คู่มือการสอน
หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ
ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4
เล่ม 1

โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้

371.95	สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
ส 691 ค	คู่มือการสอนหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1 / อาริสา รัตนเพ็ชร์และคณะ. กรุงเทพฯ : สกศ., 2549
	200 หน้า
	ISBN 974-559-874-7
	1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ – คู่มือ 2. อาริสา รัตนเพ็ชร์และคณะ 3. ชื่อเรื่อง

คู่มือการสอนหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1

สิ่งพิมพ์ สกศ.	อันดับที่ 48/2549
พิมพ์ครั้งที่ 1	สิงหาคม 2549
จำนวน	1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่	สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา 99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300 โทรศัพท์ 0 2668 7123 ต่อ 2530 โทรสาร 0 2668 7329 web site : http://www.onec.go.th
สำนักพิมพ์	บริษัท ออฟเซ็ท เพรส จำกัด 78/162 ถนนประชาราษฎร์ 26 ต.สวนใหญ่ อ.เมือง จ.นนทบุรี 11000 โทรศัพท์ 02-967-4376 โทรสาร 02-967-4376

คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาโดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) โดยมีกระบวนการที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) สำหรับพัฒนานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ในระดับกว้างและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ที่เน้นกระบวนการเรียนรู้ กระบวนการคิดที่หลากหลาย และทักษะที่เป็นรากเหง้าของความสามารถด้านคณิตศาสตร์มากกว่าที่จะเน้นเนื้อหาที่ปรากฏในการเรียนการสอนปกติ อีกทั้งยังฝึกทักษะการคิดวิเคราะห์ การใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถบูรณาการความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์กับสาขาวิชาอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนเข้าใจธรรมชาติ ความงาม ความกระชับและความชัดเจนของคณิตศาสตร์ได้อย่างแท้จริง

เอกสารเล่มนี้เป็น **คู่มือการสอนหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1** ซึ่งเป็นหนึ่งในสองเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่น ๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนผู้เกี่ยวข้องทุกท่านที่ให้ความร่วมมือและช่วยเหลือ จนทำให้การดำเนินงานสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี และหวังเป็นอย่างยิ่งว่า องค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

(นายอำรุง จันทวานิช)
เลขาธิการสภาการศึกษา

สารบัญ

คำอธิบายรายวิชา

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์

รายวิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 จำนวน 2.0 หน่วยการเรียน

ศึกษา ฝึกการคิดวิเคราะห์ สืบสวนหาความรู้ ฝึกทักษะที่ต้องใช้ความคิดริเริ่มและสร้างสรรค์ ฝึกการแก้ปัญหาและทักษะอื่น ๆ ที่อยู่นอกเหนือจากจุดมุ่งหมายในการเรียนของหลักสูตรปกติ ในสาระต่อไปนี้

เวทคณิต (ทักษะการคำนวณ การบวก ลบ คูณ หาร) การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ระเบียบวิธีพิสูจน์ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ อสมการ ลำดับของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต คณิตศาสตร์กับ I.C.T. (นักคณิตศาสตร์ ลำดับฟีโบนักชี)

การจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์เพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีความสามารถด้านคณิตศาสตร์ในระดับที่กว้าง และลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ โดยเน้นกระบวนการเรียนรู้ กระบวนการคิดที่หลากหลาย และทักษะที่เป็นรากเหง้าของความสามารถด้านคณิตศาสตร์มากกว่าที่จะเน้นเนื้อหาที่ปรากฏในแบบเรียนปกติ ฝึกให้ศึกษาเรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างชัดแจ้ง สามารถสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง การวางแผน การจัดการตามความถนัดและศักยภาพ การใช้ความคิดสร้างสรรค์ สามารถบูรณาการกับวิชาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องได้ ให้ผู้เรียนเข้าใจธรรมชาติ ความงาม และความชัดเจนของคณิตศาสตร์ ฝึกการทำงานอย่างมีระบบ มีระเบียบวินัย รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีเหตุผล และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

การวัดผลและประเมินผล ใช้วิธีการหลากหลายตามสภาพความเป็นจริงของเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัดที่สอดคล้องกับมาตรฐานและผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

คำอธิบายการวัดผลประเมินผล

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์			หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์
รายวิชาคณิตศาสตร์	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	จำนวน 2.0 หน่วยการเรียน

กำหนดระยะเวลาเรียน 80 ชั่วโมงต่อภาคเรียน คิดเป็น 2.0 หน่วยการเรียน แบ่งเป็น 2 ส่วนดังนี้

1. กิจกรรมการเรียนการสอน	จำนวน	33	ชั่วโมง
2. ปฏิบัติการ	จำนวน	47	ชั่วโมง

รายการประเมิน ภาคเรียนที่ 1 คะแนนเต็ม 100 คะแนน

1. <u>การประเมินการปฏิบัติ</u>	80	คะแนน		
1.1 ความตั้งใจเรียน/การเข้าชั้นเรียน		10	คะแนน	
1.2 ภาระงาน		50	คะแนน	
1.3 การนำเสนอผลงาน		20	คะแนน	
2. <u>การประเมินผลการสอบแบบทดสอบ</u>	20	คะแนน		

คำอธิบายหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์

รายวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 จำนวน 2.0 หน่วยการเรียน

เนื้อหา	เวลาเรียน	ปฏิบัติการ	รวมชั่วโมง
1. เวทคณิต	10	10	20
2. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	2	3	5
3. วิธีพิสูจน์และอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	10	10	20
4. อสมการ	5	4	9
5. ลำดับของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต	2	4	6
6. คณิตศาสตร์กับ I.C.T.			
6.1 นักคณิตศาสตร์	1	9	20
6.2 ลำดับฟีโบนักชี	3	7	
รวม	**33**	**47**	**80**

หน่วยที่ 1
เวทคณิต

ตอนที่ 1.1 ทักษะการคำนวณ 1 (การบวก - ลบ)

ตอนที่ 1.2 ทักษะการคำนวณ 2 (การคูณ)

ตอนที่ 1.3 ทักษะการคำนวณ 3 (การหาร)

ตอนที่ 1.1 ทักษะการคำนวณ 1 (การบวก - ลบ)

แนวคิด

1. การบวก ถ้านำจุดมาแทนการทดจะทำให้การคิดคำนวณแม่นยำและรวดเร็วขึ้น
2. การแปลงจำนวนในระบบฐานสิบเป็นระบบเครื่องหมายคละ แล้วนำมาใช้ในการคิดคำนวณในการบวก - ลบจะทำให้มีกระบวนการคิดคำนวณที่รวดเร็ว และหลากหลายวิธี

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 1 จบแล้วนักเรียนสามารถ

1. บวกจำนวนหลายจำนวนได้อย่างแม่นยำและรวดเร็ว
2. แปลงจำนวนในระบบฐานสิบเป็นจำนวนในระบบเครื่องหมายคละได้ และแปลงจำนวนในระบบเครื่องหมายคละเป็นจำนวนในระบบฐานสิบได้
3. บวก และลบจำนวนคละกันได้หลายวิธีแตกต่างกัน
4. ออกแบบวิธีการบวก-ลบจำนวนตามแนวคิดสร้างสรรค์ของตนเอง

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายเนื้อหา กระบวนการวิธีคิดคำนวณ การบวก ระบบเครื่องหมายคละ การบวก - ลบคละกันด้วยวิธี
2. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่าง และแบบฝึกหัด
3. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัด และการทดสอบ

การบวกจำนวนหลายจำนวน

เรื่องที่ 1 การบวกจำนวนหลายจำนวนตามแนวตั้ง

ในการบวกจำนวนหลายๆ จำนวน โดยการตั้งบวกกันนั้นปัญหาที่ทำให้ผิดพลาดได้ง่าย ก็คือ การทดและการบวกเลขในใจที่มีตัวเลขมากกว่า 1 หลัก สำหรับวิธีการบวกที่จะแนะนำนี้ เป็นวิธีการบวกในเวทคณิต ซึ่งง่ายกว่าวิธีการบวกทั่วๆ ไป เพราะจะคิดในใจเฉพาะการบวกเลขโดดเท่านั้น (เลขโดด ได้แก่ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) และจะเขียนผลลัพธ์เฉพาะเลขโดด ถ้าผลลัพธ์เกิน 9 จะใช้ • แทนตัวทด ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่าง การบวกเลขโดด

$1 + 4 = 5$ $2 + 3 = 5$ $8 + 2 = \dot{0}$ ($\dot{0}$ คือ 10) $4 + 9 = \dot{3}$ ($\dot{3}$ คือ 13)

$3 + 5 = 8$ $8 + 1 = 9$ $5 + 7 = \dot{2}$ ($\dot{2}$ คือ 12) $7 + 8 = \dot{5}$ ($\dot{5}$ คือ 15)

$6 + 3 = 9$ $0 + 7 = 7$ $9 + 8 = \dot{7}$ ($\dot{7}$ คือ 17) $9 + 9 = \dot{8}$ ($\dot{8}$ คือ 18)

ในการบวกเลขเป็นแถวหลายๆ แถว จะนำหลักการบวกเลขโดดข้างต้นมาใช้โดยจะบวกทีละหลัก เริ่มต้นจากหลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย ไปเรื่อยๆ จนหมดหลัก การบวกจะบวกเลขเฉพาะเลขโดดจากแถวบนลงแถวล่าง ถ้ามีการทดจะเขียน • แทนการทดที่ตัวบวก หลังจากนั้นจะนำเลขโดดของผลบวกกับเลขโดดในหลักหน่วยของแถวที่อยู่ถัดไปข้างล่าง ทำเช่นนี้จนหมดแถว เสร็จแล้วจึงบวกเลขโดดในหลักสิบ แต่ก่อนทำการบวกเลขโดดในหลักสิบจะต้องตรวจสอบก่อนว่ามี • ในหลักหน่วยอยู่เท่าใด เมื่อนับ • ในหลักหน่วยได้แล้วว่ามีจำนวนเท่าใดก็ให้ถือว่าจำนวน • ที่นับได้เป็นตัวทดไปยังหลักสิบ แต่ถ้าไม่มี • ในหลักหน่วยเลย ถือว่าไม่มีตัวทดไปยังหลักสิบ ในกรณีที่มีตัวทดให้นำตัวทดไปบวกกับตัวเลขในหลักสิบของแถวแรกแล้วทำการบวกลงมาเช่นเดียวกับการบวกในหลักหน่วย สำหรับการบวกในหลักอื่นๆ ก็กระทำเช่นเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1.1.1

การบวกแบบธรรมดา การบวกแบบเขียน • แทนการทด

1 ⟵ ทด

$$\begin{array}{rr} 2 & 6 \\ & 8 \\ \hline 3 & 4 \end{array} + \quad \text{จุดแทนการทด} \longrightarrow \quad \begin{array}{rr} 2 & 6 \\ & \dot{8} \\ \hline 3 & 4 \end{array} + \downarrow \text{ทิศทางการบวก}$$

การบวกแบบธรรมดาในหลักหน่วย 6 + 8 = 14 จึงเขียน 4 เป็น ผลลัพธ์ในหลักหน่วย และทด 1 ไว้เหนือ 2 ซึ่งเป็นเลขในหลักสิบของตัวตั้ง รวมตัวตั้งกับตัวทดได้ 1 + 2 = 3 จึงเขียนผลลัพธ์ 3 ที่หลักสิบของผลลัพธ์ จึงได้ 26 + 8 = 34

การบวกแบบเขียน • แทนการทด จะเขียน • กำกับไว้เหนือตัวบวก เมื่อการบวกนั้นได้ผลลัพธ์ตั้งแต่ 10 ขึ้นไป

พิจารณาการบวกในหลักหน่วย

$$\begin{array}{ll} 6 & \\ \bullet & + \longleftarrow \\ \underline{8} & \\ \underline{4} & \end{array}$$

$6 + 8 = \dot{4}$ จึงใส่ • ไว้ที่ 8 ซึ่งเป็นตัวบวก ทิศทางการบวก จากบนลงล่าง) ใส่ 4 ที่ได้จาก 14 ไว้ในผลลัพธ์

สำหรับ • ในหลักหน่วย นั้น คือ 1 ในหลักสิบที่เป็นตัวทดนั่นเอง

หลังจากนั้นนำ • ที่แทน 1 ในหลักสิบไปบวกกับ 2 ในหลักสิบของตัวตั้งได้เป็น 3 ผลลัพธ์ คือ 34

■

ตัวอย่างที่ 1.1.2 จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$\begin{array}{cccl} 8 & 3 & 5 & \\ 4 & 8 & 9 & + \\ \underline{6} & \underline{9} & \underline{2} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด การบวกในหลักหน่วย

หลักหน่วย

$$\begin{array}{cccl} 8 & 3 & 5 & \\ 4 & \dot{8} & \dot{9} & + \\ \underline{6} & \underline{\dot{9}} & \underline{2} & \\ & & \underline{\underline{6}} & \end{array}$$

$5 + 9 = \dot{4}$ นำ • ไปใส่ไว้ที่ 9 ซึ่งเป็นตัวบวก นำผลลัพธ์ 4 ไปบวกกับ 2 ในบรรทัดที่ 3 ได้ผลลัพธ์เป็น 6 ใส่ 6 ตรงกับหลักหน่วยในบรรทัดที่ 4 ที่เป็นบรรทัดผลลัพธ์

การบวกในหลักสิบ

หลักสิบ

8	3	5		หนึ่ง • ในหลักหน่วยทดเป็น 1 ในหลักสิบ จึงนำ 1 ไปบวก
4	$\dot{8}$	$\dot{9}$	+	กับ 3 ในหลักสิบของแถวแรกได้เป็น 4 นำ 4 ไปบวกกับ 8
6	$\dot{9}$	2		จะได้ $4 + 8 = \dot{2}$
	1	6		จึงเขียน • ไว้ที่ 8 ซึ่งเป็นตัวบวกแล้วนำ 2 ไปบวกกับ 9 ได้ผลลัพธ์ เป็น $\dot{1}$ จึงเขียน • ไว้ที่ 9 ซึ่งเป็นตัวบวก เขียนผลลัพธ์ 1 ตรงกับ หลักสิบในบรรทัดที่ 4 ที่เป็นบรรทัด ผลลัพธ์

การบวกในหลักร้อย

หลักร้อย

$\dot{8}$	3	5		สอง • ในหลักสิบทดเป็น 2 ในหลักร้อย จึงนำ 2 ไปบวกกับ 8 ใน
4	$\dot{8}$	$\dot{9}$	+	หลักร้อยของแถวแรก $2 + 8 = \dot{0}$ จึงใส่ • ที่ 8 ซึ่งเป็นตัวบวก นำ 0
$\dot{6}$	$\dot{9}$	2		ไปบวกกับ 4 ได้ 4 นำ 4 ไปบวกกับ 6 ในบรรทัดที่ 3 $4 + 6 = \dot{0}$ จึง
0	1	6		ใส่ • ที่ 6 ที่เป็นตัวบวก และเขียน 0 ลงในหลักร้อยของบรรทัดผลลัพธ์

ค่าทดไปหลักพัน

	$\dot{8}$	3	5		เนื่องจากในหลักร้อยมีสอง • ทดเป็น 2 ไปหลักพัน แต่หลักพันไม่มี
	4	$\dot{8}$	9	+	การบวกจึงใส่ 2 ไว้ในหลักพันของบรรทัดผลลัพธ์
	$\dot{6}$	$\dot{9}$	2		
2	0	1	6		

จึงได้ผลบวก คือ 2 0 1 6

■

ตัวอย่างที่ 1.1.3 ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงขั้นตอนการบวกทีละหลัก การบวกเริ่มตั้งแต่หลักหน่วย เป็นขั้นที่ 1 การบวกหลักสิบเป็นขั้นที่ 2 ไปเรื่อยๆ

$$\begin{array}{ccccc l}
7 & \dot{8} & \dot{9} & 2 & 4 & \\
\dot{2} & 7 & 2 & \dot{7} & 2 & + \\
\dot{9} & \dot{9} & \dot{9} & 9 & \dot{9} & \\
7 & 2 & 6 & \dot{7} & 2 & \\
\hline
7 & 8 & 8 & 6 & 7 & \\
\hline\hline
\end{array}$$

แนวคิด

ขั้นที่ 1 4 + 2 = 6 $\rightarrow$ 6 + 9 = 15 (ใส่ • เหนือ 9) $\rightarrow$ 5 + 2 = 7 ใส่ 7 เป็นผลลัพธ์ในหลักหน่วย และมีตัวทดเป็น 1

ขั้นที่ 2 นำ 1 (ตัวทด) มาบวกในหลักสิบ 1 + 2 = 3 $\rightarrow$ 3 + 7 = 10 (ใส่ • เหนือ 7) $\rightarrow$ 0 + 9 = 9 $\rightarrow$ 9 + 7 = 16 (ใส่ • เหนือ 7) ใส่ 6 เป็นผลลัพธ์ในหลักสิบ และมีตัวทดเป็น 2

ขั้นที่ 3 นำ 2 (ตัวทด) มาบวกในหลักร้อย 2 + 9 = 11 (ใส่ • เหนือ 9) $\rightarrow$ 1 + 2 = 3 $\rightarrow$ 3 + 9 = 12 (ใส่ • เหนือ 9) $\rightarrow$ 2 + 6 = 8 ใส่ 8 เป็นผลลัพธ์ในหลักร้อย และมีตัวทดเป็น 2

ขั้นที่ 4 นำ 2 (ตัวทด) มาบวกในหลักพัน 2 + 8 = 10 (ใส่ • เหนือ 8) $\rightarrow$ 0 + 7 = 7 $\rightarrow$ 7 + 9 = 16 (ใส่ • เหนือ 9) $\rightarrow$ 6 + 2 = 8 ใส่ 8 เป็นผลลัพธ์ในหลักพัน และมีตัวทดเป็น 2

ขั้นที่ 5 นำ 2 (ตัวทด) มาบวกในหลักหมื่น 2 + 7 = 9 $\rightarrow$ 9 + 2 = 11 (ใส่ • เหนือ 2) 1 + 9 = 10 (ใส่ • เหนือ 9) $\rightarrow$ 0 + 7 = 7 ใส่ 7 เป็นผลลัพธ์ ในหลักหมื่น และมีตัวทดเป็น 2 หมด การบวก จึงเขียนตัวทด 2 เป็น 2 ในหลักแสน การบวกเป็นดังนี้

$$\begin{array}{cccccc l}
 & 7 & \dot{8} & \dot{9} & 2 & 4 & \\
 & \dot{2} & 7 & 2 & \dot{7} & 2 & + \\
 & \dot{9} & \dot{9} & \dot{9} & 9 & \dot{9} & \\
 & 7 & 2 & 6 & \dot{7} & 2 & \\
\hline
2 & 7 & 8 & 8 & 6 & 7 & \\
\hline\hline
\end{array}$$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.4 จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 2 & 9 & 7 & 9 & 6 \\
 & 6 & 5 & 7 & 2 & 8 & + \\
 & 2 & 3 & 9 & 9 & 9 \\
 & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} \\
\hline\hline
\end{array}
$$

แนวคิด

ขั้นที่ 1 $6+\dot{8}=14 \rightarrow 4+\dot{9}=13 \rightarrow 3+1=(4)$ (2 จุด ทด 2 ไปขั้นที่ 2)

ขั้นที่ 2 $2+\dot{9}=11 \rightarrow 1+2=3 \rightarrow 3+\dot{9}=12 \rightarrow 2+2=(4)$ (2 จุด ทด 2 ไปขั้นที่ 3)

ขั้นที่ 3 $2+7=9 \rightarrow 9+\dot{7}=16 \rightarrow 6+\dot{9}=15 \rightarrow 5+3=(8)$ (2 จุด ทด 2 ไปขั้นที่ 4)

ขั้นที่ 4 $2+\dot{9}=11 \rightarrow 1+5=6$ ---> $6+3=9 \rightarrow 9+\dot{4}=13(3)$ (2 จุด ทด 2 ไปขั้นที่ 5)

ขั้นที่ 5 $2+2=4 \rightarrow 4+\dot{6}=10$ ---> $0+2=2 \rightarrow 2+5=(7)$ (1 จุด ทด1 ไปขั้นหลักแสน) จะได้

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 2 & \dot{9} & 7 & \dot{9} & 6 \\
 & \dot{6} & 5 & \dot{7} & 2 & \dot{8} & + \\
 & 2 & 3 & \dot{9} & \dot{9} & \dot{9} \\
 & 5 & \dot{4} & 3 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 7 & 3 & 8 & 4 & 4 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.5 จงหาผลบวกของ

4	1	7	5	แนวคิด		4	1	7	5
3	8	2	6 +			3	$\dot{8}$	$\dot{2}$	$\dot{6}$ +
4	7	5	3			$\dot{4}$	7	5	3
2	1	0	4			2	1	0	4
					1	4	8	5	8

■

เพื่อเป็นการฝึกหัดการบวกเลขโดด ตารางต่อไปนี้แสดงตารางการบวกเลขโดด ซึ่งสามารถเข้าใจได้โดยง่าย

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\dot{0}$
2	2	3	4	5	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$
3	3	4	5	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
4	4	5	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
5	5	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
6	6	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
7	7	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
8	8	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$
9	9	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{8}$

หมายเหตุ

$\dot{0} = 10$

$\dot{1} = 11$

$\dot{2} = 12$

$\dot{3} = 13$

$\dot{4} = 14$

$\dot{5} = 15$

$\dot{6} = 16$

$\dot{7} = 17$

$\dot{8} = 18$

$\dot{9} = 19$

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาผลบวกต่อไปนี้

(1)
```
 8 1 3
 2 5 6 +
 7 4 9
 =====
```

(2)
```
 6 6 6
 9 4 5 +
 1 3 2
 =====
```

(3)
```
 1 4 8
 9 8 7 +
 4 5 6
 =====
```

(4)
```
 3 1 3 8
 4 5 7 5 +
 3 6 4 9
 7 3 2 2
 =======
```

(5)
```
 2 1 2 9
 9 7 5 4 +
 3 6 8 1
 2 1 3 4
 =======
```

(6)
```
 8 1 4 2
 6 7 5 4 +
 9 9 9 9
 3 3 3 3
 =======
```

(7)
```
 5 9 4 1 5
   7 2 4 8
     4 8 9 +
 8 2 1 1 6
 3 8 4 1 4
 =========
```

(8)
```
 6 7 5 4 1
     8 3 6
   4 7 9 5 +
 3 8 5 8 3
 8 7 6 5 4
 =========
```

(9)
```
 1 4 1 5 1
 8 7 8 7 8
   2 6 4 9 +
   3 5 5 5
 7 8 2 1 4
 =========
```

(10)
```
 4 8 5 9 5
   4 7 2 8
     3 1 6
   8 4 2 7
 5 2 9 8 3
     1 2 5 +
   6 6 6 6
 1 2 3 4 5
 3 7 6 2 1
 =========
```

(11)
```
 4 1 2 8 1
   5 2 3 9
 9 3 5 2 7
 3 8 0 9 2
   4 2 1 6
 5 5 7 6 6 +
   3 3 3 8
   1 4 8 5
 2 3 1 1 7
 =========
```

2. จงหาผลบวกของ

31465 + 47474 + 38641 + 27264 + 38886 = ___________

48753 + 99486 + 10238 + 47655 + 95384 = ___________

สนุกกับตัวเลข (1)

คู่เหมือน	**สามตัวเหมือน**	**สี่ตัวเหมือน**
$11 \times 1 = 11$	$37 \times 3 = 111$	$101 \times 11 = 1111$
$11 \times 2 = 22$	$37 \times 6 = 222$	$101 \times 22 = 2222$
$11 \times 3 = 33$	$37 \times 9 = 333$	$101 \times 33 = 3333$
$11 \times 4 = 44$	$37 \times 12 = 444$	$101 \times 44 = 4444$
$11 \times 5 = 55$	$37 \times 15 = 555$	$101 \times 55 = 5555$
$11 \times 6 = 66$	$37 \times 18 = 666$	$101 \times 66 = 6666$
$11 \times 7 = 77$	$37 \times 21 = 777$	$101 \times 77 = 7777$
$11 \times 8 = 88$	$37 \times 24 = 888$	$101 \times 88 = 8888$
$11 \times 9 = 99$	$37 \times 27 = 999$	$101 \times 99 = 9999$

จำนวนในระบบเครื่องหมายคละ

เรื่องที่ 2 จำนวนในระบบฐานสิบกับจำนวนในระบบเครื่องหมายคละ

ในระบบตัวเลขฐานสิบซึ่งตัวเลขที่ใช้ได้แก่ ตัวเลข 0 ไปจนถึง 9 สำหรับในระบบเครื่องหมายคละ นิยมเปลี่ยนรูปตัวเลขที่มากกว่า 5 ให้เป็นตัวเลขที่น้อยกว่า 5 แล้วเขียนสัญลักษณ์ - (ขีดบน) บนตัวเลขเหล่านั้น อันจะทำให้การคำนวณง่ายขึ้น เพราะการคำนวณใช้ค่าตัวเลขเพียง 0 ถึง 5 ย่อมง่ายและเร็วกว่าใช้ค่าตัวเลขตั้งแต่ 0 ถึง 9 การเขียนสัญลักษณ์แทนตัวเลขที่มากกว่า 5 แสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.6 พิจารณา 9 จะเห็นว่า $9 = 10 - 1 = 10 + (-1)$ ถ้าเขียน -1 เป็น $\overline{1}$

จะได้ $10 + (-1) = 10 + \overline{1}$ ซึ่งจะเขียนเป็น $1\overline{1}$ ดังนั้น $9 = 1\overline{1}$ อธิบายได้ดังนี้

ในระบบตัวเลขฐานสิบ ถ้าเขียน ab จะหมายถึง $a \times (10) + b$ ทำนองเดียวกัน $1\overline{1}$ จะหมายถึง $1 \times (10) + \overline{1} = 10 + \overline{1}$

นั่นคือ $1\overline{1} \quad = \quad 1 \times (10) + \overline{1} = 10 + \overline{1} = 10 - 1 = 9$

ตัวอย่างที่ 1.1.7 $29 = 30 - 1 = 30 + (-1) = 3 \times (10) + (-1)$

$= 30 + \overline{1} = 3\overline{1}$

■

นั่นคือ $29 = 3\overline{1}$

> สำหรับจำนวนเต็ม m ใด ๆ กำหนด $\overline{m} = -m$

จากการกำหนด $\overline{m} = -m$ สำหรับจำนวนเต็ม m ใดๆ จะได้คุณสมบัติต่อไปนี้

> สำหรับจำนวนเต็ม m, n ใด ๆ
>
> 1. $\overline{m+n} = \overline{m} + \overline{n}$
> 2. $\overline{\overline{m}} = m$
> 3. $\overline{m+\overline{n}} = \overline{\overline{n}+m} = \overline{m} + n = n + \overline{m}$

แสดงได้ดังนี้

1. $\overline{m+n} \quad = \quad -(m+n) = (-m) + (-n) = \overline{m} + \overline{n}$
2. $\overline{\overline{m}} \quad = \quad -\overline{m} = -(-m) = m$
3. $\overline{m+\overline{n}} \quad = \quad -(m + \overline{n}) = (-m) - \overline{n} = (-m) - (-n)$

$= \quad (-m) + n = \overline{m} + n$

$$\overline{n+m} \quad = \quad -(\overline{n}+m) = (-\overline{n})+(-m) = -(-n)+(-m)$$

$$= \quad n+(-m) \quad = n+\overline{m}$$

นอกจากนี้ สำหรับในระบบตัวเลขฐานสิบ จะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

สำหรับเลขโดด $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$

4. $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n}\ \overline{a_{n-1}}\ \overline{a_{n-2}} \ldots \overline{a_2}\ \overline{a_1}\ \overline{a_0}$

คุณสมบัติข้อ 4. จะแสดงประกอบด้วยตัวอย่าง ดังนี้

$$\overline{23} = \overline{2}\,\overline{3}$$

(เนื่องจาก $23 = 20+3$ ดังนั้น $\overline{23} = \overline{20+3} = \overline{20}+\overline{3}$

โดยการเขียนแบบมีค่าประจำตำแหน่ง จะได้ $\overline{20}+\overline{3} = \overline{2}\ \overline{3}$

การเขียนจำนวนในระบบเครื่องหมายคละนั้น จะพบจำนวนที่เขียนดังตัวอย่างต่อไปนี้ $1, \overline{2}, \overline{3}, 0, \overline{4}, 2, 1, \overline{5}, 6, 1, \overline{0}, 2, \overline{1}$ ฯลฯ ซึ่งหลักใดมีขีดบนอยู่เหนือจำนวนหลักนั้นๆ จะมีค่าเป็นจำนวนลบที่มีขนาดเท่ากับขนาดของค่าตัวเลขในหลักนั้น

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการเขียนตัวเลขในระบบฐานสิบ เป็นตัวเลขในระบบเครื่องหมายคละโดยมีขีดบน –

ตัวอย่างที่ 1.1.8 $79 = 80+(-1) = 80+\overline{1}$

เขียน $80+\overline{1}$ ในรูปค่าประจำตำแหน่งจะได้ $8\,\overline{1}$

ดังนั้น $79 = 8\,\overline{1}$

นอกจากนี้ $80 = 100-20 = 100+\overline{2}\overline{0} = 100+\overline{2}\overline{0} = 1\,\overline{2}\overline{0}$

ดังนั้น $79 = 80+\overline{1} = 1\,\overline{2}\overline{0}+\overline{1} = 1\,\overline{2}\,\overline{1}$

(เพราะ $\overline{0}+\overline{1} = \overline{1}$)

นั่นคือ $79 = 1\,\overline{2}\,\overline{1}$

หมายเหตุ การเขียนสัญลักษณ์แทน 79 อาจทำได้ดังนี้

$79 = 100-21 = 100+\overline{2}\,\overline{1} = 100+\overline{2}\overline{0}+\overline{1} = 1\,\overline{2}\,\overline{1}$

■

ในการเขียนจำนวนในระบบตัวเลขฐานสิบให้เป็นตัวเลขที่ใช้ในระบบเครื่องหมายคละ โดยใช้เลขโดดไม่เกิน 5 สามารถทำได้โดยใช้จำนวนทบสิบ และจำนวนทบเก้า ซึ่งในการอธิบายความหมายของจำนวนทบเก้า หรือจำนวนทบสิบของเลขโดดใดๆ อธิบายได้ดังนี้

จำนวนทบเก้า สำหรับเลขโดด a ใดๆ จำนวนทบเก้าของ a คือเลขโดด b ซึ่ง $a + b = 9$

เนื่องจากสำหรับเลขโดด a, b ใดๆ $a + b = b + a$ ดังนั้น ถ้า $a + b = 9$ จะได้ $b + a = 9$

จึงกล่าวได้ว่า b เป็นจำนวนทบเก้าของ a และ a เป็นจำนวนทบเก้าของ b หรือกล่าวว่า a และ b เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกัน

คู่จำนวนทบเก้าของเลขโดด 0 ถึง 9 มีดังนี้

0 และ 9 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $0 + 9 = 9 + 0 = 9$

1 และ 8 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $1 + 8 = 8 + 1 = 9$

2 และ 7 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $2 + 7 = 7 + 2 = 9$

3 และ 6 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $3 + 6 = 6 + 3 = 9$

4 และ 5 เป็นจำนวนทบเก้าซึ่งกันและกันเพราะ $4 + 5 = 5 + 4 = 9$

จำนวนทบสิบ สำหรับเลขโดด a ใดๆ จำนวนทบสิบของ a คือเลขโดด b ซึ่ง $a + b = 10$

ทำนองเดียวกันกับจำนวนทบเก้า สำหรับเลขโดด a และ b ซึ่ง $a + b = 10$ กล่าวว่า a และ b เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกัน

คู่จำนวนทบสิบของเลขโดด 0 ถึง 9 มีดังนี้

1 และ 9 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกันเพราะ $1 + 9 = 9 + 1 = 10$

2 และ 8 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกันเพราะ $2 + 8 = 8 + 2 = 10$

3 และ 7 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกันเพราะ $3 + 7 = 7 + 3 = 10$

4 และ 6 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกันเพราะ $4 + 6 = 6 + 4 = 10$

5 เป็นจำนวนทบสิบของตัวเองเพราะ $5 + 5 = 10$

ตัวอย่างที่ 1.1.9 จงเขียน 2789 โดยใช้ตัวเลขไม่เกิน 5

แนวคิด $2\,7\,8\,9 = 3\,0\,0\,0 - 2\,1\,1$

$= 3\,0\,0\,0 + \bar{2}\bar{1}\bar{1}$

$= 3\,\bar{2}\bar{1}\bar{1}$

$= 3\,\bar{2}\bar{1}\bar{1}$

นอกจากวิธีคิดตามแนวคิดข้างต้นแล้ว อาจใช้วิธีคิดลัดได้ดังนี้

พิจารณา 789 ตัวเลขที่ต้องเปลี่ยนแปลงคือ 9 ในหลักหน่วย 8 ในหลักสิบ และ 7 ในหลักร้อย

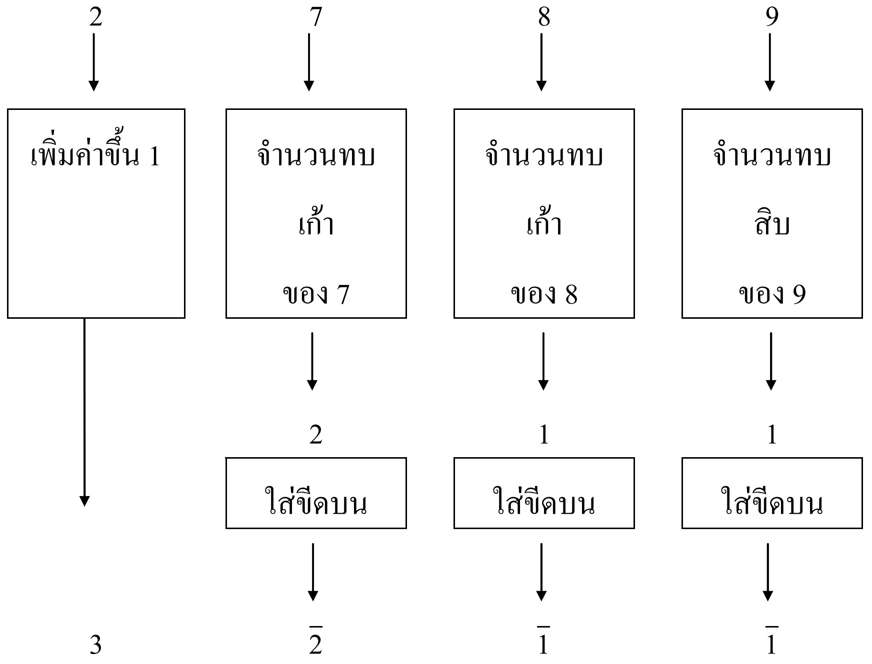
ตัวเลข ขวาสุด (หลักหน่วย) คือ 9 มีจำนวนทบสิบ คือ 1 ใส่ขีดบนได้เป็น $\bar{1}$

ตัวเลข หลักสิบ คือ 8 มีจำนวนทบเก้า คือ 1 ใส่ขีดบนได้เป็น $\bar{1}$

ตัวเลข ซ้ายสุด (หลักร้อย) คือ 7 มีจำนวนทบเก้า คือ 2 ใส่ขีดบนได้เป็น $\bar{2}$

ในการเขียน 2789 โดยเขียนเฉพาะตัวเลขที่น้อยกว่า 5 และใช้ ขีดบนทำได้ดังนี้ ให้เขียนตัวเลขจากขวาไปซ้ายโดยเขียนจำนวนทบสิบของ 9 พร้อมขีดบนถัดมาเป็นจำนวนทบเก้าของ 8 พร้อมขีดบน และจำนวนทบเก้าของ 7 พร้อมขีดบน และตัวเลขซ้ายสุดเขียนค่าของ 2 ที่เพิ่มขึ้น 1 นั่นคือเขียน 3 ซ้ายสุด จะได้ $3\,\bar{2}\bar{1}\bar{1}$

เขียนเป็นผังได้ดังนี้ (เริ่มจาก ขวาไปซ้าย)



นั่นคือ 2789 เปลี่ยนเป็น $3\,\bar{2}\bar{1}\bar{1}$

■

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนเต็ม m ใดๆ ถ้ามีชุดของเลขโดดติดกันหลายตัว โดยที่เลขโดดแต่ละตัวที่ติดกันนั้นมีค่าเกิน 5 ในการแปลงเลขโดดเหล่านั้นทำได้โดยตัวเลขขวาสุดของชุดแปลงเป็นจำนวนทบสิบของเลขโดดนั้น แล้วเขียนขีดบนไว้ที่จำนวนทบสิบนั้น สำหรับเลขโดดถัดๆ มาทางซ้ายในชุดนั้น แปลงเป็นจำนวนทบเก้าแล้วเขียนขีดบนไว้ที่จำนวนทบเก้าเหล่านั้น และเลขโดดที่ถัดไปทางซ้ายที่มีค่าน้อยกว่า 5 ให้เพิ่มค่าขึ้น 1 ก็จะเป็นการเขียนจำนวนเต็ม m ที่มีเลขโดดมีค่าไม่เกิน 5

ตัวอย่างที่ 1.1.10 จงเขียน 928716 โดยใช้ตัวเลขไม่เกิน 5 (นิขิลัมสูตร)

แนวคิด 0 9 2 8 7 1 6

$$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow$$

$$1 \; \bar{1} \; 3 \; \bar{1} \; \bar{3} \; 2 \; \bar{4}$$

4 เป็น จำนวนทบสิบของ 6 จึงเขียน $\bar{4}$

เพิ่มค่า 1 ขึ้นอีก 1 เป็น 2

3 เป็นจำนวนทบสิบของ 7 จึงเขียน $\bar{3}$

1 เป็นจำนวนทบเก้าของ 8 จึงเขียน $\bar{1}$

เพิ่มค่า 2 ขึ้นอีก 1 เป็น 3

1 เป็นจำนวนทบสิบของ 9 จึงเขียน $\bar{1}$

เนื่องจากในหลักของ 9 จะต้องแปลงค่า 9 เป็น $\bar{1}$ ดังนั้น

จึงจำเป็นต้องเขียน 0 หน้า 9 เพื่อจะต้องเพิ่มค่าขึ้น 1 จึงเขียน 1 เพิ่มขึ้นมาไว้หน้าสุดของตัวเลขที่แปลงแล้ว

นั่นคือ $928716 = 1\bar{1}3\bar{1}\bar{3}2\bar{4}$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.11 จงแปลง 257182 เป็นตัวเลขนิขิลัมสูตร

แนวคิด $2\ 5\ 7\ 1\ 8\ 2$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

แนวคิด $2\ 6\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

จำนวนทบสิบ

1 + 1

เริ่มชุดใหม่

จำนวนทบสิบ

5 + 1

ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

ดังนั้น $2\ 5\ 7\ 1\ 8\ 2 = 2\ 6\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

หลังจากการแปลงครั้งแรกแล้วยังมีเลขโดด 6 ที่มีค่าเกิน 5 จึงแปลงต่อไป

$2\ 6\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$3\ \bar{4}\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

จำนวนทบสิบ

2 + 1

ดังนั้น $2\ 6\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2 = 3\ \bar{4}\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

นั่นคือ $2\ 5\ 7\ 1\ 8\ 2 = 3\ \bar{4}\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 2$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.12 จงแปลง 353782 เป็นตัวเลขนิขิลัมสูตร

แนวคิด $3\ 5\ 3\ 7\ 8\ 2$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$3\ 5\ 4\ \bar{2}\ \bar{2}\ 2$

ดังนั้น $3\ 5\ 3\ 7\ 8\ 2 = 3\ 5\ 4\ \bar{2}\ \bar{2}\ 2$ ■

ในการแปลงตัวเลขในนิขิลัมสูตรให้เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ สามารถทำได้โดยใช้กระบวนการย้อนกลับ จากการแปลงตัวเลขในระบบฐานสิบเป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตร

พิจารณาการแปลงตัวเลขระบบฐานสิบเป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตร

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 7 & 1 & 6 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & \bar{3} & 2 & \bar{3} & \bar{1} \end{array}$$

จำนวนทบสิบของ 9 คือ 1 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{1}$

จำนวนทบเก้าของ 6 คือ 3 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{3}$

จาก 1 เพิ่มค่าขึ้นอีก 1 เป็น 2

เริ่มต้นใหม่ จำนวนทบสิบของ 7 คือ 3 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{3}$

จาก 3 เพิ่มค่าขึ้นอีก 1 เป็น 4

การแปลงตัวเลขในนิขิลัมสูตร เป็นตัวเลขระบบฐานสิบใช้กระบวนการย้อนกลับ ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} 4 & \bar{3} & 2 & \bar{3} & \bar{1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 9 \end{array}$$

เอาขีดบนออกจาก $\bar{1}$ ได้ 1 หาจำนวนทบสิบ

ของ 1 ได้เป็น 9

เอาขีดบนออกจาก $\bar{3}$ ได้ 3 หาจำนวนทบเก้า

ของ 3 ได้เป็น 6

2 มีค่าลดลง 1 ได้เป็น 1

เริ่มต้นใหม่

เอาขีดบนออกจาก $\bar{3}$ ได้ 3 หาจำนวนทบสิบ

ของ 3 ได้เป็น 7

4 มีค่าลดลง 1 เป็น 3

นั่นคือ $4\ \bar{3}\ 2\ \bar{3}\ \bar{1} = 3\ 7\ 1\ 6\ 9$

ตัวอย่างที่ 1.1.13 จงแปลง $3\ \bar{3}\ 4\ \bar{4}$ เป็นตัวเลขในระบบฐาน 10

แนวคิด

$$\begin{array}{cccc} 3 & \bar{3} & 4 & \bar{4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 7 & 3 & 6 \end{array}$$

เอา – ออกจาก $\bar{4}$ ได้เป็น 4 ซึ่งจำนวนทบสิบของ 4 คือ 6

ลดค่า 4 ลง 1 เป็น 3

เริ่มต้น เอา – ออกจาก $\bar{3}$ ได้เป็น 3 ซึ่งจำนวนทบสิบของ 3 คือ 7

ลดค่า 3 ลง 1 เป็น 2

นั่นคือ $3\ \bar{3}\ 4\ \bar{4} = 2\ 7\ 3\ 6$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.14 จงแปลง $3\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{2}$ เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ

แนวคิด

$$\begin{array}{cccc} 3 & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 6 & 5 & 8 \end{array}$$

ทบสิบ

ทบเก้า

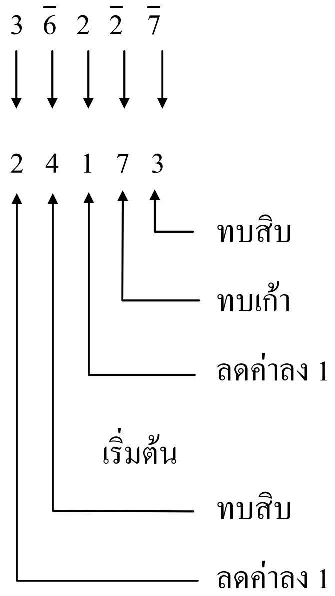
ลดค่าลง 1

ดังนั้น $3\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{2} = 2658$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.15 จงแปลง $3\ \bar{6}\ 2\ \bar{2}\ \bar{7}$ เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ

แนวคิด



ดังนั้น $3\ \bar{6}\ 2\ \bar{2}\ \bar{7} = 24173$

■

เรื่องที่ 3 จำนวนตรงข้าม

ต่อไปจะกล่าวถึงจำนวนตรงข้ามในระบบเครื่องหมายคละ เช่น $-3\,\bar{6}\,2\,\bar{1}$ มีค่าเป็นเท่าใด ในการพิจารณาค่าจำนวนตรงข้าม จะต้องใช้คุณสมบัติ $-a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = \overline{a_n}\;\overline{a_{n-1}}\;\overline{a_{n-2}} \ldots \overline{a_2}\;\overline{a_1}\;\overline{a_0}$ และในกรณีของนิขิลัมสูตรจะต้องแปลงตัวเลขที่มีค่ามากกว่า 5 ให้เป็นตัวเลขที่น้อยกว่า 5 และมีขีดบนเสียก่อน จึงจะทำการหาจำนวนตรงข้ามดังจะแสดงโดยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.16 $-27489 = \bar{2}\,\bar{7}\,\bar{4}\,\bar{8}\,\bar{9}$

ในนิขิลัมสูตรจะไม่เขียนตัวเลขที่เกิน 5 จึงจะต้องแปลง 27489 เป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตรก่อนดังนี้

$$27489 = 3\;\bar{3}\;5\;\bar{1}\;\bar{1}$$

จะได้ $-(27489) = -(3\;\bar{3}\;5\;\bar{1}\;\bar{1})$

$$= \bar{3}\;\bar{\bar{3}}\;\bar{5}\;\bar{\bar{1}}\;\bar{\bar{1}}$$

$$= \bar{3}\;3\;\bar{5}\;1\;1$$

นั่นคือ $-27489 = \bar{3}\;3\;\bar{5}\;1\;1$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.17 $-80379 = -(80379)$

$$= -(1\;\bar{2}\;0\;4\;\bar{2}\;\bar{1})$$

$$= \bar{1}\;\bar{\bar{2}}\;\bar{0}\;\bar{4}\;\bar{\bar{2}}\;\bar{\bar{1}}$$

$$= \bar{1}\;2\;0\;\bar{4}\;2\;1$$

นั่นคือ $-80379 = \bar{1}\;2\;0\;\bar{4}\;2\;1$

■

ในตัวอย่างที่ 1.1.18 และ 1.1.19 เป็นการแปลงจำนวนลบในฐานะฐานสิบให้เป็นจำนวนในระบบเครื่องหมายคละ ในทางกลับกันจำนวนในระบบเครื่องหมายคละ เมื่อแปลงแล้วอาจจะเป็นจำนวนลบในระบบฐานสิบได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.18 จงแปลง $\bar{3}\;7\;8\;\bar{2}\;1$ เป็นจำนวนในระบบฐานสิบ

แนวคิด วิธีที่ 1 ใช้ $M = -(-M)$ และ $-N = \overline{N}$ แล้วใช้จำนวนทบสิบและทบเก้า

$$\bar{3}\ 7\ 8\ \bar{2}\ 1 = -(-(\bar{3}\ 7\ 8\ \bar{2}\ 1))$$
$$= -(3\ \bar{7}\ \bar{8}\ 2\ \bar{1})$$
$$= -(2\ 2\ 2\ 1\ 9)$$
$$= -\ 2\ 2\ 2\ 1\ 9$$

ดังนั้น $\bar{3}\ 7\ 8\ \bar{2}\ 1 = -\ 2\ 2\ 2\ 1\ 9$

วิธีที่ 2 ใช้จำนวนทบสิบและทบเก้าโดยตรงโดยให้ตัวเลขทุกตัวมีขีดบน

$$\bar{3}\ \ 7\ \ 8\ \ \bar{2}\ \ 1$$
$$\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$$
$$\bar{2}\ \ \bar{2}\ \ \bar{2}\ \ \bar{1}\ \ \bar{9}$$

จำนวนทบสิบของ 1 คือ 9 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{9}$

$\bar{2}$ เพิ่มค่าขึ้น 1 เป็น $\bar{1}$

จำนวนทบสิบของ 8 คือ 2 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{2}$

จำนวนทบเก้าของ 7 คือ 2 แล้วใส่ขีดบนเป็น $\bar{2}$

$\bar{3}$ เพิ่มค่าขึ้น 1 เป็น $\bar{2}$

ดังนั้น $\bar{3}\ 7\ 8\ \bar{2}\ 1 = \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{9}$

$= -22219$

วิธีที่ 3 เปลี่ยนตัวเลขที่มีขีดบนเป็นตัวเลขที่มีค่าเป็นบวก

$$0\ \ \bar{3}\ \ 7\ \ 8\ \ \bar{2}\ \ 1$$
$$\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$$
$$\bar{1}\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 8\ \ 1$$

1 มีค่าคงเดิม

เอาขีดบนออกจาก $\bar{2}$ ได้ 2 มีจำนวนทบสิบเป็น 8

ลดค่า 8 ลง 1

7 มีค่าคงเดิม

เริ่มต้นใหม่

เอาขีดบนออกจาก $\bar{3}$ ได้ 3 มีจำนวนทบสิบเป็น 7

ลดค่า 0 ลง 1 เป็น $\bar{1}$

นำ $\bar{1}\ 7\ \ 7\ 7\ 8\ \ 1$ มาแปลงอีกครั้งหนึ่งเพราะ $\bar{1}$ ยังไม่ใช้ตัวเลขที่มีค่า เป็นบวก

$\bar{1}\ 7\ \ 7\ 7\ 8\ \ 1 \quad = \quad -100000 + 77781$

$\quad = \quad -22219$

นั่นคือ $\bar{3}\ \ 7\ \ 8\ \ \bar{2}\ \ 1 \quad = \quad -22219$

หมายเหตุ $-100000 + 77781$ หาค่าได้จาก

เขียนจำนวนทบเก้าของ 7778 แต่ละตัวตามลำดับ และเขียนจำนวนทบสิบของ 1 แล้วใส่เครื่องหมายลบ – ข้างหน้า จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

7 7 7 8 1

2 2 2 1 9 $\leftarrow$ จำนวนทบเก้าและทบสิบ

ใส่ – ข้างหน้า $\rightarrow$ – 222197

■

ข้อสังเกต

1. สำหรับเลข $a_n a_{n+1} \ldots a_2\, a_1\, a_0$ ถ้าเขียนขีดบนลงบน a_n เป็น $\overline{a_n}$ และถึงแม้ว่า a_i ตัวอื่น ๆ $(i = n-1, \ldots, 0)$ จะมีขีดบนหรือไม่ จะมีค่าเป็นจำนวนลบเมื่อ $a_n \neq 0$ เช่น $\bar{3}\ \ 7\ \ 8\ \ \bar{2}\ \ 1 = -22219$

2. ในระบบตัวเลขฐานสิบค่าประจำหลักนับตั้งแต่หลักสิบขึ้นไปจะมีค่าเป็น 10, 100, 1000, 10000, ..., 10^n ,... เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 ถ้า m เป็นจำนวนเต็ม และ $m \leq 10^n$ สำหรับบาง n จะมีจำนวนเต็ม p ซึ่ง $m + p = 10^n$ จะเรียก p ว่าจำนวนทบ 10^n ของ m หาได้โดยหาจำนวนทบสิบของเลขโดดขวาสุดของ m แล้วหาจำนวนทบเก้าของเลขโดดของ m ที่ถัดไปทางซ้ายดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.19 จงหาจำนวนทบ 10^n ของ 728 เมื่อ 10^n มีค่าดังนี้

ก. 1000

ข. 10000

ค. 100000

ก. เนื่องจาก 1000 เป็นเลขที่มี 0 อยู่ 3 ตัว และ 728 เป็นจำนวนที่มี 3 หลัก จึงเขียนจำนวนทบสิบและทบเก้าตามข้อสังเกตดังนี้

$$\begin{array}{ccc} 7 & 2 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 7 & 2 \end{array}$$

ดังนั้น จำนวนทบ 1000 ของ 728 คือ 272

ข. เนื่องจาก 10000 เป็นเลขที่มี 0 อยู่ 4 ตัว และ 728 เป็นจำนวนที่มี 3 หลัก จึงเพิ่ม 0 ข้างหน้าเพื่อให้เป็นจำนวนที่มี 4 หลัก ดังนี้ 0728 หลังจากนี้เขียนทบสิบและทบเก้า ดังนี้

$$\begin{array}{cccc} 0 & 7 & 2 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 2 & 7 & 2 \end{array}$$

ดังนั้นจำนวนทบ 10000 ของ 728 คือ 9272

ค. ทำนองเดียวกันจำนวนทบ 100000 ของ 728 คือ 99272 ■

บทสรุป การแปลงเลขโดดที่มีค่าเกิน 5 ให้เป็นตัวเลขระบบเครื่องหมายคละ ซึ่งใช้ตัวเลขไม่เกิน 5 จะทำให้การคิดคำนวณง่ายขึ้น

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้แบบเครื่องหมายคละ

(1.1) 2 9 8

(1.2) 6 3

(1.3) 9 7 1

(1.4) 1 6 1 8

(1.5) 2 9 8 7 0 5

(1.6) 1 9 1 8 1 6

(1.7) 4 8 9 9 0 2 9 1

(1.8) 9 0 8 3 5 2 8 1

(1.9) 9 9 9 8 0 8 9 2

(1.10) 9 0 9 1 2 5 4 6 8 3 2

(1.11) 9 2 3 4 6 7 1

(1.12) 9 8 3 • 0 1 2

(1.13) 2 • 1 0 3 5

(1.14) – 3 • 5 2 4 1

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในตัวเลขระบบฐาน 10

(2.1) $2\ \bar{4}\ 1$

(2.2) $\bar{3}\ \bar{1}\ \bar{2}\ 8$

(2.3) $3\ \bar{4}\ \bar{1}\ \bar{3}$

(2.4) $1\ \bar{2}\ \bar{3}\ 1\ \bar{1}\ \bar{1}\ 1$

(2.5) $2\ \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}\ 4\ \bar{5}\ 3$

(2.6) $3\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{6}\ 0\ \bar{1}\ \bar{3}\ 4$

(2.7) $5\ \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2}\ 3\ \bar{3}\ \bar{2}\ 1$

(2.8) $5\ \bar{1}\ \bar{2}\ 0\ \bar{1}\ \bar{2}\ 0\ 2$

(2.9) $5\ \bar{4}\ 0\ \bar{3}\ 2\ \bar{2}\ 1\ \bar{1}\ 0$

(2.10) $5\ \bar{1}\ 3\ \bar{2}\ 3\ \bar{3}\ 5\ \bar{4}\ 3$

(2.11) $5\ 0\ 0\ \bar{3}\ \bar{4}\ 2\ 0\ \bar{4}$

(2.12) $3\ 0\ 1 \bullet \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{5}$

(2.13) $\bar{3}\ 0\ 1 \bullet \bar{4}\ 7\ \bar{3}\ 2$

(2.14) $1\ \bar{1}\ 1 \bullet \bar{1}\ 1\ \bar{1}\ 1$

การบวก - ลบคละกันหลายจำนวน

เรื่องที่ 4 การลบที่มีการขอยืม

ในการลบจำนวนสองจำนวน ถ้าเลขโดดในแต่ละหลักของตัวตั้งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าของเลขโดดของตัวลบในหลักนั้นๆ แล้วจะทำการลบได้ง่ายโดยไม่ต้องขอยืม แต่ถ้าในหลักใดที่ตัวลบมีค่ามากกว่าตัวตั้งจะต้องมีการขอยืมค่าในหลักถัดขึ้นไปของตัวตั้งซึ่งจะทำให้การลบซับซ้อนขึ้น เราอาจหลีกเลี่ยงการขอยืมและใช้วิธีการทบเก้าหรือทบสิบเข้าช่วย นอกจากนี้แทนที่จะทำการลบกันในหลักที่ตัวลบมีค่ามากกว่าตัวตั้งแล้วจะทำการบวกตัวตั้งด้วยจำนวนที่เกิดจากการทบเก้าหรือทบสิบอีกด้วย

พิจารณาการลบต่อไปนี้ $3 - 8 = -5$ เห็นได้ชัดว่า ตัวตั้งคือ 3 ตัวลบ คือ 8 ซึ่งตัวลบมีค่ามากกว่าตัวตั้ง วิธีหาผลลบอาจทำได้โดยเปลี่ยนเอาตัวลบเป็นตัวตั้ง และเปลี่ยนตัวตั้งเป็นตัวลบได้ผลลัพธ์เป็นเท่าใดให้ใส่เครื่องหมายลบ (–) หน้าผลลัพธ์นั้น ก็จะได้ผลลบของ $3 - 8$ ตามต้องการ

สำหรับการลบ $13 - 8$ ถึงแม้ว่าตัวตั้งจะมีค่ามากกว่าตัวลบแต่เลขโดดในหลักหน่วยของตัวตั้งคือ 3 มีค่าน้อยกว่าเลขโดดซึ่งเป็นตัวลบคือ 8 กรณีนี้จะหาผลต่างเฉพาะเลขโดดกับเลขโดดไม่ได้จะต้องใช้เลขโดดในตัวตั้งทั้งหลักสิบและหลักหน่วย โดยทั่วๆ ไป อาจหาผลลัพธ์ของ $13 - 8$ ได้ดังนี้

ให้ $13 - 8 = \square$ ซึ่งสอดคล้องกับ $13 = 8 + \square$ นั่นคือ จะต้องหาค่า $\square$ ว่า มีค่าเป็นเท่าใด ซึ่งเมื่อนำมาบวกกับ 8 แล้วเท่ากับ 13 จะเห็นได้ว่า $\square$ มีค่าเท่ากับ 5 เพราะ $8 + 5 = 13$

นั่นคือ $13 - 8 = 5$

อย่างไรก็ตาม $8 + 5$ เป็นการบวกเลขโดดซึ่งผลบวกมีค่าเกิน 10

นอกจากนี้ถ้าจะหาผลลัพธ์ของ $23 - 8$ อาจทำได้โดย ให้ $23 - 8 = \square$ ซึ่งสอดคล้องกับ $23 = 8 + \square$ ซึ่ง $\square$ มีค่าเท่ากับ 15 เพราะ $8 + 15 = 23$

นั่นคือ $23 - 8 = 15$ จะเห็นได้ว่ายากขึ้นกว่าการหาผลลัพธ์ของ $13 - 8$

แนวคิดและขั้นตอนการใช้จำนวนทบเก้า และทบสิบช่วยในการลบ สำหรับกรณีที่ต้องขอยืมจะอธิบายด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.20 จงหาผลลบของ 43 – 18

แนวคิด เขียนการลบในแนวตั้งให้หลักของตัวตั้ง และหลักของตัวลบตรงกัน

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \underline{1} & \underline{8} \end{array} \; -$$

ขั้นที่ 1 ในหลักหน่วย ตัวตั้งคือ 3 ตัวลบคือ 8 เห็นได้ชัดว่า ตัวลบมีค่ามากกว่าตัวตั้ง จะใช้จำนวนทบสิบของ 8 นำไปบวกกับ 3 ซึ่งเป็นตัวตั้ง แล้วใส่ ′ เหนือตัวลบในหลักถัดไปทางซ้าย จำนวนทบสิบของ 8 คือ 2 นำ 2 ไปบวกกับ 3 ได้ 5 ใส่ 5 เป็นผลลัพธ์ในหลักหน่วย แล้วใส่ ′ เหนือ 1 ซึ่งเป็นตัวลบในหลักถัดไป

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \prime & 2^{+} \\ \underline{1} & \underline{8} \\ \underline{\underline{}} & \underline{\underline{5}} \end{array} \; -$$

ขั้นที่ 2 ทำการลบในหลักสิบ กรณีนี้ 1′ คือ 2 ซึ่ง 4 – 1′ คือ 4 – 2 = 2 จึงใส่ 2 เป็น ผลลัพธ์ในหลักสิบ จะได้ผลลัพธ์ในการลบคือ 25

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \prime & 2^{+} \\ \underline{1} & \underline{8} \\ \underline{\underline{2}} & \underline{\underline{5}} \end{array} \; -$$

ดังนั้น 43 – 18 = 25

■

ตัวอย่างที่ 1.1.21 จงหาผลลัพธ์ของ 432 – 257

แนวคิด เขียนตัวตั้งและตัวลบให้หลักตรงกัน

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 2 \\ \underline{2} & \underline{5} & \underline{7} \end{array} \; -$$

ขั้นที่ 1 ในหลักหน่วยตัวตั้งคือ 2 น้อยกว่าตัวลบคือ 7 จำนวนทบสิบของ 7 คือ 3 นำ 3 บวกกับ 2 ได้เป็น 5 ในช่องผลลัพธ์ เขียน ′ เหนือ 5 ซึ่งเป็นตัวลบในหลักสิบ

$$\begin{array}{ccc} & & \text{ขอยืม} \\ 4 & 3 & 2 \\ & & 3^{+} \\ \underline{2} & \underline{5'} & \underline{7} \\ \underline{\underline{}} & \underline{\underline{}} & \underline{\underline{5}} \end{array} \; -$$

ขั้นที่ 2 ในหลักสิบตัวตั้งคือ 3 น้อยกว่าตัวลบคือ $5'$ ซึ่งคือ 6 จำนวนทบสิบของ 6 คือ 4 นำ 4 บวกกับ 3 ได้เป็น 7 เขียน 7 ในช่องผลลัพธ์ เขียน $'$ เหนือ 2 ซึ่งเป็นตัวลบในหลักร้อย

$$\begin{array}{ccc} & \text{ขอยืม} & \\ 4 & 3 & 2 \\ & 4^{+} & 3^{+} \quad - \\ 2' & 5' & 7 \\ \hline & 7 & 5 \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3 ในหลักร้อย ตัวตั้งคือ 4 ตัวลบ คือ $2'$ หรือ 3 จะได้ 4 – 3 = 1 ใส่ 1 ในช่องผลลัพธ์

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 2 \\ & & 3^{+} \quad - \\ 2' & 5' & 7 \\ \hline 1 & 7 & 5 \\ \hline\hline \end{array}$$

ดังนั้น 432 – 257 = 175

หมายเหตุ ในขั้นที่ 2 จำนวนทบสิบของ $5'$ คือ จำนวนทบสิบของ 6 ซึ่งจำนวนทบสิบของ $5'$ คือ 4 อาจจะกล่าวว่า จำนวนทบเก้าของ 5 คือ 4 ก็ได้

สำหรับการลบที่มีการขอยืมหลายหลักติดกัน หลักที่มีการขอยืมหลักขวาสุดใช้จำนวนทบสิบของตัวลบ ส่วนหลักที่มีการขอยืมหลักอื่นๆ ถัดไปทางซ้ายใช้จำนวนทบเก้าของตัวลบไปบวกกับตัวตั้งที่ตรงหลักเดียวกันกับตัวลบ หลังจากนั้นใส่ $'$ เหนือตัวเลขหลักถัดไปทางซ้ายที่ไม่มีการขอยืมแล้วทำการลบตามปกติ

จากตัวอย่างที่ 1.1.21

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 2 \\ & & \quad - \\ 2 & 5 & 7 \\ \hline \end{array}$$

ตัวลบคือ 257 และมีการขอยืมในหลักหน่วยและหลักสิบติดกัน
ส่วนหลักร้อยไม่มีการขอยืม ในหลักหน่วยจำนวนทบสิบของ 7 คือ 3 ใน หลักสิบจำนวนทบเก้าของ 5 คือ 4 สำหรับหลักร้อยไม่มีการขอยืมเติม $'$ บน 2 ในหลักร้อย ซึ่ง $2'$ คือ 3 แล้วทำการลบปกติ ในหลักที่ไม่มีการขอยืมคือ หลักร้อย ส่วนหลักหน่วยและหลักสิบบวกด้วยจำนวนทบสิบและจำนวนทบเก้าของตัวลบตามลำดับ

อธิบายการแปลงตัวลบ 257 ดังนี้

$$
\begin{aligned}
-257 &= (-2)\times 10^2 + ((-5)\times 10) + (-7)\\
&= ((-2)\times 10^2) + (-10+5)\times 10 + (-10+3)\\
&= ((-2)\times 10^2) + ((-10)\times 10) + (5\times 10) + ((-1)\times 10) + 3\\
&= ((-2)\times 10^2) + ((-1)\times 10^2) + ((5-1)\times 10) + 3\\
&= ((-3)\times 10^2) + (\underbrace{4}_{\text{ทบเก้าของ 5}} \times 10) + \underbrace{3}_{\text{ทบสิบของ 7}}
\end{aligned}
$$

ทบสิบของ 7

ทบเก้าของ 5

พิจารณาตัวอย่างที่ 1.1.21

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{ขอยืม} & \text{ขอยืม} \\
4 & 3 & 2 \\
{}' & 4^{+} & 3^{+} \quad - \\
\underline{2} & \underline{5} & \underline{7} \\
 & \underline{\underline{7}} & \underline{\underline{5}}
\end{array}
$$

ได้จาก 3 (จำนวนทบสิบของ 7) บวกกับ 2 ซึ่งเป็นตัวตั้ง

ได้จาก 4 (จำนวนทบเก้าของ 5) บวกกับ 3 ซึ่งเป็นตัวตั้ง

อย่างไรก็ตาม ′ บน 2 ในหลักร้อย จำเป็นต้องมีเนื่องจากในหลักร้อยไม่ใช่กรณีที่ตัวตั้งค่ามีน้อยกว่าตัวลบ

ตัวอย่างที่ 1.1.22 จงหาผลลบของ

$$
\begin{array}{ccc}
8 & 2 & 5 \quad - \\
\underline{4} & \underline{8} & \underline{7} \\
\hline\hline
\end{array}
$$

แนวคิด

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{ขอยืม} & \text{ขอยืม} \\
8 & 2 & 5 \\
 & 1^{+} & 3^{+} \quad - \\
\underline{4} & \underline{8} & \underline{7} \\
 & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{8}}
\end{array}
$$

การลบนี้มีการขอยืมสองหลักติดกัน คือ หลักหน่วยและหลักสิบ ในหลักหน่วยตัวลบคือ 7 จำนวนทบสิบของ 7 คือ 3 นำ 3 ไปบวกกับ 5 ซึ่งเป็นตัวตั้ง ได้ผลลัพธ์เป็น 8 ในหลักสิบ ตัวลบคือ 8 จำนวนทบเก้าของ 8 คือ 1 นำ 1 ไปบวกกับ 2 ซึ่งเป็นตัวตั้ง ได้ผลลัพธ์เป็น 3

$$\begin{array}{ccc} 8 & 2 & 5 \\ ' & 1^{+} & 3^{+} \\ 4 & 8 & 7 \\ \hline 3 & 3 & 8 \\ \hline\hline \end{array}$$

หลักร้อยไม่มีการขอยืมใส่ $'$ เหนือ 4 ซึ่งเป็นตัวลบในหลักร้อย ซึ่ง $4'$ คือ 5 การลบไม่มีการขอยืมจึงนำ 5 ไปลบกับ 8 ได้ 3 ดังนั้นผลลัพธ์คือ 3 3 8

■

ตัวอย่างที่ 1.1.23 จงหาผลลบ

$$\begin{array}{cccc} 8 & 4 & 6 & 8 \\ & & & - \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด การลบมีการขอยืมในหลักสิบซึ่งตัวลบคือ 9 และหลักร้อยซึ่งตัวลบคือ 6 จึงใช้จำนวนทบสิบของ 9 คือ 1 และจำนวนทบเก้าของ 6 คือ 3 ไปบวก ขณะที่ 2 ในหลักหน่วยทำการลบตามปกติ ส่วนหลักพัน เปลี่ยน 3 เป็น $3'$ ที่เท่ากับ 4 แล้วทำการลบปกติ ในหลักพัน ดังนี้

$$\begin{array}{cccc} & \text{ขอยืม} & \text{ขอยืม} & \\ 8 & 4 & 6 & 8\ - \\ ' & 3^{+} & 1^{+} & \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ \hline 4 & 7 & 7 & 6 \\ \hline\hline \end{array}$$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.24 จงหาผลลบของ

$$\begin{array}{cccccc} 8 & 2 & 4 & 5 & 4 & 7\ - \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 1 & 9 \\ \hline \end{array}$$

แนวคิด **ขั้นที่ 1** ในหลักหน่วย ตัวตั้งคือ 7 น้อยกว่าตัวลบคือ 9 นำ 1 จำนวนทบสิบของ 9 บวกกับ 7 ได้ 8 จึงใส่ 8 ที่ช่องผลลัพธ์ นอกจากนี้ในหลักสิบ ตัวตั้งคือ 4 มากกว่าตัวลบคือ 1 ไม่เกิดการขอยืมจึงใส่ $'$ ไว้เหนือ 1 ซึ่งเป็นตัวลบในหลักสิบ จะได้ $4 - 1' = 4 - 2 = 2$ ใส่ 2 ในช่องผลลัพธ์ของหลักสิบ

					ขอยืม
8	2	4	5	4	7
				′ −	1^+
5	1	8	6	1	9
				2	8

ขั้นที่ 2 ในหลักร้อย และหลักพัน ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบติดกันสองหลัก ดังนั้นในหลักร้อยใช้การบวกด้วยจำนวนทบสิบของตัวลบ และในหลักพันใช้การบวกด้วยจำนวนทบเก้าของตัวลบ นอกจากนี้ ดูถัดไปในหลักหมื่น ตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบ จึงใส่ ′ เหนือ 1 ซึ่งเป็นตัวลบ แล้วทำการคิดคำนวณได้ผลลัพธ์ดังนี้

		ขอยืม	ขอยืม		
8	2	4	5	4	7
	−	1^+	4^+	−	1^+
5	1′	8	6	1	9
	0	5	9	2	8

ขั้นที่ 3 ในหลักแสนทำการลบธรรมดา เพราะในหลักหมื่นไม่มีการขอยืมจำนวนในหลักแสน จะได้ 8 – 5 = 3 ใส่ 3 ในช่องผลลัพธ์

	8	2	4	5	4	7
	−	. −	1^+	4^+	, −	1^+
	5	1	8	6	1	9
ทบเก้าคือ 1						ทบสิบ คือ 1 และ 4 ตามลำดับจาก
	3	0	5	9	2	8 ขวาไปซ้าย

นั่นคือ 824547 – 518619 = 305928

■

ตัวอย่างที่ 1.1.25 จงหาค่าของ 1438 - 3165

แนวคิด กรณีนี้ตัวตั้งคือ 1438 น้อยกว่าตัวลบคือ 3165 จึงจะหาค่าของ 3165 – 1438 ได้ผลลัพธ์เป็นเท่าใด จะใส่เครื่องหมาย – หน้าผลลัพธ์ ก็จะได้ผลลบตามต้องการ

3	1	6	5
−	6^+	−	2^+
1′	4	3′	8
1	7	2	7

ดังนั้น 1438 – 3165 = –1727

■

บทสรุป ในการลบธรรมดาที่มีการขอยืม กับการลบโดยวิธีทบสิบ และใส่ ′ บนตัวลบในหลักถัดไปนั้น สอดคล้องกันดังจะอธิบายโดยตัวอย่าง การลบต่อไปนี้

การลบแบบขอยืม

$$\begin{array}{rr} 4 & 3 \\ 2 & 8 \\ \hline \end{array}\ - \longrightarrow \begin{array}{rr} \overset{3}{\cancel{4}} & \overset{1}{3} \\ 2 & 8 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline\hline \end{array}\ -$$

อธิบายได้ดังนี้ $43 = 30 + 13$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 43 - 28 &= (30 + 13) - 28 \\ &= (30 + 13) - (20 + 8) \\ &= (30 - 20) + (13 - 8) \\ &= 10 + 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

การลบแบบทบสิบและใส่ ′

$$\begin{array}{rr} 4 & 3 \\ 2 & 8 \\ \hline \end{array}\ - \longrightarrow \begin{array}{rr} 4 & 3 \\ & 2^{+} \\ 2' & 8 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline\hline \end{array}\ -$$

อธิบายได้ดังนี้ $28 = 30 - 2$

$-28 = -(30 - 2) = -30 + 2$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 43 - 28 &= 43 - 30 + 2 \\ &= (40 + 3) - 30 + 2 \\ &= (40 - 30) + (3 + 2) \text{ ....(*)} \\ &= 10 + 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

ในบรรทัด (*) คือ

$$\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{c} 4 \\ {}^{\prime} \\ 2 \end{array}} & \begin{array}{c} 3 \\ 2^{+\,-} \\ 8 \end{array} \leftarrow \end{array}$$

จำนวนทบสิบของ 8 คือ 2 นำไปบวกกับ 3 ได้ 5

คือ $40 - 20^{\prime} = 40 - 30$

บทสรุป 1. ในกรณีที่การลบมีการขอยืม ถ้าใช้บวกด้วยจำนวนทบสิบและใส่ ′ เหนือตัวลบในหลักถัดไปจะสะดวกกว่าการลบแบบขอยืมธรรมดา

2. สำหรับผู้ที่ถนัดการลบแบบขอยืมอาจจะทำการลบโดยไม่ต้องใช้การบวกด้วยจำนวนทบสิบก็ได้ แต่แทนที่จะลดค่าตัวตั้งในหลักถัดไปลงหนึ่ง เปลี่ยนเป็นคงตัวตั้ง ในหลักถัดไปไว้ แล้วใส่ ′ เหนือตัวลบในหลักถัดไปจะสะดวกกว่า เช่น

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \underline{2} & \underline{8} \end{array} - \longrightarrow \begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \underline{2^{\prime}} & \underline{8} \\ \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{5}} \end{array} -$$

เรื่องที่ 5 การลบที่ไม่ต้องคำนึงถึงการขอยืม

นอกจากการลบที่ต้องคำนึงถึงถึงการขอยืมแล้วอาจจะ ทำการลบที่ไม่ต้องคำนึงถึงการขอยืมก็ได้ มีหลักการคิดดังนี้

เมื่อนำตัวลบมาพิจารณา มีขั้นตอนการเปลี่ยนตัวลบดังนี้

ขั้นที่ 1 ตัวลบในหลักหน่วยเปลี่ยนเป็นจำนวนทบสิบของตัวลบในหลักหน่วยนั้น

ขั้นที่ 2 ตัวลบที่เหลือเปลี่ยนเป็นจำนวนทบเก้า ของตัวลบหลักนั้นๆ

ขั้นที่ 3 เมื่อหมดตัวลบแล้วเพิ่มตัวเลขถัดไปทางซ้ายอีกหนึ่งหลัก โดยใส่ $\bar{1}$ เป็นตัวบวก ($\bar{1}$ หมายถึง –1 ในหลักที่เพิ่มขึ้นใหม่นั้น)

เมื่อเปลี่ยนแปลงตัวลบเสร็จเรียบร้อยแล้วนำไปบวกกับตัวตั้งก็จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ สำหรับหลักซ้ายสุดนั้นการบวกด้วย $\bar{1}$ ก็คือ การลบด้วย 1 ในหลักซ้ายสุดนั่นเอง

การแปลงตัวลบโดยวิธีการนี้อธิบายได้ดังนี้

สมมติตัวลบ คือ 4 7 8 6 แปลงได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 7 & 8 & 6 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bar{1} & 5 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

$\bar{1}$ คือ –1 จำนวนทบเก้า จำนวนทบสิบในหลักหมื่น

จะเห็นว่า 4 7 8 6 แปลงเป็น $\bar{1}$ 5 2 1 4

พิจารณาตัวลบ 4 7 8 6 คือ

$$\begin{aligned} -4786 &= -10000 + 5214 \\ &= (-1) \times 10^4 + 5214 \\ &= \bar{1}5214 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.1.26 จงหาผลลบของ

$$\begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ -\ \underline{4\ 7\ 2\ 3\ 8} \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด

$$\begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ -\ \underline{4\ 7\ 2\ 3\ 8} \\ \hline\hline \end{array} \quad \text{เปลี่ยนเป็น} \quad \begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ +\ \underline{\bar{1}\ 5\ 2\ 7\ 6\ 2} \\ \hline\hline \end{array}$$

ทำการบวก ตามปกติโดย $\bar{1}$ หมายถึง –1 ในหลักแสน

$$\begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ +\ \underline{\bar{1}\ \dot{5}\ 2\ 7\ \dot{6}\ 2} \\ \underline{\underline{0\ 3\ 6\ 9\ 2\ 5}} \end{array}$$

หมายเหตุ • เหนือ 5 ในหลักหมื่น หนึ่ง • ก็คือการทด 1 ไปหลักแสนซึ่งหักล้างกับ $\bar{1}$ ในหลักแสนพอดี ผลลัพธ์ในหลักแสนจึงเป็น 0 จะได้ผลลัพธ์เป็น 3 6 9 2 5 นั่นคือ ได้การลบดังนี้

$$\begin{array}{r} 8\ 4\ 1\ 6\ 3 \\ -\ \underline{4\ 7\ 2\ 3\ 8} \\ \underline{\underline{3\ 6\ 9\ 2\ 5}} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 1.1.27 จงหาผลลบของ

$$
\begin{array}{r}
8\ 6\ 7\ 3\ 5 \\
-\quad 4\ 8\ 2\ 1 \\
-\quad 1\ 4\ 7\ 8\ 6 \\
\hline
\\
\hline\hline
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{เปลี่ยนเป็น}} \quad
\begin{array}{r}
8\ 6\ 7\ 3\ 5 \\
+\quad \bar{1}\ 5\ 1\ 7\ 9 \\
+\quad \bar{1}\ 8\ 5\ 2\ 1\ 4 \\
\hline
\\
\hline\hline
\end{array}
$$

ทำการบวกปกติยกเว้น $\bar{1}$ คือ –1 ในหลักนั้น

$$
\begin{array}{r}
8\ 6\ 7\ 3\ 5 \\
+\quad \bar{1}\ \dot{5}\ 1\ \dot{7}\ \dot{9} \\
+\quad \bar{1}\ \dot{8}\ 5\ \dot{2}\ 1\ 4 \\
\hline
6\ 7\ 1\ 2\ 8 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

ผลลัพธ์ คือ 6 7 1 2 8

■

• ในหลักพันคือ การทด 1 ไปหลักหมื่นหักล้างกับ $\bar{1}$ ในหลักหมื่น นอกจากนี้ • ในหลักหมื่นคือการทด 1 ไปหลักแสน หักล้างกับ $\bar{1}$ ในหลักแสน

ในกรณีที่ผลลัพธ์มีค่าติดลบหลักซ้ายสุดของผลลัพธ์จะอยู่ในรูป $\bar{a}$ เมื่อ a เป็นเลขโดดที่มากกว่า 0 เช่น $\bar{1}, \bar{2}$ เป็นต้น ในการแปลงกลับเป็นจำนวนลบก็ทำได้โดยผลลัพธ์หลักหน่วยเปลี่ยนเป็นจำนวนทบสิบ หลักถัดมาทางซ้ายเปลี่ยนเป็นจำนวนทบเก้าเมื่อเปลี่ยนมาถึง $\bar{1}$ ให้เอา $\bar{1}$ ออกแล้วใส่เครื่องหมาย – แทน ซึ่งเครื่องหมาย – จะอยู่หน้าจำนวนทบเก้าและทบสิบที่เปลี่ยนมาก่อนแล้วผลที่ได้พร้อมเครื่องหมาย – ก็คือ จำนวนลบที่เป็นผลลัพธ์นั่นเอง

เช่น ผลลัพธ์คือ $\bar{1}$ 8 2 1 เปลี่ยนเป็นผลลัพธ์ที่ไม่มี $\bar{1}$ ดังนี้

$$
\begin{array}{cccc}
\bar{1} & 8 & 2 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
- & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{1\quad 7}_{\text{ทบเก้า}}} & \underset{\text{ทบสิบ}}{9}
\end{array}
$$

(เพราะ $\bar{1}$ 8 2 1 คือ –1000 + 821 = –179)

ถ้าผลลัพธ์คือ $\bar{2}$ 8 3 7 ให้ทำคล้ายกับการแปลง $\bar{1}$ 8 2 1

แตกต่างเฉพาะ $\bar{2}$ เปลี่ยนเป็น –1 ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{2}\;8\;3\;7 &= -2000+837\\ &= -1000+(-1000+837)\\ &= -1000+(-163)\\ &= -1163\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}\bar{2} & 8 & 3 & 7\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ -1 & 1 & 6 & 3\end{array}$$

ทบเก้า ทบสิบ

และถ้าผลลัพธ์เป็น $\bar{3}\;7\;6\;4$ ก็แปลงคล้ายตัวอย่าง ข้างต้นแต่ $\bar{2}$ เปลี่ยนเป็น –2

ตัวอย่างที่ 1.1.28 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{r}3\;1\;4\;5\\ -\;\underline{3\;8\;1\;9}\\ \hline\hline\end{array}$$

วิธีคิด

$$\begin{array}{r}3\;1\;4\;5\\ -\;\underline{3\;8\;1\;9}\\ \hline\hline\end{array}\quad\text{เปลี่ยนเป็น}\quad\begin{array}{r}3\;1\;4\;5\\ +\;\underline{\bar{1}\;6\;1\;\dot{8}\;1}\\ \underline{\underline{\bar{1}\;9\;3\;2\;6}}\end{array}$$

พิจารณา $\bar{1}\;9\;3\;2\;6 = -0674 = -674$

ดังนั้นผลลัพธ์คือ -674

หมายเหตุ $\bar{1}\;9\;3\;2\;6 = -0\;6\;7\;4$ แสดงดังแผนผังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccccc}\bar{1} & 9 & 3 & 2 & 6\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ - & 0 & 6 & 7 & 4\end{array}$$

เปลี่ยน $\bar{1}$ เป็น –

ทบเก้า ทบสิบ

■

ตัวอย่างที่ 1.1.29 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{rrrl} 8 & 9 & 6 & \\ & & & - \\ 9 & 4 & 3 & \\ & & & - \\ 9 & 2 & 7 & \\ & & & - \\ \underline{6} & \underline{8} & \underline{1} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด

$$\begin{array}{rrrl} 8 & 9 & 6 & \\ & & & - \\ 9 & 4 & 3 & \\ & & & - \\ 9 & 2 & 7 & \\ & & & - \\ 6 & 8 & 1 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array} \quad \text{เปลี่ยนเป็น} \quad \begin{array}{rrrrl} & \dot{8} & \dot{9} & 6 & \\ & & & & + \\ \bar{1} & 0 & 5 & \dot{7} & \\ & & & & + \\ \bar{1} & 0 & \dot{7} & 3 & \\ & & & & + \\ \bar{1} & 3 & 1 & \dot{9} & \\ \hline \bar{2} & 3 & 4 & 5 & \\ \hline\hline \end{array}$$

พิจารณาการแปลง $\bar{2}\ 3\ 4\ 5$

จะได้

$$\begin{array}{cccc} \bar{2} & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -1 & 6 & 5 & 5 \end{array}$$

ดังนั้นผลลัพธ์คือ -1655

■

ตัวอย่างที่ 1.1.30 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{rrrrrl} 8 & 1 & 4 & 1 & 3 & \\ & & & & & + \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & \\ & & & & & - \\ 9 & 2 & 1 & 4 & 6 & \\ & & & & & - \\ \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด จากโจทย์เปลี่ยนรูปเป็น

$$\begin{array}{rrrrrrl} & 8 & 1 & 4 & 1 & 3 & \\ & & & & & & + \\ & \dot{2} & 1 & 3 & 1 & 2 & \\ & & & & & & + \\ \bar{1} & 0 & \dot{7} & \dot{8} & 5 & 4 & \\ & & & & & & + \\ \bar{1} & 7 & 6 & \dot{5} & \dot{6} & \dot{8} & \\ \hline \bar{1} & 8 & 7 & 1 & 4 & 7 & = -12853 \\ \hline\hline \end{array}$$

เรื่องที่ 6 การหาผลลบแบบรวบยอด

พื้นฐานการหาผลลบแบบรวบยอดนั้น เป็นพื้นฐานของสมการดังนี้ คือ สำหรับจำนวนเต็มบวก a, b และ c ใดๆ จะพบว่า $a - b = c$ ก็ต่อเมื่อ $a = b + c$ เช่น $8 - 5 = 3$ ก็ต่อเมื่อ $8 = 5 + 3$
ถ้าไม่ทราบค่า c อาจเขียน □ แทน c ดังนี้

$a - b = \square$ ก็ต่อเมื่อ $a = b + \square$

จากรูปสมการลักษณะนี้ จึงควรฝึกการหาค่าจำนวนที่แทน □ เสียก่อน นอกจากนี้อาจมีกรณีที่ผลบวกจำนวนทางซ้ายและขวาของสมการไม่เท่ากัน ก็จะทำให้กลายเป็นอสมการ ถึงแม้ว่ามีตัวเลขในหลักหน่วยของผลบวกเท่ากันก็ตาม จึงควรฝึกหาจำนวนที่แทน □ ในอสมการ หรือสมการก่อนดังนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.31 จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดหรือ 0 ที่เติมลงในกรอบ □ แล้วทำให้ผลบวกทางซ้ายและผลบวกขวามีค่าหลักหน่วยเท่ากัน และเขียน < , > หรือ = ถ้าผลบวกของจำนวนทางซ้ายน้อยกว่า, มากกว่า หรือเท่ากับ ผลบวกของจำนวนทางขวา ตามลำดับ ลงในช่องว่าง ทางด้านขวา ซึ่งตรงหัวตารางเขียน < , > , = ไว้ และเขียน • แสดงการมากกว่าอยู่เท่าไร ทางด้านที่มากกว่า (• มากกว่าอยู่ 10, •• มากกว่าอยู่ 20)

ซ้าย	**ขวา**	**< , > , =**
$1 + 2 + 3$	$3 + 4 + \boxed{9}$	<•
$3 + 4 + \boxed{8}$	$5 + 9 + 1$	=
$9 + 6 + 3 + 9$	$3 + 1 + \boxed{3}$	••>
$3 + \boxed{7} + 8$	$4 + 5 + 9$	=
$8 + 8 + 9 + 9$	$\boxed{3} + 8 + 4 + 9$	•>
$3 + 7 + 1$	$9 + 9 + \boxed{8} + 5$	<••
$3 + 4 + 5 + \boxed{6}$	$1 + 3 + 6 + 8$	=
$3 + 7 + 8 + 2$	$9 + 9 + 2 + \boxed{0}$	=

■

ตัวอย่างที่ 1.1.32 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ \underline{3} & \underline{2} \\ \hline\hline \end{array} -$$

แนวคิด

$$\begin{array}{lcc} a: & 4 & 6 \\ \underline{b:} & \underline{3} & \underline{2} \\ \underline{\underline{c:}} & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{4}} \end{array} -$$

ให้ $a = 46$

$b = 32$

$c = a - b$

จะได้ $a = b + c$

เนื่องจาก $46 = 32 + 14$

ดังนั้น $c = 14$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.33 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 8 \\ \underline{2} & \underline{4} & \underline{7} \\ \hline\hline \end{array} -$$

แนวคิด

$$\begin{array}{lccc} a: & 3 & 1 & 8 \\ \underline{b:} & \underline{2} & \underline{4} & \underline{7} \\ \underline{\underline{C:}} & & \underline{\underline{\overset{\bullet}{7}}} & \underline{\underline{1}} \end{array} -$$

ให้ $a = 318$

$b = 247$

$c = a - b$

จะได้ $a = b + c$

หลักหน่วยของ a คือ 8 หลักหน่วยของ b คือ 7 จะได้หลักหน่วยของ c คือ 1 หลักสิบของ a คือ 1 หลักสิบของ b คือ 4 ต้องหาหลักสิบของ c ที่ทำให้ผลบวกของตัวเลขในหลักสิบของ b + c ลงท้าย ด้วย 1 ซึ่ง 1 เป็นตัวเลขในหลักสิบของ a จะเห็นได้ว่าหลักสิบของ c ต้องเป็น 7 แต่ 4 + 7 = 11 ซึ่งมากกว่า 1 อยู่ 10 จึงมีการทดผลบวกในหลักสิบของ b + c ไปยังหลักร้อย ในที่นี้จะเขียน • เหนือ 7

หลักร้อยของ a คือ 3 หลักร้อยของ b คือ 2 จากผลบวกหลักสิบของ b + c มีการทด 1 ไปหลักร้อย จะได้ 2 + 1 = 3 ซึ่งเป็นตัวเลขในหลักร้อย ของ a พอดี จึงไม่ต้องเขียนตัวเลขในหลักร้อยของ c จึงได้ c เท่ากับ 71 เป็นคำตอบ

■

ตัวอย่างที่ 1.1.34 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cccc} 4 & 8 & 1 & 5 \\ \underline{2} & \underline{9} & \underline{3} & \underline{1} \\ \hline\hline \end{array}\ -$$

แนวคิด

$$\begin{array}{lcccc} a: & 4 & 8 & 1 & 5 \\ \underline{b:} & \underline{2} & \underline{9} & \underline{3} & \underline{1} \\ c: & 1 & \dot{8} & \dot{8} & 4 \\ \hline\hline \end{array}\ -$$

■

ในกรณีที่ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $a < b$ จะได้ $a - b$ เป็นจำนวนเต็มลบอาจเขียนแทนผลลบของ $a - b$ ด้วย $-c$ นั่นคือ $a - b = -c$ จะพบว่า $a + c = b$ จึงกล่าวได้ว่า $a - b = -c$ ก็ต่อเมื่อ $a + c = b$

ดังนั้นการหาค่า $-c$ ทำได้โดยหาค่า c ที่นำมาบวกกับ a แล้วได้ผลบวกเท่ากับ b หลังจากนั้นใส่เครื่องหมาย – หน้า c ก็จะได้ $-c$ เป็นคำตอบ

ตัวอย่างที่ 1.1.35 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cccc} 2 & 9 & 3 & 1 \\ 4 & \underline{8} & \underline{1} & \underline{5} \\ \hline\hline \end{array}\ -$$

แนวคิด

$$\left\{\begin{array}{lcccc} a: & 2 & 9 & 3 & 1 \\ \underline{b:} & \underline{4} & \underline{8} & \underline{1} & \underline{5} \\ c: & 1 & \dot{8} & \dot{8} & 4 \\ \hline\hline \end{array}\right.\ -$$

คำตอบ คือ -1884

■

เรื่องที่ 7 การหาผลบวก – ลบคละกันแบบรวบยอด

สำหรับจำนวนเต็มบวก a, b, c และ d จะพบว่า

$a + b - c = d$ ก็ต่อเมื่อ $a + b = c + d$

$a - b + c = d$ ก็ต่อเมื่อ $a + c = b + d$

เนื่องจาก d เป็นผลลัพธ์ของการบวก – ลบ คละกัน และ d เป็นจำนวนบวก จึงนำ d ไปบวกรวมกับตัวลบทั้งหมด แยกไว้พวกหนึ่ง แล้วทำการหาค่า d ซึ่งเป็นผลลัพธ์ตามต้องการในทางปฏิบัติ จะหาผลบวกของ ตัวตั้งและตัวบวกก่อน แล้วจึงหาค่า d ที่ทำให้ผลบวกของ d กับตัวลบทั้งหมดมีค่าเท่ากับค่าของผลบวกของพวกแรก ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.36 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{cccl} 4 & 8 & 7 & \\ & & & + \\ 5 & 2 & 1 & \\ & & & - \\ \underline{7} & \underline{9} & \underline{9} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$\begin{array}{lccl} a: 4 & 8 & 7 & \\ & & & + \\ b: 5 & 2 & 1 & \\ & & & - \\ \underline{c: 7} & \underline{9} & \underline{9} & \\ \underline{d: 2} & \underline{0} & \underline{\dot{9}} & \\ \hline \end{array}$$

หาค่า d ที่ทำให้ $c + d = a + b$ เนื่องจากผลบวกหลักหน่วย ของ $a + b = 8$ จึงต้องทำให้ผลบวกหลักหน่วยของ $c + d$ ลงท้ายด้วย 8 บังคับ ให้หลักหน่วยของ d เป็น 9 แต่หลักหน่วยของ c ก็คือ 9 ซึ่ง $9 + 9$ มากกว่า $7 + 1$ อยู่ 10 จึงเขียนจุดบน 9 ที่หลักหน่วยของ d จุดนั้นจะทดไปในหลักสิบของ $c + d$

พิจารณาหลักสิบของ $a + b$ จะได้ $8 + 2 = 10$ จึงต้องทำให้หลักสิบของ $c + d$ เท่ากับ 10 แต่หลักสิบของ c คือ 9 และมีการทดของ $c + d$ จากหลักหน่วยมา 1 จุด ได้ $9 + 1 = 10$ ดังนั้น หลักสิบของ d จึงเป็น 0

พิจารณาหลักร้อยของ $a + b$ จะได้ $4 + 5 = 9$ เนื่องจากหลักร้อยของ c คือ 7 จึงทำให้หลักร้อยของ d เป็น 2 จะทำให้ $4 + 5 = 7 + 2$

คำตอบจึงเป็น 209 ■

ตัวอย่างที่ 1.1.37 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{ccccl} 3 & 8 & 5 & 9 & - \\ 2 & 9 & 8 & 7 & \\ & & & & + \\ \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{5} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$
\begin{array}{ll|cccc}
a & : & 3 & 8 & 5 & 9 \; - \\
b & : & 2 & 9 & 8 & 7 \; + \\
c & : & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{5} \\
d & : & 2 & 1 & 0 & 7
\end{array}
$$

จากโจทย์นี้ต้องหาค่า d ที่ทำให้ a + c = b + d

หมายเหตุ หลักหน่วยของ d ไม่ต้องเติมจุดเพราะผลบวกหลักหน่วยของ a + c คือ 9 + 5 = 14 และผลบวกหลักหน่วยของ b + d คือ 7 + 7 = 14 ซึ่ง 9 + 5 = 7 + 7 จึงไม่มีการทดค่าที่ต่างกันไปหลักสิบ

■

ตัวอย่างที่ 1.1.38 จงหาค่าของ

$$
\begin{array}{ccccc l}
9 & 8 & 5 & 7 & 5 & + \\
7 & 9 & 7 & 4 & 2 & - \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & - \\
\underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$
\begin{array}{ll|cccccc}
a & : & & 9 & 8 & 5 & 7 & 5 \\
b & : & & \dot{7} & 9 & 7 & 4 & 2 \; + \\
c & : & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \; - \\
d & : & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \; - \\
\hline
e & : & 1 & 0 & 9 & 1 & \dot{8} & \dot{3}
\end{array}
$$

ในการคำนวณค่า ตั้งแต่หลักหน่วยถึงหลักพัน คล้ายกับตัวอย่างที่ 1.1.38 กล่าวคือ ถ้ามีการใส่จุดจะใส่จุดที่ชุดที่ผลบวกที่มากกว่า กรณีหลักหมื่นพบว่าหลักหมื่นของ a + b = 16 ขณะที่หลักหมื่นของ c + d + e คือ 1 + 5 + 0 = 6 จะเห็นว่า 9 + 7 มากกว่า 1 + 5 + 0 อยู่ 10 จึงเขียนจุดที่ 7 ซึ่งเป็นตัวบวกของ 9 + 7 แล้วจึงทดจุดลงมาเป็น 1 ในหลักแสนของผลลัพธ์

■

ในกรณีที่ การบวก – ลบ คละกัน มีผลลัพธ์เป็นจำนวนลบ จะต้องแยกตัวลบทั้งหมดมารวมเป็นพวกเดียวกัน และนำตัวตั้ง ตัวบวกและค่าสัมบูรณ์ของผลลัพธ์ มาบวกกันให้มีค่าเท่ากับผลรวมของตัวเลข (ไม่คิดเครื่องหมายหน้าผลลัพธ์) ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.39 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{ccccl} 3 & 8 & 4 & 7 & - \\ 6 & 7 & 5 & 3 & + \\ 1 & 3 & 5 & 9 & \\ \hline \hline \end{array}$$

แนวคิดกรณีนี้ ผลลัพธ์เป็นจำนวนลบ ถ้าให้ a = 3847, b = 6753, c = 1359 และ d เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง

$a - b + c = -d$ จะได้ $a + c + d = b$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$\begin{array}{l|ccccl} a: & 3 & 8 & 4 & 7 & - \\ b: & 6 & 7 & 5 & 3 & + \\ c: & 1 & 3 & 5 & 9 & \\ \cline{2-5} d: & & & & & \end{array}$$

ในการคำนวณค่า $a - b + c$ พบว่า $a - b + c < 0$ ดังนั้นคำตอบเป็นจำนวนเต็มลบให้เป็น $-d$ จึงนำ d ไปรวมกับ a และ c ไว้เป็นพวกหนึ่ง แยก b ไว้อีกพวกหนึ่งคำนวณค่า d ที่ทำให้ $a + c + d = b$
ดังนั้น

$$\begin{array}{l|ccccl} a: & 3 & 8 & 4 & 7 & - \\ b: & 6 & 7 & 5 & 3 & + \\ c: & 1 & 3 & 5 & 9 & \\ \cline{2-5} d: & 1 & \dot{5} & \dot{4} & \ddot{7} & \\ \cline{2-5} \end{array}$$

คำตอบ คือ $-d = -1\,5\,4\,7$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.40 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{ccccl} 3 & 2 & 5 & 1 & - \\ 4 & 8 & 2 & 9 & + \\ 5 & 6 & 7 & 8 & - \\ 7 & 8 & 9 & 0 & \\ \hline \hline \end{array}$$

แนวคิด

เขียนใหม่เป็น

$$\begin{array}{lccccl}
a: & 3 & 2 & 5 & 1 & - \\
b: & 4 & 8 & 2 & 9 & + \\
c: & 5 & 6 & 7 & 8 & - \\
d: & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{0} & \\
e: & 3 & 7 & \dot{9} & 0 & \\
\hline\hline
\end{array}$$

คำตอบคือ $-e = -3\ 7\ 9\ 0$

■

สนุกกับตัวเลข (2)	
ห้าตัวเหมือน	**หกตัวเหมือน**
271 × 41 = 11111	3367 × 33 = 111111
271 × 82 = 22222	3367 × 66 = 222222
271 × 123 = 33333	3367 × 99 = 333333
271 × 164 = 44444	3367 × 132 = 444444
271 × 205 = 55555	3367 × 165 = 555555
271 × 246 = 66666	3367 × 198 = 666666
271 × 287 = 77777	3367 × 231 = 777777
271 × 328 = 88888	3367 × 264 = 888888
271 × 369 = 99999	3367 × 297 = 999999

เรื่องที่ 8 การลบที่ผลลบเป็นจำนวนเครื่องหมายคละ

ในการลบอาจจะเขียน–(ขีดบน) เหนือตัวเลขในหลักที่เป็นจำนวนลบก็ได้ ซึ่งผลลบที่จะได้เป็นจำนวนเครื่องหมายคละ หลังจากนั้นแปลงเป็นจำนวนในระบบฐานสิบก็จะได้คำตอบตามต้องการ ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.41 จงหาค่าของ 4328316 – 2876439

แนวคิด ขั้นที่ 1 เขียนการลบเป็นสองแถวโดยให้แถวแรกเป็นตัวตั้ง และแถวที่ 2 เป็นตัวลบ และสำรวจดูว่าแต่ละหลักที่ลบกันถ้าตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ก็ทำการลบกันแบบธรรมดา ถ้าตัวลบมากกว่าตัวตั้ง ใส่ค่าที่ตัวลบมากกว่าในช่องผลลัพธ์แล้วเขียนขีดบน – ดังนี้

$$
\begin{array}{ccccccc}
4 & 3 & 2 & 8 & 3 & 1 & 6 \\
\underline{2} & \underline{8} & \underline{7} & \underline{6} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{9} \\
2 & \bar{5} & \bar{5} & 2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\
\hline\hline
\end{array} -
$$

ขั้นที่ 2 แปลงตัวเลขในนิขิลัมสูตรให้เป็นตัวเลขระบบฐานสิบ จะได้

$$
\begin{array}{ccccccc}
2 & \bar{5} & \bar{5} & 2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 7
\end{array}
$$

ซึ่ง 1 4 5 1 8 7 7 เป็นผลลัพธ์

นั่นคือ 4328316 – 2876439 = 1451877

■

ตัวอย่างที่ 1.1.42 จงหาค่าของ 673425 – 387619

แนวคิด

$$
\begin{array}{cccccc}
6 & 7 & 3 & 4 & 2 & 5 \\
\underline{3} & \underline{8} & \underline{7} & \underline{6} & \underline{1} & \underline{9} \\
3 & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} & 1 & \bar{4} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\underline{2} & \underline{8} & \underline{5} & \underline{8} & \underline{0} & \underline{6}
\end{array} -
$$

ดังนั้น 673425 – 387619 = 285806

■

ตัวอย่างที่ 1.1.43 จงหาค่าของ 341659 – 459283

แนวคิด

วิธีที่ 1

$$\begin{array}{cccccc}
3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 9\,_{-} \\
\underline{4} & \underline{5} & \underline{9} & \underline{2} & \underline{8} & \underline{3} \\
\bar{1} & \bar{1} & \bar{8} & 4 & \bar{3} & 6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\bar{1} & \bar{1} & \bar{7} & \bar{6} & \bar{2} & \bar{4} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
-\underline{1} & \underline{1} & \underline{7} & \underline{6} & \underline{2} & \underline{4}
\end{array}$$

ดังนั้น 341659 – 45983 = – 117624

วิธีที่ 2

$$\begin{array}{cccccc}
3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 9\,_{-} \\
\underline{4} & \underline{5} & \underline{9} & \underline{2} & \underline{8} & \underline{3}
\end{array}$$

$$\underbrace{\bar{1}\quad \bar{1}\quad \bar{8}\quad 4\quad \bar{3}\quad 6}$$

$$\begin{array}{cccccc}
-(1 & 1 & 8 & \bar{4} & 3 & \bar{6}) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
-\underline{1} & \underline{1} & \underline{7} & \underline{6} & \underline{2} & \underline{4}
\end{array}$$

ดังนั้น 341609 – 45983 = –117624

■

ทศนิยม ทศนิยมในเวทคณิตกับทศนิยมในระบบตัวเลขฐานสิบคล้ายกัน กล่าวคือ ตัวเลขหลังจุดทศนิยมมีจำนวนเท่ากัน และตำแหน่งของจุดทศนิยมอยู่ที่เดียวกัน เมื่อเปลี่ยนจำนวนที่มีจุดทศนิยมจากระบบตัวเลขฐาน 10 เป็นตัวเลขในเวทคณิต

ตัวอย่างที่ 1.1.44 จงแปลง 120 . 981 เป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตร

แนวคิด

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 0 & \bullet & 9 & 8 & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 2 & 1 & \bullet & \bar{0} & \bar{2} & 1
\end{array}$$

ดังนั้น 120 • 981 = 1 2 1 • $\bar{0}$ $\bar{2}$ 1

■

ตัวอย่างที่ 1.1.45 จงแปลง $1 \bullet 7\ \bar{3}\ 2\ \bar{8}$ เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ

แนวคิด

$$\begin{array}{ccccc} 1 \bullet & 7 & \bar{3} & 2 & \bar{8} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 \bullet & 6 & 7 & 1 & 2 \end{array}$$

ดังนั้น $1 \bullet 7\ \bar{3}\ 2\ \bar{8} = 1 \bullet 6712$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.46 จงแปลง $\bar{3} \bullet 2\ \bar{1}\ 4\ \bar{6}$ เป็นตัวเลขในระบบฐานสิบ

แนวคิด $\bar{3} \bullet 2\ \bar{1}\ 4\ \bar{6} = -(-(\bar{3} \bullet 2\ \bar{1}\ 4\ \bar{6}))$

$$\begin{array}{cccccc} = -(& 3 \bullet & \bar{2} & 1 & \bar{4} & 6) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ = & -2 \bullet & 8 & 0 & 6 & 6 \end{array}$$

ดังนั้น $\bar{3} \bullet 2\ \bar{1}\ 4\ \bar{6} = -2 \bullet 8\ 0\ 6\ 6$

■

ตัวอย่างที่ 1.1.47 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{ll} 4\ 8\ 3\ 1\ 0 & - \\ 3\ 7\ 4\ 6\ 1 & + \\ 5\ 2\ 1\ 4\ 8 & - \\ \underline{1\ 2\ 3\ 4\ 5} & \\ \hline\hline \end{array}$$

แนวคิด คิดบวก – ลบ คละกันในแต่ละหลักผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น จำนวนเครื่องหมายคละ แล้วแปลงเป็นจำนวนในระบบฐานสิบดังนี้

$$\begin{array}{ll} 4\ 8\ 3\ 1\ 0 & - \\ 3\ 7\ 4\ 6\ 1 & + \\ 5\ 2\ 1\ 4\ 8 & - \\ \underline{1\ 2\ 3\ 4\ 5} & \\ 5\ 1\ \bar{3}\ \bar{5}\ 2 & \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & \\ \underline{5\ 0\ 6\ 5\ 2} & \end{array}$$

ดังนั้น ผลลบ คือ 5 0 6 5 2

■

ตัวอย่างที่ 1.1.48 จงหาค่าของ

$$\begin{array}{r}
3\;7\;4\;6\;1\;\; - \\
8\;8\;3\;9\;9\;\; - \\
1\;2\;3\;4\;5\;\; + \\
\underline{5\;1\;3\;4\;6}\;\;\;\; \\
\underline{\underline{\qquad\qquad}}\;\;\;\;
\end{array}$$

แนวคิด

$$\begin{array}{ccccc}
3 & 7 & 4 & 6 & 1\,- \\
8 & 8 & 3 & 9 & 9\,- \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5\,+ \\
\underline{5} & \underline{1} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{6} \\
\bar{1} & \bar{2} & 1 & \bar{3} & \bar{7} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\bar{1} & \bar{1} & \bar{9} & \bar{3} & \bar{7} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
-\underline{1} & \underline{1} & \underline{9} & \underline{3} & \underline{7}
\end{array}$$

ดังนั้น ผลลบคือ $-1\,1\,9\,3\,7$

■

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาผลลบต่อไปนี้

(1) 100 – 36 = ____________ (2) 100 – 47 = ____________

(3) 100 – 89 = ____________ (4) 1000 – 327 = ____________

(5) 1000 – 638 = ____________ (6) 1000 – 95 = ____________

(7) 10000 – 6759 = ____________ (8) 10000 – 328 = ____________

(9) 10000 – 2149 = ____________ (10) 100000 – 12345 = ____________

(11) 100000 – 39393 = ____________ (12) 100000 – 567 = ____________

2. จงหาผลลบต่อไปนี้ โดยใช้เฉพาะจำนวนทบเก้า ทบสิบ ′ และการบวก

(1) $\begin{array}{r} 36 \\ -\ 28 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(2) $\begin{array}{r} 324 \\ -\ 118 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(3) $\begin{array}{r} 437 \\ -\ 269 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(4) $\begin{array}{r} 506 \\ -\ 107 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(5) $\begin{array}{r} 728 \\ -\ 89 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(6) $\begin{array}{r} 8742 \\ -\ 3796 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(7) $\begin{array}{r} 49062 \\ -\ 8648 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(8) $\begin{array}{r} 87211 \\ -\ 3088 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(9) $\begin{array}{r} 98358 \\ -\ 79467 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

(10) $\begin{array}{r} 864237 \\ -\ 270038 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

3. จงหาค่าต่อไปนี้ โดยวิธีที่แตกต่างกัน 3 วิธี

(1)
$$\begin{array}{rl} 479 & \\ & - \\ 298 & \\ & + \\ \underline{345} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rl} 666 & \\ & + \\ 123 & \\ & - \\ \underline{548} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{rl} 999 & \\ & - \\ 674 & \\ & - \\ \underline{188} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{rl} 4518 & \\ & + \\ 1238 & \\ & - \\ 942 & \\ & + \\ \underline{3126} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(5)
$$\begin{array}{rl} 321 & \\ & - \\ 4729 & \\ & + \\ 6587 & \\ & - \\ \underline{1234} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(6)
$$\begin{array}{rl} 1487 & \\ & - \\ 2367 & \\ & - \\ 8269 & \\ & - \\ \underline{7284} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(7)
$$\begin{array}{rl} 414 & \\ & - \\ 582 & \\ & + \\ 679 & \\ & - \\ \underline{616} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(8)
$$\begin{array}{rl} 768 & \\ & - \\ 179 & \\ & - \\ 546 & \\ & + \\ \underline{528} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(9)
$$\begin{array}{rl} 448 & \\ & + \\ 623 & \\ & - \\ 812 & \\ & - \\ \underline{174} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(10)
$$\begin{array}{rl} 274 & \\ & + \\ 585 & \\ & - \\ 416 & \\ & - \\ \underline{731} & \\ \hline\hline \end{array}$$

(11)		(12)	
4 7 1 8 4		5 9 4 8 9	
	-		-
6 5 3 2 5		6 6 6 6 6	
	-		-
7 8 6 2 9		9 8 7 6 5	
	-		+
3 2 4 4 4		3 4 5 6 7	
	+		-
1 1 1 2 1		5 4 3 2 5	
=========		=========	

4. จงหาค่าของ $31456 - 47474 + 38641 - 27264 + 38886 =$ ______________

ตอนที่ 1.2 ทักษะการคำนวณ 2 (การคูณ)

แนวคิด 1. ฐานในระบบทศนิยม หมายถึง จำนวนในรูป 10^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และเรียกจำนวนเหล่านั้นว่าฐาน 10^n
2. จำนวนที่อยู่ใกล้ 10^n ระยะห่างระหว่างจำนวนกับฐาน 10^n ที่คิดทิศทาง เรียกว่า ค่าเบี่ยงฐานของจำนวนนั้น
3. ในการหาผลคูณของจำนวนที่อยู่ใกล้ฐานเดียวกัน เมื่อทำการคูณโดยใช้ค่าเบี่ยงฐานจะสะดวกกว่า
4. วิธีการคูณจำนวนมีได้หลากหลายวิธีทั้งการคูณโดยการจัดตำแหน่งผลคูณ การคูณโดยใช้ตาราง หรือการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้ ซึ่งแต่ละวิธีจะมีกระบวนการที่แตกต่างกัน

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 2 จบแล้วนักเรียนสามารถ

1. มีกระบวนการคูณได้หลากหลายวิธี
2. ออกแบบการคูณจำนวนตามแนวคิดสร้างสรรค์ของตนเอง

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายเนื้อหา กระบวนการวิธีคิดคำนวณการคูณโดยใช้ค่าเบี่ยงฐานการคูณโดยการจัดตำแหน่งผลคูณ การคูณโดยใช้ตารางการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้
2. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่างและแบบฝึกหัด
3. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

การคูณโดยใช้ค่าเบี่ยงฐาน

เรื่องที่ 1 ค่าเบี่ยงฐาน

ตัวเลขในเวทคณิต เช่นเดียวกับตัวเลขระบบฐานสิบ กล่าวคืออิงฐานของระบบฐานสิบ และขณะเดียวกันจะระบุค่าเบี่ยงฐานควบคู่ไปด้วยในกรณีต้องการคูณหรือหาร โดยตัวเลขในเวทคณิตจะยึดฐาน 10, 100, 1000, ..., 10^n และระบุค่าเบี่ยงฐานของจำนวนเหล่านั้น ซึ่งค่าเบี่ยงฐานมีทั้งค่าบวก ค่าลบ และศูนย์ จะอธิบาย ค่าเบี่ยงฐานโดยใช้ตัวอย่างประกอบดังนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.1

103 มีค่ามากกว่า 100 อยู่ 3 กล่าวว่า 103 มีค่าเบี่ยงฐาน จาก 100 เป็น + 03

94 มีค่าน้อยกว่า 100 อยู่ 6 กล่าวว่า 94 มีค่าเบี่ยงฐาน จาก 100 เป็น – 06

28 มีค่ามากกว่า 10 อยู่ 18 กล่าวว่า 28 มีค่าเบี่ยงฐาน จาก 10 เป็น + 18

22 มีค่าน้อยกว่า 100 อยู่ 78 กล่าวว่า 22 มีค่าเบี่ยงฐาน จาก 100 เป็น –78

■

ในการเขียนตัวเลขพร้อมระบบฐานในเวทคณิตนั้น จำนวนตัวเลขโดดของค่าเบี่ยงฐานจะต้องเท่ากับจำนวน 0 ที่ปรากฏในฐานนั้น ๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.2

103 เขียนในระบบฐาน 100 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น 103 + 03

94 เขียนในระบบฐาน 100 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น 94 – 06

115 เขียนในระบบฐาน 100 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น 115 + 15

1012 เขียนในระบบฐาน1000 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น 1012 + 012

971 เขียนในระบบฐาน 1000 พร้อมค่าเบี่ยงฐานเป็น 971 – 029

■

หมายเหตุ ในการกำหนดฐานเพื่อหาค่าเบี่ยงฐานสำหรับจำนวนใด ๆ นั้นจะไม่เลือกฐานที่ทำให้ขนาดของค่าเบี่ยงฐานมีจำนวนมากเกินไป เช่น 12 จะเลือกฐานเป็น 10 มีค่าเบี่ยงฐานเป็น +2 จะไม่เลือกฐาน 100 เพราะมีค่าเบี่ยงฐานเป็น –88 ซึ่งมีขนาดเป็น 88 ซึ่งมากเกินไป นอกจากนี้สำหรับบางจำนวนเช่น 41 ถ้าเลือกฐาน 10 จะได้ค่าเบี่ยงฐานเป็น +31 ในขณะที่เลือกฐาน 100 จะได้ค่าเบี่ยงฐานเป็น –59 ซึ่งทั้ง +31 และ -59 มีขนาดเป็น 31 และ 59 ซึ่งมากเกินไป ในทางปฏิบัติอาจจะเลือกฐานย่อยสำหรับช่วยในการคำนวณ ซึ่งฐานย่อยได้แก่พหุคูณของฐาน 10, 100, 1000, ...เช่น 20, 30, ..., 200, 300,... สำหรับฐานย่อยจะกล่าวถึงในบทต่อไป

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงระบุฐานของจำนวนต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอกค่าเบี่ยงฐาน

   (1.1) 102 (1.2) 12 (1.3) 97 (1.4) 19 (1.5) 112

   (1.6) 975 (1.7) 10008 (1.8) 89 (1.9) 75 (1.10) 29

2. จงตรวจสอบว่าการระบุฐานและการเขียนจำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐานของจำนวนต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่ สำหรับการระบุที่ไม่ถูกต้องจงแก้ไข

จำนวน	ฐาน	จำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐาน	แก้ไข
111	100	111 + 11	
6	10	6 – 4	
97	100	100 – 3	
107	100	100 + 3	
992	1000	992 + 8	
9972	1000	1000 – 22	
10025	10000	10025 – 25	

3. จากฐานและค่าเบี่ยงฐานที่กำหนดมาให้ จงหาจำนวนเหล่านั้นและ เขียนจำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐาน

	ฐาน	ค่าเบี่ยงฐาน	จำนวน	จำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐาน
(3.1)	10	+ 3	13	13 + 3
(3.2)	100	– 03		
(3.3)	100	– 07		
(3.4)	1000	+ 014		
(3.5)	1000	– 019		
(3.6)	10000	– 0031		
(3.7)	1000	+ 374		

สนุกกับตัวเลข (3)

ผลคูณที่ได้ตัวเลขเรียงจากน้อยไปมาก

1×1	=	1
$2^2 \times 3$	=	12
3×41	=	123
2×617	=	1234
$3 \times 5 \times 823$	=	12345
$2^6 \times 3 \times 643$	=	123456
127×9721	=	1234567
$2 \times 3^2 \times 47 \times 14953$	=	12345678
$3^2 \times 13717421$	=	123456789
$2 \times 3^2 \times 5 \times 13717421$	=	1234567890

เรื่องที่ 2 การคูณโดยใช้ค่าเบี่ยงฐาน

วิธีการคูณทั่ว ๆ ไปนั้นใช้ได้กับทุกกรณีของการคูณซึ่งไม่ยุ่งยากซับซ้อนจนเกินไป อย่างไรก็ตาม วิธีเฉพาะในเวทคณิตนั้นสะดวกและง่ายกว่า กล่าวคือ จะใช้การคูณเฉพาะหลักทางด้านขวาของสองจำนวนที่คูณกัน ส่วนหลักทางซ้ายถัดมาจะใช้วิธีการบวก นอกจากนี้การคูณหลักทางขวานั้นจะอิงนิขิลัมสูตร วิธีการคูณจะจำแนกตามชนิดดังตัวอย่างต่อไปนี้

ชนิดที่ 1 ผลคูณค่าเบี่ยงฐานมีจำนวนเลขโดดไม่เกินจำนวนตัวเลข 0 ของฐาน

ตัวอย่างที่ 1.2.3 จงหาผลคูณของ 13×11

แนวคิด ขั้นที่ 1 เขียน 13 และ 11 แบบจำนวนพร้อมค่าเบี่ยงฐาน 10 และตั้งคูณ

$$\begin{array}{l} 13 + 3 \\ \underline{11 + 1} \end{array} \times$$

หมายเหตุ สำหรับฐาน 10 มี 0 เพียงตัวเดียว ดังนั้นค่าเบี่ยงฐานจึงเขียนเลขโดดตัวเดียว

ขั้นที่ 2 แบ่งผลคูณที่จะได้ออกเป็นสองส่วน โดยใช้ / เป็นตัวแบ่ง ซึ่งจะแยกผลคูณจากค่าเบี่ยงฐานไว้ต่างหากดังนี้

$$\begin{array}{c} 13 + 3 \\ \underline{11 + 1} \\ \underline{\underline{/}} \end{array}$$

ขั้นที่ 3 หาผลคูณของค่าเบี่ยงฐานแล้วใส่ผลลัพธ์ไว้ทางขวาของ / ที่จะได้เป็น 3 เพราะ $3 \times 1 = 3$

$$\begin{array}{cc} 13 + 3 & \\ & \times \\ \underline{11 + 1} & \\ \underline{\underline{/\ 3}} & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 ทางด้านซ้ายของ / หาผลลัพธ์โดยหาผลบวกของตัวตั้งกับค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณ จะได้ 13 + 1 = 14 (หรือหาผลบวกของตัวคูณกับค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้ง จะได้ 11 + 3 = 14 ซึ่งจะเท่ากับ 13 + 1)

การหาผลบวกแบบนี้เรียกว่า **การหาผลบวกทแยง** เพราะ 13 + 1 หรือ 11 + 3 เป็นการบวกแนวทแยง

นั่นคือ

$$\begin{array}{cc} 13 + 3 & \\ & \times \\ \underline{11 + 1} & \\ \underline{\underline{14\ /\ 3}} & \end{array}$$

ขั้นที่ 5 เอาขีด / ออกจะได้ 143 เป็นผลลัพธ์

นั่นคือ $13 \times 11 = 143$ ■

ตัวอย่างที่ 1.2.4 ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์จากวิธีคิดตามตัวอย่างที่ 1.2.3

$$\begin{array}{cc} 14 + 4 & \\ & \times \\ \underline{12 + 2} & \\ \underline{\underline{16\ /\ 8}} & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 11 + 1 & \\ & \times \\ \underline{15 + 5} & \\ \underline{\underline{16\ /\ 5}} & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 19 + 9 & \\ & \times \\ \underline{11 + 1} & \\ \underline{\underline{20\ /\ 9}} & \end{array}$$

จะได้ $14 \times 12 = 168$, $11 \times 15 = 165$, $19 \times 11 = 209$ ■

$$\begin{array}{cc} 17 + 7 & \\ & \times \\ \underline{11 + 1} & \\ \underline{\underline{18\ /\ 7}} & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 12 + 2 & \\ & \times \\ \underline{13 + 3} & \\ \underline{\underline{15\ /\ 6}} & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 13 + 3 & \\ & \times \\ \underline{13 + 3} & \\ \underline{\underline{16\ /\ 9}} & \end{array}$$

จะได้ $17 \times 11 = 187$, $12 \times 13 = 156$ และ $13 \times 13 = 169$ ■

ชนิดที่ 2 ต่อไปจะกล่าวถึงกรณีที่ผลคูณค่าเบี่ยงฐานเป็นเลขสองหลัก

ตัวอย่างต่อไปจะเป็นการคูณตัวเลขที่ฐานเป็น 100

ตัวอย่างที่ 1.2.5 จงหาค่าของ 106×105

แนวคิด

$$\begin{array}{r} 106 + 06 \\ \underline{105 + 05} \\ \underline{\underline{111 \,/\, 30}} \end{array} \times$$

ได้จาก 106 + 05 หรือ 105 + 06 (ส่วน 111) ได้จาก 06×05 (ส่วน 30)

จะได้ $106 \times 105 = 11130$ ■

ตัวอย่างที่ 1.2.6 จงหาค่าของ

(1) 111×112

(2) 113×114

(3) 117×118

แนวคิด (1)

$$\begin{array}{r} 111 + 11 \\ \underline{112 + 12} \\ \underline{\underline{123 \,/\, {}_{1}32}} \end{array} \times \quad = 123 + 1/32 = 12432$$

(เนื่องจาก $11 \times 12 = 132$ แต่ค่าเบี่ยงฐานเป็นเลขสองหลักจึงเขียน 132 เป็น ${}_{1}32$ เพื่อแสดงว่า 1 เป็นตัวทด

นั่นคือ $111 \times 112 = 12432$

หมายเหตุ ในการหาค่า 11×12 ทำได้โดย

$$\begin{array}{r} 11 + 1 \\ \underline{12 + 2} \\ \underline{\underline{13 \,/\, 2}} \end{array} = 132$$

ในการหา 111×112 อาจเขียนต่อเนื่องเป็นดังนี้

ฐาน 100 ฐาน 10

$$\begin{array}{l} 111 \;+\; 11 \;+\; 1 \quad \times \\ \underline{112 \;+\; 12 \;+\; 2} \\ \underline{\underline{123 \;/\; {}_{1}3 \;/\; 2}} \;=\; 123/{}_{1}32 \;=\; 123 + 1/32 \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 12432 \end{array}$$

(2) ฐาน 100 ฐาน 10

$$\begin{array}{l} 113 \;+\; 13 \;+\; 3 \quad \times \\ \underline{114 \;+\; 14 \;+\; 4} \\ \underline{\underline{127 \;/\; {}_{1}7 \;/\; {}_{1}2}} \;=\; 127/{}_{1}7 \;+\; 1/2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 127/{}_{1}8/2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 127 + 1/82 \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 12882 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{l} 117 \;+\; 17 \;+\; 7 \quad \times \\ \underline{118 \;+\; 18 \;+\; 8} \\ \underline{\underline{135 \;/\; {}_{2}5 \;/\; {}_{5}6}} \;=\; 135 + 2/5 + 5/6 \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 137/{}_{1}0/6 \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 137 + 1/0/6 \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 13806 \end{array}$$

■

หมายเหตุ ในการหาผลคูณแบบต่อเนื่อง ดังตัวอย่างที่ 1.2.6 ตัวเลข ทางด้านขวาของ/นับตั้งแต่ขีด/แรกจากขวาจะเป็นตัวเลขโดด ถ้าได้ผลลัพธ์เป็น เลขโดดมากกว่าหนึ่งตัวจะคงตัวเลขทางขวามือไว้ ส่วนตัวเลขทางซ้ายจะเป็น ตัวทด นอกจากนี้ในการคำนวณหาผลคูณจากโจทย์ผลลัพธ์ในช่องขวาสุดเท่านั้นจะได้จากผลคูณ ส่วนผลลัพธ์ในช่องถัดไปทางซ้ายจะได้จากผลบวกตามวิธีที่ได้กล่าวมาแล้ว

ชนิดที่ 3 กรณีที่ตัวตั้งและตัวคูณมีจำนวนหลักต่างกัน การเลือกฐานจะเลือกฐานของตัวเลขที่มีจำนวนหลักน้อยกว่า

ตัวอย่างที่ 1.2.7 จงหาค่าของ 103×2312

แนวคิด ใช้ฐาน 100

จะได้

$$\begin{array}{l} 103 \quad + \quad 03 \\ \underline{2312 \quad + 2212} \\ \underline{\underline{2315 \; / \; {}_{66}36}} \end{array} \times \qquad = 2315 + 66/36 = 238136$$

นั่นคือ $103 \times 2312 = 238136$ ■

หมายเหตุ สำหรับฐาน 100 จะเห็นว่า 2312 มีค่าเบี่ยงฐานเป็น +2212 จึงเขียน 2312 + 2212 ในส่วนที่เป็นตัวคูณ

ในผลคูณทางขวาของ / เนื่องจาก $3 \times 2212 = 6636$ แต่ฐานเป็น 100 จึงต้องการเลขโดดในส่วนนี้เพียง 2 ตัวคือ 36 ส่วน 66 นั้นเป็นตัวทดในหลัก 100 และหลัก 1000

สำหรับผลบวกทแยง คือ 103 + 2212 หรือ 2312 + 3

ตัวอย่างที่ 1.2.8 จงหาค่าของ 103×13

แนวคิด ใช้ฐาน 10

จะได้

$$\begin{array}{l} 103 \quad + \quad 93 \\ \underline{\;\; 13 \quad + \quad 3} \\ \underline{\underline{106 \; / \; {}_{27}9}} \end{array} \times \qquad = 106 + 27/9 = 1339$$

นั่นคือ $103 \times 13 = 1339$ ■

ชนิดที่ 4 จากตัวอย่างการคูณทั้ง 3 ชนิดนั้นจะมีอย่างน้อยหนึ่งจำนวน ซึ่งอาจจะเป็นตัวตั้ง หรือตัวคูณที่ค่าเบี่ยงฐานมีค่าเป็นบวกเล็กน้อยไม่เกินค่าของฐาน การคูณชนิดที่ 4 จะเป็นการคูณซึ่งตัวตั้งและตัวคูณมีค่าเบี่ยงฐานมีค่าเป็นลบ

ตัวอย่างที่ 1.2.9 จงหาค่าของ

(1) 9×6 (2) 6×5

แนวคิด (1)

$$\begin{array}{ccc} 9 & - & 1 \\ \underline{6} & \underline{-} & \underline{4} \\ \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{/}} & \underline{\underline{4}} \end{array} \times$$

ได้จาก $(-1) \times (-4) = 4$

ได้จาก $9 + (-4) = 9 - 4 = 5$

หรือ $6 + (-1) = 6 - 1 = 5$

ดังนั้น $9 \times 6 = 54$

(2)

$$\begin{array}{ccc} 6 & - & 4 \\ \underline{5} & \underline{-} & \underline{5} \\ \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{/}} & \underline{\underline{{}_{2}0}} \end{array} \times \qquad = 1 + 2/0 = 30$$

ได้จาก $(-4) \times (-5) = 20$

และต้องทด 2

ได้จาก $6 - 5 = 1$ (หรือ $5 - 4$)

ดังนั้น $6 \times 5 = 30$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.10 ต่อไปนี้เป็นการหาผลคูณของจำนวนสองจำนวนที่มีค่าเบี่ยงฐานเป็นลบ

$$\begin{array}{ccc} 8 \times 6 & \qquad 91 \times 93 & \qquad 89 \times 97 \\ 8 - 2 & \qquad 91 - 09 & \qquad 89 - 11 \\ \underline{6 - 4} \times & \qquad \underline{93 - 07} \times & \qquad \underline{97 - 03} \times \\ \underline{\underline{4 \,/\, 8}} & \qquad \underline{\underline{84 \,/\, 63}} & \qquad \underline{\underline{86 \,/\, 33}} \end{array}$$

ดังนั้น $8 \times 6 = 48$ ดังนั้น $91 \times 94 = 8463$ ดังนั้น $89 \times 97 = 8633$

64×98	79×97	988×998
$\begin{array}{l} 64 - 36 \\ \underline{98 - 02} \\ \underline{62 \;/\; 72} \end{array} \times$	$\begin{array}{l} 79 - 21 \\ \underline{97 - 03} \\ \underline{76 \;/\; 63} \end{array} \times$	$\begin{array}{l} 988 - 012 \\ \underline{988 - 002} \\ \underline{986 \;/\; 024} \end{array} \times$
ดังนั้น $64 \times 96 = 6272$	ดังนั้น $79 \times 97 = 7663$	ดังนั้น $988 \times 988 = 986024$

998×995	99976×99998
$\begin{array}{l} 998 - 002 \\ \underline{995 - 005} \\ \underline{993 \;/\; 010} \end{array} \times$	$\begin{array}{l} 99976 - 00024 \\ \underline{99998 - 00002} \\ \underline{99974 \;/\; 00048} \end{array} \times$
ดังนั้น $998 \times 995 = 993010$	ดังนั้น $99976 \times 99998 = 9997400048$

■

ชนิดที่ 5 กรณีสองจำนวนที่คูณกันจำนวนหนึ่งมีค่าเบี่ยงฐานเป็นบวก และอีกจำนวนหนึ่งมีค่าเบี่ยงฐานเป็นลบ

ตัวอย่างที่ 1.2.11 จงหาค่าของ 13×9

แนวคิด

$$\begin{array}{l} 13 + 3 \\ \underline{\;9 - 1\;} \\ \underline{\underline{12 \;/\; \overline{3}}} \end{array} \times \qquad = 12\overline{3} = 117$$

ได้จาก $3 \times (-1) = -3 = \overline{3}$

ได้จาก $13 - 1 = 12$ (หรือ $9 + 3$)

ดังนั้น $13 \times 9 = 117$

■

แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงหาผลคูณต่อไปนี้

(1.1) 12×12	(1.2) 14×13	(1.3) 17×17
(1.4) 108×103	(1.5) 102×103	(1.6) 112×108
(1.7) 113×109	(1.8) 112×111	(1.9) 1002×1007
(1.10) 1007×1012	(1.11) 1110×1004	(1.12) 1003×1002

2. จงหาผลคูณต่อไปนี้

(2.1) 89×99	(2.2) 87×88	(2.3) 91×93
(2.4) 989×995	(2.5) 999×988	(2.6) 998×992
(2.7) 9998×9995	(2.8) 9989×9980	(2.9) 9988×9996
(2.10) 98×102	(2.11) 108×98	(2.12) 1004×995
(2.13) 1007×988	(2.14) 1110×989	(2.15) 1003×998

สนุกกับตัวเลข (4)

ผลคูณที่ได้ตัวเลขเรียงกลับ

$1 \times$	1	=	1
$3 \times$	7	=	21
$3 \times$	107	=	321
$29 \times$	149	=	4321
$3 \times$	19×953	=	54321
$3 \times$	218107	=	654321
$19 \times$	402859	=	7654321
$3^2 \times$	9739369	=	87654321
$3^2 \times$	109739369	=	987654321

การคูณโดยการจัดตำแหน่งผลคูณ

เรื่องที่ 3 การคูณที่ตัวตั้งและตัวคูณประกอบด้วยเลขโดดสองตัว

การคูณโดยการจัดตำแหน่งผลคูณ สำหรับ a และ b ซึ่งเป็นเลขโดดสองตัวจะมีค่าเป็นจำนวนเต็ม ตั้งแต่ 0 ถึง 9 ผลคูณ $a \times b$ จะมีค่าเท่ากับ $c \times 10 + d$ สำหรับบางเลขโดด c และ d ถ้าเขียน $c \times 10 + d$ เป็นตัวเลขที่มีค่าประจำตำแหน่ง จะได้ $c \times 10 + d = cd$ นั่นคือ $a \times b = cd$ จึงเห็นได้ว่า ผลคูณของเลขโดด a และ b มีค่าเป็นจำนวนที่ประกอบด้วยตัวเลขที่ไม่เกินสองหลัก

เช่น $9 \times 9 = 81$ (ค่ามากที่สุดของผลคูณเลขโดดสองตัว)

$6 \times 5 = 30$

$1 \times 7 = 7$ หรือ 07 เป็นต้น

ดังนั้น ถ้า a และ b เป็นเลขโดดในหลักหน่วย จะมีผังการคูณ ดังนี้

สิบ	หน่วย
	a
	b
□	□

×

□ สองช่อง คือ ตำแหน่งที่ใช้เขียนผลคูณของ $a \times b$ ซึ่งจะอยู่ในตำแหน่งหลักหน่วยและตำแหน่งหลักสิบ (กรณีผลคูณที่ได้เป็นเลขโดดตัวเดียว □ ในหลักสิบ หมายถึง 0)

ถ้า a เป็นเลขโดดในหลักหน่วย และ b เป็นเลขโดดในหลักสิบ และเขียน a และ b ในรูปค่าประจำตำแหน่ง จะได้

a มีค่าเท่ากับ a และ b มีค่าเท่ากับ $b \times 10$

ดังนั้น ผลคูณของจำนวนทั้งสองจะอยู่ในรูป

$a \times (b \times 10) = cd \times 10$ ($a \times b = cd$)

$= cdo$ (cdo เขียนในรูปค่าประจำตำแหน่ง)

แสดงว่า ถ้า a เป็นเลขโดดในหลักหน่วย และ b เป็นเลขโดดใน หลักสิบ จะมีผังการคูณ ดังนี้

ร้อย	สิบ	หน่วย
		a
	b	
□	□	

×

□ สองช่อง คือ ตำแหน่งที่ใช้เขียนผลคูณของ $a \times (b \times 10)$ ซึ่งจะอยู่ในตำแหน่งหลักสิบ และตำแหน่งหลักร้อย

ทำนองเดียวกัน ถ้า a เป็นเลขโดดในหลักสิบ และ b เป็นเลขโดดในหลักหน่วยจะมีผังการคูณดังนี้

ร้อย	สิบ	หน่วย	
	a		
		b	×
□	□		

และถ้า a และ b ต่างก็เป็นเลขโดดในหลักสิบ จะมีผังการคูณ ดังนี้

พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย	
		a		
		b		×
□	□			

□ สองช่อง คือ ตำแหน่งที่ใช้เขียนผลคูณของ (a × 10) × (b × 10) ซึ่งจะอยู่ในตำแหน่งหลักร้อย และหลักพัน

ถ้า a, b, c, d ต่างเป็นเลขโดด และ ab กับ cd เป็นตัวเลขที่เขียนในรูปที่มีค่าประจำตำแหน่ง ab × cd จะมีผังการคูณ ดังนี้

พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย	
		a	b	
		c	d	×
		□	□	(1)
	□	□		(2)
	□	□		(3)
□	□			(4)

บรรทัด (1) ช่อง □ สองช่อง แสดงตำแหน่งของผลคูณ $b \times d$

บรรทัด (2) ช่อง □ สองช่อง แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(a \times 10) \times d$

บรรทัด (3) ช่อง □ สองช่อง แสดงตำแหน่งของผลคูณ $c \times (b \times 10)$

บรรทัด (4) ช่อง □ สองช่อง แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(a \times 10) \times (c \times 10)$

ถ้าย้ายตำแหน่งของช่อง □ สองช่องในบรรทัด (4) ไปยังบรรทัด (1) ให้อยู่ในหลักพันและหลักร้อย จะได้ผังการคูณ ดังนี้

พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย	
		a	b	×
		c	d	
□	□	□	□	(1)
	□	□		(2)
	□	□		(3)

ผลลัพธ์ที่ได้จากการบวกจำนวนในบรรทัด (1), (2) และ (3) ที่มีหลักตรงกันตามปกติ

ตัวอย่างที่ 1.2.12 จงหาผลคูณของ 48×69

วิธีคิด

$$\begin{array}{lrl} & 4\,8 & \\ & \underline{6\,9} & \times \\ (24 \text{ ได้จาก } 4 \times 6) & 2\,4\,7\,2 & (72 \text{ ได้จาก } 8 \times 9) \\ & 3\,6\; & (36 \text{ ได้จาก } 4 \times 9) \\ & \underline{4\,8\;\;} & (48 \text{ ได้จาก } 8 \times 6) \\ & \underline{\underline{3\,3\,1\,2}} & \end{array}$$

ดังนั้น $48 \times 69 = 3312$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.13 จงหาผลคูณของ 41×69

วิธีคิด	4 1	
	$\times$	
	6 9	
(24 ได้จาก 4×6)	2 4 0 9	(09 ได้จาก 1×9)
	3 6	(36 ได้จาก 4×9)
	0 6	(06 ได้จาก 1×6)
	2 8 2 9	

ดังนั้น $41 \times 69 = 2829$

■

เรื่องที่ 4 การคูณที่ตัวตั้งประกอบด้วยเลขโดดสามตัว และตัวคูณประกอบด้วยเลขโดดสองตัว

ถ้า a, b, c, d และ e เป็นเลขโดด

ในการหาผลคูณของ abc $\times$ de ที่เป็นผลคูณที่ตัวตั้งประกอบด้วยเลขโดดสามตัว และตัวคูณประกอบด้วยเลขโดดสองตัว ใช้แนวคิดทำนองเดียวกันกับรูปแบบที่ 1 แต่เพิ่มหลักร้อยที่ตัวตั้งขึ้นอีกหนึ่งหลัก ผังการคูณเป็นดังนี้

หมื่น	พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย		
		a	b	c		
			d	e		
			□	□	(1)	
		□	□		(2)	e เป็นตัวคูณ
	□	□			(3)	
		□	□		(4)	
	□	□			(5)	d เป็นตัวคูณ
□	□				(6)	

บรรทัด (1) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $c \times e$

บรรทัด (2) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(b \times 10) \times e$

บรรทัด (3) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(a \times 100) \times e$

บรรทัด (4) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $c \times (d \times 10)$

บรรทัด (5) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(b \times 10) \times (d \times 10)$

บรรทัด (6) ช่อง □ □ แสดงตำแหน่งของผลคูณ $(a \times 100) \times (d \times 10)$

นอกจากนี้ ถ้านำ □ □ ในบรรทัด (3) ไปไว้ที่บรรทัด (1) ในหลักที่ตรงกันและนำ □ □ ในบรรทัด (6) ไปไว้ที่บรรทัด (4) ในหลักที่ตรงกัน จะได้ทิศทางการวางตำแหน่งที่มี e และ d เป็นตัวคูณ ดังนี้

หมื่น	พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย	
		a	b d	c e	×
	□	□	□	□	
	(3)	(3)	(1)	(1)	
		□	□		
		(2)	(2)		
□	□	□	□		
(6)	(6)	(4)	(4)		
	□	□			
	(5)	(5)			
					ช่องผลลัพธ์

(1), (2) และ (3) แสดงทิศทางการวางตำแหน่ง □□ ของการคูณ c, b และ a ด้วย e ตามลำดับ

(4), (5) และ (6) แสดงทิศทางการวางตำแหน่ง □□ ของการคูณ c, b และ a ด้วย d ตามลำดับ

ผังการคูณ เป็นดังนี้

หมื่น	พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย	
		a	b d	c e	×
	□	□	□	□	
		□	□		
□	□	□	□		
	□	□			

ตัวอย่างที่ 1.2.14 จงหาผลคูณของ 987×36

วิธีคิด

	9 8 7	
	3 6	
(54 ได้จาก 9×6)	5 4 4 2	(42 ได้จาก 7×6)
	4 8	(48 ได้จาก 8×6)
(27 ได้จาก 9×3)	2 7 2 1	(21 ได้จาก 7×3)
(24 ได้จาก 8×3)	2 4	
	3 5 5 3 2	

ดังนั้น $987 \times 36 = 35532$

■

ถ้าเป็นผลคูณของเลขสามหลักกับเลขสามหลักก็ทำได้ทำนองเดียวกัน โดยเพิ่มแถวของผลลัพธ์การคูณด้วยตัวเลขในหลักร้อยของตัวคูณต่ออีกสองแถว แล้วจึงหาผลบวกของผลคูณทั้งหมด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.15 จงหาผลคูณของ 987×436

วิธีคิด

$$
\begin{array}{r}
9\ 8\ 7 \quad \times \\
\underline{4\ 3\ 6} \\
5\ 4\ 4\ 2 \\
4\ 8\ \\
2\ 7\ 2\ 1\ \\
2\ 4\ \ \\
3\ 6\ 2\ 8\ \ \\
\underline{3\ 2\ \ \ } \\
\underline{\underline{4\ 3\ 0\ 3\ 3\ 2}}
\end{array}
$$

ดังนั้น $987 \times 436 = 430332$

■

แบบฝึกหัดที่ 6

จงหาค่าของ

1. 47×68
2. 63×327
3. 472×384
4. 615×738
5. 1234×389

สนุกกับตัวเลข (8)

<u>หนึ่งคูณกับหนึ่งได้ หนึ่ง สอง สาม</u>

$$
\begin{aligned}
11 \times 111 &= 1221 \\
111 \times 111 &= 12321 \\
1111 \times 111 &= 123321 \\
11111 \times 111 &= 1233321 \\
111111 \times 111 &= 12333321 \\
1111111 \times 111 &= 123333321 \\
11111111 \times 111 &= 1233333321
\end{aligned}
$$

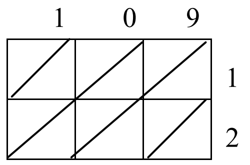
การคูณโดยใช้ตาราง

เรื่องที่ 5 การคูณแบบธรรมดา

การคูณโดยใช้ตารางตามวิธีที่จะกล่าวต่อไปนี้มีความสะดวก โดยขณะที่คูณไม่ต้องนำตัวทดไปบวกในหลักถัดไป เมื่อจับคู่คูณเลขโดดทั้งหมดแล้วหาผลบวกรวมยอดเป็นผลคูณดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.16 จงหาค่าของ 109×12

แนวคิด ขั้นที่ 1 เขียนตัวตั้งไว้ด้านบนของตาราง และเขียนตัวคูณไว้ด้านขวาของตาราง โดยตารางทำเป็นช่องดังนี้



ขั้นที่ 2 ใส่ผลคูณลงในช่อง โดยใส่ช่องล่างก่อน ( )

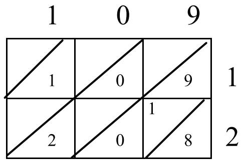
สำหรับตัวทดถ้ามีใส่ในช่องบน ( )

แถวบนในตารางจะเป็นผลคูณของ 109×1 และแถวล่างในตาราง

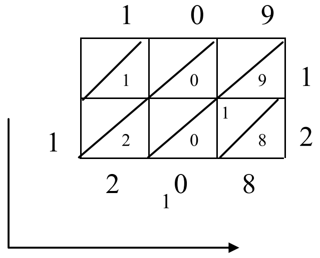
จะเป็นผลคูณของ 109×2 ดังนี้

แถวบน

แถวล่าง



ขั้นที่ 3 หาผลบวกตามแนวทแยง // ผลบวกที่ได้จะเป็นผลคูณตามต้องการ

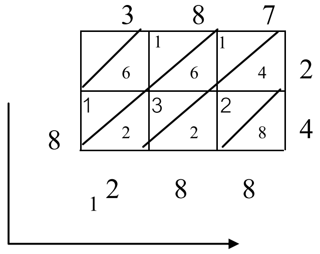


$= 12_{1}08 = 1308$

นั่นคือ $109 \times 12 = 1308$ ■

ตัวอย่างที่ 1.2.17 จงหาค่าของ 387×24

แนวคิด

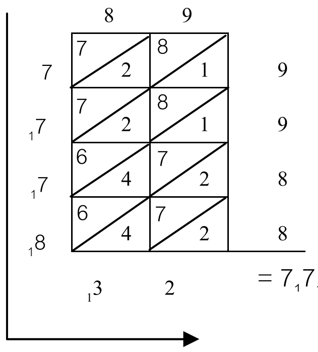


$= 8_{1}288 = 9288$

นั่นคือ $387 \times 24 = 9288$ ■

ตัวอย่างที่ 1.2.18 จงหาค่าของ 89×9988

แนวคิด



$= 7{,}_17{,}_17{,}_18{,}_132 = 888932$

นั่นคือ $89 \times 9988 = 888932$

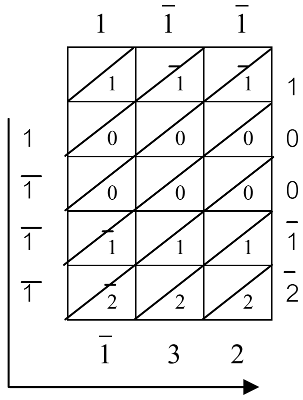
■

เรื่องที่ 6 การคูณโดยจัดเป็นจำนวนเครื่องหมายคละ

ในกรณีที่ตัวตั้งหรือตัวคูณมีเลขโดดที่เกิน 5 อยู่หลายตัว อาจแปลงเป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตรก่อนแล้วคูณโดยใช้ตารางก็จะทำให้ใช้การคูณ ตัวเลขที่ไม่เกิน 5 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.19 จงแปลง 89×9988 เป็นตัวเลขในนิขิลัมสูตรแล้วหาผลคูณโดยใช้ตาราง

แนวคิด $89 \times 9988 = 1\bar{1}\bar{1} \times 10\bar{1}\bar{2}$



$= 1\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}\ 3\ 2$

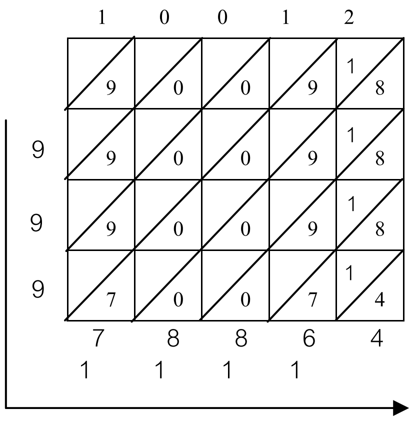
$= 8\ 8\ 8\ 9\ 3\ 2$

นั่นคือ $89 \times 9988 = 888932$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.20 จงหาค่าของ 10012×9997

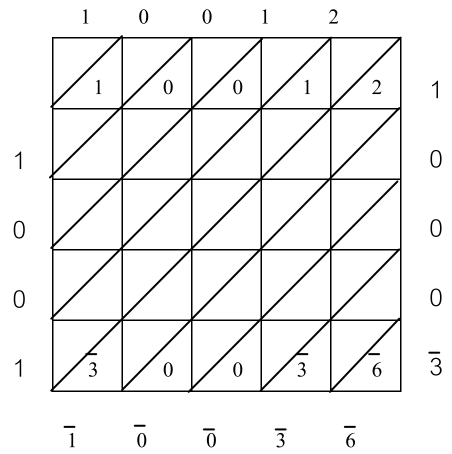
แนวคิด วิธีที่ 1



$= 100089964$

นั่นคือ $10012 \times 9997 = 100089964$

วิธีที่ 2 $10012 \times 9997 = 10012 \times 100\bar{3}$



$= 1001\bar{1}\bar{0}\bar{0}\bar{3}\bar{6}$

$= 100089964$

นั่นคือ $10012 \times 9997 = 100089964$

■

ข้อสรุป การคูณโดยใช้ตารางนี้เป็นการคูณเลขโดดกับเลขโดดได้ผลลัพธ์เป็นเท่าใด เขียนผลลัพธ์เหล่านั้นลงในช่องตารางโดยไม่ต้องทด หลังจากนั้นจึงบวกทแยง จะได้ผลลัพธ์ของการคูณ ซึ่งทำให้ได้ผลคูณรวดเร็วและผิดพลาดน้อย นอกจากนี้กรณีที่เลขโดดในตัวตั้งหรือตัวคูณมีค่าเกิน 5 สามารถใช้นิขิลัมสูตรแปลงให้ใช้ตัวเลขที่ไม่เกิน 5 แล้วทำการคูณแบบตารางก็จะสะดวกและรวดเร็วขึ้น

แบบฝึกหัดที่ 7

จงหาค่าของผลคูณต่อไปนี้

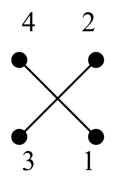
1. 287×315
2. 38644×9998
3. 27413×5615
4. $374 \times 89 \times 463$
5. $27135 \times 246 \times 4138$
6. $99998 \times 819 \times 19210$

การคูณแนวตั้งและการคูณไขว้

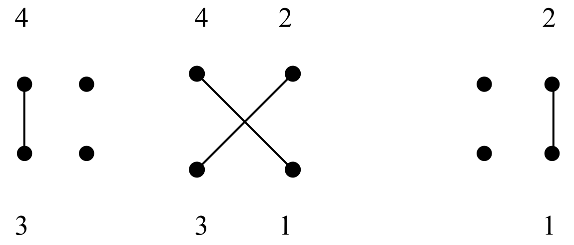
เรื่องที่ 7 การคูณธรรมดา

การหาผลคูณโดยใช้การคูณแนวตั้งและการคูณไขว้นี้เป็นวิธีการคูณวิธีหนึ่ง ซึ่งรูปแบบการคูณจะเป็นรูปแบบที่สมมาตร ดังตัวอย่างการคูณต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.21 42×31 มีผังการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้ดังนี้



เมื่อ ● แทนตำแหน่งของเลขโดดของตัวตั้งและตัวคูณจะมีผังการคูณเป็นรูปสมมาตร และมี 3 ขั้นตอนการคูณจากขวาไปซ้ายดังนี้



ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 1

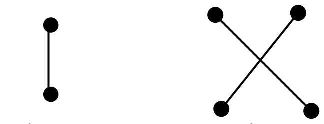
$4 \times 3 = 12$ $(4 \times 1) + (3 \times 2) = 10$ $2 \times 1 = 2$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณในแต่ละขั้นจะได้ตำแหน่งของเลขโดดในผลลัพธ์ คือ ตำแหน่งหลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย ตามลำดับจากขั้นที่ 1, 2 และ 3 สำหรับในขั้นใดที่ผลคูณเป็นเลขโดดสองตัว เลขโดดตัวหน้าจะทดไปในหลักที่สูงขึ้นหนึ่งหลัก ดังนี้

$$
\begin{array}{ccc}
 & 4 & 2 \\
 & 3 & 1 \\
\hline
{}_{1}2 & {}_{1}0 & 2 \\
\hline\hline
\end{array} = 1302 \qquad \blacksquare
$$

ตัวอย่างที่ 1.2.22 จงหาผลคูณของ 89×23

แนวคิด เนื่องจากตัวตั้งและตัวคูณเป็นเลขสองหลัก จึงมีผังการคูณดังนี้



ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 1

การคำนวณ

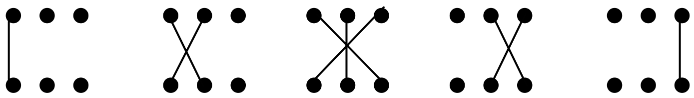
$$
\begin{array}{ccc}
8 & 6 & \times \\
2 & 3 & \\
\hline
{}_{1}6 & {}_{3}6 & {}_{1}8 \\
\hline\hline
\end{array} = 1978
$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $6 \times 3 = 18$
2) $(8 \times 3) + (2 \times 6) = 36$
3) $8 \times 2 = 16$ ■

ตัวอย่างที่ 1.2.23 จงหาผลคูณของ 302×514

แนวคิด ผังการคูณแบ่งเป็น 5 ขั้นตอน ดังนี้



ขั้นที่ 5 ขั้นที่ 4 ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 1

(คูณ 1 คู่) (คูณ 2 คู่) (คูณ 3 คู่) (คูณ 2 คู่) (คูณ 1 คู่)

การคำนวณ

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 3 & 0 & 2 \\
 & & 5 & 1 & 4 \\
\hline
{}_{1}5 & 3 & {}_{2}2 & 2 & 8 \\
\hline\hline
\end{array} \times \quad = 155228
$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $2 \times 4 = 8$
2) $(0 \times 4) + (1 \times 2) = 2$
3) $(3 \times 4) + (0 \times 1) + (5 \times 2) = 22$
4) $(3 \times 1) + (5 \times 0) = 3$
5) $3 \times 5 = 15$ ■

ตัวอย่างที่ 1.2.24 จงหาผลคูณของ 321×43

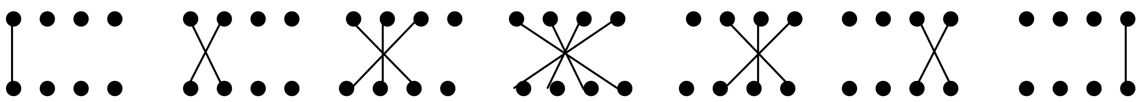
แนวคิด เนื่องจากจำนวนหลักของตัวตั้งมากกว่าตัวคูณ จึงใส่เลข 0 หน้าตัวคูณให้จำนวนเลขโดดของตัวตั้งและตัวคูณเท่ากันเสียก่อน แล้วทำการคำนวณ

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \quad \times \\ \underline{0\ 4\ 3} \\ \underline{\underline{{}_1 2\ \ {}_1 7\ \ {}_1 0\ \ 3}} = 13803 \end{array}$$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.25 จงหาผลคูณ 3251×7604

แนวคิด ผังการคูณแบ่งเป็น 7 ขั้นตอนดังนี้



ขั้นที่ 7 ขั้นที่ 6 ขั้นที่ 5 ขั้นที่ 4 ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 1

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 3\ \ 2\ \ 5\ \ 1 \\ \underline{7\ \ 6\ \ 0\ \ 4} \\ \underline{\underline{{}_2 1\ \ {}_3 2\ \ {}_4 7\ \ {}_4 9\ \ {}_1 4\ \ {}_2 0\ \ 4}} = 24720604 \end{array}$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $1 \times 4 = 4$

2) $(5 \times 4) + (0 \times 1) = 20$

3) $(2 \times 4) + (5 \times 0) + (6 \times 1) = 14$

4) $(3 \times 4) + (2 \times 0) + (6 \times 5) + (7 \times 1) = 49$

5) $(3 \times 0) + (2 \times 6) + (7 \times 5) = 47$

6) $(3 \times 6) + (7 \times 2) = 32$

7) $3 \times 7 = 21$

■

ข้อสังเกต ในการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้มีลักษณะดังนี้

1. จำนวนเลขโดดของตัวตั้งและตัวคูณต้องเท่ากัน ในกรณีไม่เท่า ให้เติม 0 หน้าตัวตั้งหรือตัวคูณที่น้อยกว่าให้มีตัวเลขโดดเท่ากับตัวตั้ง หรือตัวคูณที่มีจำนวนเลขโดดมากกว่า

2. ผลจาก 1. จะทำให้จำนวนเลขโดดในการคูณเท่ากับ 2n เมื่อ n = 1,2,3... จะมีขั้นตอนการคูณเท่ากับ 2n - 1 ขั้นตอน

3. ตั้งแต่ขั้นที่ 1 ถึงขั้นที่ n จำนวนการจับคู่เพื่อคูณกันทั้งแนวตั้งและคูณไขว้จะเท่ากับตัวเลขแสดงอันดับที่ของขั้นนั้น ๆ สำหรับขั้นที่ n + 1 จนถึงขั้นที่ 2n - 1 จำนวนการจับคู่คูณกันในแต่ละขั้นที่เพิ่มขึ้นจะลดลงทีละ 1 ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1.2.26 จงหาผลคูณของ 12131 × 20412

แนวคิด เนื่องจากทั้งตัวตั้งและตัวคูณต่างก็เป็นตัวเลข 5 หลัก ดังนั้น ขั้นตอนการคูณมีทั้งหมด 2(5) - 1 = 9 ขั้นตอน ดังนี้

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 1\ 3\ 1 \\ 2\ 0\ 4\ 1\ 2 \\ \hline 2\ 4\ 6\ {}_{1}5\ {}_{1}0\ {}_{1}7\ 9\ 7\ 2 \end{array} \times \quad = 247617972$$

ขั้นตอนการคูณ

1) 1 × 2 = 2

2) (3 × 2) + (1 × 1) = 7

3) (1 × 2) = (3 × 1) + (4 × 1) = 9

4) (2 × 2) + (1 × 1) + (4 × 3) + (0 × 1) = 17

5) (1 × 2) + (2 × 1) + (1 × 4) + (0 × 3) + (2 × 1) = 10

6) (1 × 1) + (2 × 4) + (0 × 1) + (2 × 3) = 15

7) (1 × 4) + (2 × 0) + (2 × 1) = 6

8) (1 × 0) + (2 × 2) = 4

9) 1 × 2 = 2

■

ในกรณีที่ตัวตั้งและตัวคูณมีเลขโดดที่มากกว่าเลข 5 เราสามารถแปลงเป็นเลขโดดที่มีค่าน้อยกว่าเลข 5 ได้โดยใช้นิขิลัมสูตรจะทำให้การคูณง่ายขึ้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

เรื่องที่ 8 การคูณโดยจัดเป็นจำนวนเครื่องหมายคละ

ตัวอย่างที่ 1.2.27 จงหาผลคูณของ 39×49

แนวคิด $39 = 4\,\bar{1}$ และ $49 = 5\,\bar{1}$

$$\begin{array}{r} 4\;\bar{1} \\ \times\quad 5\;\bar{1} \\ \hline \underline{\underline{2\;0\;\bar{9}\;1}} \end{array} = 1911$$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.28 จงหาผลคูณของ 291×388

แนวคิด $291 = 3\;\bar{1}\;1$ และ $388 = 4\;\bar{1}\;\bar{2}$

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 3\;\bar{1}\;1 \\ \times\quad 4\;\bar{1}\;\bar{2} \\ \hline \underline{\underline{1\;2\;\bar{7}\;\bar{1}\;1\;\bar{2}}} \end{array} = 112908$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $1 \times \bar{2} = \bar{2}$

2) $(\bar{1} \times \bar{2}) + (\bar{1} \times 1) = 1$

3) $(3 \times \bar{2}) + (\bar{1} \times \bar{1}) + (4 \times 1) = \bar{1}$

4) $(3 \times \bar{1}) + (4 \times \bar{1}) = \bar{7}$

5) $3 \times 4 = 12$ ■

ตัวอย่างที่ 1.2.29 จงหาผลคูณของ 818×39

แนวคิด $8\;1\;8 = 1\;\bar{2}\;2\;\bar{2}$ และ $3\;9 = 4\;\bar{1}$

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 1\;\bar{2}\;2\;\bar{2} \\ \times\quad 0\;0\;4\;\bar{1} \\ \hline \underline{\underline{4\;\bar{9}\;{}_{1}0\,\text{-}_{1}\;0\;2}} \end{array} = 4\;\bar{8}\;\bar{1}\;0\;2 = 3\;1\;9\;0\;2$$

■

ตัวอย่างที่ 1.2.30 จงหาผลคูณของ 37898 × 19989

แนวคิด $37898 = 4\bar{2}\bar{1}0\bar{2}$ และ $19989 = 200\bar{1}\bar{1}$

การคำนวณ

$$\begin{array}{r} 4\ \bar{2}\ \bar{1}\ 0\ \bar{2} \\ \times\quad 2\ 0\ 0\ \bar{1}\ \bar{1} \\ \hline 8\ \bar{4}\ \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{6}\ 3\ 1\ 2\ 2 \\ \hline\hline \end{array} = 757543122$$

ขั้นตอนการคูณ

1) $\bar{2} \times \bar{1} = 2$

2) $(0 \times \bar{1}) + (\bar{1} \times \bar{2}) = 2$

3) $(\bar{1} \times \bar{1}) + (0 \times \bar{1}) + (0 \times \bar{2}) = 1$

4) $(\bar{2} \times \bar{1}) + (\bar{1} \times \bar{1}) + (0 \times 0) + (0 \times \bar{2}) = 3$

5) $(4 \times \bar{1}) + (\bar{2} \times \bar{1}) + (\bar{1} \times 0) + (0 \times 0) + (2 \times \bar{2}) = \bar{6}$

6) $(4 \times \bar{1}) + (\bar{2} \times 0) + (\bar{1} \times 0) + (2 \times 0) = \bar{4}$

7) $(4 \times 0) + (\bar{2} \times 0) + (2 \times \bar{1}) = \bar{2}$

8) $(4 \times 0) + (2 \times \bar{2}) = \bar{4}$

9) $4 \times 2 = 8$

■

ในการคูณจำนวนที่มีจุดทศนิยมสามารถทำการคูณได้โดยปรกติ โดยตำแหน่งของจุดทศนิยมผลคูณเท่ากับผลบวกของตำแหน่งทศนิยมของจำนวนทั้งสองที่คูณกัน

ตัวอย่างที่ 1.2.31 จงหาผลคูณของ 34.1 × 4.54

แนวคิด เนื่องจากตัวตั้งมีทศนิยม 1 ตำแหน่ง และตัวคูณมีทศนิยม 2 ตำแหน่ง ดังนั้นผลลัพธ์มีทศนิยม 3 ตำแหน่ง การคูณเป็นดังนี้

$$\begin{array}{r} 3\quad 4\ .\ 1 \\ \times\quad 4\ .\ 5\quad 4 \\ \hline 12\ {}_{3}1\ {}_{3}.\ 6\ {}_{2}1\ \ 4 \\ \hline\hline \end{array} = 154.814$$ ■

ตัวอย่างที่ 1.2.32 จงหาผลคูณของ 8.18×3.9

แนวคิด เนื่องจากตัวตั้งมีทศนิยม 2 ตำแหน่งตัวคูณมีทศนิยม 1 ตำแหน่ง ดังนั้นผลพัทธ์มีทศนิยม 3 ตำแหน่ง นอกจากนี้

$8.18 = 1\bar{2}.2\bar{2}$ และ $3.9 = 4.\bar{1}$ การคูณเป็นดังนี้

$$\begin{array}{r} 1\,\bar{2}\,.\,2\,\bar{2} \\ 0\,0\;\;4\,.\,\bar{1} \\ \hline 4\,\bar{9}\,.{}_{1}0\;{}_{\bar{1}}0\,2 \\ \hline\hline \end{array} \times \quad = 4\bar{8}.\bar{1}02 = 31.902$$

■

ข้อสรุป

การคูณโดยใช้ผังการคูณนี้ผังการคูณเป็นผังที่เป็นรูปสมมาตร ในกรณีที่ตัวตั้ง และตัวคูณมีจำนวนหลักไม่เท่ากันต้องเติมศูนย์หน้าจำนวนที่มีหลักน้อยกว่าโดยใช้ 0 แทนหลักที่ขาดไป แล้วจึงทำการคูณเลขโดดทีละ 1,2,...n,...,2, 1 คู่ตามผังการคูณ

แบบฝึกหัดที่ 8

จงหาผลคูณต่อไปนี้

1. 45×58
2. 314×67
3. 8121×374
4. 31.28×4.35
5. 3561×62.5

สนุกกับตัวเลข (7)

การคูณที่มีเจ็ดกับเก้าได้ของแถมเป็นหนึ่งกับสอง

779 ×	99	=	77121
7779 ×	999	=	7771221
77779 ×	9999	=	777712221
777779 ×	99999	=	77777122221
7777779 ×	999999	=	7777771222221
77777779 ×	9999999	=	777777712222221
777777779 ×	99999999	=	77777777122222221

ตอนที่ 1.3 ทักษะการคำนวณ 3 (การหาร)

แนวคิด 1. การหารที่ตัวหารน้อยกว่า 10 หรือ 100 หรือ 1000 เล็กน้อยนั้น ใช้วิธีการหารสังเคราะห์จะสะดวกกว่า

2. ในการหาผลหารเป็นทศนิยม จะต้องเติม 0 ต่อท้ายตัวตั้งเท่ากับจำนวนตำแหน่งของทศนิยมที่ต้องการ

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 3 จบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. หาผลหารโดยวิธีการหารสังเคราะห์ได้
2. หาผลหารที่เป็นทศนิยมโดยวิธีการหารสังเคราะห์ได้

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายแนวคิดและแสดงตัวอย่างการหารที่ตัวหารน้อยกว่า 10 หรือ 100 หรือ 1000 เล็กน้อย โดยใช้วิธีการหารสังเคราะห์
2. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่างและแบบฝึกหัด
3. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

การหารสังเคราะห์

เรื่องที่ 1 การหารที่ตัวหารเป็นเลขโดดที่มากกว่า 5

ในการคูณโดยเฉพาะเลขโดดที่นำมาคูณกันนั้นมีค่ามากกว่า 5 ถ้าใช้จำนวนเครื่องหมายคละทำให้คูณง่ายขึ้นในทำนองเดียวกันสำหรับการหาร ถ้าตัวหารมีเลขโดดที่มีค่ามากกว่า 5 เมื่อใช้จำนวนเครื่องหมายคละผสมกับการหารสังเคราะห์ก็จะทำให้การหารนั้นง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้โดยจะแสดงวิธีคิดเป็นขั้นตอน

ชนิดที่ 1 ตัวหารเป็นเลขโดดที่มากกว่า 5

ตัวอย่างที่ 1.3.1 จงหาร 34 ด้วย 9

แนวคิด

ขั้นที่ 1 หาจำนวนทบสิบของตัวหารคือจำนวนสิบของ 9 ซึ่งคือ 1 เขียน 1 ไว้ใต้ 9 แล้วเขียนการตั้งหารดังนี้

$$\begin{array}{l} 9\,)\,3\,4 \\ 1 \end{array}$$

ขั้นที่ 2 ใช้ 1 ซึ่งเป็นจำนวนทบสิบของตัวหาร ทำการหารแทนตัวหารเดิม แล้วเขียนขีด | แบ่งตัวตั้ง โดยเขียน | หลังเลขโดด ในตำแหน่งที่เท่ากับจำนวนเลขโดดของตัวหาร ในที่นี้ตัวหารเป็นเลขโดด 1 ตัว ดังนั้น จากตัวตั้งคือ 34 นับเลขโดดจากทางขวาไปทางซ้าย 1 ตัวแล้วเขียนขีด | คั่น จะได้ 3 | 4 ให้ยาวพอสมควรดังนี้

$$\begin{array}{ll|l} 9\,) & 3 & 4 \\ 1 & & \end{array}$$

หมายเหตุ จะใช้ MD แทนตัวหารที่ปรับปรุงใหม่ ซึ่งในที่นี้คือจำนวนทบสิบของตัวหารเดิม และจะใช้ D แทนตัวตั้ง

ขั้นที่ 3 ขีดเส้นใต้บรรทัดที่ 2 แล้วชักเลขโดดทางซ้ายสุดของ D (ในที่นี้คือ 3 และอยู่ทางซ้ายของ | ในตัวตั้ง) ลงมาตรงๆ และเขียนไว้ในบรรทัดที่ 3

$$\begin{array}{lll|l} & 9\,) & 3 & 4 \\ \text{MD} \longrightarrow & 1 & & \\ \hline & & 3 & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 คูณเลขโดดที่ชักลงมาในบรรทัดที่ 3 ด้วยเลขโดดตัวซ้ายสุดของ MD (ในที่นี้ MD มีเลขโดดตัวเดียวคือ 1) จะได้ $3 \times 1 = 3$ แล้วเขียนผลคูณไว้บรรทัดที่ 2 ใต้ตัวตั้งในหลักถัดไปทางขวา (ในที่นี้คือหลักหน่วย)

$$\begin{array}{r|l} 9)\,3 & 4 \\ 1\quad & 3 \\ \hline 3 & \end{array}$$

ขั้นที่ 5 บวกเลขในหลักหน่วยของแถวที่ 1 และ 2 จะได้ 4+3 = 7 เขียน 7 ไว้บรรทัดที่ 3 ให้ตรงกับตัวเลขที่บวกกันจะเห็นว่า | อยู่หน้า 7

$$\begin{array}{r|l} 9)\,3 & 4 \\ 1\quad & 3 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 3

เศษคือ 7

ดังนั้น $34 \div 9 = 3$ เศษ 7

■

ตัวอย่างที่ 1.3.2 จงหาร 60 ด้วย 9

แนวคิด

ขั้นที่ 1-2 เนื่องจากตัวหารคือ 9 ดังนั้น MD = 1 เขียนภาพตั้งหารได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|l} 9)\,6 & 0 \\ 1\quad & \end{array}$$

ขั้นที่ 3 ชัก 6 ซึ่งเป็นเลขโดดซ้ายสุดของตัวตั้งลงมาบรรทัดที่ 3

$$\begin{array}{r|l} 9)\,6 & 0 \\ 1\quad & \\ \hline 6 & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 คูณ 6 ที่ชักลงมาด้วย MD คือ 1 จะได้ $6 \times 1 = 6$ แล้วเขียนไว้บรรทัดที่ 2 ในหลักถัดไปทางขวา

$$\begin{array}{rr|l} 9\,) & 6 & 0 \\ 1 & & 6 \\ \hline & 6 & \end{array}$$

ขั้นที่ 5 บวกเลขในหลักหน่วยของบรรทัดที่ 1 และ 2 ได้ 0 + 6 = 6 แล้วเขียนไว้บรรทัดที่ 3 จะเห็นว่า | อยู่หน้า 6 ที่เป็นผลบวก

$$\begin{array}{rr|l} 9\,) & 6 & 0 \\ 1 & & 6 \\ \hline & 6 & 6 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 6

เศษคือ 6

ดังนั้น $60 \div 9 = 6$ เศษ 6

■

ตัวอย่างที่ 1.3.3 จงหาร 213 ด้วย 9

แนวคิด

ขั้นที่ 1-2

$$\begin{array}{rrr|l} 9\,) & 2 & 1 & 3 \\ 1 & & & \end{array}$$

ขั้นที่ 3 ชัก 2 ที่เป็นเลขโดดซ้ายสุดของตัวตั้งลงมาบรรทัดที่ 3

$$\begin{array}{rrr|l} 9\,) & 2 & 1 & 3 \\ 1 & & & \\ \hline & 2 & & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 คูณ 2 ที่ชักลงมาด้วย 1 ที่เป็นเลขโดดเพียงตัวเดียวใน MD จะได้ $2 \times 1 = 2$ เขียน 2 ไว้บรรทัดที่ 2 ในหลักถัดไปทางขวา (ในที่นี้คือหลักสิบ) แล้วหาผลบวกเลขโดดในหลักสิบของบรรทัดที่ 1 และ 2 จะได้ 1 + 2 = 3 เขียนไว้บรรทัดที่ 3 ให้ตรงกับเลขโดดที่บวกกัน

$$\begin{array}{rrr|l} 9\,) & 2 & 1 & 3 \\ 1 & & 2 & \\ \hline & 2 & 3 & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 (ก) นำ 1 ใน MD ไปคูณ 3 ในบรรทัดที่ 3 ที่เป็นผลบวกในหลักสิบจะได้ $3 \times 1 = 3$ เขียน 3 ไว้บนหลักหน่วยในบรรทัดที่ 2

$$\begin{array}{llr|l} 9) & 2 & 1 & 3 \\ 1 & & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & \end{array}$$

ขั้นที่ 5 หาผลบวกของเลขโดด ในหลักหน่วยของบรรทัดที่ 1 และ 2 จะได้ $3 + 3 = 6$ เขียน 6 ลงในบรรทัดที่ 3 ให้ตรงกับเลขโดดที่บวกกัน

$$\begin{array}{llr|l} 9) & 2 & 1 & 3 \\ 1 & & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 23

เศษคือ 6

ดังนั้น $213 \div 9 = 23$ เศษ 6

■

ตัวอย่างที่ 1.3.4 จงหาร 323 ด้วย 9

แนวคิด

$$\begin{array}{llr|l} 9) & 3 & 2 & 3 \\ 1 & & 3 & 5 \\ \hline & 3 & 5 & 8 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 35

เศษคือ 8

ดังนั้น $323 \div 9 = 35$ เศษ 8

■

ตัวอย่างที่ 1.3.5 จงหาร 12121 ด้วย 9

แนวคิด

$$\begin{array}{llllr|l} 9) & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 1 & 3 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 1346

เศษคือ 7

ดังนั้น $12121 \div 9 = 1346$ เศษ 7

■

ในกรณีที่ทำการหารแล้วได้เศษเกินกว่าตัวหารดั้งเดิม จะต้องทำการหารเศษต่อไปแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ไปบวกกับผลลัพธ์เดิม จะได้ผลลัพธ์ใหม่เป็นคำตอบ และเศษที่ได้ใหม่ที่ไม่เกินตัวหารดั้งเดิมก็จะเป็นเศษของการหารโดยแท้จริงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.6 จงหาร 67 ด้วย 9

แนวคิด

$$\begin{array}{r|l} 9\,)\ \ 6 & 7 \\ & 6 \\ \hline 6 & 13 \end{array}$$

จะเห็นว่า ผลลัพธ์คือ 6 เศษ 13 แต่เศษคือ 13 มากกว่าตัวหารดั้งเดิมคือ 9 ดังนั้นจะต้องหาร 13 ด้วย 9 อีกดั้งนี้

$$\begin{array}{r|l} 9\,)\ \ 1 & 3 \\ 1\qquad & 1 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$$

นำ 1 ไปบวกกับผลลัพธ์เดิม จะได้ $6 + 1 = 7$ เป็นผลลัพธ์ใหม่และเศษที่ได้ใหม่คือ 4 เป็นเศษที่แท้จริง

จะได้ผลลัพธ์คือ $6 + 1 = 7$

เศษคือ 4

ดังนั้น $67 \div 9 = 7$ เศษ 4

■

ถ้าเขียนการหาร 2 ครั้งอย่างต่อเนื่องจะเขียนได้ดังนี้

9)	6	7		
1		6		
	6	1	3	
			1	
		1	4	
	6	1	4	$= 6_1 \mid 4 = 7 \mid 4$

ผลลัพธ์คือ 7

เศษคือ 4

ดังนั้น $67 \div 9 = 7$ เศษ 4

■

ตัวอย่างที่ 1.3.7 จงหาร 167 ด้วย 9

แนวคิด

9)	1 6	7		
1	1	7		
	1 7	1	4	
			1	
	17	1	5	$= 17_1 \mid 5 = 18 \mid 5$

ผลลัพธ์คือ 18

เศษคือ 5

ดังนั้น $167 \div 9 = 18$ เศษ 5

■

ตัวอย่างที่ 1.3.8 จงหาร 1011638 ด้วย 9

แนวคิด

9)	1	0	1	1	6	3		8
1		1	1	2	3	9		$_1 2$
	1	1	2	3	9	$_1 2$		$_2 0$
	1	1	2	4	0	2	2	0
								2
							2	2
	1	1	2	4	0	2	2	2

$= 112402_2 \mid 2$

$= 112404 \mid 2$

ผลลัพธ์คือ 112404

เศษคือ 2

ดังนั้น 1011638 ÷ 9 = 112404 เศษ 2

■

ตัวอย่างที่ 1.3.9 จงหาร 1012 ด้วย 8

แนวคิด จำนวนทบสิบของ 8 คือ 2 จึงทำการหารดังนี้

8)	1	0	1	2	
2		2	4	$_1 0$	
	1	2	5	1	2
					2
				1	4
	1	2	5	1	4

$= 125_1 \mid 4 = 126 \mid 4$

ผลลัพธ์คือ 126

เศษคือ 4

ดังนั้น 1012 ÷ 8 = 126 เศษ 4

■

ตัวอย่างที่ 1.3.10 จงหาร 3124 ด้วย 7

แนวคิด

7)	3	1	2		4
3		9	${}_{3}0$		${}_{9}6$
	3	${}_{1}0$	${}_{3}2$		${}_{10}0$
	4	3	2	10	0
				3	9
				13	9
	4	3	2	13	9 = 432 + 13 | 9 = 445 | 9

แต่เศษ 9 มากกว่า 7 และ 9 ÷ 7 = 1 เศษ 2

ดังนั้น 445 | 9 = 445 | 1 | 2 = 445 + 1 | 2 = 446 | 2

ผลลัพธ์คือ 446

เศษคือ 2

ดังนั้น 3124 ÷ 7 = 446 เศษ 2

■

เรื่องที่ 2 การหารที่ตัวหารมีตัวเลขมากกว่าหนึ่งตัว

ชนิดที่ 2 ตัวหารมีเลขโดดมากกว่า 1 ตัว ในกรณีนี้จะใช้จำนวนทบร้อย ทบพัน ฯลฯ ของตัวหารเข้าช่วยในการหาร

ตัวอย่างที่ 1.3.11 จงหาร 216 ด้วย 89

แนวคิด ขั้นที่ 1-2 หาจำนวนทบร้อยของ 89 ซึ่งคือ 11 จะได้ MD = 11 เนื่องจาก MD มีเลขโดด 2 ตัว จึงแบ่งตัวตั้ง 216 ด้วย | โดยนับเลขโดดจากทางขวาของตัวตั้งไปทางซ้าย 2 ตัวแล้วเขียน | ข้างหน้า หลังจากนั้นเขียนการตั้งหารจะได้

8 9)	2	1	6
1 1			

ขั้นที่ 3 ขีดเส้นใต้บรรทัดที่ 2 แล้วชักเลขโดดซ้ายสุดของ D (ในที่นี้คือ 2) ลงมาตรง ๆ และเขียนไว้บรรทัดที่ 3

$$\begin{array}{cccc|cc} 8 & 9 &) & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & & & & \\ \cline{3-6} & & & 2 & & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 นำ 11 ซึ่งเป็น MD ไปคูณกับ 2 ที่ชักลงมา จะได้ 2 × 11 = 22 เขียน 22 ไว้บรรทัดที่ 2 ในสองหลักถัดไปทางขวา

$$\begin{array}{cccc|cc} 8 & 9 &) & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & & & 2 & 2 \\ \cline{4-6} & & & 2 & & \end{array}$$

ขั้นที่ 5 บวก 16 กับ 22 จะได้ 16 + 22 = 38 เขียนไว้บรรทัดที่ 3 ให้ตรงกับตัวเลขที่บวกกันจะเห็นว่ามี | หน้า 38 ซึ่ง 38 คือเศษ ส่วน 2 ที่ชักลงมาตั้งแต่ต้นคือผลลัพธ์

$$\begin{array}{cccc|cc} 8 & 9 &) & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & & & 2 & 2 \\ \cline{4-6} & & & 2 & 3 & 8 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 2

เศษคือ 38

ดังนั้น 216 ÷ 89 = 2 เศษ 38

■

ตัวอย่างที่ 1.3.12 จงหาร 112 ด้วย 87

แนวคิด

$$\begin{array}{cccc|cc} 8 & 7 &) & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & & & 1 & 3 \\ \cline{4-6} & & & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 1

เศษคือ 25

ดังนั้น 112 ÷ 87 = 1 เศษ 25

■

ตัวอย่างที่ 1.3.13 จงหาร 34567 ด้วย 89

แนวคิด ขั้นที่ 1-2

$$\begin{array}{cccccc|cc} 8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & & & & & & \end{array}$$

ขั้นที่ 3 เนื่องจากจะต้องใช้หลายบรรทัดในการคำนวณ จึงขีดเส้นใต้ไว้บรรทัดที่ห่างจากบรรทัดที่ 1 พอสมควร แล้วชัก 3 ซึ่งเป็นเลขโดดซ้ายสุดของตัวตั้งลงมา

$$\begin{array}{cccccc|cc} 8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & & & & & & \\ \hline & & & 3 & & & & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 นำ MD = 11 คูณ 3 ที่ชักลงมา จะได้ $3 \times 11 = 33$ เขียนไว้บรรทัดที่ 3 ในสองหลักถัดไปทางขวา

$$\begin{array}{cccccc|cc} 8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & & & 3 & 3 & & \\ \hline & & & 3 & & & & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 (ก) บวก 4 กับ 3 ซึ่งเป็นเลขโดดในบรรทัดที่ 1 และ 2 อยู่ในหลักพันเหมือนกันจะได้ $4 + 3 = 7$ เขียน 7 ลงมาตรงๆ ในบรรทัดล่างสุด

$$\begin{array}{cccccc|cc} 8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & & & 3 & 3 & & \\ \hline & & & 3 & 7 & & & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 (ข) นำ MD = 11 คูณ 7 ในบรรทัดสุดท้าย จะได้

$7 \times 11 = 77$ เขียน 77 ไว้ในบรรทัดที่ 3 ในหลักถัดไปทางขวา

$$\begin{array}{cccccc|cc} 8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & & & 3 & 3 & & \\ & & & & & 7 & 7 & \\ \hline & & & 3 & 7 & & & \end{array}$$

ขั้นที่ 4 (ค) บวก 5 กับ 3 กับ 7 ซึ่งเป็นเลขโดดในบรรทัดที่ 1, 2 และ 3 อยู่ในหลักร้อยเหมือนกัน จะได้ $5 + 3 + 7 = 15$ เขียน ${}_{1}5$ ลงมาตรงๆ ในบรรทัดล่างสุด (ที่เขียน ${}_{1}5$ เพราะ 15 เป็นเลข 2 หลัก จึงเขียน ${}_{1}5$ เพื่อเตรียมทด 1 ไปหลักทางซ้าย)

$$\begin{array}{cccccc|cc}
8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
1 & 1 & & & 3 & 3 & & \\
& & & & & 7 & 7 & \\
\hline
& & & 3 & 7 & {}_{1}5 & &
\end{array}$$

ขั้นที่ 4 (ง) นำ MD = 11 คูณ ${}_{1}5$ ในบรรทัดสุดท้าย จะได้ ${}_{1}5 \times 11 = {}_{1}5\,{}_{1}5$ ไว้บรรทัดที่ 4 ในสองหลักถัดไปทางขวา

$$\begin{array}{cccccc|cc}
8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
1 & 1 & & & 3 & 3 & & \\
& & & & & 7 & 7 & \\
& & & & & & {}_{1}5 & {}_{1}5 \\
\hline
& & & 3 & 7 & {}_{1}5 & &
\end{array}$$

ขั้นที่ 5 หาผลบวกของ 6 กับ 7 กับ ${}_{1}5$ และ 7 กับ ${}_{1}5$ จะได้

$6 + 7 + {}_{1}5 = {}_{2}8$ และ $7 + {}_{1}5 = {}_{2}2$ แล้วเขียนผลลัพธ์ลงมาบรรทัดสุดท้าย ให้ตรงกับเลขที่บวกกันจะเห็นว่ามี | หน้า ${}_{2}8$

$$\begin{array}{cccccc|cc}
8 & 9 &) & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
1 & 1 & & & 3 & 3 & & \\
& & & & & 7 & 7 & \\
& & & & & & {}_{1}5 & {}_{1}5 \\
\hline
& & & 3 & 7 & {}_{1}5 & {}_{2}8 & {}_{2}2
\end{array}$$

ขั้นที่ 6 เศษที่ได้คือ ${}_{2}8\,{}_{2}2 = 302$ ซึ่งมีค่าเกิน 89 จึงทำการหารเศษต่อไป ดังนี้

$$\begin{array}{cccc|cc}
8 & 9 &) & 3 & 0 & 2 \\
1 & 1 & & & 3 & 3 \\
\hline
& & & 3 & 3 & 5
\end{array}$$

จะได้ผลลัพธ์คือ 3

เศษคือ 35

ขั้นที่ 7 นำผลลัพธ์ 3 ไปบวกกับผลลัพธ์เดิม คือ $37_{1}5$ จะได้ $37_{1}5 + 3 = 385 + 3 = 388$ คือผลลัพธ์สุดท้ายและเศษสุดท้ายคือ 35 ซึ่งได้จากขั้นที่ 6

จะได้ผลลัพธ์คือ 388

เศษคือ 35

ดังนั้น $34567 \div 89 = 388$ เศษ 35

หมายเหตุ เขียนเป็นวิธีทำแบบต่อเนื่องได้ดังนี้

$$
\begin{array}{rr|c|ll}
8\;9\;) & 3\;\;4\;\;5 & 6 & 7 & \\
1\;1 & 3\;\;3 & & & \\
 & 7 & 7 & & \\
 & & {}_{1}5 & {}_{1}5 & \\
\hline
 & 3\;\;7\;{}_{1}5 & {}_{2}8 & {}_{2}2 & \\
\hline
 & 3\;\;7\;{}_{1}5 & 3 & 0\;2 & \\
\hline
 & & & 3\;3 & \\
\cline{3-5}
 & & 3 & 3\;5 & \\
\hline
 & 3\;\;7\;{}_{1}5 & 3 & 3\;5 & = 385 + 3 \mid 35 \\
 & & & & = 388 \mid 35
\end{array}
$$

ผลลัพธ์คือ 388

เศษคือ 35

ดังนั้น $34567 \div 89 = 388$ เศษ 35

■

ตัวอย่างที่ 1.3.14 จงหาร 1011638 ด้วย 987

แนวคิด MD ของ 987 คือ 013 (ต้องเขียนเป็นเลข 3 หลักเหมือนตัวหาร จึงเติม 0 หน้า 13)

$$\begin{array}{r|l} 9\,8\,7\ )\ 1\,0\,1\,1 & 6\,3\,8 \\ 0\,1\,3 \qquad 0\,1\,3 & \\ 0\,0 & 0 \\ 0 & 2\,6 \\ & 0\,5\,2 \\ \hline 1\,0\,2\,4 & 8_1\,4_1\,0 \end{array} = 1024 \mid 950$$

ผลลัพธ์คือ 1024

เศษคือ 950

ดังนั้น $1011638 \div 987 = 1024$ เศษ 950

■

ตัวอย่างที่ 1.3.15 จงหาร 300000 ด้วย 9888

แนวคิด

$$\begin{array}{r|l} 9\,8\,8\,8\ )\ 3\,0 & 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,2 \qquad 0 & 3\,3\,6 \\ & 0\,0\,0\,0 \\ \hline 3\,0 & 3\,3\,6\,0 \end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 30

เศษคือ 3360

ดังนั้น $300000 \div 9888 = 30$ เศษ 3360

■

ในกรณีที่ตัวตั้งมีเลขโดดที่มีค่ามากกว่า 5 อยู่หลายตัว เราอาจจะแปลงเลขโดดเหล่านั้นโดยใช้ขีดบน เพื่อคิดคำนวณโดยใช้เลขโดดที่น้อยกว่า 5 จะสะดวกกว่าดังนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.16 จงหาร 98564318 ด้วย 9886

แนวคิด $98564318 = 1\ 0\ \bar{1}\ \bar{4}\ \bar{4}\ 4\ 3\ 2\ \bar{2}$

$$\begin{array}{rl}
9\ 8\ 8\ 6\ )\ 9\ 8\ 5\ 6\ 4 & 3\ 1\ 8 \\
0\,1\,1\,4\,)\,1\,0\,\bar{1}\ \bar{4}\ \bar{4} & \mid\ 4\ 3\ 2\ \bar{2} \\
0\ 1\ \ 1\ 4 & \mid \\
0\ \ 0\ 0 & \mid\ 0 \\
0\ 0 & \mid\ 0\,0 \\
0 & \mid\ \bar{3}\ \bar{3}_{\bar{1}}\ \bar{2} \\
 & \mid\ 0\,0\ \ 0\ 0 \\
\hline
1\ 0\ 0\ \bar{3}\ \ 0 & \mid\ 1\ 0_{\bar{1}}\ 0\ \ \bar{2}
\end{array}
= 1\,0\,0\,\bar{3}\ 0 \mid 1\ \bar{2}\ 0\ \bar{2}$$

$$= 9970 \mid 0898$$

ผลลัพธ์คือ 9970

เศษคือ 898

ดังนั้น $98564318 \div 9886 = 9970$ เศษ 898

■

สนุกกับตัวเลข (9)

เก้าคูณกับเก้าได้ เก้า แปด ศูนย์ หนึ่ง

9×9	=	81
99×99	=	9801
999×999	=	998001
9999×9999	=	99980001
99999×99999	=	9999800001
999999×999999	=	999998000001
9999999×9999999	=	99999980000001
99999999×99999999	=	9999999800000001
$999999999 \times 999999999$	=	999999998000000001

ตัวอย่างที่ 1.3.17 จงหาร 9876534201 ด้วย 8876

แนวคิด $9876534201 = 1\,0\,\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{4}\,5\,3\,4\,2\,0\,1$

$$8\ 8\ 7\ 6\ )\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 3\ 4\ 2\ 0\ 1$$

$$\begin{array}{r|l}
1\ 1\ 2\ 4\ )\ 1\ 0\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{4}\ 5\ 3 & 4\ 2\ 0\ 1 \\
1\ 1\ 2\ 4\ \ \ \ \ \ \ & \\
1\ 1\ 2\ 4\ \ \ \ \ & \\
1\ 1\ 2\ 4\ \ \ & \\
2\ 2\ 4 & 8 \\
5\ 5 & {}_{1}0\ {}_{2}0 \\
{}_{1}8 & {}_{1}8\ {}_{3}6\ {}_{7}2 \\
 & {}_{3}4\ {}_{3}4\ {}_{6}8\ {}_{13}6 \\
\hline
1\ 1\ 1\ 2\ 5\ {}_{1}8\ {}_{3}4 & {}_{7}4\ {}_{9}2\ {}_{14}0\ {}_{13}7 \\
1\ 1\ 1\ 2\ 6\ {}_{1}1\ 4 & {}_{8}3\ 2\ {}_{15}3\ 7 \\
1\ 1\ 1\ 2\ 7\ 1\ 4 & {}_{8}4\ 7\ 3\ 7 \\
 & 8 \mid 4\ 7\ 3\ 7 \\
 & \ \ \mid 8\ 8\ {}_{1}6\ {}_{3}2 \\
 & 8 \mid {}_{1}2\ {}_{1}5\ {}_{1}9\ {}_{3}9 \\
\hline
1\ 1\ 1\ 2\ 7\ 2\ 2 & \ \ \mid {}_{1}3\ 7\ 2\ 9 \\
 & 1 \mid 3\ 7\ 2\ 9 \\
 & \ \ \mid 1\ 1\ 2\ 4 \\
 & 1 \mid 4\ 8\ 4\ {}_{1}3 \\
\hline
1\ 1\ 1\ 2\ 7\ 2\ 3 & 4\ 8\ 5\ 3
\end{array}$$

ผลลัพธ์คือ 1112723

เศษคือ 4853

ดังนั้น $9876534201 \div 8876 = 1112723$ เศษ 4853

■

ตัวอย่างที่ 1.3.18 จงหาร 157689 ด้วย 887

แนวคิด 157689 $= 2\bar{4}\bar{2}\bar{3}\bar{1}\bar{1}$

$$
\begin{array}{r|l|l}
887)\ 1\ 5\ 7 & \multicolumn{2}{l}{6\ \ 8\ \ 9} \\
113)\ 2\ \bar{4}\ \bar{2} & \multicolumn{2}{l}{\bar{3}\ \ \bar{1}\ \ \bar{1}} \\
2\ 2 & \multicolumn{2}{l}{6} \\
\bar{2} & \multicolumn{2}{l}{\bar{2}\ \ \bar{6}} \\
 & \multicolumn{2}{l}{\bar{2}\ \ \bar{2}\ \ \bar{6}} \\
\hline
2\ \bar{2}\ \bar{2} & \multicolumn{2}{l}{\bar{1}\ \ \bar{9}\ \ \bar{7}} \\
1\ 7\ 8 & \multicolumn{2}{l}{\bar{1}8\ \ 0\ \ 3} \\
\hline
1\ 7\ 8 & \bar{1} & 8\ 0\ 3 \\
 & & \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{3} \\
 & \bar{1} & 7\ \bar{1}\ 0 \\
\hline
1\ 7\ 8 & \bar{1} & 6\ 9\ 0 \\
1\ 7\ 7 & & 6\ 9\ 0
\end{array}
$$

ผลลัพธ์คือ 177

เศษคือ 690

ดังนั้น 157689 ÷ 887 = เศษ 690

■

สนุกกับตัวเลข (10)

ศูนย์ ระหว่างหนึ่ง กับ แปด

12×9	=	108
112×99	=	11088
1112×999	=	1110888
11112×9999	=	111108888
111112×99999	=	11111088888
1111112×999999	=	1111110888888
11111112×9999999	=	111111108888888
$111111112 \times 99999999$	=	11111111088888888
$1111111112 \times 999999999$	=	

แบบฝึกหัดที่ 9

จงหาผลหารต่อไปนี้ (ตอบในรูปผลลัพธ์ และเศษ)

1. 68 ÷ 9
2. 221 ÷ 9
3. 3128 ÷ 8
4. 6153 ÷ 89
5. 212132 ÷ 989

สนุกกับตัวเลข (11)
ซ้ำแล้วซ้ำอีก

1/ 89 = $0.\dot{0}1234567\dot{9}$

1/ 891 = $0.\dot{0}11223344\ 55667789$

1/ 8991 = $0.\dot{0}001112223\ \ 33444555666777888\dot{9}$

1/ 89991= $0.\dot{0}0001111222\ 2333344445555666677\ 77888\ \dot{9}$

1/ 899991 =

$0.\dot{0}0000111112\ 2222333\ 33444445\ 5555666667\ 77778888\ \dot{9}$

1/ 27 = $0.\dot{0}3\dot{7}$

1/ 297 = $0.\dot{0}0336\dot{7}$

1/ 2997 = $0.\dot{0}0033366\dot{7}$

1/ 29997 = $0.\dot{0}000333366\dot{6}7$

1/ 299997 = $0.\dot{0}0000333336\ \ 666\dot{7}$

ทศนิยม

เรื่องที่ 3 ทศนิยม

การหารสังเคราะห์สามารถหาผลลัพธ์ในระบบทศนิยมได้โดยใส่จุดหลังตัวตั้งและเติม 0 เท่ากับจำนวนตำแหน่งของทศนิยมที่ต้องการ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.19 จงหาค่าของ 345675 ÷ 9 ต้องการทศนิยม 10 ตำแหน่ง 1

แนวคิด 9) 3 4 5 6 7 5

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
1\quad 3\ 7\ {}_{1}2\ {}_{1}8 & {}_{2}5 & & \\
\hline
\quad 3\ 7\ {}_{1}2\ {}_{1}8\ {}_{2}5 & & & \\
\hline
\quad 3\ 8\ 4\ 0\ 5 & 3\ 0 & & \\
 & & 3 & \\
\hline
\quad 3\ 8\ 4\ 0\ 5 & 3 & 3 & \\
\quad 3\ 8\ 4\ 0\ 5+3 & & 3 & \\
\quad 3\ 8\ 4\ 0\ 8 & & 3\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
 & & \quad 3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3 & 3 \\
\hline
 & & \quad 3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3 & 3 \\
\hline
\multicolumn{3}{l}{\quad 3\ 8\ 4\ 0\ 8.3\ 3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3\,3} & \\
\end{array}
$$

(หาร 3 ที่เป็นเศษ โดยเติม 0 หลัง 3 ที่เป็นเศษ 10 ตัว แล้วเขียน | หน้า 0 ตัวขวาสุด)

ดังนั้น 345675 ÷ 9 = 38408.3333333333

■

สนุกกับตัวเลข (12)

ศูนย์ ระหว่างแปด กับ หนึ่ง

89×9	=	801
889×99	=	88011
8889×999	=	8880111
88889×9999	=	888801111
888889×99999	=	88888011111
8888889×999999	=	8888880111111
88888889×9999999	=	888888801111111
888888889×99999999	=	88888888011111111

ตัวอย่างที่ 1.3.20 จงหาค่าของ 2341 ÷ 89 ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง

แนวคิด

```
89 ) 23 | 41
11    2 | 2
        | 55
-------------
     25 |₁16
     25 1 | 16
          | 11
          ------
        1 | 27
     ----------
     25+1 | 27
       26 | 27000   (หารเศษ 27 เมื่อต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง
          |   22     เติม 0 จำนวน 3 ตัวหลัง 27 แล้วทำการหาร)
          |    99
          |    ₁1₁1
     ------------
          | 29₁1₂0₁1
          | 30311
     ------------
       26 | 303
       26.303
```

ดังนั้น $2341 \div 89 = 26.303$

■

สนุกกับตัวเลข (13)

ทำอย่างไรก็หนีไม่พ้นแปด

$(0 \times 9) + 8$	=	8
$(9 \times 9) + 7$	=	88
$(98 \times 9) + 6$	=	888
$(987 \times 9) + 5$	=	8888
$(9876 \times 9) + 4$	=	88888
$(98765 \times 9) + 3$	=	888888
$(987654 \times 9) + 2$	=	8888888
$(9876543 \times 9) + 1$	=	88888888
$(98765432 \times 9) + 0$	=	888888888
$(987654321 \times 9) + -1$	=	8888888888

ตัวอย่างที่ 1.3.21 จงหาค่าของ 2467 ÷ 8 ต้องการทศนิยม 2 ตำแหน่ง

แนวคิด

$8\ )\ 2\ 4\ 6 \mid 7$

$2 \quad 4\ {}_{1}6 \mid {}_{4}4$

$2\ 8\ {}_{2}2 \mid {}_{5}1$

$3\ 0\ 2 \mid 5 \mid 1$

${}_{1}0$

$5 \mid {}_{1}1$

$3\ 0\ 7 \mid {}_{1}1$

$3\ 0\ 7 \mid 1 \mid 1$

2

$1 \mid 3$

$3\ 0\ 8 \mid 3\ 0\ 0$

$6\ {}_{1}2$

$3\ 6\ {}_{1}2$

$3\ 7\ 2$

$3\ 0\ 8 \mid 3\ 7\ 2$

$3\ 0\ 8\ .\ 3\ 7$

ดังนั้น 2467 ÷ 8 = 308.37

■

สนุกกับตัวเลข (14)

การบวกแบบพาลินโดรมและกำลังสอง

1	=	1	=	1^2
1+2+1	=	4	=	2^2
1+2+3+2+1	=	9	=	3^2
1+2+3+4+3+2+1	=	16	=	4^2
1+2+3+4+5+4+3+2+1	=	25	=	5^2
1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1	=	36	=	6^2
1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1	=	49	=	7^2
1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1	=	64	=	8^2
1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1	=	81	=	9^2

ตัวอย่างที่ 1.3.22 จงหาค่าของ 64532 $\div$ 98 ต้องการทศนิยม 3 ตำแหน่ง

แนวคิด

```
98 ) 6 4 5 | 3 2
0 2    0₁2 |
         0 | 8
           | 0₃4
-----------+-----
    6 4₁7  | ₁1₃6
    6 5 7  | ₁4 6
    6 5 7  | 1 | 4 6
           |   | 0 2
           +---+-----
           | 1 | 4 8
    6 5 8  | 4 8 0 0
           |     0 8
           |       0₁6
           |   ---------
           |   4 8 8₁6
           |   4 8 9 6
-----------+-----------
    6 5 8  | 4 8 9 6
    6 5 8  . 4 8 9
```

ดังนั้น 64532 $\div$ 98 = 658.489

ข้อสรุป ■

การหารโดยวิธีนี้เหมาะสำหรับตัวหารที่มีค่ามาก ในขณะที่จำนวนทบสิบหรือทบร้อยทบพัน ฯลฯ ของตัวหารเหล่านั้นมีตัวเลขโดดแต่ละตัวมีค่าน้อย นอกจากนี้การหารสังเคราะห์จะเป็นการปฏิบัติการกลับกับหารธรรมดา กล่าวคือ ใช้การคูณ และการบวก ในขณะที่การหารธรรมดาต้องใช้การหาร และการลบ การหารโดยวิธีนี้จึงรวดเร็วกว่า

แบบฝึกหัดที่ 10

จงหาผลหารต่อไปนี้ (ตอบในรูปทศนิยมห้าตำแหน่ง)

1. 68 $\div$ 9
2. 221 $\div$ 9
3. 3128 $\div$ 8
4. 6153 $\div$ 89
5. 212132 $\div$ 989

หน่วยที่ 2
ลำดับของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต

ตอนที่ 2.1 ลำดับของจำนวนเชิง รูปสามเหลี่ยม และจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ตอนที่ 2.2 ลำดับของจำนวนเชิงรูปพีรามิด ฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ตอนที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต

แนวคิด 1. แบบรูปทางคณิตศาสตร์ เป็นรูปธรรมที่สื่อให้เกิดกระบวนการทางความคิดได้อย่างสร้างสรรค์ และมีเสรีภาพนำไปสู่ปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ พัฒนาความรู้ให้กว้างและลึกซึ้งขึ้น ทำให้มีการพัฒนาการในกระบวนการแก้ปัญหาที่ดี

2. ลำดับของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิตเป็นแบบรูปหนึ่งทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และพีรามิด เป็นต้น

3. จำนวนเชิงรูปเรขาคณิตสามารถเขียนเป็น ผลบวกของจำนวนและรูปทั่วไปได้ นอกจากนี้ จำนวนเหล่านี้ยังมีความสัมพันธ์กันได้ หลากหลายรูปแบบ

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 9 จบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. สร้างรูปเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับ จำนวนเชิงรูปเรขาคณิตได้
2. หาค่าของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิตได้
3. หาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงรูปเรขาคณิตได้
4. ใช้สัญลักษณ์ $\sum$ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเชิงรูปเรขาคณิตได้

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายความหมายของรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ลำดับของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต พร้อมทั้งให้ตัวอย่างลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จำนวนเชิงรูปพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
2. นักเรียนอภิปรายความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต ทั้งความสัมพันธ์จากผลบวก และความสัมพันธ์จากรูปทั่วไป
3. นักเรียนทำกิจกรรมตามตัวอย่าง และแบบฝึกหัดเพื่อหาผลบวกของจำนวน และรูปทั่วไปของจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

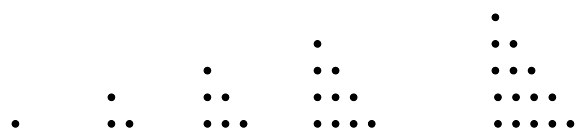
ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 2.1 ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม และจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เรื่องที่ 1 ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม

1. ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม

เมื่อเขียนจุด ● ให้เรียงตัวกันเป็นรูปสามเหลี่ยมจะได้ จำนวนจุดที่แทนจำนวนเรียงตัวเป็นลำดับดังนี้



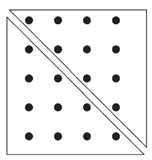
จำนวน	1	3	6	10	5	
ลำดับที่	1	2	3	4	5	... n

ได้ลำดับของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม คือ 1, 3, 6, 10, 15,…, $\frac{1}{2}n(n+1)$

ทำไมจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n มีรูปทั่วไป คือ $\frac{1}{2}n(n+1)$

รูปทั่วไปนี้อาจแสดงเหตุผลประกอบได้ดังนี้

ถ้าเขียนจุดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 4×5 จุด แล้วแบ่งเป็นจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ 4 จะได้สองรูปดังนี้

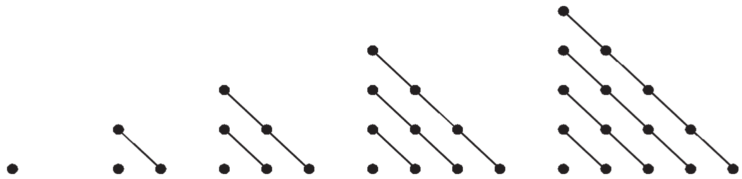


จะพบว่าจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม ลำดับที่ 4 คือ 10 และ $10 = \frac{4 \text{ x } 5}{2}$

ทำนองเดียวกัน ถ้าเขียนจุดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $n \times (n+1)$ จุด จะแบ่งจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n ได้ สองรูป

จึงได้ จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n คือ $\frac{1}{2}n(n+1)$
ถ้าแทนจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n ด้วย Δ_n จะได้
$\Delta_1 = 1$ $\Delta_2 = 3$ $\Delta_3 = 6$ $\Delta_4 = 10$ $\Delta_5 = 15$ $\Delta_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

2. ผลบวกจำนวนนับ n จำนวนแรก 1 + 2 + 3 + ... + n (เขียนแทนด้วย $\sum_{i=1}^{n} i$ อ่านว่า ซิกมาไอ เมื่อไอมีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงเอ็น)



จำนวน	1	1+2 = 3	1+2+3 = 6	1+2+3+4 = 10	1+2+3+4+5 = 15
ผลบวก	$\sum_{i=1}^{1} i = 1$	$\sum_{i=1}^{2} i = 3$	$\sum_{i=1}^{3} i = 6$	$\sum_{i=1}^{4} i = 10$	$\sum_{i=1}^{5} i = 15$
Δ_n	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5

แบบฝึกหัด 11

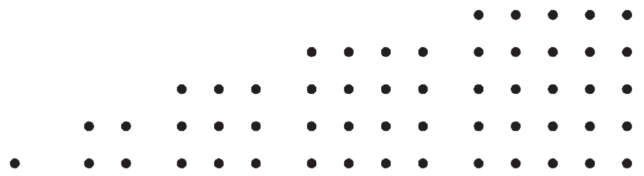
1. จงหาค่าของ Δ_n และค่าของจำนวนที่กำหนดดังต่อไปนี้
   (1) Δ_{10} , Δ_{11} , Δ_{99} , Δ_{100} และ Δ_{101}
   (2) Δ_9+10 , $\Delta_{10}+11$, $\Delta_{98}+99$, $\Delta_{99}+100$ และ $\Delta_{100}+101$
   (3) $\Delta_1+\Delta_2$, $\Delta_2+\Delta_3$, $\Delta_3+\Delta_4$, $\Delta_{99}+\Delta_{100}$

2. จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง Δ_{n-1} , Δ_n , n และ n^2 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

เรื่องที่ 2 ลำดับของจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1. ลำดับของจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เมื่อเขียนจุดให้เรียงตัวกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะได้จำนวนจุดที่แทนจำนวนจะเรียงตัวเป็นลำดับดังนี้



จำนวน	1	4	9	16	25	
ลำดับที่	1	2	3	4	5	... n

ได้ลำดับของจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ 1, 4, 9, 16, 25, …, n^2

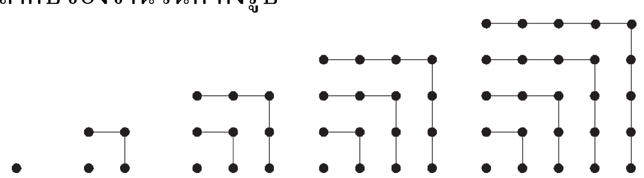
ได้ลำดับของจำนวนเต็มบวกที่ยกกำลังสองหรือลำดับของ n^2 คือ

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots, n^2$ ถ้าแทนจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ n ด้วย $\square_n$ จะได้

$\square_1 = 1^2$ $\square_2 = 2^2$ $\square_3 = 3^2$ $\square_4 = 4^2$ $\square_5 = 5^2$ และ $\square_n = n^2$

2. ผลบวกของจำนวนคี่บวก n จำนวนแรก $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$

จากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อพิจารณาแนวหักเป็นมุมฉาก(⌉)จะพบการเรียงตัวของจุดเพิ่มขึ้นเป็นลำดับของจำนวนคี่ ดังรูป



1	1+3 = 4	1+3+5=9	1+3+5+7=16	1+3+5+7+9=25
$1=1^2$	$1+3 = 2^2$	$1+3+5=3^2$	$1+3+5+7=4^2$	$1+3+5+7+9=5^2$

สอดคล้องกันกับรูปทั่วไปที่ว่าผลบวกของจำนวนบวกคี่ n จำนวนแรกเท่ากับ n^2

นั่นคือ $1+3+5+\ldots+(2n-1)= n^2$

ซึ่ง $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ เขียนในรูปซิกมาได้เป็น $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ อ่านว่า ซิกมาของสองไอลบหนึ่งเมื่อไอมีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงเอ็น

จึงได้ $\square_n = n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$

แบบฝึกหัด 12

1. จงเขียน $\square_n$ ในรูปผลบวกของจำนวนคี่บวก n จำนวนแรกจาก $\square_n$ ต่อไปนี้
$\square_3$, $\square_5$, $\square_7$, $\square_{10}$, $\square_{21}$ และ $\square_{25}$

2. จงศึกษาแบบรูปของ n^2 และ n^3 ดังนี้

1	$= 1^2$	1	$= 1^3$
$1 + 3$	$= 2^2$	$3 + 5$	$= 2^3$
$1 + 3 + 5$	$= 3^2$	$7 + 9 + 11$	$= 3^3$
$1 + 3 + 5 + 7$	$= 4^2$	$13 + 15 + 17 + 19$	$= 4^3$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9$	$= 5^2$	$21 + 23 + 25 + 27 + 29$	$= 5^3$

พบว่า $1^3 = 1^2 = \square_1$

$1^3 + 2^3 = 1 + 3 + 5 = \square_3$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2 = \square_6$

จงเขียน $\square_{10}$ ในรูปของผลบวกกำลังสามของจำนวนนับที่เรียงกัน เริ่มจาก 1^3

3. จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\square_{n-1}$, $\square_n$, n และ n^2 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

4. พิจารณาแบบรูปลำดับของการบวกต่อไปนี้

1	$= 1$	$= 1^2$
$1 + 2 + 1$	$= 4$	$= 2^2$
$1 + 2 + 3 + 2 + 1$	$= 9$	$= 3^2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$	$= 16$	$= 4^2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$	$= 25$	$= 5^2$
•	•	•
•	•	•
•	•	•

จะพบว่า $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2$

ถ้าเรียกการบวกลักษณะนี้ว่า “การบวกแบบขั้นบันได” และเรียกผลบวกที่ได้ว่าจำนวนขั้นเชิงบันได เขียนแทนด้วย $⏏_n$ จะพบว่า $⏏_n = \square_n$

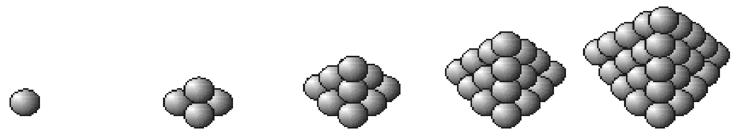
จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $⏏_{n-1}$, $⏏_n$, n และ n^2 เมื่อ n เป็น จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

ตอนที่ 2.2 ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เรื่องที่ 1 ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

1. ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ถ้าวางลูกกลมให้เป็นพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะได้จำนวนลูกกลมแทนจำนวนที่เรียงตัวกันเป็นลำดับดังนี้



จำนวน	1	4	10	20	35	
ลำดับที่	1	2	3	4	5	... n

ได้ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ 1, 4, 10, 20, 35, …, $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

ทำไมจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ลำดับที่ n มีรูปทั่วไปคือ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

ในการสร้างจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าลำดับที่ n จะพบว่า เริ่มแรกการสร้างฐานจะสร้างเป็นรูป Δ_n ก่อน แล้วสร้างชั้นต่อไปเป็นรูป Δ_{n-1} ชั้นสูงขึ้นเป็น Δ_{n-2} จนชั้นสุดท้ายคือ $\Delta_1 = 1$ รูปทั่วไปอาจแสดงเหตุผลประกอบได้ดังนี้

ถ้าแทนจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ลำดับที่ n ด้วย Δ_n จะได้

$$\blacktriangle_1 = \Delta_1 = 1$$

$$\blacktriangle_2 = \Delta_1 + \Delta_2 = 1 + 3 = 4$$

$$\blacktriangle_3 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 1 + 3 + 6 = 10$$

$$\blacktriangle_4 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

$$\blacktriangle_5 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$$

พิจารณา $\blacktriangle_4 = 1 + 3 + 6 + 10$

จะได้ $\blacktriangle_4 = 1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4)$

หรือ $\blacktriangle_4 = 1 + (2+1) + (3+2+1) + (4+3+2+1)$

หรือ $\blacktriangle_4 = 4 + (3+3) + (2+2+2) + (1+1+1+1)$

เมื่อบวกตามแนวตั้งจะได้ $3\blacktriangle_4 = (1+1+4) + (1+2+3) + (2+1+3) + (1+3+2) + (2+2+2) + (3+1+2)$

$$+ (1+4+1) + (2+3+1) + (3+2+1) + (4+1+1)$$

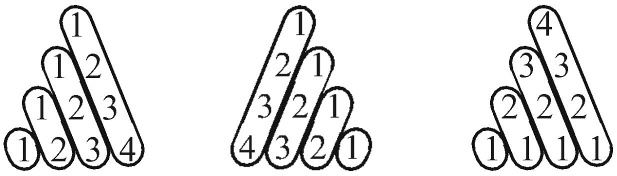
$$= 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$$

$$= 10 \times 6$$

$$= (1+2+3+4\ ) \times (4+2)$$

$$3\blacktriangle_4 = \Delta_4\,(\,4+2\,)$$

ถ้าเขียน $\blacktriangle_4$ ในแบบรูปการบวกจะเขียนดังนี้

$\blacktriangle_4 =$ 

จะเห็นได้ว่า $3\blacktriangle_4 = \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & \\ & 1 & & 2 & & 3 & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 \end{matrix} + \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 1 & & \\ & 3 & & 2 & & 1 & \\ 4 & & 3 & & 2 & & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} & & & 4 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 2 & & 2 & & 2 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} & & & 6 & & & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & 6 & & 6 & & 6 & \\ 6 & & 6 & & 6 & & 6 \end{matrix}$

และ $\begin{matrix} & & & 6 & & & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & 6 & & 6 & & 6 & \\ 6 & & 6 & & 6 & & 6 \end{matrix} = \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{matrix} \times 6 \quad = (1+2+3+4) \times (4+2)$

ทำนองเดียวกันจะได้ $3\blacktriangle_5 = \Delta_5\ (5 + 2)$

$$3\blacktriangle_n = \Delta_n\ (n + 2)$$

ดังนั้น $\blacktriangle_n = \frac{1}{3}\Delta_n\ (n + 2)$

$$= \frac{1}{6}\ n\ (n + 1)(n + 2)$$

2. ผลบวกของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม (เขียนแทนด้วย $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$ อ่านว่า ซิกมารูปสามเหลี่ยมไอ เมื่อไอมีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงเอ็น)

จากจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะพบว่าการเรียงตัวลูกกลมจากฐานที่เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะซ้อนกันเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าขึ้นมาเป็นชั้นๆ โดยรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าชั้นบนจะมีความยาวด้านน้อยกว่า ความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าชั้นล่างที่ติดกันอยู่ 1 หน่วย

ถ้าพีรามิดสูง 5 ชั้นจะพบว่า ชั้นที่ 1 ถึงชั้นที่ 5 จะมีลูกกลมอยู่เป็นจำนวน $\frac{5\cdot6}{2}, \frac{4\cdot5}{2}, \frac{3\cdot4}{2}, \frac{2\cdot3}{2}$

และ $\frac{1\cdot2}{2}$ เมื่อเขียนเรียงใหม่ จะได้ $\frac{1\cdot2}{2}, \frac{2\cdot3}{2}, \frac{3\cdot4}{2}, \frac{4\cdot5}{2}$ และ $\frac{5\cdot6}{2}$

ถ้านำมาบวกกันจะได้ $\frac{1\cdot2}{2}+\frac{2\cdot3}{2}+\frac{3\cdot4}{2}+\frac{4\cdot5}{2}+\frac{5\cdot6}{2} = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{5} \Delta_i = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5$

จะได้ $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\dots+\Delta_n$ …(1)

เนื่องจาก $\Delta_i = 1+2+3+\dots+i$ …(2)

$$= \sum_{j=1}^{i} j$$

จาก (1) และ (2) จึงได้

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$$

แต่ $\blacktriangle_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$

ดังนั้น $\blacktriangle_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$

ตารางต่อไปนี้เป็นการเปรียบเทียบการหาค่า $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$ กับ $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$

ผลบวกในรูปซิกมาของซิกมา	ผลบวกในรูปซิกมาของ Δ_i
$\blacktriangle_1 = \sum_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$ $= \sum_{j=1}^{1}$ $= 1$	$\blacktriangle_1 = \sum_{i=1}^{1} \Delta_i$ $= \Delta_1$ $= 1$
$\blacktriangle_2 = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$ $= \sum_{j=1}^{1} j + \sum_{j=1}^{2} j$ $= 1 + (1+2)$ $= 4$	$\blacktriangle_2 = \sum_{i=1}^{2} \Delta_i$ $= \Delta_1 + \Delta_2$ $= 1 + (1+2)$ $= 4$
$\blacktriangle_3 = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$ $= \sum_{j=1}^{1} j + \sum_{j=1}^{2} j + \sum_{j=1}^{3} j$ $= 1 + (1+2) + (1+2+3)$ $= 10$	$\blacktriangle_3 = \sum_{i=1}^{3} \Delta_i$ $= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ $= 1 + (1+2) + (1+2+3)$ $= 10$

นอกจากนี้ เนื่องจาก $\blacktriangle_n = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$

และ $\blacktriangle_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{J=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\, i(i+1)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(i^2 + i)\right)$

จึงได้ $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{J=1}^{i} j\right) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$

และ $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(i^2 + i)\right) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$

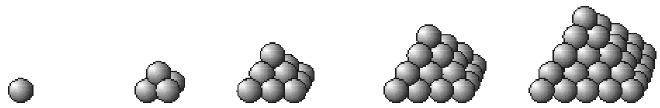
แบบฝึกหัด 13

1. จงหาค่าของ ◭$_n$ ดังต่อไปนี้
   ◭$_6$, ◭$_7$, ◭$_{10}$, ◭$_{50}$ และ ◭$_{100}$
2. จงเขียน ◭$_n$ ในรูป ◭$_{n-1}$ และ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1
3. จงเขียน ◭$_4$ และ ◭$_5$ และ ◭$_6$ ในรูปซิกมาของ Δ_i และซิกมาของซิกมา

เรื่องที่ 2 ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1.ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ถ้าวางลูกกลมให้เป็นพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะได้จำนวนลูกกลมแทนจำนวนที่ เรียงตัวกันเป็นลำดับดังนี้

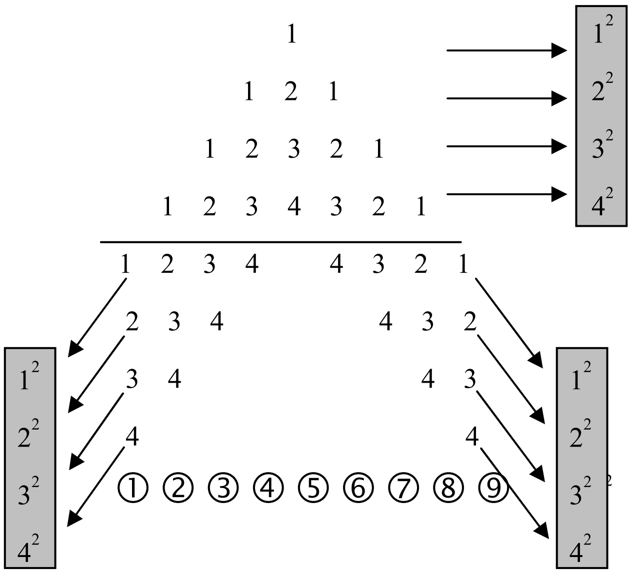


จำนวน	1	5	14	30	55
ลำดับที่	1	2	3	4	5

ได้ลำดับของจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือ 1, 5, 14, 30, 55, .., $\frac{1}{6}$ n (n + 1)(n + 2)
ทำไมจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ลำดับที่ n มีรูปทั่วไปคือ $\frac{1}{6}$ n (n + 1)(n + 2)
ในการสร้างจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ลำดับที่ n จะพบว่าเริ่มแรกเป็นรูป $\square n^{=\ n2}$
จนถึงชั้นสุดท้ายคือ $\square_1 = 1$ การสร้างฐานจะสร้างเป็นรูป $\square_n$ ก่อนแล้วสร้างชั้นต่อไปในรูป $\square_{n-1}$
ชั้นสูงขึ้น ถ้าแทนจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้วย $\boxtimes_n$ จะได้

$\boxtimes_1 = \square_1$, $\boxtimes_2 = \square_1 + \square_2$, $\boxtimes_n = \square_1 + \square_2 + \square_3 + ... + \square_n$

รูปทั่วไปนี้ อาจแสดงโดยแบบรูปของจำนวนที่บวกกันดังนี้



จากรูปจะพบว่า $3\ \boxed{(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)} = 9\ (1+2+3+4)$

$$3\boxtimes_4 = 9\ \Delta_4$$
$$= ((2 \times 4) + 1)\ \Delta_4$$

ทำนองเดียวกันสำหรับ $\boxtimes_5$ จะได้

$$3\boxtimes_5 = ((2 \times 5) + 1)\ \Delta_5$$

และ $3\boxtimes_n = (2n + 1)\ \Delta_n$

$$= (2n + 1)\ \tfrac{1}{2}\ n(n+1)$$

$$\boxtimes_n = \tfrac{1}{6}\ n\ (n + 1)(2n + 1)$$

2. ผลบวกของกำลังสองของจำนวนนับ n จำนวนแรก (เขียนแทนด้วย $\sum_{i=1}^{n} i^2$ อ่านว่า ซิกมาไอ กำลังสอง เมื่อไอมีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงเอ็น)

จากจำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะพบว่าการเรียงตัวลูกกลมจากฐานที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะซ้อนกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขึ้นมาเป็นชั้นๆ โดยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสชั้นบนจะมีความยาวด้านน้อยกว่าความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสชั้นล่างที่ติดกันอยู่ 1 หน่วย

ถ้าพีรามิดสูง 5 ชั้นจะพบว่า ชั้นที่ 1 ถึงชั้นที่ 5 จะมีลูกกลมเป็นจำนวน 5^2 , 4^2 , 3^2 , 2^2 และ 1^2 เมื่อเขียนเรียงใหม่จะได้ 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2

ถ้านำมาบวกกันจะได้ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

จำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคิดตามความยาวด้านฐานได้ดังนี้

ฐาน 1 หน่วย เท่ากับ 1

ฐาน 2 หน่วย เท่ากับ $1^2 + 2^2 = 5$

ฐาน 3 หน่วย เท่ากับ $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

ฐาน 4 หน่วย เท่ากับ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

ฐาน 5 หน่วย เท่ากับ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

จะได้ $\boxtimes_1 = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$

$\boxtimes_2 = \sum_{i=1}^{2} i^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$\boxtimes_3 = \sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

$\boxtimes_4 = \sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

$\boxtimes_5 = \sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

และ $\boxtimes_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1)$

แบบฝึกหัด 14

1. จงหาค่า $\boxtimes_n$ ดังต่อไปนี้

   $\boxtimes_6$, $\boxtimes_7$, $\boxtimes_{10}$, $\boxtimes_{50}$ และ $\boxtimes_{100}$

2. จงเขียน $\boxtimes_n$ ในรูป $\boxtimes_{n-1}$ และ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1

ตอนที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงรูปเรขาคณิต

เรื่องที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและจำนวนเชิงขั้นบันได

1. ความสัมพันธ์จากผลบวก

ถ้าให้ Δ_n เป็นจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมลำดับที่ n (กำหนด $\Delta_0 = 0$)

$\square_n$ เป็นจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสลำดับที่ n (กำหนด $\square_0 = 0$)

$⏏_n$ เป็นจำนวนเชิงขั้นบันได (กำหนด $⏏_0 = 0$)

จะได้ $\Delta_n = 1+2+3+ \ldots + n$

$$\square_n = n^2 = 1+3+5+ \dots + (2n-1)$$

$$\boxminus_n = n^2 = 1+2+3+ \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 3+ 2 + 1$$

$$= (1+2+3+ \dots + (n-1) + n) + (1+2+3+ \dots + (n-1))$$

$$= \Delta_n + \Delta_{n-1}$$

ดังนั้น $\square_n = \boxminus_n = \Delta_n + \Delta_{n-1}$

2. ความสัมพันธ์จากรูปทั่วไป

จากรูปทั่วไปของ $\Delta_n = \frac{1}{2} n(n+1)$

และ $\Delta_{n-1} = \frac{1}{2} (n-1) n$

จะได้ $\Delta_n + \Delta_{n-1} = \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{2} (n-1) n$

$$= \frac{1}{2} (n(n+1) + (n-1) n)$$

$$= \frac{1}{2} (n^2 + n + n^2 - n)$$

$$= n^2$$

$$= \square_n = \boxminus_n$$

ดังนั้น $\square_n = \boxminus_n = \Delta_n + \Delta_{n-1}$

เรื่องที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และจำนวนพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1. ความสัมพันธ์จากผลบวก

ถ้าให้ $\blacktriangle_n$ เป็น จำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ลำดับที่ n (กำหนด $\blacktriangle_0 = 0$)

$\boxtimes_n$ เป็น จำนวนเชิงพีรามิดฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ลำดับที่ n (กำหนด $\boxtimes_0 = 0$)

จะได้ $\blacktriangle_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n$

$\boxtimes_n = \square_1 + \square_2 + \square_3 + \dots + \square_n$

พิจารณา $\boxtimes_n = \square_1 + \square_2 + \square_3 + \dots + \square_n$

$$= (\Delta_0 + \Delta_1) + (\Delta_1 + \Delta_2) + (\Delta_2 + \Delta_3) + \dots + (\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}) + (\Delta_{n-1} + \Delta_n)$$

$$= (\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{n-1}) + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n)$$

$$= \blacktriangle_{n-1} + \blacktriangle_n$$

ดังนั้น $\boxtimes_n = \blacktriangle_{n-1} + \blacktriangle_n$

นอกจากนี้ $\blacktriangle_n = \blacktriangle_{n-1} + \Delta_n$ และ $\blacktriangle_{n-1} = \blacktriangle_n - \Delta_n$

จะได้ $\boxtimes_n = \blacktriangle_{n-1} + \blacktriangle_{n-1} + \Delta_n$

$= 2\blacktriangle_{n-1} + \Delta_n$

จาก $\boxtimes_n = 2\blacktriangle_{n-1} + \Delta_n$ และ $\blacktriangle_{n-1} = \blacktriangle_n - \Delta_n$

จะได้ $\boxtimes_n = 2\blacktriangle_n - 2\Delta_n + \Delta_n$

$= 2\blacktriangle_n - \Delta_n$

2. ความสัมพันธ์จากรูปทั่วไป

จากรูปทั่วไป ของ $\blacktriangle_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

และ $\blacktriangle_{n-1} = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$

จะได้ $\blacktriangle_n + \blacktriangle_{n-1} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)((n+2)+(n-1))$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$= \boxtimes_n$

แบบฝึกหัด 15

ให้ $\square_n$ แทนจำนวนเชิงลูกบาศก์ลำดับที่ n กำหนดโดย $\square_n = n^3$

และ $\sum\limits_{i=1}^{n} \square_i = \square_1 + \square_2 + \square_3 + \ldots + \square_n$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^3$$

พิจารณา แบบรูปต่อไปนี้

$$1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5^3$$

จะเห็นว่า $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + 29}$

ผลบวกจำนวนคี่บวก 15 จำนวนแรก ซึ่งผลบวกจำนวนคี่บวก n จำนวนแรกเท่ากับ n^2

ดังนั้น $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$

และ $15 = \Delta_5$

จึงได้ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (\Delta_5)^2$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (\Delta_6)^2$

นอกจากนี้ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\Delta_n)^2$

1. จงแสดงว่า $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$
2. จงแสดงว่า $\square_n = n(\Delta_{n-1} + \Delta_n)$
3. จงเขียน $\square_n - \boxtimes_n$ ให้มีผลลัพธ์ในรูปที่มี n, Δ_{n-1} และ Δ_n ปรากฏ
4. จงเขียน $\square_n - \blacktriangle_n$ ให้มีผลลัพธ์ในรูปที่มี n และ Δ_i ปรากฏเมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$

หน่วยที่ 3

คณิตศาสตร์กับ ICT

ตอนที่ 3.1　นักคณิตศาสตร์ (Mathematicians)

ตอนที่ 3.2　ลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci Sequences)

ตอนที่ 3.1　นักคณิตศาสตร์ (Mathematicians)

การสืบค้นประวัติ และผลงานของนักคณิตศาสตร์ สืบค้นได้จาก Web sites เช่น

http://www.yahoo.com/Science/Mathematics/History/Mathematics

http://www-groups.des.st-andrew.ac.uk/~history/

http://forum.swarthmore.edu/~steve/steve/mathhistory.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Day-files/Year.html

http://dimacs.rutgers.edu/~judyann/calendar/Calendar.html

เมื่อสืบค้นแล้วศึกษาเรื่องต่อไปนี้

1. นักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียง 6 คน ชาย 3 คน หญิง 3 คน
2. นักคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชอบนอกเหนือจาก 6 คนแรก อีก 4 คน
3. ผลงานที่น่าสนใจของนักคณิตศาสตร์
4. ประวัติผลงาน และแผนที่บ้านเกิดของนักคณิตศาสตร์ที่มีวันเกิดตรงกับวันเกิดของนักเรียน

เขียนหัวข้อทั้ง 4 เป็นรายงาน

ตอนที่ 3.2 ลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci Sequences)

บทนำ

ลำดับฟีโบนักชีได้ปรากฏครั้งแรกในรูปของคำตอบของโจทย์ปัญหาในหนังสือ The Liber Abaci ที่เขียนขึ้นในปี ค.ศ. 1202 โดย Leonardo Fibonacci แห่งเมือง Pisa เพื่อที่จะแนะนำตัวเลข Hindu-Arabic ที่ใช้ในชีวิตประจำวันต่อชาวยุโรปที่ยังคงใช้ตัวเลขโรมันซึ่งไม่สะดวกในการใช้นัก โจทย์ดังกล่าวมีอยู่ว่า จะมีกระต่ายเป็นจำนวนกี่คู่ที่เกิดจากกระต่ายเพียงคู่เดียว ถ้าในแต่ละเดือนกระต่ายคู่ที่อยู่ในวัยเจริญพันธุ์จะให้กำเนิดกระต่ายคู่ใหม่ และในจะเข้าสู่วัยเจริญพันธุ์ในเดือนที่สองหลังจากเกิด ลำดับของเลขฟีโบนักชีที่ได้คือ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … และเป็นหัวข้อที่ได้ศึกษากันมาเรื่อย ๆ ถึงแม้ว่าลำดับฟีโบนักชีจะดูว่าได้มาง่าย ๆ แต่การประยุกต์มีมากมายและมีความสวยงามเป็นที่

หลงใหลและน่าฉงนต่อนักคณิตศาสตร์มาเป็นระยะเวลากว่า 800 ปี ข้อมูลเกี่ยวกับลำดับฟีโบนักชีได้เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และคณิตศาสตร์ฟีโบนักชีได้ขยายอย่างต่อเนื่องโดยเฉพาะอย่างยิ่งในสาขาทฤษฎีจำนวน (Number Theory)

ถ้า ให้ Fn เป็นเลขฟีโบนักชีพจน์ที่ n แล้วเราสามารถหาเลขพจน์นี้ได้โดยการรวมค่าเลขฟีโบนักชีสองพจน์ที่ผ่านมา ดังนี้ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ เมื่อ $n > 1$ โดยที่ $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$ พบว่าเลขฟีโบนักชีมีความสัมพันธ์มากมายกับสัดส่วนทอง (Golden Ration) $F = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ เรียกว่าค่าคงตัวของธรรมชาติ (a constant of nature) และน่ามหัศจรรย์ยิ่งค่าที่ค่านี้ปรากฏในศิลปะและสถาปัตยกรรมโบราณของกรีก และเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าอัตราส่วนระหว่าง F_{n+1} และ F_n มีค่าประมาณ 1.6180339… ซึ่งเป็นค่าเดียวกับค่าสัดส่วนทองในรูปของทศนิยม

นอกจากความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์อย่างน่ามหัศจรรย์แล้ว ยังมีการประยุกต์ของเลขฟีโบนักชีอีกมากมายในหลากหลายสาขา เช่น ทางด้านพฤกษศาสตร์ ชีววิทยา ฟิสิกส์ ดนตรี และศิลปะ เป็นต้น

Leonardo Fibonacci (ค.ศ. 1175 - 1240)

Leonardo Fibonacci เกิดราวปี ค.ศ. 1175 ที่เมือง Pisa ประเทศอิตาลี มีชื่อเรียกหลายชื่อ เนื่องจากอยู่เมือง Pisa เขาเลยถูกเรียกว่า Leonardo แห่ง Pisa หรือในภาษาอิตาเลียนเรียกว่า Leonardo Pisano เขามีชื่อจริงว่า Leonardo Pisano Bigollo นักประวัติศาสตร์ไม่แน่ใจว่า Bigollo มีความหมายว่าอย่างไร อาจหมายถึง traveller หรือ good-for-nothing พ่อของเขาชื่อ Guglielmo Bonaccio ในปี 1828 หลังจากยุคของ Fibonacci นาย Guillaume Libri ได้ค้นพบชื่อ Fibonacci จาก filius Bonacci ในภาษาละตินหมายถึง The son of Bonacci และชื่อ Fibonacci ที่เรียกกันอยู่ปัจจุบันมาจากการเรียกสั้น ๆ ของคำว่า Filius Bonacci นั่นเอง

Guglielmo Bonacci พ่อของเขาเป็นเจ้าหน้าที่ด่านศุลกากรสำหรับ Pisa ที่เมืองท่าแอฟริกาเหนือของบูเกีย (The North African port town of Bugia) ซึ่งในปัจจุบัน คือ Bejala, Algeria ในช่วงวัยรุ่น Fibonacci ได้อยู่กับพ่อและได้รับการศึกษาจาก The Moors ซึ่งเป็นชาวอาหรับ ด้วยประสบการณ์ในแอฟริกาเหนือ เขาได้พบปะพ่อค้า และเรียนรู้ระบบการประยุกต์เลขคณิต และเขาได้รู้จักระบบ Hindu-Arabic ของจำนวน และเป็นระบบจำนวนที่เราใช้กันอยู่ในปัจจุบันนี้

ระบบจำนวน Hindu-Arabic ประกอบด้วยสัญลักษณ์เลข 0, 1 – 9 และเลขทศนิยม เพื่อให้เข้าใจดียิ่งขึ้นเราลองมาดูเลขโรมันที่ใช้ในยุคสมัยนั้น เลขโรมันยุ่งยากในการเริ่มต้นใช้ สำหรับหนึ่ง แต่ละสัญลักษณ์มีความคล้ายคลึงกันในการจำ ในการเขียนเลข เราจะต้องใช้การประสมตัวเลขด้วยกัน เช่น

เลข 1999 สามารถเขียนได้ในรูป MDCCCCLXXXXVIIII (ซึ่งเมื่อรวมค่าแต่ละตัวเราก็จะได้ 1999) การรวมค่าดังกล่าวสามารถทำให้ได้ IV มีค่า 6 เช่นเดียวกับ VI.

ตัวเลขโรมัน	
I	= 1
V	= 5
X	= 10
L	= 50
C	= 100
D	= 500
M	= 1000

ต่อมาความยุ่งยากได้เพิ่มขึ้นเมื่อระบบได้มีการปรับเปลี่ยนตำแหน่งของตัวเลข ซึ่งในปัจจุบันนี้ เมื่อตัวเลขที่มีค่าน้อยกว่าอยู่ข้างหน้าตัวเลขที่มีค่ามากกว่าจะหมายถึงการนำค่าน้อยกว่าลบค่าที่มากกว่า และถ้าตัวเลขที่มีค่าน้อยกว่าอยู่ข้างหลังตัวเลขที่มีค่ามากกว่าจะหมายถึงการนำค่ามาบวกกัน ตอนนี้เราจะได้ว่า IV มีค่าเท่ากับ 4 และ VI มีค่าเท่ากับ 6 จากการปรับเปลี่ยนนี้ทำให้เราเขียนเลขที่มีค่ามากในรูปที่มีจำนวนสัญลักษณ์น้อยลง และ 1999 สามารถเขียนอยู่ในรูป MCMXCIX. มันไม่เหมาะในการหาค่าของเลขที่เขียนโดยใช้สัญลักษณ์เลขโรมัน ตัวอย่างเช่น การบวกและการลบเลข 1999 และ 1998

<u>Hindu - Arabic</u>	<u>Roman</u>
1999	MCMXCIX
+	+
1998	MCMXCVIII
-------	----------------
3997	MMMCMXCVII

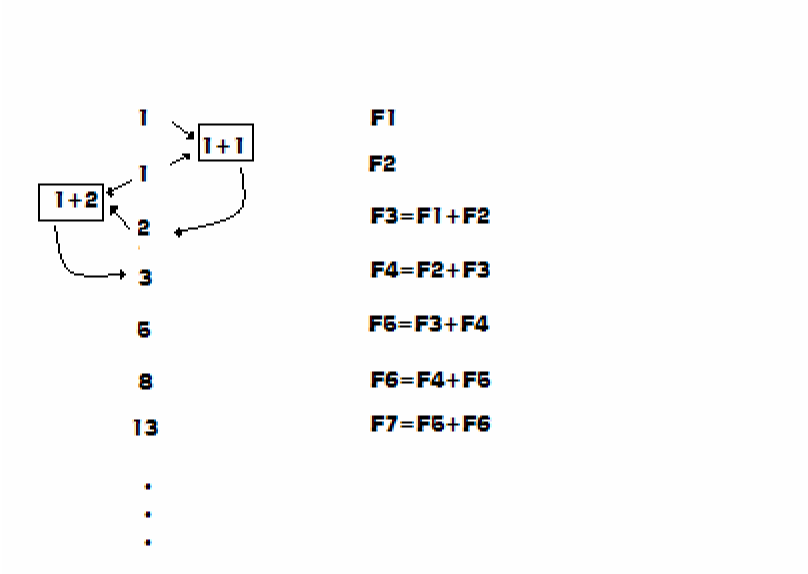
ทางซ้ายมือสามารถทำได้ง่าย เด็กประถม 5 ก็สามารถทำได้ แต่ทางขวามือจะต้องใช้เวลาและความพยายามในการดำเนินการมากกว่า จากตัวอย่างนี้เราได้เห็นข้อเสียของการใช้เลขโรมัน

ไม่เป็นที่สงสัยว่าระบบเลขอารบิกจะใช้ได้อย่างรวดเร็วด้วยพ่อค้า และคนอื่นๆ ที่ประกอบอาชีพที่ต้องใช้ตัวเลขอยู่ทุกวัน ด้วยระบบใหม่นี้ประชาชนสามารถคำนวณหาผลบวกและผลลบได้เร็วขึ้น และทำให้เกิดการแข่งขันกันขึ้น Fibonacci ได้ตระหนักถึงประโยชน์ของระบบใหม่นี้ เขาเลยกลับไปที่เมือง Pisa เขียนหนังสือเกี่ยวกับระบบเลขนี้ในปี ค.ศ. 1202 โดยมีให้ชื่อหนังสือว่า Liber

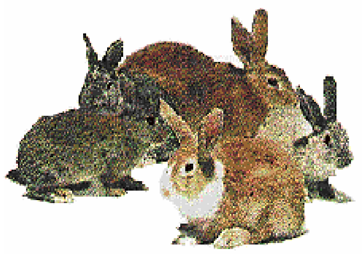
Abbaci ซึ่งหมายถึง หนังสือแห่งการคำนวณ (Book of Calculating) ซึ่งเกี่ยวกับระเบียบวิธีเลขคณิตในระบบทศนิยม ซึ่งปัจจุบันใช้สอนในระดับประถม และต่อมาได้เปลี่ยนความเชื่อนักคณิตศาสตร์ชาวยุโรปให้มาใช้ระบบตัวเลขอารบิกแทนระบบเก่า

ลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci Sequences)

เลขสองพจน์แรกของลำดับคือ 1 และ 1 และสำหรับการหาพจน์ต่อมาเราเพียงแค่บวกสองพจน์ที่อยู่ก่อนหน้านี้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าแต่ละพจน์ของลำดับฟีโบนักชีได้มาจากการบวกเลขจากสองพจน์ที่อยู่ก่อนหน้านี้



หมายเหตุ ตามประวัติศาสตร์ นักคณิตศาสตร์บางท่านได้พิจารณา 0 เป็นเลขในลำดับฟีโบนักชีด้วย โดยการแทนที่เลข 1 ในพจน์แรกด้วย 0 และเรียกว่าเป็นเลขฟีโบนักชีตัวที่ศูนย์ ในที่นี้เราไม่สนใจในกรณีที่มีพจน์ศูนย์



ปัญหากระต่าย (Rabbit Problem)

ในปี ค.ศ. 1202 ฟีโบนักชีสนใจการขยายพันธุ์ของกระต่าย เขาได้สร้างเซตของเงื่อนไขในอุดมคติโดยที่กระต่ายสามารถออกลูกได้ และคิดโจทย์ขึ้นมา "เมื่อครบหนึ่งปีจะมีกระต่ายกี่คู่" โดยมีเซตของเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. เริ่มจากทารกกระต่ายหนึ่งคู่ ตัวผู้และตัวเมีย
2. กระต่ายเข้าสู่วัยเจริญพันธุ์เมื่อครบหนึ่งเดือน (สามารถผสมพันธุ์ได้)
3. กระต่ายใช้เวลาตั้งท้องหนึ่งเดือน

4. เมื่อเข้าสู่วัยเจริญพันธุ์ กระต่ายตัวเมียจะออกลูกได้ทุกเดือน
5. กระต่ายตัวเมียออกลูกเป็นทารกกระต่ายสองตัวโดยที่ตัวหนึ่งเป็นตัวผู้และอีกตัวหนึ่งเป็นตัวเมียเสมอ
6. ไม่มีกระต่ายตัวใดตาย

ดังนั้นจะมีกระต่ายกี่คู่ (ตัวผู้และตัวเมีย) หลังจากครบหนึ่งปี (12 เดือน) ?

เดือน	จำนวนกระต่าย (คู่)	เงื่อนไข	หมายเหตุ
0	1	1	เริ่มต้น
1	1	2	กระต่ายผสมพันธุ์
2	1+1=2	3	กระต่ายคู่แรกออกลูก
3	2+1=3	2, 3	กระต่ายคู่แรกออกลูกและกระต่ายคู่ใหม่ผสมพันธุ์
4	3+2=5	2, 3	กระต่ายคู่แรกออกลูกอีก กระต่ายคู่ที่ออกในเดือนที่ 2 ออกลูก กระต่ายคู่ที่ออกในเดือนที่ 3 ผสมพันธุ์
5	5+3=8	2, 3	กระต่ายคู่แรกออกลูกอีก กระต่ายคู่ที่ออกในเดือนที่ 2 ออกลูก กระต่ายคู่ที่ออกในเดือนที่ 3 ออกลูก กระต่ายคู่ที่ออกในเดือนที่ 4 ผสมพันธุ์
...	...		...

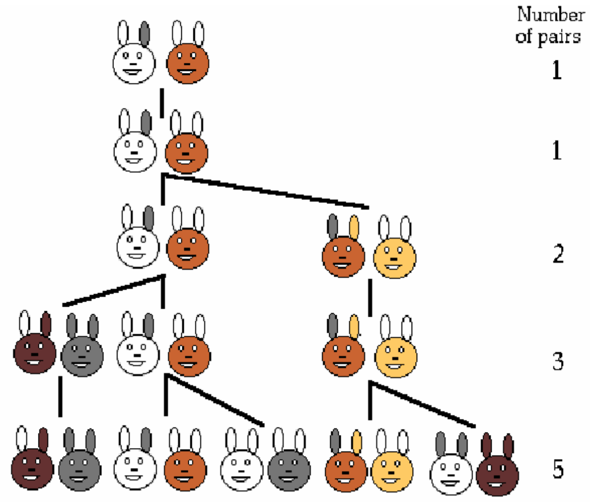
เราจะหาผลเฉลยของโจทย์นี้ได้อย่างไร ถ้าต้องการทำนายว่าจะมีกระต่ายกี่คู่เมื่อเวลาผ่านไปหลาย ๆ เดือนนับจากนี้ไป เราสามารถหาจำนวนกระต่ายโดยไม่ต้องอาศัยตารางได้หรือไม่ คำตอบก็คือได้ เราเป็นนักคณิตศาสตร์ วิธีที่จะหาจำนวนกระต่าย(คู่)ในแต่ละเดือนก็คือเอาจำนวนกระต่ายที่ออกใหม่ในแต่ละเดือนรวมกับจำนวนกระต่ายที่มีอยู่ก่อนกระต่ายรุ่นใหม่จะออกมา

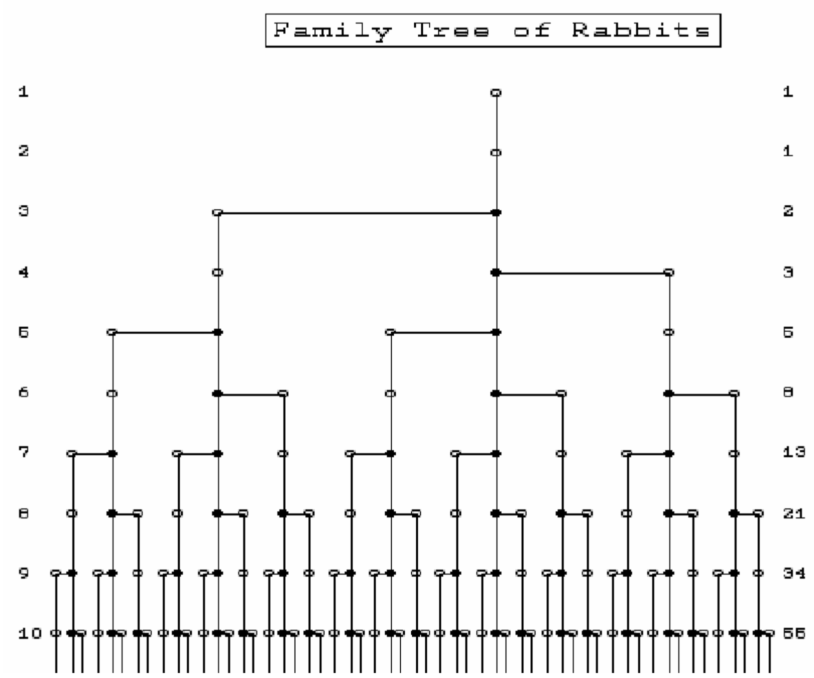
ดังนั้นในแต่ละเดือนมีกระต่ายออกใหม่กี่คู่ เนื่องจากต้องใช้เวลาสองเดือนสำหรับกระต่ายที่ออกใหม่แต่ละคู่ในการออกลูกใหม่ แต่ละคู่ที่มีชีวิตอยู่เมื่อสองเดือนที่แล้วจะออกลูกใหม่ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง จำนวนกระต่ายที่ออกใหม่ในแต่ละเดือนเท่ากับจำนวนกระต่ายที่มีอยู่เมื่อสองเดือนที่แล้ว

ต่อไปเราหาจำนวนกระต่าย(คู่)ที่มีอยู่ก่อนที่กระต่ายรุ่นใหม่จะออกมา ซึ่งไม่ยากนักที่จะหา นั่นคือจะเท่ากับจำนวนกระต่ายที่มีอยู่เมื่อเดือนที่แล้ว

เรากล่าวได้ว่า จำนวนกระต่ายทั้งหมด(คู่)หาได้จากการนำจำนวนกระต่ายที่มีอยู่เมื่อเดือนที่แล้วและสองเดือนที่แล้วมารวมกัน

และในตอนนี้เรามีลำดับของตัวเลขที่เริ่มด้วยหนึ่ง และหนึ่ง ต่อมาหาพจน์ถัดไปได้โดยการบวกจำนวนสองจำนวนที่มีอยู่ และลำดับนี้ก็คือลำดับฟีโบนักชี





สูตรหาพจน์ที่ n ของลำดับฟีโบนักชี

ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีในการหาพจน์ที่ n ของลำดับฟีโบนักชี 2 วิธีด้วยกัน

1. รูปแบบทวินาม (Binomial Form)

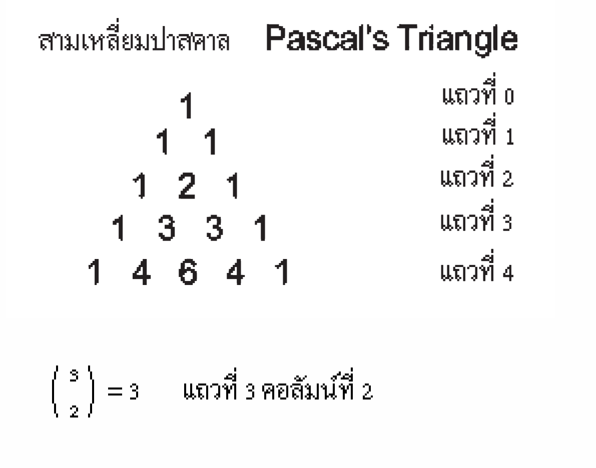
การคำนวณหาพจน์ที่ n ของลำดับฟีโบนักชีสามารถทำได้อีกวิธีหนึ่ง ซึ่งจริงๆแล้วเป็นวิธีที่ค่อนข้างซับซ้อน วิธีนี้เหมาะสำหรับผู้ที่คุ้นเคยกับรูปแบบผลรวม (Summation : $\sum$) ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) และสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's Triangle)

เลขฟีโบนักชีทุกตัวสามารถเขียนได้ในรูปของสมาชิกในสามเหลี่ยมปาสคาล เช่น

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\binom{n}{k}$ แทน n เลือก k และหมายถึงค่าของสมาชิกในสามเหลี่ยมปาสคาลที่อยู่ในแถวที่ n และคอลัมน์ที่ k แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อหาตำแหน่งแถว และคอลัมน์ในสามเหลี่ยมปาสคาล เราจะต้องระวัง และจำไว้ว่าจะเริ่มนับที่แถวและคอลัมน์ที่ 0 เสมอดังนั้นแถวที่ 1 ของสามเหลี่ยมปาสคาลคือแถวที่สองจากข้างบนสุดเสมอ

ที่น่าสังเกตอีกอย่างหนึ่งก็คือ ถ้า $k > n$ จะได้ว่าค่า $\binom{n}{k} = 0$



ตัวอย่าง 3.2.1 จงหาเลขฟีโบนักชีพจน์ที่ 6 ($n = 6$)

วิธีทำ จากสูตร แทนค่า $n = 6$

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$$

$$F_6 = \sum_{k=1}^{6} \binom{6-k}{k-1} = \overset{k=1}{\binom{6-1}{1-1}} + \overset{k=2}{\binom{6-2}{2-1}} + \overset{k=3}{\binom{6-3}{3-1}} + \overset{k=4}{\binom{6-4}{4-1}} + \cdots$$

$$F_6 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} + \underbrace{\binom{2}{3}}_{=0} + \cdots$$

$$= 1 + 4 + 3 + 0$$

$$= 8$$

ดังนั้นเลข 8 เป็นเลขฟีโบนักชีพจน์ที่ 6

2. สูตรของไบเนต์ (Binet's Formula)

ลำดับฟีโบนักชีได้ถูกนิยามอย่างต่อเนื่อง นั่นคือถ้าจะหาแต่ละพจน์ของลำดับโดยใช้บทนิยาม เราต้องการพจน์ทั้งหมดที่อยู่มีอยู่ก่อนนี้ และด้วยเหตุนี้ทำให้ยุ่งยากในการที่จะได้มาซึ่งพจน์ที่ n โดยเฉพาะอย่างยิ่งในพจน์ที่มีขนาดใหญ่

แต่อย่างไรก็ตาม จะต้องมีทางที่จะได้มาซึ่งพจน์ที่ n ที่ต้องการ โดยไม่ต้องใช้บทนิยาม ถ้าเป็นไปได้ เราสามารถที่จะหาพจน์ที่ n ได้โดยการแทนค่า n ลงในสูตรคณิตศาสตร์

ในปี ค.ศ. 1843 Jacques Phillipe Marie Binet ได้ค้นพบสูตรดังกล่าวสำหรับหาค่าพจน์ที่ n ของลำดับฟีโบนักชี สูตรดังกล่าวคือ

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right)$$

ตัวอย่าง 3.2.2 จงหาเลขฟีโบนักชีพจน์ที่ 50 โดยใช้สูตรของไบเนต์

วิธีทำ จากสูตรของไบเนต์ แทน x = 50 จะได้ว่า

$$F(50) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{50} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{50}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(28143753122.9999 - 0.0000000000355\ldots)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(28143753122.9999)$$

$$= 12586269025$$

ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่า เลขฟีโบนักชีพจน์ที่ 50 ก็คือ 12586269025 เราสามารถตรวจสอบได้จากการหาตัวเลข 49 พจน์แรก

สูตรหาพจน์ถัดไป (The Successor Formula)

สมมติว่าเราทราบพจน์ในลำดับฟีโบนักชี และเราต้องการทราบพจน์ต่อไปโดยตรง เราจะทำอย่างไร โดยที่ไม่ทราบพจน์ที่อยู่ก่อนหน้าพจน์ที่เราทราบ เราไม่สามารถใช้บทนิยามได้ เราอาจใช้สูตรของไบเนต์ แต่ก็ดูยุ่งยากและใช้เวลา จะมีวิธีที่จะคำนวณพจน์ถัดไปโดยที่ทราบพจน์ปัจจุบันหรือไม่

แน่นอนเรามีวิธีที่จะหาพจน์ต่อไปเมื่อทราบพจน์ปัจจุบัน โดยใช้สูตรหาพจน์ถัดไป เพื่อที่จะหาเลขฟีโบนักชีพจน์ถัดไป ในแต่ละพจน์ สูตรนี้ได้ใช้ฟังก์ชันที่รู้จักกันในชื่อ greatest integer function และใช้สัญลักษณ์ [x] ซึ่งหมายถึงค่าจำนวนเต็มมากสุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x ตัวอย่างเช่น [4.2] = 4, [4] = 4

สูตรต่อเนื่องมีรูปแบบดังนี้

$$F(x) = \left[\frac{x+1+\sqrt{5x^2}}{2} \right]$$

หมายเหตุ ค่า x ในสูตรหาพจน์ถัดไปไม่ใช่อันดับของเลขฟีโบนักชี แต่ว่าเป็นเลขฟีโบนักชี ตัวอย่างเช่น ถ้าเราแทน 3 ในสูตรข้างต้น ค่าที่ได้ไม่ใช่เลขฟีโบนักชีพจน์ที่ 4 แต่ว่าเป็นค่าเลขฟีโบนักชีพจน์ที่ถัดจาก 3 นั่นก็คือค่า 5

ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาเลขฟีโบนักชีที่ถัดจากเลข 8 โดยใช้สูตรหาพจน์ถัดไป

วิธีทำ เราแทน x = 8 ในสูตรจะได้ว่า

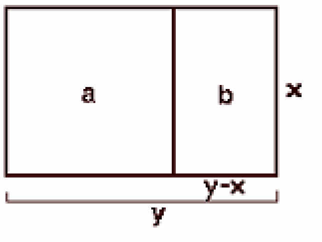
$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{x+1+\sqrt{5x^2}}{2} \right] \\ F(8) &= \left[\frac{8+1+\sqrt{5\cdot 8^2}}{2} \right] \\ &= \left[\frac{9+\sqrt{320}}{2} \right] \\ &= [13.44\ldots] \\ &= 13 \end{aligned}$$

ดังนั้น จากการแทนสูตร เราได้ว่าเลขฟีโบนักชีที่ถัดจาก 8 คือ 13

นักเรียนลองทดสอบดูว่าเป็นจริงหรือไม่สำหรับพจน์แรก ๆ ของลำดับ

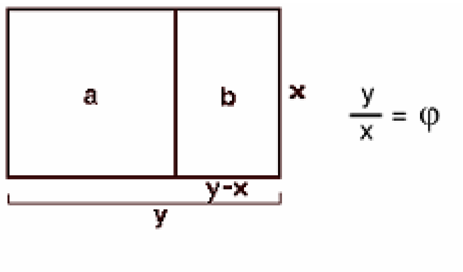
อัตราส่วนทอง (The Golden Ratio)

อัตราส่วนทองหรือเรียกอีกอย่างหนึ่งได้ว่าเลขทอง (Golden Number) หรือ สัดส่วนทอง (Golden Section) ถูกนิยามโดยอัตราส่วนของความยาวสองด้นของสี่เหลี่ยมทอง (Golden rectangle) นั่นคือเมื่อนำเอาด้านยาวหารด้วยด้านสั้นของสี่เหลี่ยมทองจะได้อัตราส่วนทอง นักคณิตศาสตร์ใช้อักษรกรีก φ (phi) แทนอัตราส่วนทอง

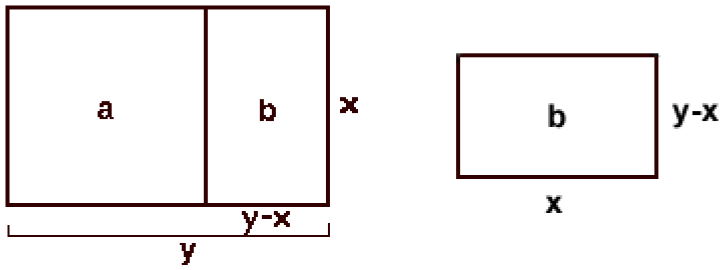


เราจะหาความยาวด้านทั้งสองที่ต้องใช้ในการคำนวณหาอัตราส่วนทองได้อย่างไร กล่าวอีกนัยหนึ่งเราต้องการหาค่า y/x จากรูปข้างบน เราสามารถคำนวณค่าที่แท้จริงของอัตราส่วนทองด้วยการดำเนินการดังนี้

ที่เราทราบก็คือ φ เท่ากับอัตราส่วนของด้านยาว (y) ต่อด้านกว้าง(x) ของสี่เหลี่ยมทอง



เราทราบอะไรบ้างจากรูปสี่เหลี่ยมทอง เมื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกจากสี่เหลี่ยมผืนผ้า เราก็จะได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเล็กเหลืออยู่อีกหนึ่งรูป นั่นคือสัดส่วนของด้านยาวต่อด้านกว้างก็จะเท่ากับอัตราส่วนของด้านยาวต่อด้านกว้างของรูปเดิม



เราได้ว่า

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$$

ก่อนที่จะดำเนินการต่อไป เรามากำจัดตัวแปรออกไปสักหนึ่งตัว โดยให้ด้านที่สั้นสุด (x) ของสี่เหลี่ยมทองรูปใหญ่มีค่าเท่ากับ 1 (x=1) เราเลยได้ว่า

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{y-1}$$

ต่อมาคูณไขว้ จะได้

$$1 = y^2 - y$$

เมื่อจัดรูปใหม่เราจะได้สมการกำลังสอง

$$y^2 - y - 1 = 0$$

ต่อมาเราแก้สมการกำลังสอง ได้ผลลัพธ์

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ผลลัพธ์ที่สองมีค่าเป็นลบจึงไม่เป็นที่สนใจในกรณีนี้ เนื่องจากความยาวต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

จากนั้นเราก็เสร็จสิ้นขั้นตอนในการหาค่า φ ซึ่งถูกนิยามโดย y/x ดังนั้น

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398875\ldots$$

จริงๆ แล้วเรานำค่าประมาณของ φ มาคำนวณ (ทศนิยมไม่กี่ตำแหน่ง) และ φ เป็นจำนวนอตรรกยะ หรืออาจกล่าวว่า ไม่สามารถเขียน φ ในรูปของอัตราส่วนของจำนวนเต็มสองตัวได้

อัตราส่วนฟีโบนักชี (Fibonacci Ratio)

ในคณิตศาสตร์ ฟีโบนักชีสัดส่วนทองได้ปรากฏในส่วนที่สำคัญที่สุดก็คือในลำดับอัตราส่วนฟีโบนักชี ลำดับอัตราส่วนฟีโบนักชีคือลำดับของตัวเลขที่ได้จากการหารเลขฟีโบนักชีพจน์ปัจจุบันด้วยพจน์ก่อน เนื่องจากไม่มีเลขฟีโบนักชีก่อนหน้าพจน์ที่ 1 ดังนั้นเราเริ่มพจน์แรก ของลำดับอัตราส่วนฟีโบนักชีด้วยการหารพจน์ที่ 2 ด้วยพจน์ที่ 1

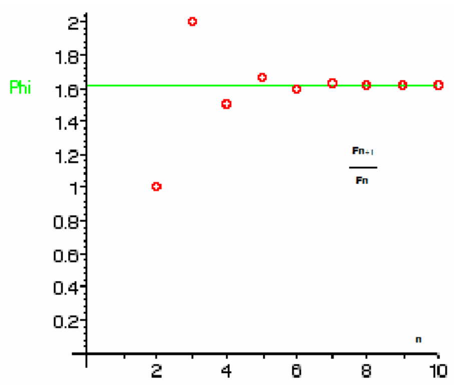
ให้ r_n แทนอัตราส่วนฟีโบนักชีพจน์ที่ n

$$r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

จะได้

$r_1 = 1/1 = 1$
$r_2 = 2/1 = 2$
$r_3 = 3/2 = 1.5$
$r_4 = 5/3 = 1.67$
$r_5 = 8/5 = 1.6$
$r_6 = 13/8 = 1.625$
$r_7 = 21/13 = 1.615$
$r_8 = 34/21 = 1.619$
$r_9 = 55/34 = 1.618$
$r_{10} = 89/55 = 1.618$
$\vdots$

เมื่อหาไปเรื่อยๆ จะเห็นว่าค่าอัตราส่วนจะลู่เข้าสู่ค่า φ ประมาณ 1.6180339… แต่อย่างไรก็ตามค่าอัตราส่วนที่ได้จะไม่ใช่ค่าจริงของ φ ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะ



หนึ่งส่วนแปดสิบเก้า (1/89)

1/89 เป็นตัวเลขที่พิเศษตัวหนึ่ง เมื่อเราพิจารณาเลขทศนิยมของ 1/89 จะได้ 1/89 = 0.011235955056179… ถึงแม้ว่าจะเป็นเลขตรรกยะ แต่เลขทศนิยมก็ไม่สิ้นสุด

ตัวเลขนี้มีความเกี่ยวข้องอย่างไรกับเลขฟีโบนักชี ? ถ้าเราพิจารณาทศนิยมอย่างใกล้ชิดจะพบว่าเลขทศนิยม 5 ตำแหน่งแรกที่ไม่ใช่ศูนย์ เหมือนเลขฟีโบนักชี 5 พจน์แรก ไม่เพียงแค่นั้น ความจริงแล้วเลขเหล่านี้ยังมีความสัมพันธ์อย่างอื่นอีก สังเกตุได้ว่าเลขทศนิยม 5 ตำแหน่งแรกที่ไม่ใช่ศูนย์ของ 1/89 มาจากคูณเลขฟีโบนักชีพจน์นั้น ๆ ด้วยกำลัง (ตำแหน่งทศนิยม) ของ 1/10

$$.01 = 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$.001 = 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

$$.0002 = 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4$$

$$.00003 = 3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5$$

$$.000005 = 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^6$$

ถ้าลองพิจารณาผลบวกของทศนิยมในรูปแบบข้างต้นต่อไปเรื่อย ๆ เราพบว่า

$$\begin{array}{r l}
 & .01 \\
 & .001 \\
 & .0002 \\
 & .00003 \\
 & .000005 \\
 & .0000008 \\
 & .00000013 \\
 & .000000021 \\
 & .0000000034 \\
 & .00000000055 \\
+ & \underline{.000000000089\ldots} \\
 & .011235955056\ldots
\end{array}$$

เราทราบว่ารูปแบบดังกล่าวเป็นจริงสำหรับหลายๆ พจน์แรกของรูปทศนิยมของ 1/89 แล้วจะเป็นจริงหรือไม่สำหรับพจน์อื่น ๆ ที่เหลือทั้งหมด

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^{k+1}$

เมื่อ F_k แทนเลขฟีโบนักชีพจน์ที่ k

เราต้องการพิสูจน์ว่า

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1} = \frac{1}{89}$$

เริ่มจากการเขียนฟังก์ชันในรูป

$$f(x) = 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 8x^7 + \cdots$$

เป็นการยากที่จะดำเนินการกับจำนวนพจน์ไม่จำกัด ดังนั้นเราจะกำจัดพจน์ออกไปโดยเหลือไว้เพียงไม่กี่พจน์ของฟังก์ชัน วิธีการหนึ่งที่จะทำได้ก็คือการลบออกด้วยจำนวนพจน์อนันต์ด้วยกัน แต่ควรจะเป็นฟังก์ชันในรูปแบบใดดี?

สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นเลขฟีโบนักชีและเราทราบว่าเลขฟีโบนักชีทุกจำนวนได้มาจากการบวกสองพจน์ก่อนด้วยกัน ดังนั้นการที่จะลบแต่ละสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ ออกไปนั้นเราต้องใช้ฟังก์ชันที่มีสัมประสิทธิ์เป็นเลขฟีโบนักชีเช่นกัน

ฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่เราพูดถึงก็คือ $xf(x)$ และ $x^2f(x)$

$$xf(x) = 1x^3 + 1x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 5x^7 + 8x^8 + \cdots$$

$$x^2 f(x) = 1x^4 + 1x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 8x^9 + \cdots$$

เมื่อลบออกจากฟังก์ชัน $f(x)$

$$\begin{aligned} & f(x) - xf(x) - x^2 f(x) \\ &= \left(1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 8x^7 + \cdots\right) \\ &\qquad - \left(1x^3 + 1x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 5x^7 + \cdots\right) \\ &\qquad\qquad - \left(1x^4 + 1x^5 + 2x^6 + 3x^7 + \cdots\right) \end{aligned}$$

สังเกตุได้ว่าทางซ้ายมือตั้งแต่คอลัมน์ที่สองเป็นต้นไป สัมประสิทธิ์ในแถวแรกถูกกำจัดไปจากการลบด้วยผลบวกของสัมประสิทธิ์แถวที่สองและสาม นั่นคือเลขฟีโบนักชีแต่ละพจน์ได้มาจากการบวกกันของสองพจน์ก่อน และนี้เป็นเหตุผลที่เราเลือกฟังก์ชัน $xf(x)$ และ $x^2f(x)$ มาลบออกจากฟังก์ชัน $f(x)$ จะได้

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1x^2$$

$$f(x)\left(1 - x - x^2\right) = x^2$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x - x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{-2} - x^{-1} - 1}$$

เมื่อแทน $x = 1/10$

$$f(x) = \frac{1}{x^{-2} - x^{-1} - 1}$$

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{100 - 10 - 1} = \frac{1}{89}$$

นั่นก็คือเมื่อเราคูณเลขฟีโบนักชีแต่ละพจน์ด้วยกำลัง (ลำดับพจน์บวกหนึ่ง) ของ 1/10 และบวกแต่ละผลคูณของพจน์ด้วยกันเราก็จะได้ค่า 1/89

การประยุกต์ (Applications)

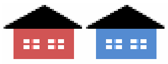
ตึกอพาร์ทเมนท์ (Apartment Buildings)

สมมติว่าเราเป็นช่างทาสี รับเหมาทาสีภายนอกตัวตึก โดยที่ผู้สร้างตึกต้องการจ้างให้ทาสีตึกใหม่โดยต้องทำตามเงื่อนไขที่ผู้สร้างตึกต้องการ นั่นคือ ผู้สร้างตึกต้องตัดสินใจว่าจะสร้างให้แต่ละตึกมีกี่ชั้น โดยที่ให้มีความหลากหลายในการทาสีให้มากที่สุด และเขาต้องการให้

1. ใช้สีเพียงสองสี คือสีแดงและสีฟ้า โดยที่แต่ละชั้นของตึกต้องทาสีใดสีหนึ่งเท่านั้น
2. ไม่มีสองชั้นใด ๆ ที่อยู่ติดกันทาสีแดงเหมือนกัน
3. แต่ละตึกจะต้องทาสีแตกต่างกัน

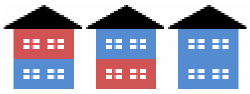
อยากทราบว่ามีการทาสีตึกได้กี่แบบเมื่อตึกมีจำนวนชั้นต่างๆ กัน

เราเริ่มจากตึกชั้นเดียว



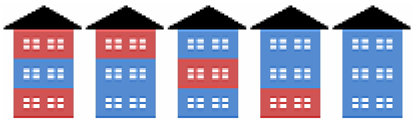
จะได้ว่าเราทาได้เพียง 2 แบบเท่านั้นคือตึกหนึ่งสีแดง และอีกตึกหนึ่งสีฟ้า

ต่อไปพิจารณาตึกสองชั้น



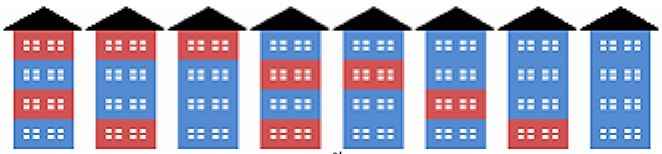
จะได้ว่าเราทาได้ 3 แบบด้วยกัน ซึ่งสังเกตว่าเราไม่สนใจกรณีที่ทาตึกสีแดงทั้งสองชั้น

สำหรับตึกสามชั้น

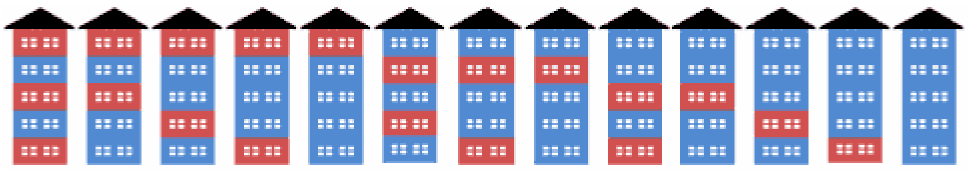


เราทาสีได้ 5 แบบด้วยกัน

ขณะนี้ถ้าเรานำตัวเลขจำนวนแบบที่จะทาสีได้มาเรียงกัน เราได้ 2, 3, 5 และถ้าหากเพิ่มชั้นตึกเป็น 4 ชั้น



จะเห็นว่าเราได้แบบการทาสีทั้งหมด 8 แบบด้วยกัน ลำดับของเราก็คือ 2, 3, 5, 8 และนี่เป็น สี่พจน์ที่ถัดจากพจน์แรกและพจน์ที่สองของลำดับฟีโบนักชี ลองพิจารณาตึก 5 ชั้นดู ว่าเกิดอะไรขึ้น



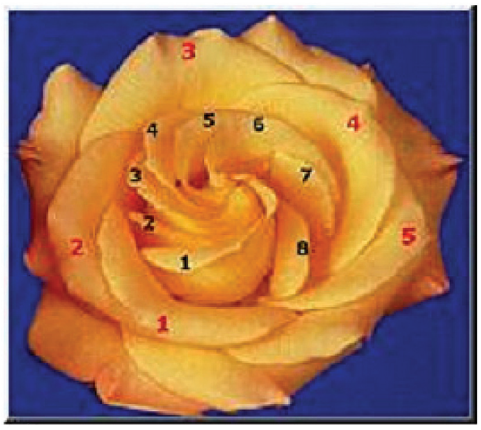
จะเห็นว่าเราได้แบบในการทาสีทั้งหมด 13 แบบด้วยกัน ซึ่งเป็นเลขฟีโบนักชีพจน์ที่ 7 นั่นเอง

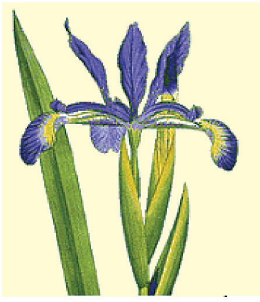
ธรรมชาติ (Nature)

คณิตศาสตร์เป็นวิธีการหนึ่งที่อธิบายโลกที่ยุ่งเหยิงรอบๆ ตัวเราด้วยตัวเลข เราอาจประหลาดใจที่หลายๆ แนวคิดเชิงคณิตศาสตร์อยู่ในธรรมชาติอย่างมากมาย แต่มีในกรณีใดบ้าง ? คณิตศาสตร์เลียนแบบธรรมชาติ หรือ ธรรมชาติเลียนแบบคณิตศาสตร์ ?

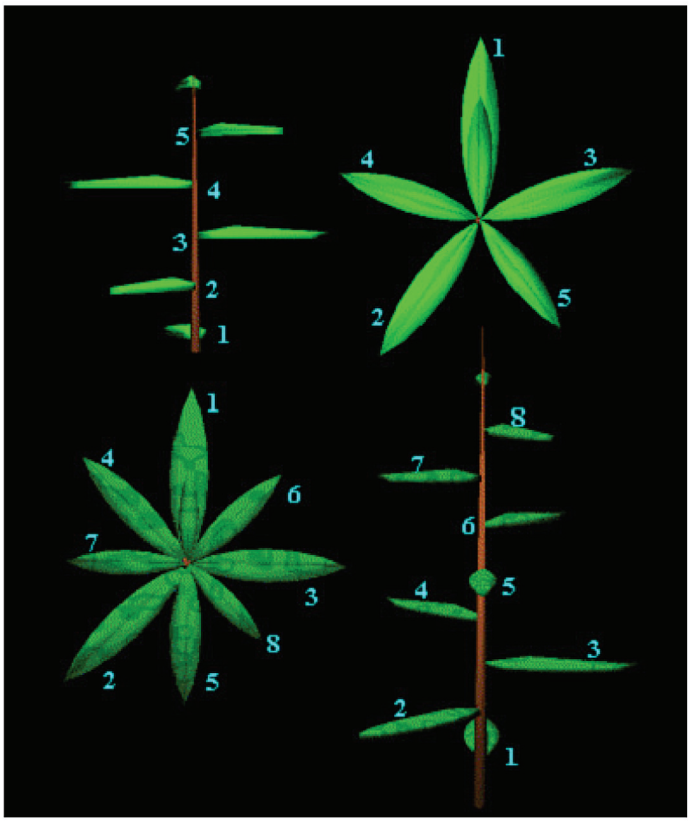
ในยุคฟื้นฟูยุโรป คณิตศาสตร์และดนตรีถูกเรียกว่าศิลปะที่สมบูรณ์แบบ ตอนนี้เราขอกล่าวถึงเฉพาะต้นไม้ ต้นไม้และรูปแบบสิ่งมีชีวิตอื่นๆ มีวิวัฒนาการจากการปรับตัวให้เข้ากับสิ่งที่อยู่รอบๆ ตัว เช่นดอกทานตะวันหันหน้าเข้าหาแสงอาทิตย์ เนื่องจากส่วนของลำต้นจะเจริญเติบโตได้ดีเมื่ออยู่ในที่ที่เป็นร่มเงากว่าด้านที่ถูกแสงอาทิตย์โดยตรง ลองมาพิจารณาดอกทานตะวันในอีกแง่มุมหนึ่ง เราเคยสังเกตุการเรียงตัวของเมล็ดทานตะวันตรงส่วนกลางของดอกหรือไม่ จริง ๆ แล้วเมล็ดทานตะวันมีการเรียงตัวกันเป็นเส้นขดและมีจำนวนแถวเป็นเลขฟีโบนักชี

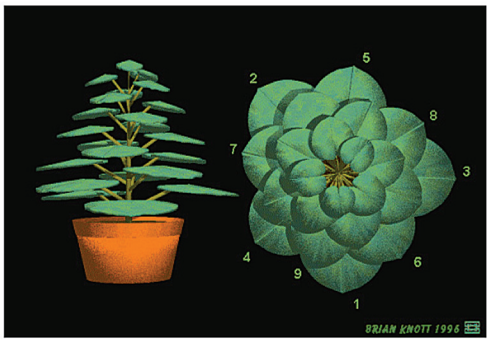
ต่อไปลองพิจารณาดอกไม้ที่มีจำนวนกลีบดอกไม่เป็นเลขฟีโบนักชี จะเห็นว่าไม่สวยงามเท่ากับดอกไม้ที่จำนวนกลีบดอกเป็นเลขฟีโบนักชี เช่น

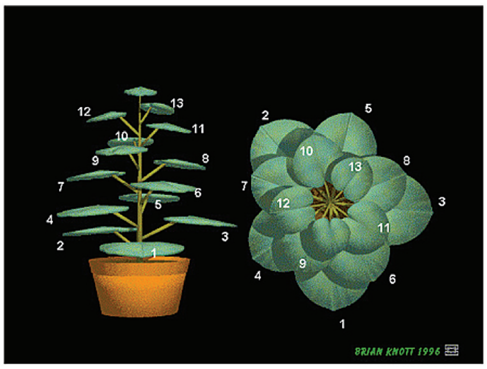




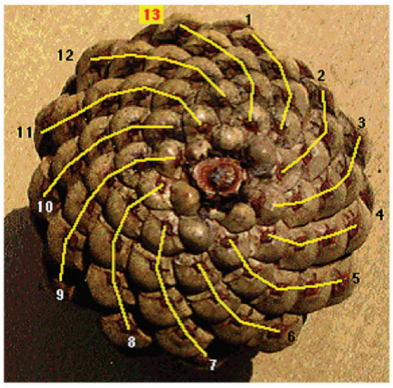
การเรียงตัวของใบไม้ (Leaf Arrangement)

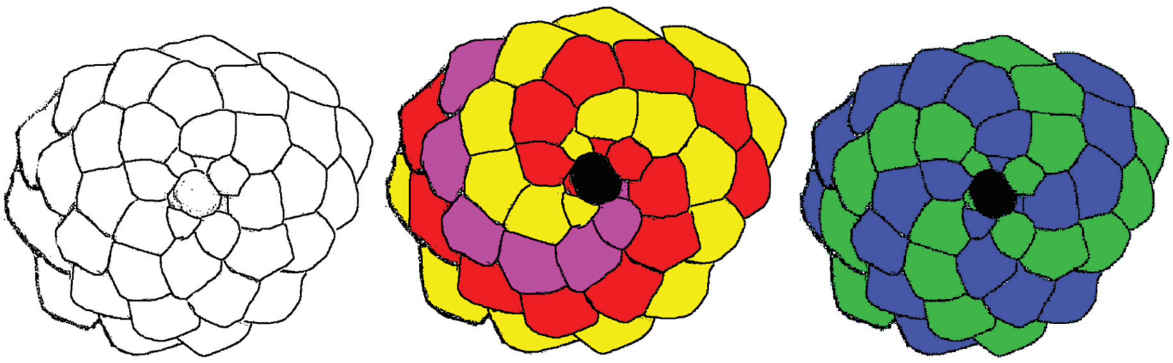






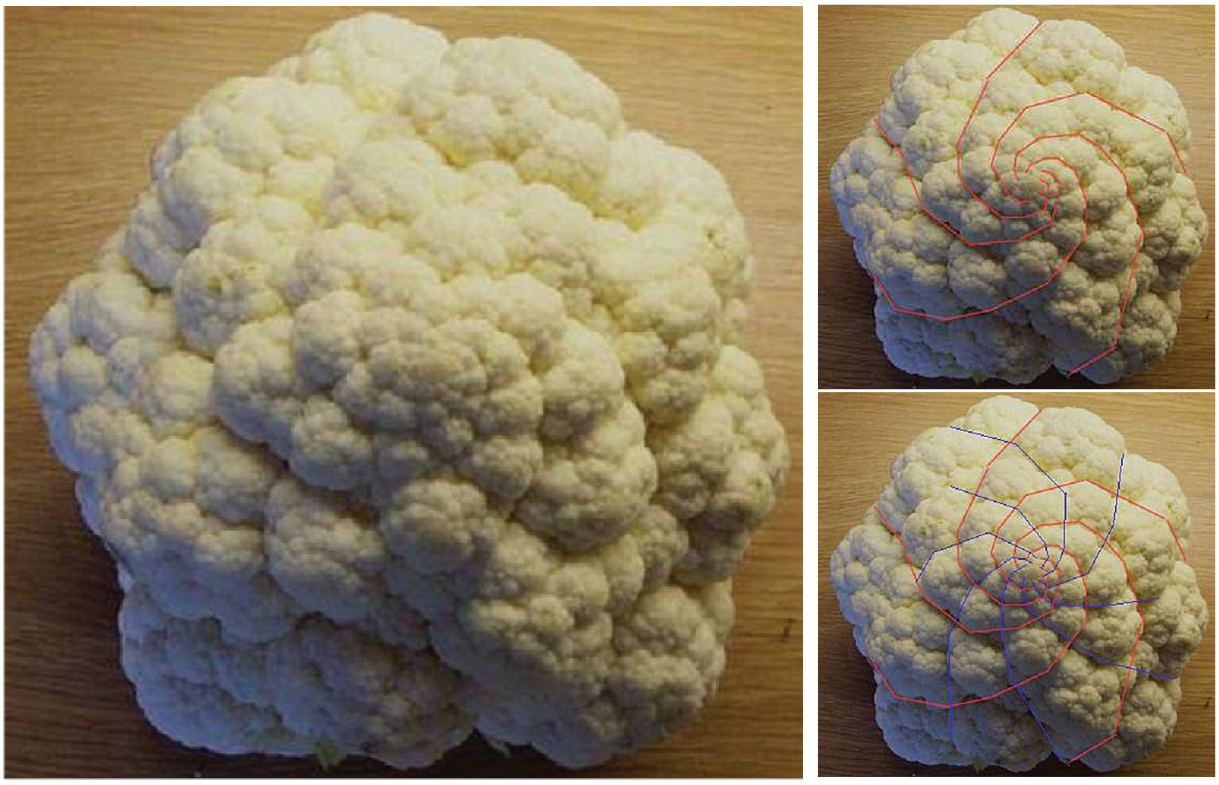
ดอกสน (Pine cone)



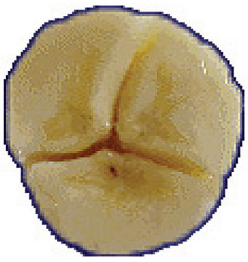


สับปะรด

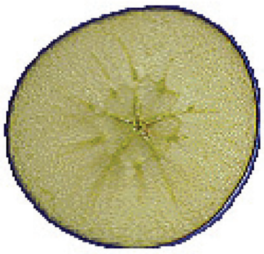
ดอกกระหล่ำ (Cauliflower)



ภาคตัดขวาง (Cross section)



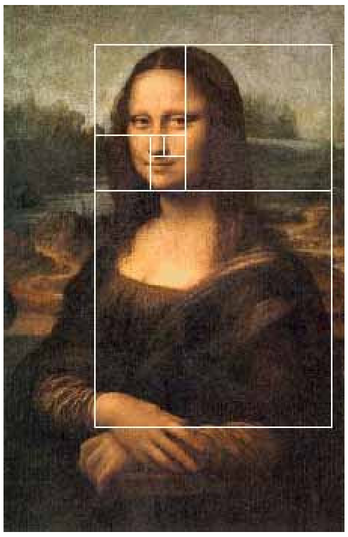
กล้วย



แอปเปิ้ล

ฟีโบนักชีและดาวินชี (Leonardo Fibonacci and Leonardo da Vinci)

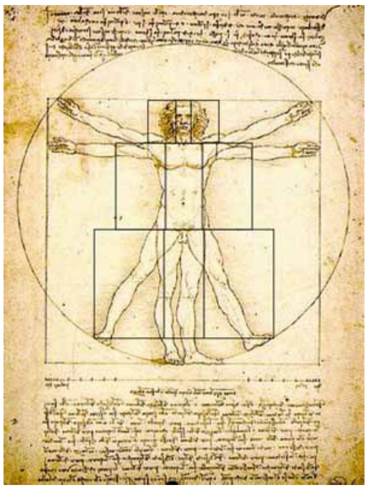
สี่เหลี่ยมทองได้ถูกอ้างอิงถึงในแง่ของความประทับใจในความสวยงามของทุกๆ สี่เหลี่ยม ด้วยเหตุนี้จึงถูกนำมาใช้ในงานศิลปะและสถาปัตยกรรมอย่างแพร่หลายเป็นเวลานานมาแล้ว ที่เด่นชัดก็คือ ได้มีการนำสี่เหลี่ยมทองมาใช้ในผลงานของ Leonardo da Vinci ศิลปินเอก นักประดิษฐ์ และ นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลี่ยน



รูปโมนาลิซา

ภาพวาดโมนาลิซา (Mona Lisa) ซึ่งเป็นผลงานที่มีชื่อเสียงโดยไม่มีข้อขัดแย้งก็มีสี่เหลี่ยมทองเข้ามาเกี่ยวข้องอย่างมาก ถ้าเราวาดรูปสี่เหลี่ยมโดยเริ่มที่ฐานจากข้อมือข้างขวาไปยังข้อศอกซ้าย และวาดด้านกว้างของรูปโดยลากเส้นขึ้นไปจนถึงบนสุดของศีรษะ สี่เหลี่ยมที่มีด้านยาวและด้านกว้างดังกล่าวเป็นสี่เหลี่ยมทอง และถ้าเราวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่บรรจุอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมทอง ดังรูป จะเห็นว่าด้านต่างๆ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละรูปจะผ่านตำแหน่งสำคัญๆ ของรูป เช่น คาง ตา จมูก และมุมปากขวา เชื่อกันว่า Leonardo davinci เป็นนักคณิตศาสตร์ และตั้งใจวาดรูปนี้โดยใช้สี่เหลี่ยมทองมาเรียงกัน ในที่นี้เพื่อที่จะเชื่อมโยงคณิตศาสตร์และศิลปะเข้าด้วยกัน

นอกจากภาพวาดโมนาลิซาแล้ว การศึกษาสัดส่วนของมนุษย์ก็เป็นผลงานที่สำคัญอีกชิ้นหนึ่งของ Leonardo da Vinci ก็คือภาพ “The Vetruvian Man” หรือ “The Man in Action” ซึ่งมีรูปสี่เหลี่ยมทองแฝงอยู่มากมายเช่นกัน ไม่เหมือนกับรูปโมนาลิซาที่มีการเริ่มต้นโดยวาดรูปสี่เหลี่ยมทองก่อนเสมือนว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ ในรูป The Vetruvian Man นี้มีการวาดสี่เหลี่ยมหลายรูป โดยประกอบด้วยเซตของสี่เหลี่ยมทองในแต่ละส่วนที่วาดแตกต่างกัน 3 ส่วน คือ ส่วนหัว ส่วนลำตัว และส่วนขา



รูป The Man in Action

ส่วนหัว : วาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปแรกโดยวาดฐานจากไหล่ข้างหนึ่งไปยังไหล่อีกข้างหนึ่งโดยผ่านลำคอ และความสูงที่ได้จะเป็นระยะจากฐานไหล่จนถึงส่วนบนสุดของหัว ต่อมาวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้บรรจุอยู่ทางด้านซ้ายของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปแรก ทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมทองรูปเล็กบรรจุอยู่บนหัวคนด้านขวา ทำเช่นเดียวกันกับที่ผ่านมาแต่คนละด้าน จะได้รูปสี่เหลี่ยมทองรูปเล็กขนาดเดียวกันปรากฏที่ส่วนหัวด้านขวา ด้วยเหตุนี้ทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ยาวในแนวตั้งและแคบในแนวนอนตรงส่วนกลางของหัวของรูป

หมายเหตุ บริเวณที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส 2 รูป ทับซ้อนกันคือบริเวณตาของรูปคนนั่นเอง

ส่วนลำตัว : วาดรูปสี่เหลี่ยมโดยมีความยาวจากข้อศอกข้างหนึ่งไปยังข้อศอกอีกข้าง และมีความกว้างจากลำคอจนถึงสะโพก รูปสี่เหลี่ยมที่ได้เป็นรูปสี่เหลี่ยมทอง ต่อมาทำเช่นเดียวกับขั้นตอนในส่วนหัว โดยวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบรรจุข้างในรูปสี่เหลี่ยมทองทั้งสองข้าง จะได้รูปสี่เหลี่ยมทองเพิ่มขึ้นอีก 2 รูป

หมายเหตุ ในตอนนี้บริเวณที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส 2 รูป ทับซ้อนกันคือบริเวณลำตัวที่คอดที่สุดของรูปคนนั่นเอง

ส่วนขา : วาดรูปสี่เหลี่ยมโดยมีความยาวจากนิ้วหัวแม่เท้าข้างหนึ่งไปยังอีกข้าง ของรูปที่เท้าคนสัมผัสวงกลม และมีวัดความกว้างขึ้นไปจนถึงเอว รูปสี่เหลี่ยมที่ได้เป็นรูปสี่เหลี่ยมทอง ต่อมาทำเช่นเดียวกับขั้นตอนในสองส่วนที่ผ่านมา โดยวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบรรจุข้างในรูปสี่เหลี่ยมทองทั้งสองข้าง จะได้รูปสี่เหลี่ยมทองเพิ่มขึ้นอีก 2 รูป

หมายเหตุ ในตอนนี้บริเวณที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส 2 รูป ทับซ้อนกันน่าจะเป็นแนวของขาที่เหยียดตรง (สมมติว่าคนไม่ได้หันขาไปดังรูป)

แบบฝึกหัดที่ 16

1. จงพิสูจน์ว่า
   1.1 $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ สำหรับ $n \geq 1$
   1.2 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ สำหรับ $n \geq 2$
   1.3 $F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$ สำหรับ $n \geq 2$
   1.4 $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
   1.5 ถ้า m เป็นตัวประกอบของ n แล้วจะได้ว่า F_m เป็นตัวประกอบของ F_n
   1.6 กำหนดให้ $G_n = \dfrac{F_{2n}}{F_n}$ แล้วจะได้ว่า $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$
2. ใช้เครื่องคิดเลขคำนวณค่า 10000/9899 ให้ได้เลขทศนิยมอย่างน้อยถึงตำแหน่งที่ 8
   2.1 จงหารูปแบบการได้มาของทศนิยมแต่ละตำแหน่ง
   2.2 จงหาเลขทศนิยมในตำแหน่งถัดไป
3. จงหาเลขฟีโบนักชีลำดับที่ 10,12 โดยใช้
   3.1 รูปแบบทวินาม
   3.2 สูตรของไบเนต์
4. จงหาพจน์ถัดไปของเลขฟีโบนักชี ลำดับที่ 10,12 ที่ได้จากข้อ 3.
5. จงพิสูจน์ว่า $\sin 18^\circ = \dfrac{\varphi - 1}{2}$ เมื่อ φ คือ อัตราส่วนทอง ($\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$)
6. จงพิสูจน์ว่า $\cos 36^\circ = \dfrac{\varphi}{2}$
7. ใช้กฎของโคไซน์คำนวณค่า $\cos 108^\circ$
8. ใช้กฎของไซน์คำนวณค่า $\dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 36^\circ}$
9. จงหาตัวอย่างดอกไม้ที่มีจำนวนกลีบดอกเป็นเลขฟีโบนักชี
10. จงหาตัวอย่างการประยุกต์อื่นๆ ที่มีเกี่ยวกับลำดับฟีโบนักชี

web site และเอกสารอ้างอิง

www.cs.rit.edu/~pga/Fibo/fact_sheet.html

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html

Ravi Vakil, *A Mathematical Mosaic: Patterns & Problem Solving*, Brendan Kelly Publishing Inc., 1996.

หน่วยที่ 4

วิธีการพิสูจน์และอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ตอนที่ 4.1 วิธีการพิสูจน์ (Method of Proofs)

ตอนที่ 4.2 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

ตอนที่ 4.1 วิธีการพิสูจน์ (Method of Proofs)

ในการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลนั้น เมื่อเรายอมรับว่าเหตุหรือข้อกำหนดเป็นจริงแล้ว จะต้องยอมรับผลสรุปที่ได้ต้องเป็นจริงด้วย

สำหรับการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์ เมื่อเรายอมรับว่า บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท ที่มีมาก่อนแล้วในระบบนั้นเป็นจริง เมื่อเรานำ บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท ดังกล่าวมาอ้างเป็นเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อความใหม่(ผลสรุป) เราจะได้ว่าข้อความใหม่นั้นต้องเป็นจริงด้วย

ทฤษฎีต่าง ๆ ที่ได้มาต้องผ่านการพิสูจน์ เพื่อยืนยันให้แน่ใจว่าเป็นการสรุปที่สมเหตุสมผล

1) การพิสูจน์ว่า $p \to q$ จริงโดยตรง

ถ้า $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$ เป็นบทนิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้วในการพิสูจน์ $p \to q$ หรือพิสูจน์ว่า $p \to q$ มีค่าความจริงเป็นจริง กระทำโดยสมมุติว่า p แล้วแสดงให้ได้ว่า q

การพิสูจน์ $p \to q$ อยู่ในรูปดังนี้

พิสูจน์ สมมุติว่า p

$$\left.\begin{array}{l} \text{----------} \\ \text{----------} \\ \text{----------} \end{array}\right\} \text{ใช้ } p \text{ และ } S_1, S_2, S_3, ..., S_n$$

เพราะฉะนั้น q

นั่นคือ $p \to q$

ตัวอย่างที่ 4.1.1 กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว $y = x + 3$ จะเป็นจำนวนคี่

พิสูจน์

1) สมมุติให้ x เป็นจำนวนคู่
2) $x = 2n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม (บทนิยามของจำนวนคู่)
3) $y = x + 3 = 2n + 3$ (จาก 2) บวกเข้าทั้งสองข้างด้วยจำนวนที่เท่ากัน)
4) $y = 2(n+1) + 1$ (กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้และกฎการแจกแจง)
5) ให้ $n + 1 = r$ (กำหนดชื่อใหม่)
6) จึงได้ r เป็นจำนวนเต็ม (จำนวนเต็มบวกจำนวนเต็มผลลัพธ์ที่ได้ยังคงเป็นจำนวนเต็ม)
7) ดังนั้น $y = 2r + 1$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็ม
8) นั่นคือ y เป็นจำนวนคี่ (บทนิยามของจำนวนคี่)

ดังนั้น ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว $y = x + 3$ จะเป็นจำนวนคี่

□

ตัวอย่างที่ 4.1.2 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $1 = 3$ แล้ว $4 = 4$

พิสูจน์

1) สมมุติให้ $1 = 3$
2) เพราะฉะนั้น $3 = 1$
3) $1 + 3 = 3 + 1$ (สิ่งที่เท่ากันบวกเข้าด้วยสิ่งที่เท่ากันผลลัพธ์ย่อมเท่ากัน)
4) $4 = 4$

ดังนั้น ถ้า $1 = 3$ แล้ว $4 = 4$

□

ข้อสังเกต ในการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ นั้น p อาจจะเป็นเท็จได้ ดังตัวอย่างที่ 4.1.2

ตัวอย่างที่ 4.1.3 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 จะเป็นจำนวนคู่ด้วย

พิสูจน์ สมมุติให้ a เป็นจำนวนคู่

จะได้ $a = 2n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม (บทนิยามของจำนวนคู่)

เนื่องจาก $a^2 = a.a$

ดังนั้น $a^2 = (2n)(2n)$

$= 2(2n^2)$ (กฎการเปลี่ยนหมู่ได้และกฎการสลับที่)

ให้ $2n^2 = r$ (ตั้งชื่อใหม่)

จะได้ r เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $a^2 = 2r$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ a^2 เป็นจำนวนคู่ (บทนิยามของจำนวนคู่)

ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 จะเป็นจำนวนคู่ด้วย

□

ตัวอย่างที่ 4.1.4 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a และ b ต่างก็เป็นจำนวนคี่แล้ว a + b จะเป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ สมมุติให้ a และ b เป็นจำนวนคี่

จะได้ $a = 2n + 1$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม (บทนิยามของจำนวนคี่)

และ $b = 2m + 1$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

$a + b = (2n+1) + (2m+1)$

$= 2(m+n+1)$ (กฎการเปลี่ยนหมู่ได้ , กฎการสลับที่และกฎการแจกแจง)

ให้ $m + n + 1 = r$ จะได้ว่า r เป็นจำนวนเต็ม

$a + b = 2r$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ a + b เป็นจำนวนคู่ (บทนิยามของจำนวนคู่)

ดังนั้น ถ้า a และ b ต่างเป็นจำนวนคี่แล้ว a + b จะเป็นจำนวนคู่

□

ตัวอย่างที่ 4.1.5 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว $a+1$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์

----

2) การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Proof by Using Contrapositive)

แทนที่เราจะพิสูจน์ $p \rightarrow q$ โดยตรง เราอาจจะพิสูจน์ $p \rightarrow q$ โดยพิสูจน์ $\sim q \rightarrow \sim p$ แทน ทั้งนี้เพราะ $(p \rightarrow q) \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

ส่วนการพิสูจน์ $\sim q \rightarrow \sim p$ ก็ดำเนินการพิสูจน์เช่นเดียวกับหัวข้อ 4.1 ดังนั้น เราอาจพิสูจน์ว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง โดยสมมุติว่า $\sim q$ แล้ว แสดงได้ว่า $\sim p$ การพิสูจน์อยู่ในรูปดังนี้

พิสูจน์ สมมุติว่า $\sim q$

---------- ใช้ $\sim q$, บทนิยาม, สัจพจน์ หรือ
---------- ทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้ว

เพราะฉะนั้น $\sim p$

นั่นคือ $\sim q \rightarrow \sim p$

ดังนั้น $p \rightarrow q$

ตัวอย่างที่ 4.1.6 กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว $y = x + 3$ จะเป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ สมมุติให้ $y = x + 3$ ไม่ใช่จำนวนคี่

เพราะฉะนั้น $y = x + 3$ เป็นจำนวนคู่

จะได้ $y = 2n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $x = 2n - 3$

$= 2(n-2) + 1$

ให้ $n - 2 = r$ จะได้ r เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $x = 2r + 1$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า x เป็นจำนวนคี่

เพราะฉะนั้น x ไม่ใช่จำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า $y = x + 3$ ไม่ใช่จำนวนคี่ แล้ว x จะไม่ใช่จำนวนคู่

ดังนั้น ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว $y = x + 3$ จะเป็นจำนวนคี่ □

ตัวอย่างที่ 4.1.7 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a จะเป็นจำนวนคู่ด้วย

พิสูจน์ สมมุติให้ a ไม่ใช่จำนวนคู่

เพราะฉะนั้น a เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $a = 2n + 1$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม (บทนิยามของจำนวนคี่)

เพราะ $a^2 = a.a$

ดังนั้น $a^2 = (2n+1)(2n+1)$

$= 4n^2 + 4n + 1$

$= 2(2n^2+2n) + 1$

ให้ $2n^2 + 2n = r$ จะได้ r เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $a^2 = 2r + 1$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า a^2 เป็นจำนวนคี่ (บทนิยามของจำนวนคี่)

เพราะฉะนั้น a^2 ไม่ใช่จำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า a ไม่ใช่จำนวนคู่แล้ว a^2 จะไม่ใช่จำนวนคู่

ดังนั้น ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a จะเป็นจำนวนคู่

□

ตัวอย่างที่ 4.1.8 จงพิสูจน์ว่า สำหรับเซต A และ B ใดๆ ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B' = \phi$

พิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

สมมุติให้ $A \cap B' \neq \phi$

ดังนั้นมี $x \in A \cap B'$

จะได้ $x \in A$ และ $x \in B'$ (บทนิยามของ "$\cap$")

แสดงว่า $x \in A$ และ $x \notin B$ (บทนิยามของคอมพลีเมนต์)

เพราะฉะนั้น $A \not\subset B$ (นิเสธของ "$\subset$ ")

นั่นคือ $A \cap B' \neq \phi \rightarrow A \not\subset B$

ดังนั้น $A \subset B \rightarrow A \cap B' = \phi$

ตัวอย่างที่ 4.1.9 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า ab เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่หรือ b เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์

แบบฝึกหัดที่ 17

ข้อที่ 1 – 6 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม
จงพิสูจน์ว่า

1. ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^4 จะเป็นจำนวนคู่
2. ถ้า a และ b ต่างก็เป็นจำนวนคู่แล้ว a + b จะเป็นจำนวนคู่
3. ถ้า $(a + b)^2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่ หรือ b เป็นจำนวนคี่
4. ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว a^2 จะเป็นจำนวนคี่
5. ถ้า (a + b) เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่ หรือ b เป็นจำนวนคี่
6. ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่แล้ว a จะเป็นจำนวนคี่

7. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ
จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
(ข้อแนะ : $x > y$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก t ซึ่ง $x = y + t$)

8. กำหนดบทนิยามต่อไปนี้
ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$
a หาร b ลงตัว ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $b = ac$
ใช้สัญลักษณ์ $a \mid b$ แทน a หาร b ลงตัว
$a \nmid b$ แทน a หาร b ไม่ลงตัว

8.1 กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$
จงพิสูจน์ว่า
ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid (b+c)$ แล้ว $a \mid c$

8.2 กำหนด a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$, $c \neq 0$
จงพิสูจน์ว่า
ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid d$ แล้ว $ac \mid bd$

8.3 กำหนด a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
ถ้า $a \mid 3b$ แล้ว $10 \mid 5b$

3) การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction)

เราจะพิสูจน์ข้อความ P หรือจะพิสูจน์ว่า P เป็นจริง โดยสมมุติให้ ~P เป็นจริงแล้วได้ผลสรุป $Q \wedge {\sim}Q$ เราใช้วิธีพิสูจน์เช่นนี้ได้เพราะ $[{\sim}P \rightarrow (Q \wedge {\sim}Q)] \rightarrow P$ เป็นสัจนิรันดร์

เราอาจกล่าวได้ว่า การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้งนี้เป็นการพิสูจน์โดยสมมุติให้ข้อความที่จะพิสูจน์เป็นเท็จ จากสมมุติฐานนี้พิสูจน์ต่อไปจนพบผลสรุปที่ขัดแย้งกับสิ่งที่ทราบมาก่อนหรือสิ่งที่กำหนดให้ หรือทฤษฎีบท หรือสัจพจน์ ฯลฯ แล้วจึงสรุปว่าสมมุติฐานที่ตั้งไว้เป็นไปไม่ได้ นั่นคือที่สมมติว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จนั้นเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นข้อความนั้นจะต้องเป็นจริง

การพิสูจน์ว่า P เป็นจริงโดยการหาข้อขัดแย้งอยู่ในรูปดังนี้

พิสูจน์ สมมุติให้ ~P เป็นจริง

$$\left.\begin{array}{l}\text{----------}\\ \text{----------}\\ \text{----------}\end{array}\right\}\ \text{ใช้ } {\sim}P\text{, บทนิยาม, สัจพจน์ หรือ ทฤษฎีบทที่มีมาก่อนแล้ว}$$

เพราะฉะนั้น $Q \wedge {\sim}Q$
นั่นคือ ${\sim}P \rightarrow Q \wedge {\sim}Q$
ดังนั้น P เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 4.1.10 กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม
จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว y = x + 3 จะเป็นจำนวนคี่

พิสูจน์
1) ให้ P แทนข้อความ ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว $y = x + 3$ จะเป็นจำนวนคี่
2) สมมุติให้ ~P เป็นจริง
3) ดังนั้น จะได้ว่า x เป็นจำนวนคู่ และ $y = x + 3$ ไม่ใช่จำนวนคี่
4) $y = x + 3$ ไม่ใช่จำนวนคี่ (จาก 3) ใช้กฎการคัด)
5) x เป็นจำนวนคู่ (จาก 3) ใช้กฎการคัด)
6) $x = 2n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม (บทนิยามของจำนวนคู่)
7) จะได้ $y = 2n + 3$ (จาก $y = x + 3$)
8) $y = 2(n+1) + 1$ (กฎการเปลี่ยนหมู่ได้, กฎการสลับที่และกฎการแจกแจง)

9) ให้ $n + 1 = r$ จะได้ r เป็นจำนวนเต็ม (ตั้งชื่อใหม่)
10) ดังนั้น $y = 2r + 1$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็ม
11) นั่นคือ y เป็นจำนวนคี่ (จาก 10) และบทนิยามของจำนวนคี่)
ซึ่งขัดแย้งกับ 4) ที่ว่า y ไม่ใช่จำนวนคี่
12) จะเห็นว่า ถ้าให้ Q : y ไม่ใช่จำนวนคี่
$\sim Q$: y เป็นจำนวนคี่
จาก 4), 11) และ 12) เราได้ $Q \wedge \sim Q$ (กฎการรวม)
13) นั่นคือ $\sim P \rightarrow Q \wedge \sim Q$
14) ดังนั้น ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว $y = x + 3$ จะเป็นจำนวนคี่

□

ข้อสังเกต จะเห็นว่าตัวอย่างที่ 4.1.1, 4.1.6 และ 4.1.10 ในหัวข้อ 1), 2) และ 3) เป็นโจทย์ข้อเดียวกัน ดังนั้นจะได้ว่าโจทย์ข้อเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้หลายวิธี

ตัวอย่างที่ 4.1.11 จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์ 1) สมมุติให้ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
2) เราสามารถเขียนได้ว่า $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก และ ห.ร.ม. (greatest common divisor) ของ a และ b เท่ากับ 1
3) $\dfrac{a^2}{b^2} = 2$
4) $a^2 = 2b^2$ และ b^2 เป็นจำนวนเต็ม
5) a^2 เป็นจำนวนคู่ (จาก 4) และบทนิยามของจำนวนคู่)
6) ดังนั้น a เป็นจำนวนคู่ (ตัวอย่างที่ 4.1.7 ในหัวข้อ 2))
7) $a = 2n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม (บทนิยามของจำนวนคู่)
8) $a^2 = (2n)^2$
9) $2b^2 = (2n)^2$ (จาก 4) และ 8))
10) $b^2 = 2n^2$ โดยที่ n^2 เป็นจำนวนเต็ม

11) b^2 เป็นจำนวนคู่ (จาก 10) และบทนิยามของจำนวนคู่)

12) b เป็นจำนวนคู่ (ตัวอย่างที่ 4.1.7 ในข้อหัว 2))

13) $b = 2m$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

14) 2 เป็นตัวหารร่วมของ a และ b (จาก 7) และ 13))

15) นั่นคือ ห.ร.ม. ของ a และ b ไม่เท่ากับ 1
ซึ่งขัดแย้งกับ 2) ที่ว่า ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1

16) ดังนั้น $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

□

ตัวอย่างที่ 4.1.12 จงพิสูจน์ว่า จำนวนตรรกยะรวมกับจำนวนอตรรกยะ จะได้จำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์ จะเห็นว่าสิ่งที่โจทย์ให้พิสูจน์นั้นคือข้อความเดียวกับข้อความต่อไปนี้
ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $x + y$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

เขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

ให้ p_1 แทน x เป็นจำนวนตรรกยะ

p_2 แทน y เป็นจำนวนอตรรกยะ

p_3 แทน $x + y$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ดังนั้น $p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_3$ จะแทน ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $x + y$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ให้ P แทน $p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_3$

1) สมมุติให้ ~P เป็นจริง

2) จะได้ว่า $\sim(p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_3)$ เป็นจริง

3) $(p_1 \wedge p_2) \wedge \sim p_3$

เพราะ $\sim\{(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3\} \equiv (p_1 \wedge p_2) \wedge \sim p_3)$

4) นั่นคือ เราได้ว่า x เป็นจำนวนตรรกยะ และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ และ $x + y$ เป็นจำนวนตรรกยะ

5) เราได้ x เป็นจำนวนตรรกยะ (จาก 4) ใช้กฎการคัด)

6) ดังนั้น $x = \frac{a}{b}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$

(บทนิยามของจำนวนตรรกยะ)

7) $x + y = \frac{c}{d}$ โดยที่ c, d เป็นจำนวนเต็ม และ $d \neq 0$

(เพราะ x + y เป็นจำนวนตรรกยะ)

8) $\frac{a}{b} + y = \frac{c}{d}$ (จาก 6) และ 7))

9) $y = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{bd}$ โดยที่ $cd - ad$, b.d เป็นจำนวนเต็ม และ $bd \neq 0$

(เพราะ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม และ

$b \neq 0$, $d \neq 0$)

10) y เป็นจำนวนตรรกยะ (จาก 9) และบทนิยามของจำนวนตรรกยะ)

ซึ่งขัดแย้งกับ 4) ที่ว่า y เป็นจำนวนอตรรกยะ

11) ดังนั้น ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว x + y เป็นจำนวนอตรรกยะ

□

ตัวอย่างที่ 4.1.13 จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $x + \frac{1}{x} \geq 2$

พิสูจน์ ให้ P แทน ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $x + \frac{1}{x} \geq 2$

1) สมมุติให้ ~P เป็นจริง

2) จะได้ว่า x เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + \frac{1}{x} \ngeq 2$

(เพราะ $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$)

3) จาก 2) เราได้ $x + \frac{1}{x} \ngeq 2$

4) นั่นคือ $x + \frac{1}{x} < 2$

5) $x + \frac{1}{x} - 2 < 0$

6) $x^2 + 1 - 2x < 0$ (จาก 5) คูณทั้งสองข้างด้วย x, เครื่องหมายอสมการไม่เปลี่ยน เพราะว่า x เป็นจำนวนจริงบวก)

7) $(x - 1)^2 < 0$

ซึ่งขัดแย้งกับ $(x-1)^2 \geq 0$ (คุณสมบัติของจำนวนจริง)

ดังนั้น ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $x + \frac{1}{x} \geq 2$

□

ตัวอย่างที่ 4.1.14 จงพิสูจน์ว่า $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์

พิสูจน์

1) สมมุติให้ $p \wedge q \rightarrow p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์
2) ดังนั้น มีกรณีที่ $p \wedge q \rightarrow p$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
3) แสดงว่า $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นจริง
4) และ p มีค่าความจริงเป็นเท็จ
5) จาก 3) จะได้ p มีค่าความจริงเป็นจริง ซึ่งขัดแย้งกับ 4)

ดังนั้น $p \wedge q \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์

□

ตัวอย่างที่ 4.1.15 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งด้าน AB = ด้าน AC จงพิสูจน์ว่า $\hat{B} = \hat{C}$

พิสูจน์ สิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ คือ ถ้าด้าน AB = ด้าน AC แล้ว $\hat{B} = \hat{C}$

ให้ P แทน ถ้าด้าน AB = ด้าน AC แล้ว $\hat{B} = \hat{C}$

1) สมมุติให้ $\sim P$
2) จะได้ว่าด้าน AB = ด้าน AC
3) และ $\hat{B} \neq \hat{C}$
4) เพราะว่า $\hat{B} \neq \hat{C}$ ดังนั้น $\hat{B} > \hat{C}$ หรือ $\hat{B} < \hat{C}$
5) ถ้า $\hat{B} > \hat{C}$ จะได้ ด้าน AC > ด้าน AB ซึ่งขัดแย้งกับ 2)
6) ถ้า $\hat{B} < \hat{C}$ จะได้ ด้าน AC < ด้าน AB ซึ่งขัดแย้งกับ 2)

นั่นคือ ถ้าด้าน AB = ด้าน AC แล้ว $\hat{B} = \hat{C}$

□

ตัวอย่างที่ 4.1.16 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}+x$ เป็นจำนวนอตรรกยะหรือ $\sqrt{2}-x$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์

แบบฝึกหัดที่ 18

1. กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม
   จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนคี่ แล้ว $x + 1$ เป็นจำนวนคู่ ให้ใช้การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง
2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $y - x$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว xy เป็นจำนวนอตรรกยะ
4. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนจริง
   $P(x)$ คือ $2x + 1$ และ t เป็นจำนวนจริงบวก
   จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x| < \frac{t}{2}$ แล้ว $|P(x) - 1| < t$
5. จงพิสูจน์ว่า $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim p \vee q$ เป็นสัจนิรันดร์ โดยใช้การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง
6. จงพิสูจน์ว่า $A \cap A' = \phi$

4) การพิสูจน์ $p \vee q$

เราอาจพิสูจน์ $p \vee q$ โดยพิสูจน์ $\sim p \rightarrow q$ แทนทั้งนี้ เพราะ $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$ ส่วนการพิสูจน์ $\sim p \rightarrow q$ ก็ดำเนินการตามวิธีที่กล่าวมาแล้ว

ตัวอย่างที่ 4.1.17 จงพิสูจน์ว่า ถ้าผลคูณของจำนวนเต็มสองจำนวนเป็นจำนวนคู่ แล้ว จำนวนใดจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนคู่

พิสูจน์

5) การพิสูจน์โดยการแจงกรณี (Proof by Cases)

การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ในบางครั้ง p อาจประกอบด้วยกรณีต่าง ๆ เป็นจำนวนจำกัด เช่น p ประกอบด้วย $p_1 \vee p_2$ ในการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ก็จะต้องพิสูจน์ $(p_1 \vee p_2) \rightarrow q$

เนื่องจาก $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \rightarrow \{(p_1 \vee p_2) \rightarrow q\}$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น เราสามารถพิสูจน์ $p_1 \vee p_2 \rightarrow q$ โดยพิสูจน์ $p_1 \rightarrow q$ และ $p_2 \rightarrow q$ แทน และในการพิสูจน์ $p_1 \rightarrow q$ และ $p_2 \rightarrow q$ นั้น ก็ดำเนินการพิสูจน์ตามวิธีที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 1) – 4)

ในกรณีที่ p คือ $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \dots \vee p_n$ การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ก็จะต้องแยกการพิสูจน์เป็น n กรณี คือ พิสูจน์ $p_1 \rightarrow q, p_2 \rightarrow q, p_3 \rightarrow q, \dots, p_n \rightarrow q$

การพิสูจน์ $p_1 \vee p_2 \rightarrow q$ อยู่ในรูปดังนี้

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** พิสูจน์ว่า $p_1 \rightarrow q$

ดำเนินการพิสูจน์ตามวิธีที่กล่าวมาแล้ว ในหัวข้อ 1) – 4)

กรณีที่ 2 พิสูจน์ว่า $p_2 \rightarrow q$

ดำเนินการพิสูจน์ตามวิธีที่กล่าวมาแล้ว ในหัวข้อ 1) – 4)

เพราะฉะนั้น $p_1 \vee p_2 \rightarrow q$

ตัวอย่างที่ 4.1.18 จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ถ้าให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า a เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ดังนั้น ในการพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่ เราจะต้องพิสูจน์ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 พิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 พิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 1 สมมุติให้ a เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า $a = 2n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม (บทนิยามของจำนวนคู่)

$$
\begin{aligned}
a^2 - a &= (2n)^2 - 2n \\
&= 4n^2 - 2n \\
&= 2(2n^2 - n) \quad \text{โดยที่ } (2n^2 - n) \text{ เป็นจำนวนเต็ม}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่ (บทนิยามของจำนวนคู่)

นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 สมมุติให้ a เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $a = 2n + 1$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม (บทนิยามของจำนวนคี่)

$$
\begin{aligned}
a^2 - a &= (2n+1)^2 - (2n+1) \\
&= (4n^2+4n+1) - (2n+1) \\
&= 4n^2 + 2n \\
&= 2(2n^2+n) \quad \text{โดยที่ } 2n^2 + n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่ (บทนิยามของจำนวนคู่)

นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 สรุปได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 - a$ เป็นจำนวนคู่

□

ตัวอย่างที่ 4.1.19 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม
จงพิสูจน์ว่า ถ้า ab เป็นจำนวนคี่ แล้ว a และ b ต่างเป็นจำนวนคี่

พิสูจน์

แบบฝึกหัดที่ 19

กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

1. ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 + 3a + 1$ เป็นจำนวนคี่
2. ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่
3. ถ้า 3 หาร a^2 ลงตัว แล้ว 3 หาร a ลงตัว
4. กำหนดให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(ก) ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของจำนวนจริง x ใช้สัญลักษณ์ $|x|$ มีบทนิยามดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x \ , & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x \ , & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

(ข) $\forall x, x \in R \rightarrow x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0$ เมื่อ R คือ เซตของจำนวนจริง

(ค) $\forall x \in R, x > 0 \leftrightarrow -x < 0$ และ $(-0) = 0$

(ง) $\forall x \in R, -(-x) = x$

(จ) $\forall x \in R, x^2 \geq 0$

จงพิสูจน์ว่า

4.1 ถ้า x เป็นจำนวนจริง แล้ว $|-x| = |x|$

4.2 ถ้า x เป็นจำนวนจริง แล้ว $|x^2| = |x|^2$

4.3 ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง แล้ว $|xy| = |x||y|$

6) การพิสูจน์ $p \leftrightarrow q$

เราพิสูจน์ $p \leftrightarrow q$ โดยพิสูจน์แยกเป็น 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 พิสูจน์ $p \rightarrow q$ และตอนที่ 2 พิสูจน์ $q \rightarrow p$

ทั้งนี้เพราะ $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

ในการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ และ $q \rightarrow p$ ก็ใช้วิธีการพิสูจน์ตามวิธีต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว

การพิสูจน์ $p \leftrightarrow q$ อยู่ในรูป

พิสูจน์ ตอนที่ 1 พิสูจน์ $p \rightarrow q$

ดำเนินการพิสูจน์ตามวิธีที่กล่าวมาแล้ว

ตอนที่ 2 พิสูจน์ $q \rightarrow p$

ดำเนินการพิสูจน์ตามวิธีที่กล่าวมาแล้ว

เพราะฉะนั้น $p \leftrightarrow q$

ตัวอย่างที่ 4.1.20 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า
$(a + 1)^2$ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนคี่

การพิสูจน์แยกเป็น 2 ตอน คือ

1) พิสูจน์ว่า ถ้า $(a + 1)^2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

2) พิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $(a + 1)^2$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ 1) โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

นั่นคือ จะพิสูจน์ว่า ถ้า a ไม่ใช่จำนวนคี่ แล้ว $(a + 1)^2$ ไม่ใช่จำนวนคู่

สมมุติให้ a ไม่ใช่จำนวนคี่
ดังนั้น a เป็นจำนวนคู่
$a = 2n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

$a + 1 = 2n + 1$

$(a + 1)^2 = (2n + 1)^2$

$= 4n^2 + 4n + 1$

$= 2(2n^2 + 2n) + 1$ โดยที่ $2n^2 + 2n$ เป็นจำนวนเต็ม

$(a + 1)^2$ เป็นจำนวนคี่

เพราะฉะนั้น $(a + 1)^2$ ไม่ใช่จำนวนคู่

นั่นคือ ถ้า a ไม่ใช่จำนวนคี่ แล้ว $(a + 1)^2$ ไม่ใช่จำนวนคู่

ดังนั้น ถ้า $(a + 1)^2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ 2) โดยใช้การพิสูจน์ $p \to q$ โดยตรง

สมมุติให้ a เป็นจำนวนคี่

$a = 2n + 1$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

$a + 1 = (2n + 1) + 1 = 2n + 2$

$(a + 1)^2 = (2n + 2)^2 = 4n^2 + 8n + 4 = 2(2n^2 + 4n + 2)$

โดยที่ $2n^2 + 4n + 2$ เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $(a + 1)^2$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $(a + 1)^2$ เป็นจำนวนคู่

$\square$

ตัวอย่างที่ 4.1.21 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า $a+b$ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $a-b$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์

แบบฝึกหัดที่ 20

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์แต่ละข้อต่อไปนี้

1. a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a + 1 เป็นจำนวนคู่
2. a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนคี่
3. a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a + 2 เป็นจำนวนคู่
4. a^2 เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a + 2 เป็นจำนวนคี่
5. 3 หาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ 3 หาร a^2 ลงตัว
6. สำหรับ A และ B ใดๆ จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

7) การพิสูจน์แย้งโดยการยกตัวอย่างค้าน (Disproof by Counter Example)

การพิสูจน์แย้งโดยการยกตัวอย่างค้าน เป็นการคัดค้านข้อความ "สำหรับทุก ๆ สมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ U สอดคล้องกับลักษณะที่กำหนดให้" กล่าวคือ เป็นการพิสูจน์ว่า $\forall x\ [\ P(x)\ ]$ เป็นเท็จ หรือ $\sim\forall x\ [\ P(x)\ ]$ เป็นจริงนั่นเอง การพิสูจน์กระทำโดยการหาสมาชิกหนึ่งตัวจากเอกภพสัมพัทธ์ U มาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ P(x) เป็นเท็จ (หรือ ~P(x) เป็นจริง) นั่นคือ เราสามารถพิสูจน์ $\forall x\ [\ P(x)\ ]$ เป็นเท็จ (หรือ $\sim\forall x\ [\ P(x)\ ]$ เป็นจริง) โดยพิสูจน์ว่า $\exists x\ [\ \sim P(x)\ ]$ เป็นจริง เราพิสูจน์เช่นนี้ได้เพราะ

$$\sim\forall x\ [\ P(x)\ ]\ \equiv\ \exists x\ [\ \sim P(x)\ ]$$

การพิสูจน์ $\forall x\ [\ P(x)\ ]$ เป็นเท็จ อยู่ในรูป

พิสูจน์ เลือก a ที่เหมาะสม โดยให้ $a \in U$ และทำให้ ~P(a) เป็นจริง --------- --------- --------- เพราะฉะนั้น ~P(a) เป็นจริง นั่นคือ $\exists x\ [\ \sim P(x)\ ]$ เป็นจริง ดังนั้น $\forall x\ [\ P(x)\ ]$ เป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 4.1.22 จงพิสูจน์ว่า $\forall x$ [ถ้า x เป็นจำนวนจริง แล้ว $x^2 > x$] เป็นเท็จ

พิสูจน์ เนื่องจาก $\frac{1}{2}$ เป็นจำนวนจริง เป็นจริง

และ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \not> \frac{1}{2}$ เป็นจริง

จึงได้ $\frac{1}{2}$ เป็นจำนวนจริง และ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \not> \frac{1}{2}$ เป็นจริง

นั่นคือ $\exists x$ [x เป็นจำนวนจริง และ $x^2 \not> x$] เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x$ [ถ้า x เป็นจำนวนจริง แล้ว $x^2 > x$] เป็นเท็จ

□

ตัวอย่างที่ 4.1.23 จงพิสูจน์ว่า $\forall x$ [ถ้า x เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว x เป็นจำนวนคี่] เป็นเท็จ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนเต็ม

พิสูจน์ เนื่องจาก 2 เป็นจำนวนเฉพาะ เป็นจริง
และ 2 ไม่ใช่จำนวนคี่ เป็นจริง
จึงได้ 2 เป็นจำนวนเฉพาะ และ 2 ไม่ใช่จำนวนคี่ เป็นจริง
นั่นคือ $\exists x$ [x เป็นจำนวนเฉพาะ และ x ไม่ใช่จำนวนคี่] เป็นจริง
ดังนั้น $\forall x$ [ถ้า x เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว x เป็นจำนวนคี่] เป็นเท็จ

□

แบบฝึกหัดที่ 21

จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. $\forall x$ [ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x^2 = 1$]
2. $\forall x$ [ถ้า x เป็นจำนวนจริง แล้ว $x \geq 0$ หรือ x เป็นจำนวนตรรกยะ]
3. $\forall x$ [ถ้า x เป็นจำนวนจริง แล้ว $x^2 = x$]
4. ปลาทุกตัวมีเกล็ด
5. ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a > b$ แล้ว $ac > bc$
6. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ $a > b$ แล้ว $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
7. กำหนด $A = \{1,2,3,4\}$ และ $B = \{1,3,5,7,9\}$ จงพิสูจน์ว่า A เป็นเซตย่อย (subset) ของ B เป็นเท็จ

8) การพิสูจน์ว่ามี (อย่างน้อยหนึ่ง) (Proof of Existence)

การพิสูจน์ว่ามี เป็นการพิสูจน์ข้อความประเภทที่ตรวจสอบว่าสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ U มีอย่างน้อย 1 สมาชิกที่สอดคล้องกับลักษณะที่กำหนดให้ กล่าวคือ เป็นการพิสูจน์ว่า $\exists x\ [\ P(x)\ ]$ เป็นจริง ซึ่งการพิสูจน์กระทำโดยการหาสมาชิกหนึ่งตัวในเอกภพสัมพัทธ์มาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ P(x) เป็นจริง

การพิสูจน์อยู่ในรูปดังนี้

พิสูจน์ เลือกสมาชิก a ที่เหมาะสม โดยที่ $a \in U$
และทำให้ P(a) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น P(a) เป็นจริง
นั่นคือ $\exists x\ [\ P(x)\ ]$ เป็นจริง

การพิสูจน์ว่ามีนี้มีความจำเป็นมากในคณิตศาสตร์ระดับสูง เพราะการพิสูจน์ดังกล่าวเพื่อเป็นการยืนยันว่าเหตุการณ์นั้นมีจริง ก่อนที่จะดำเนินการศึกษาต่อไป

ตัวอย่างที่ 4.1.24 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนเต็ม x อย่างน้อยหนึ่งจำนวน ซึ่ง $\frac{1}{x} = x$"

พิสูจน์ โจทย์ต้องการพิสูจน์ว่า $\exists x$ [x เป็นจำนวนเต็ม และ $\frac{1}{x} = x$] เป็นจริง

ให้ $x = 1$ ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็ม เป็นจริง

และ $\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 = x$ เป็นจริง

นั่นคือ $\exists x$ [x เป็นจำนวนเต็ม และ $\frac{1}{x} = x$] เป็นจริง

□

ตัวอย่างที่ 4.1.25 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 - 3x + 2 = 0$"

พิสูจน์ โจทย์ต้องการพิสูจน์ว่า $\exists x$ [x เป็นจำนวนจริง และ $x^2 - 3x + 2 = 0$] เป็นจริง

ให้ $x = 1$ ดังนั้น x เป็นจำนวนจริงเป็นจริง

และจะได้ $x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 + 2 = 0$ เป็นจริง

หรือให้ $x = 2$ ดังนั้น x เป็นจำนวนจริง เป็นจริง

และจะได้ $x^2 - 3x + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$ เป็นจริง

นั่นคือ $\exists x$ [x เป็นจำนวนจริง และ $x^2 - 3x + 2 = 0$] เป็นจริง

□

ตัวอย่างที่ 4.1.26 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ $n > N$ แล้ว $\frac{1}{n} < 0.001$"

พิสูจน์ ให้ $N = 1,000$ ดังนั้น N เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นจริง

และเนื่องจาก $n > N$ ดังนั้น $n > 1,000$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{1,000}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{n} < .001$ เป็นจริง

ดังนั้น มี $N = 1,000$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ $n > N$ แล้ว $\frac{1}{n} < 0.001$

□

ข้อสังเกต ในการหา N เราได้จากการวิเคราะห์จากสิ่งที่เราต้องการ ดังนี้

เราต้องการ $\frac{1}{n} < 0.001$

นั่นคือ $\frac{1}{n} < \frac{1}{1,000}$

หรือ $n > 1,000$

ดังนั้น เรากำหนด $N = 1,000$

เราอาจกำหนด N เป็นค่าอื่นก็ได้ แต่ต้องมากกว่า 1,000

ตัวอย่างที่ 4.1.27 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ x ถ้า $|x-2| < \delta$ แล้ว $|3x-6| < 0.0001$"

พิสูจน์

หมายเหตุ ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า มี x เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ P(x) เป็นจริง เราจะต้องพิสูจน์ 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 พิสูจน์ว่า $\exists x\,[\,P(x)\,]$ เป็นจริง

ตอนที่ 2 พิสูจน์ว่า สำหรับ x_1 และ x_2 ถ้า $P(x_1)$ เป็นจริงและ $P(x_2)$ เป็นจริง แล้ว $x_1 = x_2$

ตัวอย่างที่ 4.1.28 จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ $2 + x = 0$

พิสูจน์ **ตอนที่ 1** พิสูจน์ว่า $\exists x$ [x เป็นจำนวนจริง และ $2 + x = 0$] เป็นจริง

ตอนที่ 2 พิสูจน์ว่า ถ้า $2 + x_1 = 0$ และ $2 + x_2 = 0$ แล้ว $x_1 = x_2$

ตอนที่ 1 เพราะว่า -2 เป็นจำนวนจริง เป็นจริง

และ $2 + (-2) = 0$ เป็นจริง

ดังนั้น -2 เป็นจำนวนจริง และ $2 + (-2) = 0$ เป็นจริง

นั่นคือ $\exists x$ [x เป็นจำนวนจริง และ $2 + x = 0$] เป็นจริง

ตอนที่ 2 ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

โดยที่ $2 + x_1 = 0$ และ $2 + x_2 = 0$

ดังนั้น $2 + x_1 = 2 + x_2$ (ต่างก็เท่ากับ ศูนย์)

$x_1 = x_2$ (การตัดออกของการบวก)

จากตอนที่ 1 และตอนที่ 2 แสดงว่า มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $2 + x = 0$

$\square$

แบบฝึกหัดที่ 22

1. จงพิสูจน์ว่า “มีจำนวนเต็ม x อย่างน้อยหนึ่งจำนวนที่ $x + 2 < 5$”
2. จงพิสูจน์ว่า $\exists x[5 + \sqrt{x+7} = x]$ เป็นจริง เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง
3. จงพิสูจน์ว่า “มีจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วผลลัพธ์อยู่ระหว่าง 90 กับ 110”
4. จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนเต็ม x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x + 3 = 10$
5. กำหนดให้ $A = \{0, 2, 8, 9\}$ และ $a \oplus b$ หมายถึง หลักหน่วยของ $a + b$

   จงพิสูจน์ว่า

   5.1 มี x ใน A ซึ่ง $x \oplus y = y$ สำหรับทุก y ใน A

   5.2 มี z ใน A ซึ่ง $z \oplus 8 = 0$
6. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะมีจำนวนจริง y ซึ่ง $x + y = 0$

ตอนที่ 4.2 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์(Mathematical Induction)

สังเกตผลบวกของจำนวนต่อไปนี้

$1 + 2$ = ……………….

$1 + 2 + 4$ = ……………….

$1 + 2 + 4 + 8$ = ……………….

……………………………….. = ……………….

.

.

.

ทำนายรูปแบบทั่วไป

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

การทำนายนี้อาจจะผิดก็ได้เพราะการทำนายนี้เป็น
การให้เหตุผลแบบ………………………………………………..

ในวิชาคณิตศาสตร์ บ่อยครั้งที่เราพบข้อความหรือสูตรซึ่งเกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก เช่น

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
3. $2^n \geq 1 + n$
4. $x^{2n} - y^{2n}$ หารด้วย $x - y$ ลงตัว

การที่จะแสดงว่า ข้อความข้างต้นเป็นจริง อาจกระทำได้โดยการแทนค่า เริ่มตั้งแต่แทนค่า $n = 1$ ดูว่าข้อความดังกล่าวเป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงก็แทนค่า $n = 2$ ดูว่าข้อความเป็นจริงอีกหรือไม่ดังนี้เรื่อยไป ถึงแม้ว่าสำหรับจำนวนเต็มบวก n แต่ละค่า เราจะใช้เวลาเพียง 1 วินาที ในการแสดงว่าข้อความดังกล่าวเป็นจริงก็ตาม เราไม่สามารถที่จะแสดงได้ว่าข้อความนั้นเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ n โดยวิธีดังกล่าว เพราะว่าเซตของจำนวนเต็มบวกเป็นเซตอนันต์ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวนักคณิตศาสตร์จึงได้คิดวิธีพิสูจน์ขึ้นมา เพื่อแสดงว่าข้อความข้างต้นเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก วิธีที่ใช้นี้เรียกว่า **อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**

หลักการที่หนึ่งของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (First Principle of Mathematical Induction)

ให้ P(n) แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก n

ถ้า 1) P(1) เป็นจริง

และ 2) ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริงด้วย

แล้วจะได้ว่า P(n) เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกจำนวน

จะเห็นว่า การพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริงนั้นจะต้องกระทำสองขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 แสดงว่า P(n) เป็นจริง เมื่อ $n = 1$

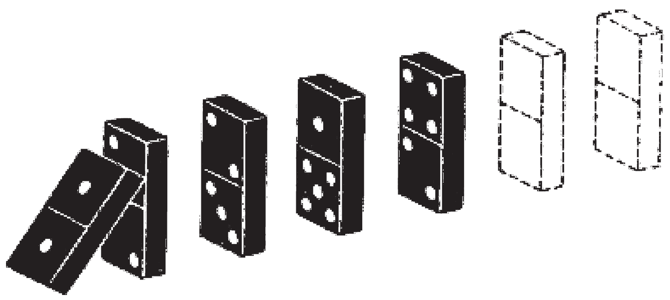
ขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่า ถ้า P(n) เป็นจริง เมื่อ $n = k$ แล้วจะทำให้ P(n) เป็นจริง เมื่อ $n = k + 1$ ด้วย

การที่เราพิสูจน์เพียงสองขั้นตอนนี้ก็เป็นการเพียงพอแล้ว ตามหลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อให้เข้าใจวิธีการนี้ดียิ่งขึ้นก็อาจจะอธิบายได้ โดยใช้หลักตรรกศาสตร์ ดังนี้

ถ้า P(1) เป็นจริง

และ	$P(1) \rightarrow P(2)$	เป็นจริง
เพราะฉะนั้นจะได้	$P(2)$	เป็นจริง (กฎแจงผลตามเหตุ)
และ	$P(2) \rightarrow P(3)$	เป็นจริง
เพราะฉะนั้นจะได้	$P(3)$	เป็นจริง (กฎแจงผลตามเหตุ)
	$\vdots$	
จะได้	$P(n)$	เป็นจริง

ซึ่งหลักการดังกล่าวอาจอธิบายด้วยภาพเปรียบเทียบได้ดังนี้



ถ้าเราหาโดมิโนมาจำนวนหนึ่ง (กี่ร้อยตัวก็ได้) มาตั้งไว้ให้ห่างกันระยะพอเหมาะ โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้าตัวใดตัวหนึ่งล้มจะไปกระทบตัวถัดไปให้ล้มลงด้วย จะเห็นว่าจากเงื่อนไข ดังกล่าว ถ้าตัวที่หนึ่งล้มเพียงตัวเดียว ก็จะไปกระทบตัวที่สองล้ม และเป็นผลต่อเนื่องให้ตัวที่สาม ตัวที่สี่ และตัวถัดไปจนถึงตัวที่ n ล้มลงด้วย

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงพิสูจน์ว่า $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$

ขั้นที่ 1 ถ้า $n = 1$

$P(1)$ แทนข้อความ $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$ ซึ่งเป็นจริง เพราะต่างก็เท่ากับ 1

ขั้นที่ 2 ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง แล้วพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

กล่าวคือ สมมติให้ $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k-1) = k^2$ (1.1)

แล้วต้องพิสูจน์ว่า

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + \{2(k+1) - 1\} = (k+1)^2$$

เนื่องจาก

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + \{2(k+1) - 1\} = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k-1) + \{2(k+1) - 1\}$

$= k^2 + \{2(k+1) - 1\}$ โดย (1.1)

$= k^2 + 2k + 1$

$= (k+1)^2$

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

นั่นคือ ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริงด้วย

ดังนั้น โดยหลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า P(n) เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n □

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงพิสูจน์ว่า $n(n^2+2)$ หารด้วย 3 ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $n(n^2+2)$ หารด้วย 3 ลงตัว

ขั้นที่ 1 ถ้า n = 1

P(1) แทนข้อความ $1(1^2+2)$ หารด้วย 3 ลงตัว ซึ่งเป็นจริง เพราะว่า $1(1^2+2) = 3$

ขั้นที่ 2 ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติให้ P(k) เป็นจริง นั่นคือ $k(k^2+2)$ หารด้วย 3 ลงตัว

จะพิสูจน์ว่า P(k+1) เป็นจริง นั่นคือ จะพิสูจน์ว่า $(k+1)\{(k+1)^2 + 2\}$ หารด้วย 3 ลงตัว

เนื่องจาก $(k+1)\{(k+1)^2 + 2\} = k(k+1)^2 + (k+1)^2 + 2(k+1)$

$= k(k^2+2k+1) + (k^2+2k+1) + 2k + 2$

$= (k.k^2+2k) + (3k^2+3k+3)$

$= k(k^2+2) + 3(k^2+k+1)$

จากที่สมมติให้ P(k) เป็นจริง เราได้ว่า 3 หาร $k(k^2+2)$ ลงตัว

เพราะว่า $3(k^2+k+1)$ มี 3 เป็นตัวประกอบ จึงได้ว่า 3 หาร $3(k^2+k+1)$ ลงตัว

ดังนั้น 3 หาร $(k+1)\ \{(k+1)^2 + 2\}$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

นั่นคือ ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริงด้วย

ดังนั้น โดยหลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า P(n) เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n □

ข้อสังเกต 1. ในการพิสูจน์ P(k+1) เป็นจริงต้องเอา P(k) มาใช้ในการพิสูจน์ด้วย

2. จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า การพิสูจน์มี 2 ขั้นตอน ขั้นแรกพิสูจน์ข้อความเป็นจริง เมื่อ $n = 1$ ขั้นที่สองพิสูจน์ว่า ถ้าข้อความเป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k แล้ว ข้อความนั้นจะต้องเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $k + 1$ ด้วย ทั้งสองขั้นตอนเป็นสิ่งจำเป็น จะขาดขั้นใดขั้นหนึ่งไม่ได้ ถ้าขาดขั้นหนึ่งขั้นใดแล้วข้อความจะไม่เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n เช่น พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n หรือไม่

ก. $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n+1}{2}$

ข. $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1) + 2$

ก. ให้ P(n) แทนข้อความ $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n+1}{2}$

ข้อความนี้เป็นจริง เมื่อ $n = 1$ เพราะ $1 = \frac{1+1}{2}$ เป็นจริง

แต่ถ้าเราสมมติให้ P(k) เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

นั่นคือ $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k+1}{2}$

เราจะพบว่า $1 + 2 + 3 + ... + (k+1) = \frac{(k+1)+1}{2}$ ไม่เป็นจริง

เพราะว่า
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + (k+1) &= 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) \\ &= \frac{k+1}{2} + (k+1) \\ &= \frac{3}{2}(k+1) \\ &\neq \frac{(k+1)+1}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ P(k+1) ไม่จริง

ดังนั้น กรณีเช่นนี้เราจึงไม่สามารถใช้หลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้

ข. ให้ P(n) แทนข้อความ $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1) + 2$

ถ้าสมมติให้ P(k) เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

นั่นคือ $2 + 4 + 6 + ... + 2k = k(k+1) + 2$

พิจารณา
$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + ... + 2(k+1) &= 2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1) \\ &= k(k+1) + 2 + 2(k+1) \\ &= (k+1)\{k+2\} + 2 \\ &= (k+1)\{(k+1) + 1\} + 2 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า P(k+1) เป็นจริง

แต่เมื่อ $n = 1$ จะได้ว่า P(1) แทนข้อความ $2 \cdot 1 = 1(1+1) + 2$ ซึ่งไม่เป็นจริง เพราะว่า $1(1+1) + 2 = 4$

ดังนั้น กรณีเช่นนี้เราจึงไม่สามารถใช้หลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้เช่นกัน

3. ถ้าเราต้องการพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n \geq m$ เราต้องกระทำดังนี้

3.1 แสดงว่า P(m) เป็นจริง

3.2 ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับ m พิสูจน์ว่าถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

□

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงพิสูจน์ว่า $2n < 2^n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 3

พิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $2n < 2^n$

ขั้นที่ 1 ถ้า $n = 3$

P(3) แทนข้อความ $2 \cdot 3 < 2^3$ ซึ่งเป็นจริง เพราะว่า $2 \cdot 3 = 6$ และ $2^3 = 8$

ขั้นที่ 2 ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $k \geq 3$

สมมติให้ P(k) เป็นจริง นั่นคือ $2k < 2^k$

จะพิสูจน์ว่า P(k+1) เป็นจริง นั่นคือ จะพิสูจน์ว่า $2(k+1) < 2^{(k+1)}$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} 2(k+1) &= 2k + 2 \\ &< 2^k + 2 \quad \text{(จากที่สมมติให้ P(k) เป็นจริง)} \\ &< 2^k + 2^k \quad \text{(เพราะ } 2 < 2^k \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } k \geq 3) \\ &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2^{(k+1)} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $2(k+1) < 2^{(k+1)}$

ดังนั้นจะได้ว่า P(k+1) เป็นจริง

นั่นคือ ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

ดังนั้น โดยหลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า P(n) เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 3 □

สรุป เราใช้หลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เมื่อต้องการแสดงว่าข้อความที่เกี่ยวข้องกับ

จำนวนเต็มบวก n เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ประเด็นสำคัญของการพิสูจน์นั้นต้องตรวจสอบที่จุดเริ่มต้น (ค่าเริ่มต้นของ n) ซึ่งข้อความเป็นจริง และในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง เมื่อ $n = k + 1$ นั้น ต้องนำข้อความเมื่อ $n = k$ เป็นจริงมาใช้เสมอ

หลักการที่สองของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Second Principle of Mathematical Induction หรือ Strong Induction)

การพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก โดยหลักการที่สองของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะกระทำดังนี้

สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ P(n) แทนข้อความที่อาจเป็นจริงหรือไม่จริงเกี่ยวกับ n

ถ้า

1) P(1) เป็นจริง

2) ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ถ้า P(1), P(2), ..., P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริงด้วย

แล้ว จะสรุปได้ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

จะเห็นว่าการที่จะพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริงนั้นจะต้องทำสองขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 แสดงว่า P(n) เป็นจริง เมื่อ $n = 1$

ขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่า ถ้า P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $n \leq k$ แล้วทำให้ P(n) เป็นจริง เมื่อ $n = k + 1$ ด้วย

ข้อสังเกต ถ้าเราต้องการพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n \geq m$ เราต้องกระทำดังนี้

(1) แสดงว่า P(m) เป็นจริง

(2) ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับ m

ถ้า P(n) เป็นจริงสำหรับทุก $n \leq k$ แล้ว P(n) เป็นจริง เมื่อ $n = k + 1$ ด้วย

ตัวอย่างที่ 4.2.4 กำหนดความสัมพันธ์

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

โดยที่ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 6$

จงพิสูจน์ว่า $a_n = 3^n + n \cdot 3^n$

พิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = 3^n + n \cdot 3^n$

ขั้นที่ 1 ถ้า n = 2 P(2) แทนข้อความ

$$\begin{aligned} a_2 &= 6a_1 - 9a_0 \\ &= 36 - 9 \\ &= 27 \\ &= 3^2 + 2 \cdot 3^2 \quad \text{ซึ่งเป็นจริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น P(2) เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2

$P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)$ เป็นจริง จะพิสูจน์ว่า P(k+1) เป็นจริง นั่นคือจะต้องพิสูจน์ว่า

$$a_{k+1} = 3^{k+1} + (k+1) \,.\, 3^{k+1}$$

จาก $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 6a_k - 9a_{k-1} \\ &= 6(3^k + k.3^k) - 9(3^{k-1} + (k-1).3^{k-1}) \end{aligned}$$

(จากที่สมมุติให้ P(k) และ P(k–1) เป็นจริง)

$$= 2(3^{k+1} + k.3^{k+1}) - 3^{k+1} - (k-1).3^{k+1}$$

$$a_{k+1} = 3^{k+1} + (k+1) \,.\, 3^{k+1}$$

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

นั่นคือ ถ้า P(n) เป็นจริงสำหรับทุก $n \le k$ แล้ว P(n) เป็นจริง เมื่อ $n = k + 1$ ด้วย

ดังนั้นโดยหลักการที่สองของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n □

แบบฝึกหัดที่ 23

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

1. $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$
2. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
3. $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$
4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
5. $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{(4n^3 - n)}{3}$
6. $1.3 + 2.4 + 3.5 + ... + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$
7. $\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$
8. $(23)^{3n} - 1$ หารด้วย 7 ลงตัว
9. $3^{2n+2} - 8n - 9$ หารด้วย 64 ลงตัว
10. $2^n + (-1)^{n+1}$ หารด้วย 3 ลงตัว
11. $x^{2n} - y^{2n}$ หารด้วย $x - y$ ลงตัว
12. $2^n > n \quad \forall n \geq 0$
13. $n! > 2^n \quad \forall n \geq 4$
    (เมื่อ $n! = n(n-1)(n-2) ...3.2.1$)
14. $2^{n-1} \leq n!$
15. $2^n > n^3 \quad \forall n \geq 10$
16. $(1+x)^n > 1 + nx$ เมื่อ $n \geq 2$, $x > -1$ และ $x \neq 0$
17. $2^n \geq 1 + n$
18. $2n + 1 \leq 3^n$
19. $2n > 2+n$ ทุก $n \geq 3$
20. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
21. $(1+h)^n \geq 1+nh$ ทุก n โดยที่ $h \geq -1$

22. $n(n+1)$ เป็นจำนวนคู่

23. $2n^2 + 4n + 1$ เป็นจำนวนคี่

24. กำหนดให้ $a_1 = 3$ และ $a_n = 3a_{n-1}$ จงพิสูจน์ว่า $a_n = 3^n$

25. จงแสดงว่าถ้า $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{2}$ เป็นจริง

สำหรับ $n = k \geq 1$ แล้วข้อความนี้จะเป็นจริง สำหรับ $n = k + 1$ ด้วย

ถามว่า ข้อความนี้จะเป็นจริงสำหรับทุกค่า n หรือไม่

26. กำหนดให้ 1. $a^1 = a$

2. $a^{n+1} = (a^n)a$

จงพิสูจน์ว่า $a^n b^n = (ab)^n$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

27. $|x^n| = |x|^n$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

28. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

29. ถ้าให้ $|a+b| \leq |a| + |b|$ เป็นจริงทุกจำนวนจริงใด ๆ

จงพิสูจน์ว่า $|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

30. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $8^n - 3^n$ หารด้วย 5 ลงตัว จากนั้นพิสูจน์ว่าคำตอบที่หามาได้เป็นจริง (ถูกต้อง)

31. กำหนดให้ A , B และ A_i (i = 1 , 2 , 3 , … , n) เป็นเซตใดๆที่ไม่ใช่เซตว่าง

และ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ จงพิสูจน์ว่า $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n'$

32. กำหนดความสัมพันธ์ $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ โดยที่ $a_1 = 2$ และ $a_2 = 3$

จงพิสูจน์ว่า $a_n = n + 1$

33. กำหนดความสัมพันธ์ $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ โดยที่ $a_o = 2$, $a_1 = 5$ และ $a_2 = 15$

จงพิสูจน์ว่า $a_n = 1 - 2^n + 2.3^n$

34. กำหนดความสัมพันธ์ $u(x+y) + u(x-y) = 2u(x) + 2u(y)$

โดยที่ $u(0) = 0$ และ $u(1) = a_o$

จงพิสูจน์ว่า $u(n) = n^2 a_o$

หน่วยที่ 5
การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 5.1 กระบวนการแก้ปัญหา

ตอนที่ 5.2 การสร้างสรรค์ปัญหา

แนวคิด 1. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีกระบวนการแก้ปัญหาตามขั้นตอนดังนี้

(1) ทำความเข้าใจปัญหา

(2) วางแผนแก้ปัญหา

(3) ดำเนินการตามแผนที่วางไว้

(4) ตรวจสอบผลเฉลยหรือคำตอบ

(5) สร้างสรรค์ปัญหาขึ้นใหม่จากปัญหาที่มีอยู่เดิม

2. การออกแบบแก้ปัญหาจะทำให้ผู้ออกแบบทราบว่าจะต้องใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง และสามารถสร้างสรรค์การแก้ปัญหาได้หลากหลายวิธี

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 4 จบแล้วนักเรียนสามารถ

1. ทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาได้
2. วางแผนและออกแบบการแก้ปัญหาได้
3. แก้ปัญหาได้อย่างชัดเจน รัดกุม ถูกต้อง
4. สร้างสรรค์การแก้โจทย์ปัญหา และดัดแปลงโจทย์ปัญหาเดิมเป็นโจทย์ปัญหาใหม่ได้

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์ยกตัวอย่างโจทย์ให้นักเรียนอภิปรายแนวคิดของวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่ามีกระบวนการแก้ปัญหาอย่างไร
2. อาจารย์สรุปกระบวนการแก่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วแสดงตัวอย่างการแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนตามกระบวนการแก้ปัญหาที่สรุปไว้
3. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มให้ออกแบบการแก้ปัญหา โดยมีการนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาของแต่ละกลุ่มหน้าชั้นเรียน
4. นักเรียนนำกิจกรรมตามตัวอย่างและแบบฝึกหัด
5. นักเรียนประเมินผลพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 5.1 กระบวนการแก้ปัญหา

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น ขั้นแรกจะต้องอ่านโจทย์ปัญหาให้เข้าใจก่อน ซึ่งในปัญหาอาจจะมีคำศัพท์ หรือบทนิยามที่กำหนดให้ จำเป็นที่จะต้องทำความเข้าใจก่อน แล้วดูข้อกำหนดที่ให้มาและโจทย์ถามอะไร เมื่อเข้าใจครบแล้วอย่าเพิ่งแก้ปัญหาทันที ควรวางแผนก่อนว่าต้องใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง แล้วดำเนินการตามแผนสุดท้ายตรวจสอบผลเฉลย หรือคำตอบที่ได้ว่าไม่มีข้อขัดแย้งกับที่กำหนดให้ ก็น่าจะเป็นผลเฉลยหรือคำตอบที่ถูกต้อง ส่วนใหญ่เรามักจะหยุดกันแค่นี้ แต่ถ้ารู้จักดัดแปลงปัญหาที่มีอยู่เดิมแล้วตั้งคำถามใหม่ เราจะได้ปัญหาที่ชวนคิดมากขึ้นและได้ความรู้มากมาย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ปัญหาที่ 1

จงเรียงอันดับของจำนวนต่อไปนี้ให้ถูกต้อง จากน้อยไปมาก 2^{514}, 4^{258}, 8^{171}, 16^{128} และ 32^{103}

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

เมื่อศึกษาโจทย์แล้วพบว่า มีจำนวนห้าจำนวน เขียนอยู่ในรูปเลขยกกำลัง และจะต้องเรียงอันดับจำนวนทั้งห้านี้จากซ้ายไปขวา และเรียงจาก น้อยไปมาก

ขั้นวางแผน

จากจำนวนทั้งห้าพบว่าเปลี่ยนแปลง เป็นเลขยกกำลังที่มีฐาน เป็น 2 ได้ทั้งหมด จึงจะใช้ความรู้เรื่องอสมการในเลขยกกำลัง ดังนี้

"ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 b และ c เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $b < c$ แล้ว จะได้ $a^b < a^c$ และ c เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว $(a^b)^c = a^{bc}$"

ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

พิจารณาเลขยกกำลัง แล้วเปลี่ยนแปลงให้มีฐานเป็น 2 จะได้

2^{514}

$4^{258} = 2^{2(258)} = 2^{516}$

$8^{171} = 2^{3(171)} = 2^{513}$

$16^{128} = 2^{4(128)} = 2^{512}$

$32^{103} = 2^{5(103)} = 2^{515}$

เนื่องจาก 512 < 513 < 514 < 515 < 516 จึงได้

$2^{512} < 2^{513} < 2^{514} < 2^{515} < 2^{516}$

นั่นคือ $16^{128} < 8^{171} < 2^{514} < 32^{103} < 4^{528}$ จึงเรียงอันดับจำนวนทั้งห้าจากน้อยไปมากได้ดังนี้

$16^{128}, 8^{171}, 2^{514}, 32^{103}, 4^{528}$

ปัญหาที่ 2

เซต $A = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in N, 1 \le p \le 10 \wedge 1 \le q \le 10 \right\}$ มีสมาชิกทั้งหมดกี่ตัว

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

เซตของปัญหาคือ A สิ่งที่โจทย์ต้องการ คือ จำนวนสมาชิกของเซต A นอกจากนี้พบว่าสมาชิกของเซต A เป็นจำนวนที่เขียนแทนได้ด้วยเศษส่วน โดยที่ตัวเศษและตัวส่วนต่างก็เป็นจำนวนเต็มที่มีค่าได้ ตั้งแต่ 1 ถึง 10

ขั้นวางแผน

1. แจกแจงเศษส่วนทั้งหมด สมมติมี a เศษส่วน
2. หาเศษส่วนที่มีค่าเท่ากัน ในแต่ละค่าไว้เป็นกลุ่มเดียวกัน
3. นับจำนวนกลุ่มที่ได้ทั้งหมดสมมติเป็น b
4. นับเศษส่วนทั้งหมดที่มีค่าซ้ำกัน สมมติเป็น c
5. หาค่าของ (a+b-c) จะได้คำตอบที่ต้องการ

ขั้นดำเนินการ

1. เศษส่วนทั้งหมดมี $10 \times 10 = 100$
2. จัดกลุ่มเศษส่วนที่มีค่าเท่ากันไว้ด้วยกัน

กลุ่มที่ 1 $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \frac{10}{10}$

กลุ่มที่ 2 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$

กลุ่มที่ 3 $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}$

กลุ่มที่ 4 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$

กลุ่มที่ 5 $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3}$

กลุ่มที่ 6 $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

กลุ่มที่ 7 $\frac{4}{1} = \frac{8}{2}$

กลุ่มที่ 8 $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$

กลุ่มที่ 9 $\frac{5}{1} = \frac{10}{2}$

กลุ่มที่ 10 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

กลุ่มที่ 11 $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6}$

กลุ่มที่ 12 $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

กลุ่มที่ 13 $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$

กลุ่มที่ 14 $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

กลุ่มที่ 15 $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$

กลุ่มที่ 16 $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

กลุ่มที่ 17 $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$

กลุ่มที่ 18 $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

กลุ่มที่ 19 $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$

พบว่ามี 19 กลุ่ม ที่มีเศษส่วนซ้ำ และเศษส่วนที่ซ้ำมีทั้งหมด 56 ตัว ดังนั้นเศษส่วนที่มีค่าแตกต่างกันมีทั้งหมด 100+19-56 = 63 จำนวนนั่นคือ เซต A มีสมาชิก 63 ตัว

ปัญหาที่ 3

สำหรับจำนวนเต็มบวกใดๆ $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$ ตัวอย่าง $4! = 4.3.2.1$ ถ้า หาร 2545! ด้วย 2546 และ r เป็นเศษที่ได้จากการหารนี้ r มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

โจทย์บอกความหมายของ n! เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกมาให้ พร้อมทั้งแสดงตัวอย่าง จึงทำให้เข้าใจความหมายของ n! ได้ง่าย สิ่งที่โจทย์ต้องการคือ หาค่าเศษที่ได้จากการหาร 2545! ด้วย 2546

ขั้นวางแผน พิจารณา 2545! พบว่า

$2545! = 2545 \times 2544 \times 2543 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

ดังนั้นถ้า 2546 แยกตัวประกอบที่มากกว่า 1 ได้จะทำให้ตัวประกอบของ 2546 ทุกตัวมีค่า

น้อยกว่า 2545 ดังนั้นตัวประกอบทุกตัวของ 2546 ที่ไม่ใช่ 2546 จะเป็นจำนวนในผลคูณที่ประกอบกันเป็น 2545! ย่อมส่งผลให้ 2546 หาร 2545! ลงตัวจึงทำให้เศษ r มีค่าเท่ากับ 0

ขั้นดำเนินการ

พิจารณา 2546 = 2 x 1273

ซึ่ง 2 และ 1273 ต่างก็เป็นตัวประกอบที่ต่างกันของ 2545!

ดังนั้น 2×1273 หาร 2545! ได้ลงตัว

นั่นคือ 2545! หารด้วย 2546 ลงตัวจึงไม่มีเศษ

ดังนั้น r = 0

ปัญหาที่ 4

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง

$a * b = a^b$ ค่า $\dfrac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

โจทย์กำหนดการดำเนินการทวิภาค * บนเซตของจำนวนเต็มมาให้คือ $a * b = a^b$ เช่น $2 * 3 = 2^3 = 8$ โจทย์ต้องการหาค่าของ $\dfrac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2}$

ขั้นวางแผน

จากเศษส่วนหาค่าตัวเศษ โดยทำวงเล็บในก่อนออกมาทีละขั้น ต่อไปหาค่าตัวส่วนในทำนองเดียวกัน แล้วหาผลหารของตัวเศษ และตัวส่วนจะได้ค่าที่ต้องการ

นอกจากนี้เนื่องจาก มีวงเล็บซ้อนกัน จะพบว่า

$(a * b) * c = (a^b)^c = a^{bc}$

และ $a * (b * c) = a^{\left(b^c\right)}$ จึงต้องนำสมบัติทั้งสองนี้ไปใช้ด้วย

ขั้นดำเนินการ

จาก $2 * (2 * 2) = 2^{(2)^2} = 2^4 = 16$

จะ $2*(2*(2*2)) = 2^{\left(2*(2*2)\right)} = 2^{16}$

จาก $(2 * 2) * 2 = \left(2^2\right)^2 = 4^2 = 16$

จะได้ $((2*2)*2)*2 = 16^2 = \left(2^4\right)^2 = 2^8$

ดังนั้น $\dfrac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2} = \dfrac{2^{16}}{2^8} = 2^8 = 256$

ปัญหาที่ 5

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 < 2x + 3 < 1$ และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 < y + 6 < 7$

จงหาช่วงที่เป็นเซตคำตอบของ $x + y, x - y, y - x, \frac{x}{y}$ และ $\frac{y}{x}$

วิธีแก้ปัญหา

ขั้นทำความเข้าใจ

โจทย์บอกค่าของ x และ y ในรูปอสมการเชิงเส้น แล้วให้หาช่วงที่เป็นเซตคำตอบของผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหาร ระหว่าง x กับ y

ขั้นวางแผน

1. หาค่า x และ y ในรูปอสมการ

2. ให้เงื่อนไข สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d, x, y, z และ w

(1) ถ้า $a < x < b$ แล้ว $-b < -x < -a$

(2) ถ้า $a < x < b$ และ $c < y < d$ แล้ว $a + c < x + y < b + d$

(3) ถ้า $0 < a < x < b$ และ $0 < c < y < d$ แล้ว $0 < ac < xy < bd$

(4) ถ้า $a < x < b < 0$ และ $c < y < d < 0$ แล้ว $0 < bd < xy < ac$

(5) ถ้า $0 < a < x < b$ และ $c < y < d < 0$ แล้ว $bc < xy < ad < 0$

(6) ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(7) ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $< \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ เป็นต้น

ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

จาก $-1 < 2x + 3 < 1$

จะได้ $-1 - 3 < 2x + 3 - 3 <1 - 3$

ดังนั้น $-4 < 2x < -2$

นั่นคือ $-2 < x < 1$ ....①

จาก $-1 < y + 6 < 7$

จะได้ $-1 - 6 < y + 6 - 6 < 7 - 6$

จะได้ $-7 < y < 1$ ....②

หาค่าของ $x + y$

จาก ① และ ② และเงื่อนไข 2(2)

จึงได้ $(-2) + (-7) < x + y < (-1) + 1$

นั่นคือ $-9 < x + y < 0$

ดังนั้นเซตคำตอบของ $x + y$ คือ $(-9, 0)$

หาค่าของ $x - y$

จาก ① และ ② จะได้ $-1 < -y < 7$ ....③

① + ③; $(-2) + (-1) < x - y < (-1) + 7$

จะได้ $-3 < x - y < -6$

ดังนั้นเซตคำตอบของ $x - y$ คือ $(-3, 6)$

หาค่าของ $y - x$

จาก $-3 < x - y < -6$

จึงได้ $-6 < y - x < 3$

ดังนั้นเซตคำตอบของ $y - x$ คือ $(-6, 3)$

หาค่าของ xy

พิจารณา $-7 < y < 1$ จะได้ $-7 < y < 0$ หรือ $y = 0$ หรือ $0 < y < 1$

และจาก $-2 < x < -1 < 0$ จะมีกรณีที่พิจารณาได้ดังนี้

กรณีที่ 1 $-7 < y < 0$ และ $-2 < x < -1$

จะได้ $(0)(1) < xy < (-7)(-2)$ โดยเงื่อนไข 2(4)

ดังนั้น $0 < xy < 14$

กรณีที่ 2 $y = 0$ และ $-2 < x < -1$

จะได้ $xy = 0$

กรณีที่ 3 $0 < y < 1$ และ $-2 < x < -1$

จะได้ $(1)(-2) < xy < (0)(-1)$ โดยเงื่อนไข 2 (5)

ดังนั้น $-2 < xy < 0$

จากทั้งสามกรณีจะได้เซตคำตอบของ xy คือ $(0, 14) \cup \{0\} \cup (-2, 0)$ หรือ $(-2, 14)$

หาค่าของ $\frac{x}{y}$

ในการหาค่าของ $\frac{x}{y}$ นั้นจะต้องตัดกรณีที่ $y = 0$ ออกไปจึงพิจารณา กรณีที่ $-7 < y < 0$ และกรณีที่ $0 < y < 1$ เท่านั้น

กรณีที่ 1 $-7 < y < 0$ จะได้ $\frac{1}{y} < -\frac{1}{7}$

จาก $-2 < x < -1$ จะได้ $\frac{1}{7} < \frac{x}{y}$ โดยเงื่อนไข 2(4)

กรณีที่ 2 $0 < y < 1$ จะได้ $1 < \frac{1}{y}$

จาก $-2 < x < -1$ จะได้ $\frac{x}{y} < -1$ โดยเงื่อนไข 2(5)

จากทั้งสองกรณีจะได้เซตคำตอบของ $\frac{x}{y}$ คือ

$\left(\frac{1}{7}, \infty\right) \cup (-\infty, -1)$ หรือ $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{7}, \infty\right)$

หาค่าของ $\frac{y}{x}$

พิจารณา $-2 < x < -1$ จะได้ $-1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $x \neq 0$ การหาค่าของ $\frac{y}{x}$ จึงพิจารณากรณีของ y ทั้งสามกรณีเช่นเดียวกับการหาค่าของ xy ดังนี้

กรณีที่ 1 $-7 < y < 0$ และ $-1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$

จะได้ $(0)\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{y}{x} < (-7)(-1)$ โดยเงื่อนไข 2(4)

นั่นคือ $0 < \frac{y}{x} < 7$

กรณีที่ 2 $0 < y < 1$ และ $-1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$

จะได้ $(1)(-1) < \frac{y}{x} < 0\left(-\frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $-1 < \frac{y}{x} < 0$

กรณีที่ 3 $y = 0$ จะได้ $\frac{y}{x} = 0$

จากทั้งสามกรณี จะได้เซตคำตอบของ $\frac{y}{x}$ คือ

$(-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 7)$ หรือ $(-1, 7)$

ตอนที่ 5.2 การสร้างสรรค์ปัญหา

การดัดแปลงปัญหาคณิตศาสตร์

จากปัญหาทั้งห้าปัญหาที่กล่าวมาแล้ว ถ้าเปลี่ยนแปลงคำถาม หรือดัดแปลงโจทย์จะทำให้มีปัญหาที่ชวนคิดหลายหลายขึ้นมาทันที

จากปัญหาที่ 1

จงเรียงอันดับของจำนวนต่อไปนี้ให้ถูกต้องจากน้อยไปมาก 2^{514} , 4^{258}, 8^{171}, 16^{128} และ 32^{103}

ดัดแปลงเป็น

จงเรียงอันดับของจำนวนต่อไปนี้ให้ถูกต้องจากน้อยไปมาก 514^2 , 258^4, 171^8, 128^{16} และ 103^{32}

จากปัญหาจะเห็นว่า เงื่อนไขความรู้เปลี่ยนไป คือ ต้องใช้เงื่อนไข "สำหรับจำนวนจริงบวก a, b และ c ถ้า $a < b$ แล้ว $a^c < b^c$"

พิจารณา $258^4 = \left((258)^2\right)^2 = (66564)^2$

$171^8 = \left((171)^4\right)^2 = (2221461)^2$

$(128)^{16} = \left((128)^8\right)^2 = n^2$ โดยที่ $n = 128^8$ มากกว่า 2221461

$(103)^{32} = \left((103)^{16}\right)^2 = m^2$ โดยที่ $m = 103^{16}$มากกว่า 128^8

ดังนั้น $514^2 < 258^4 < 171^8 < 128^{16} < 103^{32}$ อันดับของจำนวนจากน้อยไปมากคือ 514^2 , 258^4, 171^8, 128^{16} และ 103^{32}

จากปัญหาที่ 2

เซต $A = \left(\frac{p}{q} \mid p, q \in N, 1 \le p \le 10 \wedge 1 \le q \le 10\right)$มีสมาชิกทั้งหมดกี่ตัว ดัดแปลงเป็น

กำหนด $A = \left(\frac{p}{q} \mid p, q \in N, 1 \le p \le 10 \wedge 1 \le q \le 10\right)$ จงหาความน่าจะเป็นในการเลือกสมาชิกสองตัวที่แตกต่างกันของ A ที่มีผลบวกเท่ากับ 1

จากปัญหาจะเห็นว่า นำปัญหาเดิมมาคิดเพิ่มเติม ด้วยการเลือกสมาชิกใน A ซึ่งเป็นเศษส่วนสองจำนวนที่แตกต่างกันมาบวกกัน ให้มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อเลือกได้แล้วจึงหาความน่าจะเป็นในการเลือกนั้น ซึ่งต้องใช้จำนวนสมาชิกของ A ทั้งหมดจากปัญหาที่ 2 ก่อนหน้านี้ ซึ่งต้องใช้จำนวนสมาชิก 63 ตัว หลังจากนั้นใช้วิธีจัดหมู่เลือกสมาชิก 2 ตัว ของเซต A จากสมาชิกทั้งหมด เพื่อเป็นปริภูมิตัวอย่างได้เท่ากับ

$$\binom{63}{2} = \frac{63 \times 62}{2} = \qquad 63 \times 31$$

หลังจากนั้นแจกแจงคู่สมาชิกของ A ที่แตกต่างกันแต่มีผลบวกเท่ากับ 1 ซึ่งแจกแจงได้ดังนี้

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\},\ \left\{\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right\},\left\{\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right\},\left\{\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right\},\left\{\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right\},\left\{\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right\}$$
$$\left\{\frac{1}{9},\frac{8}{9}\right\},\ \left\{\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right\},\left\{\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right\},\left\{\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right\},\left\{\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right\},\left\{\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right\}$$
$$\left\{\frac{3}{5},\frac{5}{8}\right\},\ \left\{\frac{3}{10},\frac{7}{10}\right\},\left\{\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right\}$$

ซึ่งมีทั้งหมด 15 คู่ สมาชิกจะเห็นว่าการแจกแจงนี้ ไม่คิดอันดับเพราะเป็นเหตุการณ์ของวิธีจัดหมู่

ดังนั้นความน่าจะเป็นในการเลือกสมาชิกสองตัวที่แตกต่างกันของ A ที่มีผลบวกเท่ากับ 1 คือ $\frac{15}{63 \times 31} = \frac{15}{1953}$

จากปัญหาที่ 3

สำหรับจำนวนเต็มบวกใดๆ n! = n(n – 1) (n – 2) 3.2.1

ตัวอย่าง 4! = 4.3.2.1

ถ้าหาร 2545! ด้วย 2546 และ r เป็นเศษส่วนที่ได้จากการหารนี้ r มีค่าเป็นเท่าใด

ดัดแปลงเป็น

จำนวนเฉพาะที่เล็กที่สุดหาร 2545! ไม่ลงตัวคือจำนวนใด

จากปัญหาที่ 3 เดิมพบว่า 2546 หาร 2545! ได้ลงตัว และ 2546 เป็นจำนวนประกอบ เห็นได้ชัดจำนวนเฉพาะตัวถัดไปที่มีค่ามากกว่า 2546 จะหาร 2545! ไม่ลงตัว ทั้งนี้เพราะจำนวนเฉพาะตัวนั้นจะไม่ใช่ตัวประกอบของ 2545!

จำนวนเฉพาะตัวถัดไปที่มากกว่า 2546 คือ 2549 เป็นจำนวนเฉพาะ ตัวที่เล็กที่สุดที่หาร 2545! ไม่ลงตัว

หมายเหตุ เซตของจำนวนเฉพาะในช่วง 2500 – 2599 คือ

{2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2591, 2593}

จากปัญหาที่ 4 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง

$a * b = a^b$ ค่าของ $\dfrac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2}$ เท่ากับเท่าใด

ดัดแปลงเป็น

กำหนดให้ $*$ เป็นการดำเนินการบนเซตของจำนวนเต็มบวก N นิยามโดย $a * b = a^b$
(1) มีเอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน N หรือไม่
(2) $*$ มีสมบัติการสลับที่บน N หรือไม่

จาก $a * b = a^b$ ทุก $a, b \in N$

(1) จะเห็นได้ว่า $a * 1 = a^1 = a$ ดูเหมือนว่า 1 น่าจะเป็นเอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน N แต่นิยามของเอกลักษณ์ สำหรับการดำเนินการ บนเซต A ใดๆ คือ สำหรับ $i \in A$ จะได้ $a * i = i * a = a$ จาก $*$ บน N พบว่า

$a * 1 = a^1 = a$

แต่ $1 * a = 1^a = 1 \neq a$

ดังนั้น 1 ไม่ใช่เอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน N

สมมติว่ามี $n \in N$ ซึ่ง n เป็นเอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน A

ดังนั้น $a * n = n * a = a$ ทุก $a \in N$

จะได้ $a^n = n^a$ ทุก $a \in N$ แต่ข้อความนี้ไม่เป็นจริง

จึงสรุปได้ว่า ไม่มี n ตัวใดใน N ที่เป็นเอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน N

(2) เนื่องจาก $a^b \neq b^a$ เมื่อ $a \neq b$ ทุก $a, b \in y$

จึงสรุปได้ว่า $*$ ไม่มีสมบัติการสลับที่บน N

จากปัญหาที่ 5

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 < 2x + 3 < 1$ และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 < y + 6 < 7$

จงหาช่วงที่เป็นเซตคำตอบของ $x + y, x - y, y - x, xy, \frac{x}{y}$ และ $\frac{y}{x}$

ดัดแปลงเป็น

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $-1 \leq 2x + 3 \leq 1$ และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $-1 \leq y + 6 \leq 7$ จงหาค่ามากที่สุด และค่าน้อยที่สุดของ $x + y, x - y, y - x, xy, \frac{x}{y}$ และ $\frac{y}{x}$ ถ้ามี

จากปัญหาที่ 5 เดิม เมื่อเปลี่ยนเงื่อนไขจาก " $<$ " เป็น " $\leq$ "

ดังนั้นค่าของ x และ y เดิมจาก $-2 < x < -1$ และ $-7 < y < 1$

จึงเปลี่ยนเป็น $-2 \leq x \leq -1$ และ $-7 \leq y \leq 1$

ส่งผลให้จากเดิม $-9 < x + y < 0$

เปลี่ยนเป็น $-9 \leq x + y \leq 0$

ทำให้ค่าต่ำสุดของ $x + y$ คือ -9

และค่าสูงสุดของ $x + y$ คือ 0

จากเดิม $-3 < x - y < 6$

เปลี่ยนเป็น $-3 \leq x - y \leq 6$

ทำให้ต่ำสุดของ $x - y$ คือ -3

และค่าสูงสุดของ $x - y$ คือ 6

จากเดิม $-6 < y - x < 3$

เปลี่ยนเป็น $-6 \leq y - x \leq 3$

ทำให้ค่าต่ำสุดของ $y - x$ คือ -6

และค่าสูงสุดของ $y - x$ คือ 3

จากเดิม $-2 < xy < 14$

เปลี่ยนเป็น $-2 \leq xy \leq 14$

ทำให้ต่ำสุดของ xy คือ -2

และค่าสูงสุดของ xy คือ 14

จากเดิม $-\infty < \frac{x}{y} < -1$ หรือ $\frac{1}{7} < x < \infty$

เปลี่ยนเป็น $-\infty < \frac{x}{y} \leq -1$ หรือ $\frac{1}{7} \leq x < \infty$

จะเห็นได้ว่า $\frac{x}{y}$ ไม่มีค่าต่ำสุด และไม่มีค่าสูงสุด

จากเดิม $-1 < \frac{x}{y} < 7$

เปลี่ยนเป็น $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 7$

ทำให้ค่าต่ำสุดของ $\frac{y}{x}$ คือ -1

และค่าสูงสุดของ $\frac{y}{x}$ คือ 7

จากปัญหาทั้ง 5 ข้อ ดังที่แนะนำมานี้จะเห็นได้ว่า เราสามารถดัดแปลงปัญหาเดิมเป็นปัญหาใหม่ได้ โดยที่ปัญหาที่ดัดแปลงใหม่ อาจใช้พื้นฐานความรู้เดิม จากปัญหาเดิม มาแก้ปัญหาที่ดัดแปลงแล้ว และนอกจากนี้ ต้องให้ความรู้พื้นฐานอื่นเพิ่มเติมก็ได้ อันเป็นการทำให้กระบวนการแก้ปัญหา มีการสร้างสรรค์มากขึ้น

แบบฝึกหัดที่ 24

1. จงออกแบบการแก้ปัญหา และแก้ปัญหาต่อไปนี้

   กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, ..., 100\}$

   $A = \{X \in U \mid 2$ หารลงตัว$\}$

   $B = \{X \in U \mid 3$ หารลงตัว$\}$

   $|\, n(A - B) - n(B - A) \,|$ เท่ากับเท่าใด

2. จงดัดแปลงปัญหาในข้อ 1 เป็นปัญหาใหม่ แล้วออกแบบการแก้ปัญหา และแก้ปัญหาที่ดัดแปลงนี้

หน่วยที่ 6
อสมการ

ตอนที่ 6.1 อสมการที่เกี่ยวกับพีชคณิต
ตอนที่ 6.2 อสมการเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์

แนวคิด 1. สมการและอสมการ เป็นสิ่งสำคัญในระบบคณิตศาสตร์ สำหรับอสมการนั้นสามารถนิยามได้จากสมการ
2. ในระบบจำนวนจริงสมบัติของอสมการนำไปประยุกต์ใช้อย่างมากมายทั้งในวิชาคณิตศาสตร์ และวิชาอื่นๆ
3. โดยทั่วๆไปผลเฉลยของอสมการนิยมเขียนในรูปเซตคำตอบ
4. อสมการที่เกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์เป็นพื้นฐานสำคัญที่นำไปใช้ในวิชา แคลคูลัส และการวิเคราะห์

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 7 จบแล้ว นักเรียนสามารถ
1. นิยามอสมการได้
2. ระบุสมบัติพื้นฐานของอสมการของจำนวนจริงได้
3. หาเซตคำตอบของอสมการที่มีหลายตัวประกอบได้
4. พิสูจน์ ข้อความเกี่ยวกับอสมการเชิงพีชคณิตได้
5. พิสูจน์ ข้อความเกี่ยวกับอสมการของค่าสัมบูรณ์ได้

กิจกรรมระหว่างเรียน

1. อาจารย์อธิบายความหมายและสมบัติของอสมการ แสดงตัวอย่างวิธีการแก้โจทย์ปัญหาอสมการที่เกี่ยวกับพีชคณิต และอสมการเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์
2. นักเรียนทำกิจกรรมระหว่างเรียน และแบบฝึกหัด
3. นักเรียนประเมินพัฒนาการของตนเอง

สื่อการสอน

1. เอกสารการสอน
2. แบบฝึกปฏิบัติ
3. เครื่องฉายข้ามศีรษะ

ประเมินผล

ประเมินผลจากแบบฝึกหัดและการทดสอบ

ตอนที่ 6.1 อสมการที่เกี่ยวกับพีชคณิต

เรื่องที่ 1 ความหมายและสมบัติของอสมการ

1. ความหมายของอสมการ ความหมายพื้นฐานของอสมการ นิยามได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

> **บทนิยาม 1** สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ
> a มากกว่า b ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก c ที่ทำให้ $a = b + c$

a มากกว่า b เขียนแทนด้วย $a > b$

> **บทนิยาม 2** สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ
> b น้อยกว่า a ก็ต่อเมื่อ a มากกว่า b

b น้อยกว่า a เขียนแทนด้วย $b < a$

> **บทนิยาม 3** สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ
> a มากกว่าหรือเท่ากับ b ก็ต่อเมื่อ a มากกว่า b หรือ a เท่ากับ b

a มากกว่าหรือเท่ากับ b เขียนแทนด้วย $a \geq b$

> **บทนิยาม 4** สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ
> b มากกว่าหรือเท่ากับ a ก็ต่อเมื่อ b น้อยกว่า a หรือ b เท่ากับ a

b มากกว่าหรือเท่ากับ a เขียนแทนด้วย $b \leq a$

บทนิยาม 2, 3 และ 4 อาจเขียนใหม่ได้ดังนี้

บทนิยาม 2′ $b < a$ ก็ต่อเมื่อ มี $c \in R^+$ ที่ทำให้ $b + c = a$

บทนิยาม 3′ $a \geq b$ ก็ต่อเมื่อ มี $c \in R^+$ ที่ทำให้ $a = b + c$

บทนิยาม 4′ $b \leq a$ ก็ต่อเมื่อ มี $c \in R^+ \cup \{0\}$ ที่ทำให้ $b + c = a$

2. สมบัติของอสมการ

กำหนดให้ a, b, c, x และ y เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
2. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
3. ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
4. ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
5. ถ้า $a > b > 0$ และ $c > 0$ แล้ว $a^c > b^c > 0$
6. ถ้า $a > 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $a^x > a^y > 0$
7. ถ้า $0 < a < 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $0 < a^x < a^y$
8. ถ้า $a > 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $\log_a x > \log_a y$

9. ถ้า $0 < a < 1$ และ $x > y > 0$ แล้ว $\log_a x < \log_a y$

10. $a^{2n} \ge 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

11. $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} > 0$

12. $a < 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} < 0$

13. สำหรับจำนวนจริง a และ b ซึ่ง $a < b$

$(x - a)(x - b) < 0$ ก็ต่อเมื่อ $a < x < b$

14. สำหรับจำนวนจริง a และ b ซึ่ง $a < b$

$(x - a)(x - b) > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x < a$ หรือ $x > b$

เรื่องที่ 2 ตัวอย่างวิธีการแก้ปัญหาโจทย์อสมการ

ข้อตกลง กำหนดให้เอกภพสัมพันธ์ คือ เซตของจำนวนจริง สำหรับจำนวนที่เขียนโดยไม่เจาะจง จำนวนเหล่านั้นคือจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 6.1.1 จงพิสูจน์ว่า $a^{2n+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $a > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ (1) จะแสดงว่า ถ้า $a^{2n+1} > 0$ แล้ว $a > 0$

กำหนดให้ $a^{2n+1} > 0$

จะได้ $a^{2n} \cdot a > 0$

สมมติ $a \le 0$ จะมีกรณีดังนี้ คือ $a < 0$ หรือ $a = 0$

ถ้า $a < 0$ จะได้ $\frac{1}{a} < 0$

ดังนั้น $\frac{a^{2n} \cdot a}{a} < 0$

$a^{2n} < 0$ ขัดแย้งกับ $a^{2n} \ge 0$

$a < 0$ จึงเป็นไปไม่ได้

ถ้า $a = 0$ จะได้ $a^{2n+1} = 0$ ขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $a^{2n+1} > 0$

$a = 0$ จึงเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ $a > 0$

(2) จะแสดงว่า ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^{2n+1} > 0$

กำหนดให้ $a > 0$

จะได้ $a^{2n} > 0$ ดังนั้น $a^{2n} \cdot a > 0$

จึงได้ $a^{2n+1} > 0$

จาก (1) และ (2) จึงสรุปได้ว่า

$a^{2n+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $a > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

หมายเหตุ สำหรับข้อความ $a^{2n+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่างที่ 6.1.2 จงพิสูจน์ว่า $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \neq a$ และ $x-b > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก m และ n

พิสูจน์ (1) จะแสดงว่า ถ้า $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$ แล้ว $x-a \neq 0$ และ $x-b > 0$

กำหนดให้ $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$

พิจารณา $x-a$

ถ้า $x-a=0$ จะทำให้ $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} = 0$

ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$

ดังนั้น $x-a \neq 0$ …①

จะได้ $(x-a)^{2n} > 0$

ดังนั้น $\dfrac{(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1}}{(x-a)^{2n}} > 0$

แสดงว่า $(x-b)^{2m+1} > 0$

โดยตัวอย่างที่ 6.1 พิสูจน์มาแล้ว จะได้ $x-b > 0$ …②

จาก ① และ ② จึงได้ $x-a \neq 0$ และ $x-b > 0$

(2) จะแสดงว่า ถ้า $x-a \neq 0$ และ $x-b>0$ แล้ว $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$

เนื่องจาก $x-a \neq 0$ และ $x-b > 0$

จะได้ $(x-a)^{2n} > 0$ และ $(x-b)^{2m+1} > 0$

ดังนั้น $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$

จาก ① และ ② จึงสรุปได้ว่า

$(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x-a \neq 0$ และ $x-b > 0$

หมายเหตุ สำหรับข้อความ $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \neq a$ และ $x-b < 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก m และ n ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่างที่ 6.1.3 จงหาเซตคำตอบของ $\frac{(x-3)^{101}(x+7)^4}{(x+4)^{32}} \le 0$

วิธีทำ $\frac{(x-3)^{101}(x+7)^4}{(x+4)^{32}} \le 0$ ก็ต่อเมื่อ $(x-3)^{101}(x+7)^4 \le 0$ และ $x+4 \neq 0$

ก็ต่อเมื่อ ($x-3 \le 0$ หรือ $x = -7$) และ $x \neq -4$

ก็ต่อเมื่อ ($x \le 3$ หรือ $x = -7$) และ $x \neq -4$

ก็ต่อเมื่อ $x < -4$ หรือ $-4 < x \le 3$

ดังนั้นเซตคำตอบคือ $\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -4$ หรือ $-4 < x \le 3 \}$

แบบฝึกหัดที่ 25

1. จงพิสูจน์ว่า $a^{2n+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n
2. จงพิสูจน์ว่า $(x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \neq a$ และ $x-b < 0$
   ทุกจำนวนเต็มบวก m และ n
3. จงหาเซ็ตคำตอบของ อสมการต่อไปนี้

   (1) $(x-3)^{20}(x+4)^{33} < 0$

   (2) $(x-4)^{21}(x+2)^{11} > 0$

   (3) $\frac{(X-1)^{45}}{(X-5)^8(X+4)^{21}} \ge 0$

   (4) $\frac{(X-2)^{27}(X+3)^{16}}{(X-4)^{18}} \le 0$

ตอนที่ 6.2 อสมการเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์

เรื่องที่ 1 อสมการพื้นฐานของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง

บทนิยาม 5 สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ กำหนดโดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \ge 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

จากบทนิยามข้างต้น สามารถนำมาสรุปเป็นสมบัติเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ ของจำนวนจริง และพิสูจน์ได้ดังนี้
กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ a เป็นจำนวนจริงบวก

จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) $x \le |x|$

(2) ถ้า $|x| \le a$ แล้ว $-a \le x \le a$

(3) ถ้า $|x| \ge a$ แล้ว $x \le a$ หรือ $x \ge a$

(4) $x + y \le |x| + |y|$

(5) $x + y \le |x + y|$

(6) $|x + y| \le |x| + |y|$

(7) $|x| - |y| \le |x - y|$

(8) $||x| - |y|| \le |x - y|$

พิสูจน์ (1) $x \le |x|$

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** $x \ge 0$

จะได้ $x = |x|$

กรณีที่ 2 $x < 0$

จะได้ $0 < -x$ และ $-x = |x|$

แต่ $x < -x$

ดังนั้น $x < |x|$

จากกรณีทั้ง2 จึงสรุปได้ว่า $x \le |x|$

(2) ถ้า $|x| \le a$ แล้ว $-a \le x \le a$

พิสูจน์ ให้ $|x| \le a$

กรณีที่ 1 $x \ge 0$

จะได้ $x = |x| \le a$

ดังนั้น $0 \le x \le a$

กรณีที่ 2 $x < 0$

จะได้ $0 < -x$ และ $-x = |x|$

แต่ $|x| \le a$

ดังนั้น $0 < -x \le a$

แสดงว่า $-a \le x < 0$

จากกรณีทั้ง 2 จึงสรุปได้ว่า $-a \le x \le a$

(3) ถ้า $|x| \ge a$ แล้ว $x \le -a$ หรือ $x \ge a$ การพิสูจน์ทำเป็นแบบฝึกหัด

(4) ถ้า $x + y \le |x| + |y|$ การพิสูจน์ทำเป็นแบบฝึกหัด

(5) $x + y \le |x + y|$ การพิสูจน์ทำเป็นแบบฝึกหัด

(6) $|x + y| \le |x| + |y|$

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** $x + y \ge 0$

จะได้ $x + y = |x + y|$

จากข้อ(4) จะได้ $x + y \le |x| + |y|$

ดังนั้น $|x + y| \le |x| + |y|$

กรณีที่ 2 $x + y < 0$

จะได้ $-(x + y) = |x + y|$

ดังนั้น $(-x) + (-y) = |x + y|$

จากข้อ (4) จะได้ $(-x) + (-y) \le |x| + |y|$

แต่ $|-x| = |x|$ และ $|-y| = |y|$

ดังนั้น $(-x) + (-y) \le |x| + |y|$

นั่นคือ $|x + y| \le |x| + |y|$

จากกรณีทั้ง 2 จึงสรุปได้ว่า $|x + y| \le |x| + |y|$

(7) $|x| - |y| \le |x - y|$

พิสูจน์ เนื่องจาก $|x| = |(x - y) + y|$

จากข้อ (6) จะได้ $|(x - y) + y| \le |x - y| + |y|$

ดังนั้น $|x| \le |x - y| + |y|$

นั่นคือ $|x| - |y| \le |x - y|$

(8) $||x| - |y|| \le |x - y|$

พิสูจน์ จากข้อ (7) จะได้ $|x| - |y| \le |x - y|$ ...①

และ $|y| - |x| \le |y - x|$

ดังนั้น $-(|x| - |y|) \le |y - x|$

แต่ $|x - y| = |y - x|$

จึงได้ $-(|x| - |y|) \le |x - y|$

แสดงว่า $-|x - y| \le |x| - |y|$ ...②

จาก ① และ ② จะได้ $-|x - y| \le |x| - |y| \le |x - y|$

โดย ข้อ (2) จึงได้ $||x| - |y|| \le |x - y|$

แบบฝึกหัดที่ 26

1. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

(1) ถ้า $|x| \geq a$ แล้ว $x \leq a$ หรือ $x \geq a$

(2) $x + y \leq |x| + |y|$

(3) $x + y \leq |x + y|$

2. จงหาเซต คำตอบของ อสมการ $|x^3 - 1| > 1 - x$

เรื่องที่ 2 อสมการค่าสัมบูรณ์ที่มีเงื่อนไข

ในการเรียนระดับสูง โดยเฉพาะการพิสูจน์ ลิมิตของฟังก์ชัน จำเป็นต้องใช้อสมการค่าสัมบูรณ์ที่มีเงื่อนไข ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.2.1 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 4| < 2$ แล้ว $|x^2 + x - 20| < 22$

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนจริง และ $|x - 4| < 2$

จะได้ $-2 < x - 4 < 2$

$2 < x < 6$

$7 < x + 5 < 11$

ดังนั้น $|x + 5| < 11$

จะได้ $|x - 4||x + 5| < 2 \times 11$

$|(x - 4)(x + 5)| < 22$

นั่นคือ $|x^2 + x - 20| < 22$

ตัวอย่างที่ 6.2.2 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 5| < \frac{1}{2}$ แล้ว $\left|\frac{x-3}{x-4} - 2\right| < 1$

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนจริง และ $|x - 5| < \frac{1}{2}$

จะได้ $-\frac{1}{2} < x - 5 < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < x - 4 < \frac{3}{2}$

ดังนั้น $\frac{1}{2} < |x - 4| < \frac{3}{2}$

จะได้ $\frac{2}{3} < \frac{1}{|x-4|} < 2$

พิจารณา $$\left|\frac{x-3}{x-4}-2\right| = \left|\frac{x-3-2x+8}{x-4}\right|$$

$$= \left|\frac{-x+5}{x-4}\right|$$

$$= \frac{\left|-x+5\right|}{\left|x-4\right|}$$

$$= \frac{\left|x-5\right|}{\left|x-4\right|}$$

จาก $|x-5| < \frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{|x-4|} < 2$

ดังนั้น $\frac{|x-5|}{|x-4|} < 1$

นั่นคือ $\left|\frac{x-3}{x-4}-2\right| < 1$

แบบฝึกหัดที่ 27

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า

1. ถ้า $|x-3| < 1$ แล้ว $|x^2-x-6| < 6$
2. ถ้า $|x+4| < 1$ แล้ว $|x^3+x^2-x| < 90$
3. ถ้า $|x-4| < \frac{1}{4}$ แล้ว $\left|\frac{2x-7}{x-3}-1\right| < \frac{1}{3}$

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ดร.อำรุง จันทวานิช	เลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์	ที่ปรึกษาด้านวิจัยและประเมินผลการศึกษา
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

คณะนักวิจัย :

รศ.ศักดา บุญโต	ที่ปรึกษา
รศ.อาริสา รัตนเพ็ชร์	หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร	

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นางสาวบุญเทียม	ศิริปัญญา	หัวหน้าโครงการ
นางสาวกิ่งกาญจน์	เมฆา	ประจำโครงการ
นางสาววิชชุลาวัณย์	พิทักษ์ผล	ประจำโครงการ

พิจารณารายงาน :

รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์

บรรณาธิการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา
นางสาววิชชุลาวัณย์ พิทักษ์ผล

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ 0 2668 7123 ต่อ 2530 โทรสาร 0 2668 7329
web site : http://www.onec.go.th และ http://www.thaigifted.org