ 4 จะได้สองรูปดังนี้



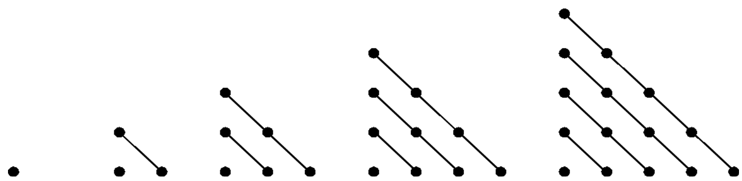
จะพบว่าจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม ลำดับที่ 4 คือ 10 และ $10 = \frac{4 \text{ x } 5}{2}$

ทำนองเดียวกัน ถ้าเขียนจุดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $n \times (n+1)$ จุด จะแบ่งจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n ได้ สองรูป

จึงได้ จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n คือ $\frac{1}{2}n(n+1)$
ถ้าแทนจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n ด้วย Δ_n จะได้

$\Delta_1 = 1$ $\Delta_2 = 3$ $\Delta_3 = 6$ $\Delta_4 = 10$ $\Delta_5 = 15$ $\Delta_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

2. ผลบวกจำนวนนับ n จำนวนแรก 1 + 2 + 3 + ... + n (เขียนแทนด้วย $\sum_{i=1}^{n} i$ อ่านว่า ซิกมาไอ เมื่อไอมีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงเอ็น)



จำนวน	1	1+2 = 3	1+2+3 = 6	1+2+3+4 = 10	1+2+3+4+5 = 15
ผลบวก	$\sum_{i=1}^{1} i = 1$	$\sum_{i=1}^{2} i = 3$	$\sum_{i=1}^{3} i = 6$	$\sum_{i=1}^{4} i = 10$	$\sum_{i=1}^{5} i = 15$
Δ_n	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5

แบบฝึกหัด 9.1

1. จงหาค่าของ Δ_n และค่าของจำนวนที่กำหนดดังต่อไปนี้

(1) Δ_{10} , Δ_{11} , Δ_{99} , Δ_{100} และ Δ_{101}

(2) Δ_9+10 , $\Delta_{10}+11$, $\Delta_{98}+99$, $\Delta_{99}+100$ และ $\Delta_{100}+101$

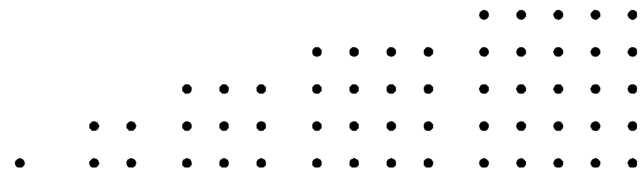
(3) $\Delta_1+\Delta_2$, $\Delta_2+\Delta_3$, $\Delta_3+\Delta_4$, $\Delta_{99}+\Delta_{100}$

2. จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง Δ_{n-1} , Δ_n , n และ n^2 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

เรื่องที่ 9.1.2 ลำดับของจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1. ลำดับของจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เมื่อเขียนจุดให้เรียงตัวกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะได้จำนวนจุดที่แทนจำนวนจะเรียงตัวเป็นลำดับดังนี้



จำนวน	1	4	9	16	25	
ลำดับที่	1	2	3	4	5	... n

ได้ลำดับของจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ 1, 4, 9, 16, 25, …, n^2

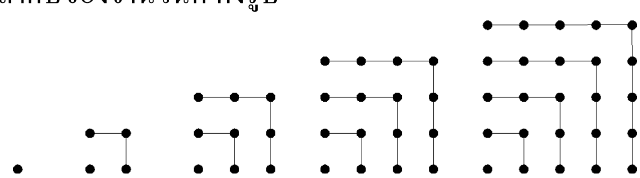
ได้ลำดับของจำนวนเต็มบวกที่ยกกำลังสองหรือลำดับของ n^2 คือ

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots, n^2$ ถ้าแทนจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ n ด้วย $\square_n$ จะได้

$\square_1 = 1^2$ $\square_2 = 2^2$ $\square_3 = 3^2$ $\square_4 = 4^2$ $\square_5 = 5^2$ และ $\square_n = n^2$

2. ผลบวกของจำนวนคี่บวก n จำนวนแรก $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$

จากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อพิจารณาแนวหักเป็นมุมฉาก(⌉)จะพบการเรียงตัวของจุดเพิ่มขึ้นเป็นลำดับของจำนวนคี่ ดังรูป



1 $\quad$ 1+3 = 4 $\quad$ 1+3+5=9 $\quad$ 1+3+5+7=16 $\quad$ 1+3+5+7+9=25

$1=1^2$ $\quad 1+3 = 2^2$ $\quad 1+3+5=3^2$ $\quad 1+3+5+7=4^2$ $\quad 1+3+5+7+9=5^2$

สอดคล้องกันกับรูปทั่วไปที่ว่าผลบวกของจำนวนบวกคี่ n จำนวนแรกเท่ากับ n^2

นั่นคือ $1+3+5+\ldots+(2n-1)= n^2$

ซึ่ง $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ เขียนในรูปซิกมาได้เป็น $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$ อ่านว่า ซิกมาของสองไอลบหนึ่งเมื่อไอมีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงเอ็น

จึงได้ $\square_n = n^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$

แบบฝึกหัด 9.2

1. จงเขียน $\square_n$ ในรูปผลบวกของจำนวนคี่บวก n จำนวนแรกจาก $\square_n$ ต่อไปนี้

$\square_3$, $\square_5$, $\square_7$, $\square_{10}$, $\square_{21}$ และ $\square_{25}$

2. จงศึกษาแบบรูปของ n^2 และ n^3 ดังนี้

1	$= 1^2$	1	$= 1^3$
$1 + 3$	$= 2^2$	$3 + 5$	$= 2^3$
$1 + 3 + 5$	$= 3^2$	$7 + 9 + 11$	$= 3^3$
$1 + 3 + 5 + 7$	$= 4^2$	$13 + 15 + 17 + 19$	$= 4^3$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9$	$= 5^2$	$21 + 23 + 25 + 27 + 29$	$= 5^3$

พบว่า $1^3 = 1^2 = \square_1$

$1^3 + 2^3 = 1 + 3 + 5 = \square_3$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2 = \square_6$

จงเขียน $\square_{10}$ ในรูปของผลบวกกำลังสามของจำนวนนับที่เรียงกัน เริ่มจาก 1^3

3. จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\square_{n-1}$, $\square_n$, n และ n^2 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

4. พิจารณาแบบรูปลำดับของการบวกต่อไปนี้

1	$= 1$	$= 1^2$
$1 + 2 + 1$	$= 4$	$= 2^2$
$1 + 2 + 3 + 2 + 1$	$= 9$	$= 3^2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$	$= 16$	$= 4^2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$	$= 25$	$= 5^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

จะพบว่า $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2$

ถ้าเรียกการบวกลักษณะนี้ว่า “การบวกแบบขั้นบันได” และเรียกผลบวกที่ได้ว่าจำนวนขั้นเชิงบันได เขียนแทนด้วย $\sqcap_n$ จะพบว่า $\sqcap_n = \square_n$

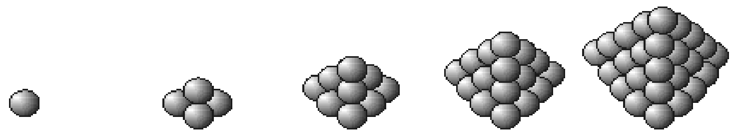
จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\sqcap_{n-1}$, $\sqcap_n$, n และ n^2 เมื่อ n เป็น จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

ตอนที่ 9.2 ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เรื่องที่ 9.2.1 ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

1. ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ถ้าวางลูกกลมให้เป็นพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะได้จำนวนลูกกลมแทนจำนวนที่เรียงตัวกันเป็นลำดับดังนี้



จำนวน	1	4	10	20	35	
ลำดับที่	1	2	3	4	5	... n

ได้ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ 1, 4, 10, 20, 35, …, $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

ทำไมจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ลำดับที่ n มีรูปทั่วไปคือ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

ในการสร้างจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าลำดับที่ n จะพบว่า เริ่มแรกการสร้างฐานจะสร้างเป็นรูป Δ_n ก่อน แล้วสร้างชั้นต่อไปเป็นรูป Δ_{n-1} ชั้นสูงขึ้นเป็น Δ_{n-2} จนชั้นสุดท้ายคือ $\Delta_1 = 1$ รูปทั่วไปอาจแสดงเหตุผลประกอบได้ดังนี้

ถ้าแทนจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ลำดับที่ n ด้วย Δ_n จะได้

$$\blacktriangle_1 = \Delta_1 = 1$$

$$\blacktriangle_2 = \Delta_1 + \Delta_2 = 1 + 3 = 4$$

$$\blacktriangle_3 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 1 + 3 + 6 = 10$$

$$\blacktriangle_4 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

$$\blacktriangle_5 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$$

พิจารณา $\blacktriangle_4 = 1 + 3 + 6 + 10$

จะได้ $\blacktriangle_4 = 1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4)$

หรือ $\blacktriangle_4 = 1 + (2+1) + (3+2+1) + (4+3+2+1)$

หรือ $\blacktriangle_4 = 4 + (3+3) + (2+2+2) + (1+1+1+1)$

เมื่อบวกตามแนวตั้งจะได้ $3\blacktriangle_4 = (1+1+4) + (1+2+3) + (2+1+3) + (1+3+2) + (2+2+2) + (3+1+2)$

$+ (1+4+1) + (2+3+1) + (3+2+1) + (4+1+1)$

$= 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$

$$= 10 \times 6$$

$$= (1+2+3+4) \times (4+2)$$

$$3\blacktriangle_4 = \Delta_4\,(4+2)$$

ถ้าเขียน $\blacktriangle_4$ ในแบบรูปการบวกจะเขียนดังนี้

$\blacktriangle_4 =$

จะเห็นได้ว่า $3\blacktriangle_4 = \begin{array}{c} 1 \\ 1\;2 \\ 1\;2\;3 \\ 1\;2\;3\;4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 2\;1 \\ 3\;2\;1 \\ 4\;3\;2\;1 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 3\;3 \\ 2\;2\;2 \\ 1\;1\;1\;1 \end{array} = \begin{array}{c} 6 \\ 6\;6 \\ 6\;6\;6 \\ 6\;6\;6\;6 \end{array}$

และ $\begin{array}{c} 6 \\ 6\;6 \\ 6\;6\;6 \\ 6\;6\;6\;6 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1\;1 \\ 1\;1\;1 \\ 1\;1\;1\;1 \end{array} \times 6 = (1+2+3+4) \times (4+2)$

ทำนองเดียวกันจะได้ $3\blacktriangle_5 = \Delta_5\,(5+2)$

$$3\blacktriangle_n = \Delta_n\,(n+2)$$

ดังนั้น $\blacktriangle_n = \frac{1}{3}\Delta_n\,(n+2)$

$$= \frac{1}{6}\,n\,(n+1)(n+2)$$

2. ผลบวกของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม (เขียนแทนด้วย $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$ อ่านว่า ซิกมารูปสามเหลี่ยมไอ เมื่อไอมีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงเอ็น)

จากจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะพบว่าการเรียงตัวลูกกลมจากฐานที่เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะซ้อนกันเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าขึ้นมาเป็นชั้นๆ โดยรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าชั้นบนจะมีความยาวด้านน้อยกว่า ความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าชั้นล่างที่ติดกันอยู่ 1 หน่วย

ถ้าพีรามิดสูง 5 ชั้นจะพบว่า ชั้นที่ 1 ถึงชั้นที่5 จะมีลูกกลมอยู่เป็นจำนวน $\frac{5\cdot6}{2}$, $\frac{4\cdot5}{2}$, $\frac{3\cdot4}{2}$, $\frac{2\cdot3}{2}$ และ $\frac{1\cdot2}{2}$ เมื่อเขียนเรียงใหม่ จะได้ $\frac{1\cdot2}{2}$, $\frac{2\cdot3}{2}$, $\frac{3\cdot4}{2}$, $\frac{4\cdot5}{2}$ และ $\frac{5\cdot6}{2}$

ถ้านำมาบวกกันจะได้ $\frac{1\cdot2}{2}+\frac{2\cdot3}{2}+\frac{3\cdot4}{2}+\frac{4\cdot5}{2}+\frac{5\cdot6}{2}=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5$

นั่นคือ $\sum\limits_{i=1}^{5}\Delta_i=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5$

จะได้ $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\ldots+\Delta_n$ …(1)

เนื่องจาก $\Delta_i = 1+2+3+\ldots+i$ …(2)

$$= \sum_{j=1}^{i} j$$

จาก (1) และ (2) จึงได้

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$$

แต่ $\blacktriangle_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$

ดังนั้น $\blacktriangle_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{i} j\right)$

ตารางต่อไปนี้เป็นการเปรียบเทียบการหาค่า $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$ กับ $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$

ผลบวกในรูปซิกมาของซิกมา	ผลบวกในรูปซิกมาของ Δ_i
$\blacktriangle_1 = \sum_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$ $= \sum_{j=1}^{1}$ $= 1$	$\blacktriangle_1 = \sum_{i=1}^{1} \Delta_i$ $= \Delta_1$ $= 1$
$\blacktriangle_2 = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$ $= \sum_{j=1}^{1} j + \sum_{j=1}^{2} j$ $= 1 + (1+2)$ $= 4$	$\blacktriangle_2 = \sum_{i=1}^{2} \Delta_i$ $= \Delta_1 + \Delta_2$ $= 1 + (1+2)$ $= 4$
$\blacktriangle_3 = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$ $= \sum_{j=1}^{1} j + \sum_{j=1}^{2} j + \sum_{j=1}^{3} j$ $= 1 + (1+2) + (1+2+3)$ $= 10$	$\blacktriangle_3 = \sum_{i=1}^{3} \Delta_i$ $= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ $= 1 + (1+2) + (1+2+3)$ $= 10$

นอกจากนี้ เนื่องจาก $\blacktriangle_n = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(n+2)$

และ $\blacktriangle_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{J=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\; i(i+1)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\,(i^2+i)\right)$

จึงได้ $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{J=1}^{i} j\right) = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(n+2)$

และ $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\,(i^2+i)\right) = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(n+2)$

แบบฝึกหัด 9.3

1. จงหาค่าของ ◭$_n$ ดังต่อไปนี้

   ◭$_6$, ◭$_7$, ◭$_{10}$, ◭$_{50}$ และ ◭$_{100}$

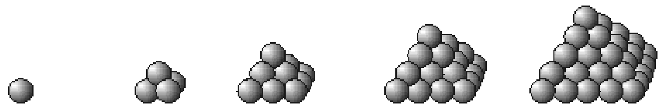
2. จงเขียน ◭$_n$ ในรูป ◭$_{n-1}$ และ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1

3. จงเขียน ◭$_4$ และ ◭$_5$ และ ◭$_6$ ในรูปซิกมาของ Δ_i และซิกมาของซิกมา

เรื่องที่ 9.2.2 ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1.ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ถ้าวางลูกกลมให้เป็นพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะได้จำนวนลูกกลมแทนจำนวนที่เรียงตัวกันเป็นลำดับดังนี้



จำนวน	1	5	14	30	55
ลำดับที่	1	2	3	4	5

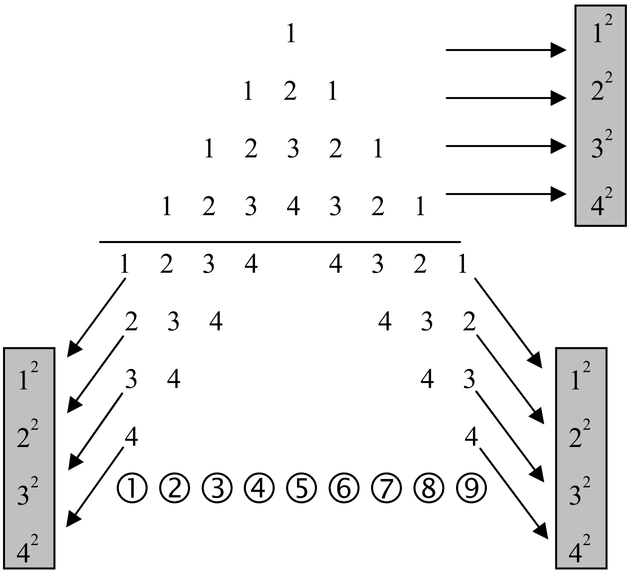
ได้ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือ 1, 5, 14, 30, 55, .., $\frac{1}{6}$ n (n + 1)(n + 2)

ทำไมจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ลำดับที่ n มีรูปทั่วไปคือ $\frac{1}{6}$ n (n + 1)(n + 2)

ในการสร้างจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ลำดับที่ n จะพบว่าเริ่มแรกเป็นรูป $\square_n = n^2$ จนถึงชั้นสุดท้าย คือ $\square_1 = 1$ การสร้างฐานจะสร้างเป็นรูป $\square_n$ ก่อนแล้วสร้างชั้นต่อไปในรูป $\square_{n-1}$ ชั้นสูงขึ้น ถ้าแทนจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้วย $\boxtimes_n$ จะได้

$\boxtimes_1 = \square_1$, $\boxtimes_2 = \square_1 + \square_2$, $\boxtimes_n = \square_1 + \square_2 + \square_3 + \ldots + \square_n$

รูปทั่วไปนี้ อาจแสดงโดยแบบรูปของจำนวนที่บวกกันดังนี้



จากรูปจะพบว่า $3\ \boxed{(1^2+2^2+3^2+4^2)} = 9\,(1+2+3+4)$

$$3\boxtimes_4 = 9\,\Delta_4$$

$$= ((2\times 4)+1)\ \Delta_4$$

ทำนองเดียวกันสำหรับ $\boxtimes_5$ จะได้

$$3\boxtimes_5 = ((2\times 5)+1)\ \Delta_5$$

และ $3\boxtimes_n = (2n+1)\ \Delta_n$

$$= (2n+1)\ \tfrac{1}{2}\ n(n+1)$$

$$\boxtimes_n = \tfrac{1}{6}\ n\,(n+1)(2n+1)$$

2. ผลบวกของกำลังสองของจำนวนนับ n จำนวนแรก (เขียนแทนด้วย $\sum_{i=1}^{n} i^2$ อ่านว่า ซิกมาไอกำลังสองเมื่อไอมีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงเอ็น)

จากจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะพบว่าการเรียงตัวลูกกลมจากฐานที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะซ้อนกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขึ้นมาเป็นชั้นๆ โดยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสชั้นบนจะมีความยาวด้านน้อยกว่าความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสชั้นล่างที่ติดกันอยู่ 1 หน่วย

ถ้าพีรามิดสูง 5 ชั้นจะพบว่า ชั้นที่ 1 ถึงชั้นที่ 5 จะมีลูกกลมเป็นจำนวน5^2 , 4^2 , 3^2 , 2^2 และ 1^2 เมื่อเขียนเรียงใหม่จะได้ 1^2, 2^2 , 3^2 , 4^2, 5^2

ถ้านำมาบวกกันจะได้ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

จำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคิดตามความยาวด้านฐานได้ดังนี้

ฐาน 1 หน่วย เท่ากับ 1

ฐาน 2 หน่วย เท่ากับ $1^2 + 2^2 = 5$

ฐาน 3 หน่วย เท่ากับ $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

ฐาน 4 หน่วย เท่ากับ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

ฐาน 5 หน่วย เท่ากับ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

จะได้ $\boxtimes_1 = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$

$$\boxtimes_2 = \sum_{i=1}^{2} i^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\boxtimes_3 = \sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$\boxtimes_4 = \sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\boxtimes_5 = \sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

และ $\boxtimes_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1)$

แบบฝึกหัด 9.4

1. จงหาค่า $\boxtimes_n$ ดังต่อไปนี้

$\boxtimes_6$, $\boxtimes_7$, $\boxtimes_{10}$, $\boxtimes_{50}$ และ $\boxtimes_{100}$

2. จงเขียน $\boxtimes_n$ ในรูป $\boxtimes_{n-1}$ และ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1

ตอนที่ 9.3 ความสัมพันธ์ ระหว่างจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต

เรื่องที่ 9.3.1 ความสัมพันธ์ ระหว่างจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและ จำนวนเชิงขั้นบันได

1. ความสัมพันธ์จากผลบวก

ถ้าให้ Δ_n เป็นจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n (กำหนด $\Delta_0 = 0$)

$\square_n$ เป็นจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสลำดับที่ n (กำหนด $\square_0 = 0$)

$\sqcap_n$ เป็นจำนวนเชิงขั้นบันได (กำหนด $\sqcap_0 = 0$)

จะได้ $\Delta_n = 1+2+3+ \dots + n$

$\square_n = n^2 = 1+3+5+ \ldots + (2n-1)$

$\sqcap_n = n^2 = 1+2+3+ \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$

$= (1+2+3+ \ldots + (n-1) + n) + (1+2+3+ \ldots + (n-1))$

$= \Delta_n + \Delta_{n-1}$

ดังนั้น $\square_n = \sqcap_n = \Delta_n + \Delta_{n-1}$

2. ความสัมพันธ์จากรูปทั่วไป

จากรูปทั่วไปของ $\Delta_n = \frac{1}{2}\, n(n+1)$

และ $\Delta_{n-1} = \frac{1}{2}\, (n-1)\, n$

จะได้ $\Delta_n + \Delta_{n-1} = \frac{1}{2}\, n(n+1) + \frac{1}{2}\, (n-1)\, n$

$= \frac{1}{2}\, (n(n+1) + (n-1)\, n)$

$= \frac{1}{2}\, (n^2 + n + n^2 - n)$

$= n^2$

$= \square_n = \sqcap_n$

ดังนั้น $\square_n = \sqcap_n = \Delta_n + \Delta_{n-1}$

เรื่องที่ 9.3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และจำนวนพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1. ความสัมพันธ์จากผลบวก

ถ้าให้ $\blacktriangle_n$ เป็น จำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ลำดับที่ n (กำหนด $\blacktriangle_0 = 0$)

$\boxtimes_n$ เป็น จำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ลำดับที่ n (กำหนด $\boxtimes_0 = 0$)

จะได้ $\blacktriangle_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_n$

$\boxtimes_n = \square_1 + \square_2 + \square_3 + \ldots + \square_n$

พิจารณา $\boxtimes_n = \square_1 + \square_2 + \square_3 + \ldots + \square_n$

$= (\Delta_0 + \Delta_1) + (\Delta_1 + \Delta_2) + (\Delta_2 + \Delta_3) + \ldots + (\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}) + (\Delta_{n-1} + \Delta_n)$

$= (\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{n-1}) + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_n)$

$= \blacktriangle_{n-1} + \blacktriangle_n$

ดังนั้น $\boxtimes_n = \blacktriangle_{n-1} + \blacktriangle_n$

นอกจากนี้ $\blacktriangle_n = \blacktriangle_{n-1} + \Delta_n$ และ $\blacktriangle_{n-1} = \blacktriangle_n - \Delta_n$

จะได้ $\boxtimes_n = \blacktriangle_{n-1} + \blacktriangle_{n-1} + \Delta_n$

$= 2\blacktriangle_{n-1} + \Delta_n$

จาก $\boxtimes_n = 2\blacktriangle_{n-1} + \Delta_n$ และ $\blacktriangle_{n-1} = \blacktriangle_n - \Delta_n$

จะได้ $\boxtimes_n = 2\blacktriangle_n - 2\Delta_n + \Delta_n$

$= 2\blacktriangle_n - \Delta_n$

2. ความสัมพันธ์จากรูปทั่วไป

จากรูปทั่วไป ของ $\blacktriangle_n = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(n+2)$

และ $\blacktriangle_{n-1} = \frac{1}{6}\,(n-1)\,n(n+1)$

จะได้ $\blacktriangle_n + \blacktriangle_{n-1} = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(n+2) + \frac{1}{6}\,(n-1)\,n(n+1)$

$= \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,((n+2)+(n-1))$

$= \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$

$= \boxtimes_n$

แบบฝึกหัด 9.5

ให้ $\square_n$ แทนจำนวนเชิงลูกบาศก์ลำดับที่ n กำหนดโดย $\square_n = n^3$

และ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \square_i = \square_1 + \square_2 + \square_3 + \ldots + \square_n$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^3$$

พิจารณา แบบรูปต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
1 &= 1^3 \\
3 + 5 &= 2^3 \\
7 + 9 + 11 &= 3^3 \\
13 + 15 + 17 + 19 &= 4^3 \\
21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 5^3
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + 29}$

ผลบวกจำนวนคี่บวก 15 จำนวนแรก ซึ่งผลบวกจำนวนคี่บวก n จำนวนแรกเท่ากับ n^2

ดังนั้น $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$

และ $15 = \Delta_5$

จึงได้ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (\Delta_5)^2$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (\Delta_6)^2$

นอกจากนี้ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\Delta_n)^2$

1. จงแสดงว่า $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$

2. จงแสดงว่า $\square_n = n(\Delta_{n-1} + \Delta_n)$

3. จงเขียน $\square_n - \boxtimes_n$ ให้มีผลลัพธ์ในรูปที่มี n , Δ_{n-1} และ Δ_n ปรากฏ

4. จงเขียน $\square_n - \blacktriangle_n$ ให้มีผลลัพธ์ในรูปที่มี n และ Δ_i ปรากฏเมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$

หน่วยที่ 10
คณิตศาสตร์ กับ ICT

ตอนที่ 10.1 ลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci Sequences)

ตอนที่ 10.2 เรขาคณิตสาทิสรูป (Fractal Geometry)

ตอนที่ 10.3 นักคณิตศาสตร์ (Mathematicians)

แนวคิด การศึกษาคณิตศาสตร์ให้ลึกซึ้งขึ้นจากเอกสารตำราที่มีอยู่ได้ วิธีหนึ่ง คือการศึกษาจาก internet โดยสืบค้นจาก Web sites ต่างๆ สำหรับเรื่องลำดับฟีโบนักชี เรขาคณิตสาทิสรูป และนักคณิตศาสตร์ไม่มีการเรียนการสอนในหลักสูตรมัธยมปลายของประเทศไทย วิธีการศึกษาด้วยตนเองที่ดีที่สุดวิธีหนึ่ง คือการศึกษาจาก internet

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 10 แล้วนักเรียนสามารถ

1. สืบค้นข้อมูลจาก internet ได้
2. บอกประวัติที่มาและบทนิยามของ ลำดับฟีโบนักชีได้
3. บอกประวัติที่มาและ สร้างรูปเรขาคณิตสาทิสรูปอย่างง่ายได้
4. บอกประวัติเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ และนักคณิตศาสตร์พร้อมผลงานที่สนใจได้
5. ซาบซึ้งคณิตศาสตร์ที่ปรากฏในธรรมชาติ
6. นำลำดับฟีโบนักชี และเรขาคณิตสาทิสรูปไปบูรณาการได้

กิจกรรม ให้นักเรียนสืบค้นข้อมูลที่กำหนดจาก Web sites ทำบันทึกย่อบนแผ่นโปสเตอร์ พร้อมทั้งรายงานสมบูรณ์ 1 เล่ม

สื่อการสอน 1. คอมพิวเตอร์ ที่มี internet
2. เครื่องพิมพ์ข้อมูลจาก internet
3. แผ่นโปสเตอร์

ประเมินผล ประเมินผลจากข้อมูลที่สืบค้นมาได้

ตอนที่ 10.1 ลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci Sequences)

การสืบค้น " ลำดับฟีโบนักชี " สืบค้นข้อมูลได้จากหลาย Web sites เช่น

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fbonacci/fibBio.html

http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/fibo.html

http://www.andrews.edu/~colkins/math/biograph/199899/biofibo.htm

http://www.geocities.com/cyd_conner/nature.html

เมื่อสืบค้นแล้วศึกษาเรื่องต่อไปนี้

1. ความเป็นมา และบทนิยามของลำดับฟีโบนักชี
2. ประวัติของนักคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับลำดับฟีโบนักชี
3. ลำดับฟีโบนักชีในธรรมชาติ
4. การประยุกต์ของลำดับฟีโบนักชี
5. Web sites และเรื่องอื่นๆ ที่น่าสนใจเกี่ยวกับลำดับฟีโบนักชีเขียนหัวข้อทั้ง 5 เป็นรายงาน

ตอนที่ 10.2 เรขาคณิตสาทิสรูป (Fractal Geometry)

การสืบค้น" เรขาคณิตสาทิสรูป " สืบค้นข้อมูลได้จาก Web sites เช่น

http://www.crystalinks.com/fractal.html

http://math.bu.edu/DYSYS/FRACGEOM2/FRACGEOM2.htm

http://classes.yale.edu/99-00/math190a/

http://members.aol.com/dcrolf/maths/fractals.htm

เมื่อสืบค้นแล้วศึกษาเรื่องต่อไปนี้

1. เรขาคณิตสาทิสรูปคืออะไร
2. การสร้างรูปสามเหลี่ยม Sierpinski
3. การสร้างเกร็ดหิมะ Koch
4. รูป Mandelbrot set และรูป Julia set
5. ออกแบบเรขาคณิตสาทิสรูปของตนเอง
6. Web site และเรื่องอื่นๆ ที่น่าสนใจเกี่ยวกับเรขาคณิตสาทิสรูป

เขียนหัวข้อทั้ง 6 เป็นรายงาน

ตอนที่ 10.3 นักคณิตศาสตร์

การสืบค้นประวัติ และผลงานของนักคณิตศาสตร์ สืบค้นได้จา ก Web sites เช่น

http://www.yahoo.com/Science/Mathematics/History/Mathematics

http://www-groups.des.st-andrew.ac.uk/~history/

http://forum.swarthmore.edu/~steve/steve/mathhistory.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Day-files/Year.html

http://dimacs.rutgers.edu/~judyann/calendar/Calendar.html

เมื่อสืบค้นแล้วศึกษาเรื่องต่อไปนี้

1. นักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียง 6 คน ชาย 3 คน หญิง 3 คน

2. นักคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชอบนอกเหนือจาก 6 คนแรก อีก 4 คน

3. ผลงานที่น่าสนใจของนักคณิตศาสตร์

4. ประวัติผลงาน และแผนที่บ้านเกิดของนักคณิตศาสตร์ที่มีวันเกิดตรงกับวันเกิดของนักเรียน

เขียนหัวข้อทั้ง 4 เป็นรายงาน

บรรณานุกรม

John H. Conway, Richard K. Guy. **The Book of Numbers Springer-Verlag.** New York, 1996.

Edward B Burger, Michael Starbird. **The Heart of Mathematics Key College Pullishing**. CA, USA, 1999.

http : // www.mathforum.org/workshop/usi/pascal/mo.pascal.html

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. **รวมปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และสารพันปัญหาคณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2543.

ศักดา บุญโต. **เวทคณิต.** ลำปาง : ศิลปการพิมพ์, 2543.

_______. **อสมการ**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์การศาสนา, 2539.

_______. **คณิตศาสตร์ชวนคิด**. วารสารคณิตศาสตร์ หน้า 38-49 ปริมา 46 ฉบับที่ 530-532 พฤศจิกายน-ธันวาคม 2545 – มกราคม 2546.

_______. **วิธีทั่วไปสำหรับตรวจสอบการหารลงตัว**. วารสารคณิตศาสตร์ หน้า 27-34 ปริมา 46 ฉบับที่ 527-529 สิงหาคม-ตุลาคม 2545. กรุงเทพมหานคร: พิทักษ์การพิมพ์

_______. **อุปนัยวิธีทางคณิตศาสตร์**. พิมพ์โรเนียว 24 หน้า, กรุงเทพมหานคร, 2525.

_______. **หลักคณิตศาสตร์.** พิมพ์โรเนียว 147 หน้า, กรุงเทพมหานคร, 2522.

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ศาสตราจารย์ ดร. ร.ต.อ. วรเดช	จันทรศร	เลขาธิการสภาการศึกษา
ดร. รุ่งเรือง	สุขาภิรมย์	ผู้อำนวยการสำนักอำนวยการ

คณะนักวิจัย :

รองศาสตราจารย์ ศักดา	บุญโต	หัวหน้าคณะวิจัย
นายทรงวิทย์	สุวรรณธาดา	
นางกนกวลี	อุษณกรกุล	

คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการทั้ง 9 โรง

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นางสาวบุญเทียม	ศิริปัญญา	หัวหน้าโครงการ
นางกนกพร	ถนอมกลิ่น	ประจำโครงการ
นางสาวศศิรัศม์	สริกขกานนท์	ประจำโครงการ

บรรณาธิการและประสานงาน :

นางสาวบุญเทียม	ศิริปัญญา
นางกนกพร	ถนอมกลิ่น

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มงานโครงการพิเศษ (โครงการเด็กที่มีความสามารถพิเศษ)
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ 0 2668 7123 ต่อ 2528 โทรสาร 0 2668 7329
Website : http://www.onec.go.th

รายชื่อโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการวิจัยเชิงปฏิบัติการเรื่อง
การพัฒนารูปแบบและหลักสูตรการจัดการศึกษาเพื่อพัฒนาผู้มีความสามารถพิเศษ
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

****

1.	**โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา**	**กรุงเทพมหานคร**
2.	**โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี)**	**กรุงเทพมหานคร**
3.	**โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย**	**กรุงเทพมหานคร**
4.	**โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย**	**กรุงเทพมหานคร**
5.	**โรงเรียนสตรีวัดมหาพฤฒารามในพระบรมราชินูปถัมภ์**	**กรุงเทพมหานคร**
6.	**โรงเรียนสตรีวิทยา**	**กรุงเทพมหานคร**
7.	**โรงเรียนนวมินทราชินูทิศบดินทรเดชา**	**กรุงเทพมหานคร**
8.	**โรงเรียนเบญจมเทพอุทิศจังหวัดเพชรบุรี**	**จังหวัดเพชรบุรี**
9.	**โรงเรียนสามัคคีวิทยาคม**	**จังหวัดเชียงราย**