คู่มือการสอน
หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ
ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4
เล่ม 2

โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา

ส 691 ค คู่มือการสอนหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 / อาริสา รัตนเพ็ชร์และคณะ. กรุงเทพฯ : สกศ., 2549

152 หน้า

ISBN 974-559-875-5

1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ – คู่มือ 2. อาริสา รัตนเพ็ชร์และคณะ 3. ชื่อเรื่อง

คู่มือการสอนหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2

สิ่งพิมพ์ สกศ.	อันดับที่ 49/2549
พิมพ์ครั้งที่ 1	สิงหาคม 2549
จำนวน	1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่	สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา 99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300 โทรศัพท์ 0 2668 7123 ต่อ 2530 โทรสาร 0 2668 7329 web site : http://www.onec.go.th
สำนักพิมพ์	บริษัท ออฟเซ็ท เพรส จำกัด 78/162 ถนนประชาราษฎร์ 26 ต.สวนใหญ่ อ.เมือง จ.นนทบุรี 11000 โทรศัพท์ 0 2967 4376 โทรสาร 0 2967 4376

คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาโดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) โดยมีกระบวนการที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) สำหรับพัฒนานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ในระดับกว้างและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ที่เน้นกระบวนการเรียนรู้ กระบวนการคิดที่หลากหลาย และทักษะที่เป็นรากเหง้าของความสามารถด้านคณิตศาสตร์มากกว่าที่จะเน้นเนื้อหาที่ปรากฏในการเรียนการสอนปกติ อีกทั้งยังฝึกทักษะการคิดวิเคราะห์ การใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถบูรณาการความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์กับสาขาวิชาอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนเข้าใจธรรมชาติ ความงาม ความกระชับและความชัดเจนของคณิตศาสตร์ได้อย่างแท้จริง

เอกสารเล่มนี้เป็น **คู่มือการสอนหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2** ซึ่งเป็นหนึ่งในสองเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่น ๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนผู้เกี่ยวข้องทุกท่านที่ให้ความร่วมมือและช่วยเหลือ จนทำให้การดำเนินงานสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี และหวังเป็นอย่างยิ่งว่า องค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

อำรุง

(นายอำรุง จันทวานิช)

เลขาธิการสภาการศึกษา

สารบัญ

หน้า

คำนำ

สารบัญ

คำอธิบายรายวิชา……………………………………………………………………....I

คำอธิบายการวัดผลประเมินผล…………………………………………………………....II

คำอธิบายหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์………………………………………………….III

หน่วยที่ 1 เรขาคณิตสาทิสรูป และ Tessellation……………………………………….…..1

ตอนที่ 1.1 เรขาคณิตสาทิสรูป……….……………………….…………….…..………1

ตอนที่ 1.2 Tessellation………………………….…..………….………....17

หน่วยที่ 2 เกมชีวิตและหลักการทำรังนกพิราบ…….……………………..………………….25

ตอนที่ 2.1 เกมชีวิต...……………………………………………………………….25

ตอนที่ 2.2 หลักการทำรังนกพิราบ………..……………………………………....27

หน่วยที่ 3 กราฟและการประยุกต์……….…………………………….…………………….30

ตอนที่ 3.1 จุดกำเนิดของทฤษฎีกราฟ……….………………………….…..………30

ตอนที่ 3.2 กราฟ…..………………..………………………………………43

ตอนที่ 3.3 กราฟกับการแก้ปัญหา………………..…………………….….………56

ตอนที่ 3.4 การแทนกราฟด้วยเมทริกซ์….………..………………………….…..…99

ตอนที่ 3.5 กราฟมีทิศทาง ………….………….………………..………115

ตอนที่ 3.6 การประยุกต์….……………….………………………….….….……128

คำอธิบายรายวิชา

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์

รายวิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 จำนวน 2.0 หน่วยการเรียน

ศึกษา ฝึกการคิดวิเคราะห์ สืบสวนหาความรู้ ฝึกทักษะที่ต้องใช้ความคิดริเริ่มและสร้างสรรค์ ฝึกการแก้ปัญหาและทักษะอื่น ๆ ที่อยู่นอกเหนือจากจุดมุ่งหมายในการเรียนของหลักสูตรปกติ ในสาระต่อไปนี้

ทฤษฎีกราฟและการประยุกต์ หลักการทำรังนกพิราบและเกมชีวิต ค่ายพัฒนาศักยภาพคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์กับ I.C.T. (เรขาคณิตสาทิสรูป และเทสเซลเลชัน)

การจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์เพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีความสามารถด้านคณิตศาสตร์ในระดับที่กว้าง และลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ โดยเน้นกระบวนการเรียนรู้ กระบวนการคิดที่หลากหลาย และทักษะที่เป็นรากเหง้าของความสามารถด้านคณิตศาสตร์มากกว่าที่จะเน้นเนื้อหาที่ปรากฏในแบบเรียนปกติ ฝึกให้ศึกษาเรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างชัดแจ้ง สามารถสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง การวางแผน การจัดการตามความถนัดและศักยภาพ การใช้ความคิดสร้างสรรค์ สามารถบูรณาการกับวิชาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องได้ ให้ผู้เรียนเข้าใจธรรมชาติ ความงาม และความชัดเจนของคณิตศาสตร์ ฝึกการทำงานอย่างมีระบบ มีระเบียบวินัย รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีเหตุผล และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

การวัดผลและประเมินผล ใช้วิธีการหลากหลายตามสภาพความเป็นจริงของเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัดที่สอดคล้องกับมาตรฐานและผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

คำอธิบายการวัดผลประเมินผล

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์

รายวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 จำนวน 2.0 หน่วยการเรียน

กำหนดระยะเวลาเรียน 80 ชั่วโมงต่อภาคเรียน คิดเป็น 2.0 หน่วยการเรียน แบ่งเป็น 2 ส่วนดังนี้

1. กิจกรรมการเรียนการสอน จำนวน 33 ชั่วโมง
2. ปฏิบัติการ จำนวน 47 ชั่วโมง

รายการประเมิน ภาคเรียนที่ 2 คะแนนเต็ม 100 คะแนน

1. <u>การประเมินการปฏิบัติ</u> 80 คะแนน
   - 1.1 ความตั้งใจเรียน/การเข้าชั้นเรียน 10 คะแนน
   - 1.2 ภาระงาน/การนำเสนอผลงาน 40 คะแนน
   - 1.3 ค่ายคณิตศาสตร์/การนำเสนอผลงาน 30 คะแนน
2. <u>การประเมินผลการสอบแบบทดสอบ</u> 20 คะแนน

คำอธิบายหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์

รายวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 จำนวน 2.0 หน่วยการเรียน

เนื้อหา	เวลาเรียน	ปฏิบัติการ	รวม ชั่วโมง
1. ทฤษฎีกราฟและการประยุกต์	20	20	40
2. หลักการทำรังนกพิราบและ เกมชีวิต	3	3	6
3. เรขาคณิตสาทิสรูปและ เทสเซลเลชัน	10	10	20
4. ค่ายคณิตศาสตร์	-	17	17
รวมทั้งหมด	**33**	**47**	**80**

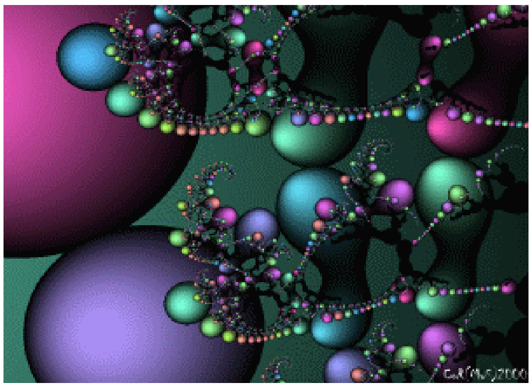
หน่วยที่ 1

เรขาคณิตสาทิสรูป (Fractal Geometry) และ Tessellation

ตอนที่ 1.1 เรขาคณิตสาทิสรูป

ตอนที่ 1.2 Tessellation

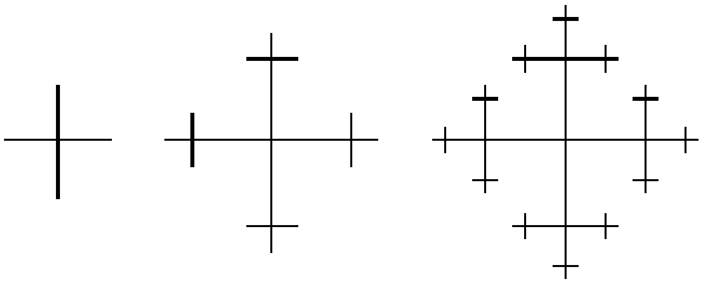
ตอนที่ 1.1 เรขาคณิตสาทิสรูป (Fractal Geometry)



บทนำ

เรขาคณิตสาทิสรูป (Fractals) เป็นความผสมกลมกลืนที่สวยงามมากระหว่างศิลปะและคณิตศาสตร์ ถูกค้นพบมาเมื่อสามสิบกว่าปีมานี้เอง Fractal ก็คือรูปเรขาคณิตที่รวมเอาแบบเดียวกันย่อส่วนลง และหมุน (เปลี่ยนทิศ) และทำซ้ำ ๆ หรืออาจกล่าวได้ว่า Fractal ก็คือรูปเสมือนตัวเอง (self-similar) และเมื่อเราเลือกพิจารณาส่วนเล็ก ๆ ของรูป และขยาย จะเห็นว่ารูปที่ได้เป็นรูปเดียวกับรูปเดิม

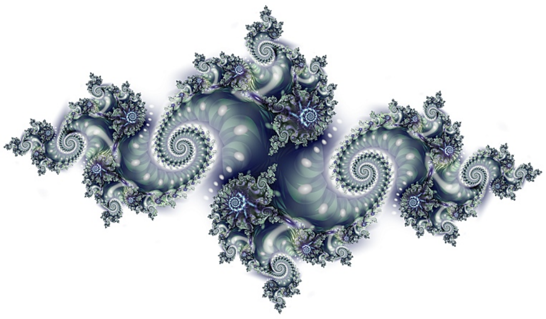
เราสามารถออกแบบ Fractal ได้เองโดยเลือกแบบง่าย ๆ มาแบบหนึ่งและดำเนินตามกฎหรือเงื่อนไขที่กำหนดขึ้นมาซ้ำ ๆ ไปเรื่อย ๆ การทำตามกฎหรือเงื่อนไขซ้ำ ๆ นี้เรียกว่า **การเวียนเกิด** (recursion) แต่ละครั้งที่ทำตามกฎหรือเงื่อนไขเรียกว่า **การทำซ้ำ** (iteration) ตัวอย่างเช่น เริ่มจากวาดเครื่องหมายบวกขนาดใหญ่ สร้างเครื่องหมายบวกที่มีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของรูปเดิมที่ตรงส่วนปลายของแขนทั้งสี่ เป็นการทำซ้ำครั้งที่ 1 (1^{st} iteration) ต่อมาสร้างเครื่องหมายบวกที่มีขนาดเป็นหนึ่งในสี่ของรูปเดิมที่ครึ่งตรงส่วนปลายทั้งหมด เป็นการทำซ้ำครั้งที่ 2 (2^{nd} iteration) และทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ รูป 1.1.1 แสดงรูปที่ได้จากการทำซ้ำ 3 ครั้งแรกจากเครื่องหมายบวก เรียกว่า plus fractal



รูป 1.1.1 Plus Fractal

Gaston Julia (ค.ศ. 1893-1978)

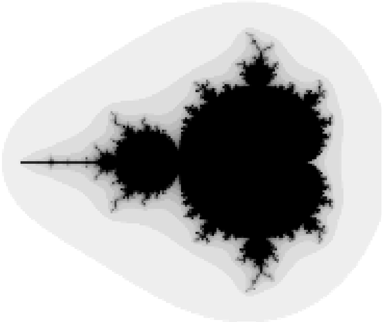
Gaston Julia เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส เขาแต่งหนังสือเกี่ยวกับการทำซ้ำของฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) ในปี ค.ศ. 1918 ในสมัยที่ยังไม่มีคอมพิวเตอร์เขาวาดรูปของฟังก์ชันต่าง ๆ ด้วยมือ และ fractal ในแบบนี้เรียกว่า **รูป Julia set**



รูป 1.1.2 Julia set

Benoit Mandelbrot (ค.ศ. 1924-)

Julia's Benoit Mandelbrot เป็นศาสตราจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ Yale University เขาเป็นคนใช้คอมพิวเตอร์หาฟังก์ชันจากการทำซ้ำ และค้นพบสมการอย่างง่ายที่รวม Julia sets ทั้งหมดและชื่อ**รูป Mandelbrot set** เป็นการตั้งตามชื่อเขา

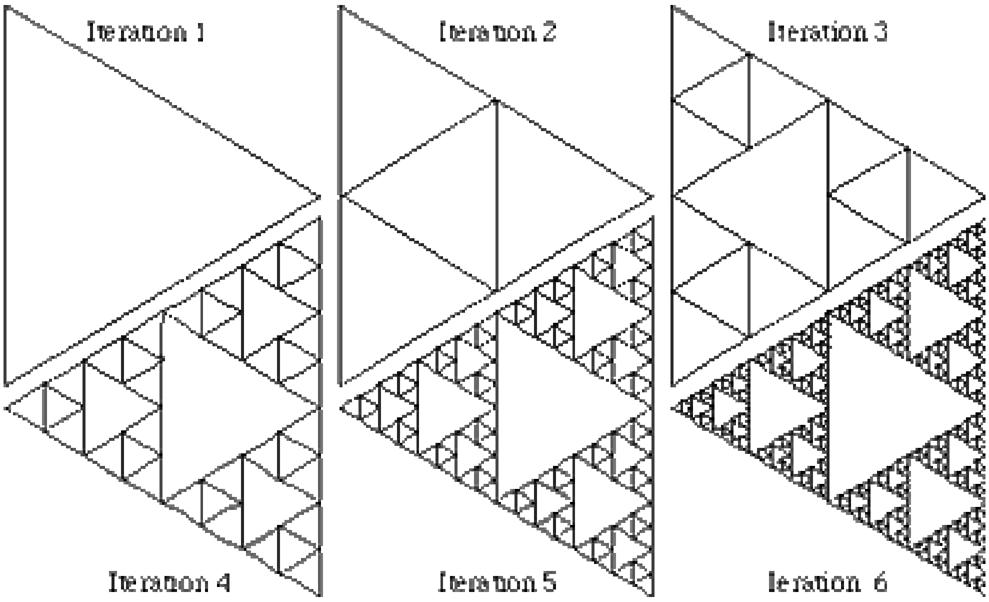


รูป 1.1.3 Mandelbrot set

รูป Julia set มีอยู่มากมาย แต่ละรูปได้จากการกำหนดค่าคงตัวที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน และเซตของ Julia set ทั้งหมดเรียกว่า Mandelbrot set สมการสำหรับ Julia set ได้ทำซ้ำ ๆ คอมพิวเตอร์แสดงสีผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับว่าค่าลู่เข้าสู่ศูนย์ (ส่วนที่อยู่ข้างในที่เป็นสีดำ) หรือค่าลู่เข้าสู่อนันต์ (ส่วนที่อยู่ข้างนอกที่ระบายสีแต่ละสีขึ้นอยู่กับความเร็วในการลู่เข้าสู่อนันต์ของค่าผลลัพธ์) ค่าของฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์วนรอบหลาย ๆ จุด หรือกระโดดไปกระโดดมา ก็คือส่วนของแถบสีตามแนวขอบของส่วนที่เป็นสีดำตรงกลางของรูป Julia set และ Mandelbrot set

Waclaw Sierpinski (ค.ศ. 1882-1969)

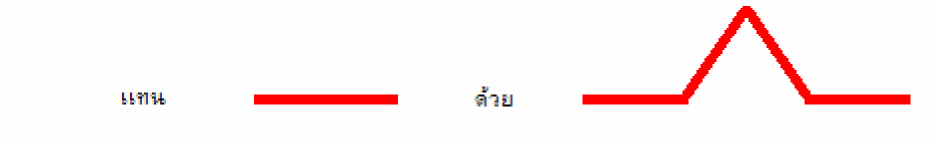
Waclaw Sierpinski เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์ งานของเขามีมาก่อนการค้นพบ fractal ของ Mandelbrot เขาเป็นที่รู้จักโดยทั่วไปสำหรับ**รูป Sierpinski triangle** แต่อย่างไรก็ตามยังคงมีอีกหลาย ๆ รูปแบบของ Sierpinski fractal



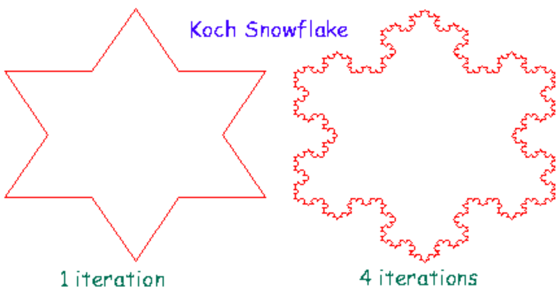
รูป 1.1.4 Sierpinski fractal

การทำซ้ำ (Iteration)

การดำเนินการซ้ำ ๆ ตามชุดขั้นตอนที่กำหนดแน่นอนไปเรื่อย ๆ เรียกว่า **การทำซ้ำ (iteration)** และ รูป fractal ใด ๆ ก็ตามเป็นรูปแบบที่เกิดจากการทำซ้ำตามชุดขั้นตอนที่มีการกำหนดแน่นอนไปเรื่อย ๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด ตัวอย่างเช่นการสร้างรูป Koch snowflake



และรูปที่ได้เมื่อทำซ้ำไป 1 ครั้งและ 4 ครั้งก็คือ



รูป 1.1.5 Koch Snowflake

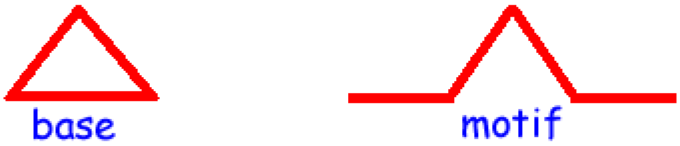
การสร้างรูป fractal นั่นจะต้องทำซ้ำ ๆ ไปเรื่อย ๆ เมื่อเราวาดรูป fractal โดยใช้คอมพิวเตอร์ มีข้อจำกัดต่าง ๆ เช่น ความเร็ว และ resolution ของเครื่องคอมพิวเตอร์นั้น ๆ เราจึงต้องกำหนดจำนวนครั้งที่จะต้องทำซ้ำ และเมื่อเพิ่มจำนวนครั้ง รูปที่ได้ก็จะยิ่งเหมือนจริงมากขึ้น

การสร้างรูป fractal โดยการทำซ้ำมี 3 ประเภทด้วยกัน

1. Generator Iteration เป็นการสร้างรูป fractal โดยการแทนที่รูปเดิมด้วยรูปใหม่
2. IFS Iteration เป็นการสร้างรูป fractal โดยการแปลง (transformation) เช่น การย่อขยาย (dialtion) การหมุน(rotation) การสะท้อน(reflection) เป็นต้น
3. Formula Iteration เป็นการสร้างรูป fractal โดยการทำซ้ำตามสูตรซึ่งบางรูปอาจใช้มากกว่าหนึ่งสูตรก็ได้

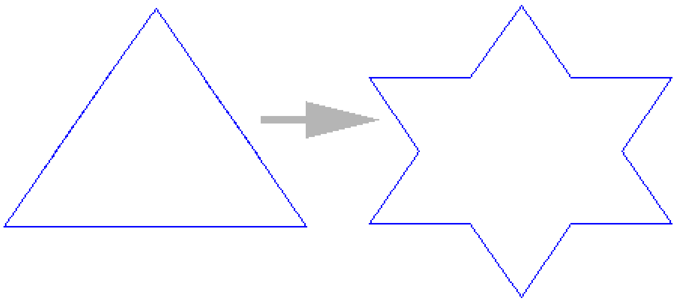
Generator Iteration

ด้วยวิธีการนี้เราสร้าง fractal โดยเริ่มต้นด้วยรูปที่เรียกว่าฐาน (base) เป็นรูปที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรง ขั้นตอนต่อมาเป็นการแทนที่ส่วนของเส้นตรงทุกเส้นที่เป็นส่วนประกอบของรูป base ด้วยรูปอื่น ซึ่งเรียกว่า**ตัวก่อกำเนิด (generator) หรือ motif** เมื่อทำต่อไปเรื่อย ๆ นับครั้งไม่ถ้วนเราก็จะได้รูป fractal ตัวอย่างเช่น ถ้าเราจะสร้างรูป fractal ด้วย base และ motif ดังรูป 1.1.6



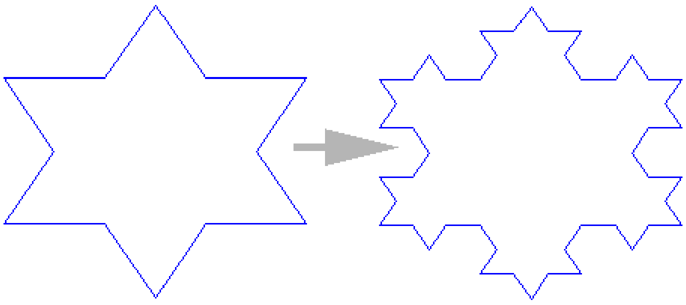
รูป 1.1.6

เริ่มจากรูปสามเหลี่ยม (base) และแทนที่ทุก ๆ ด้านด้วย motif จะได้ดังรูป 1.1.7



รูป 1.1.7

เราจะได้รูปเหลี่ยมที่มี 12 ด้านด้วยกัน จากนั้นแทนที่ทั้ง 12 ด้านด้วย motif อีกครั้ง

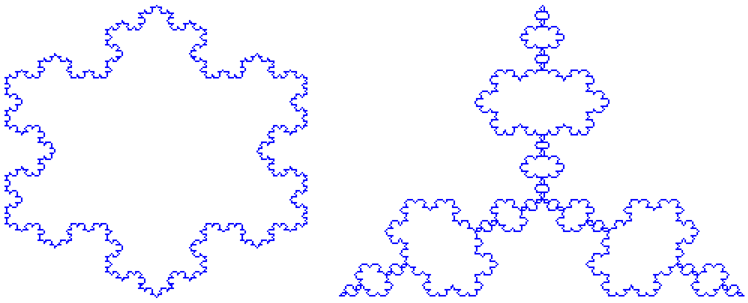


รูป 1.1.8

จะเห็นว่ารูปที่ได้จากการทำซ้ำครั้งที่ 2 นี้จะเริ่มเป็นรูป fractal และ fractal แบบนี้มีชื่อว่า the Koch Snowflake ทางขวามือของรูป 1.1.5 แสดงรูป Koch Snowflake fractal ที่ได้จากการทำซ้ำ 4 ครั้ง

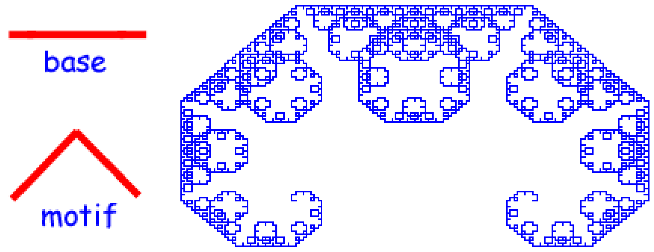
รูป fractal ที่ได้จากวิธีการนี้เรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Base-Motif fractal สิ่งที่จำเป็นสำหรับการสร้างรูป Base-Motif fractal มีดังต่อไปนี้

1. รูปทรงของรูป base : รูปที่เป็นที่นิยมก็คือส่วนของเส้นตรง รูปสี่เหลี่ยม และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
2. รูปทรงของ motif : เป็นส่วนสำคัญของการที่จะได้รูปผลลัพธ์ออกมาซึ่งมีมากมายหลากหลาย
3. ตำแหน่งของ motif : ถ้ารูป base เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเราสามารถกำหนดให้ motif หันเข้าด้านในหรือด้านนอกก็ได้ ซึ่งจะให้รูป fractal ต่างกัน เช่น Koch Snowflake ได้มาจากการกำหนดให้ motif หันออกด้านนอกรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ในขณะที่ Koch Antisnowflake กำหนดให้ motif หันเข้าด้านในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ดังแสดงในรูป 1.1.9



รูป 1.1.9 Koch Snowflake และ Koch Antisnowflake

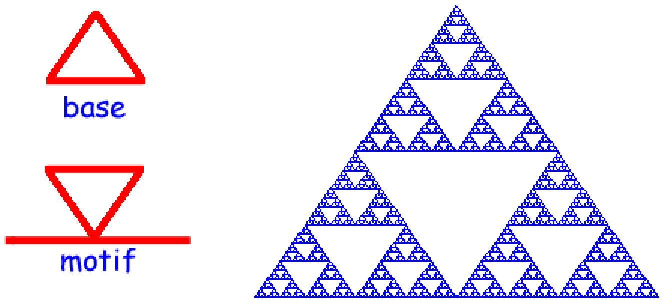
ถ้าเรากำหนดตำแหน่งของ motif เหมือนเดิมตลอดสำหรับทุกการทำซ้ำ เราจะได้รูปซึ่งเรียกว่า the regular Base-Motif fractal แต่ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในบางขั้นตอน เราก็จะได้รูปแบบพิเศษเรียกว่า sweep ตัวอย่างรูป base-motif fractal ที่มีการกำหนดรูปแบบของ base, motif และ ตำแหน่งของ motif ต่าง ๆ กัน Levy Curve



รูป 1.1.10 Levy Curve

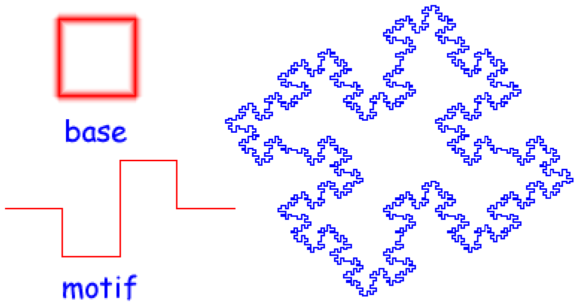
เรากำหนดตำแหน่งของ motif ได้เพียงแบบเดียวเนื่องจากมี base เป็นส่วนของเส้นตรง

Sierpinski Triangle ได้จากการกำหนดตำแหน่งของ motif ให้หันหน้าเข้าด้านในเหลี่ยม



1.1.11 Sierpinski Triangle

Koch Island ได้จากการกำหนดตำแหน่งของ motif ให้หันออกด้านนอก

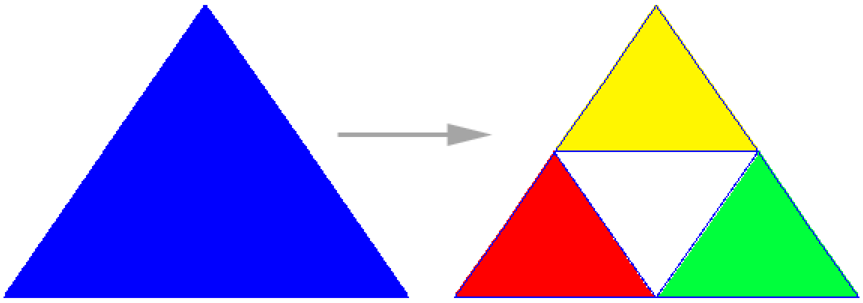


รูป 1.1.12 Koch Island

ในโลกแห่งความเป็นจริงไม่มีรูปใด ๆ ที่จะมีลักษณะสมบูรณ์ และสมมาตรดังเช่นรูป Base-Motif fractal แต่อย่างไรก็ตามเราสามารถสร้าง ตัวแบบอย่างง่าย เช่น แนวชายฝั่งทะเล และแนวรอยต่อ เมื่อเร็ว ๆ นี้ ได้มีการใช้ Base-Motif fractal สร้างตัวแบบทางเศรษฐศาสตร์ (อย่างไร ???)

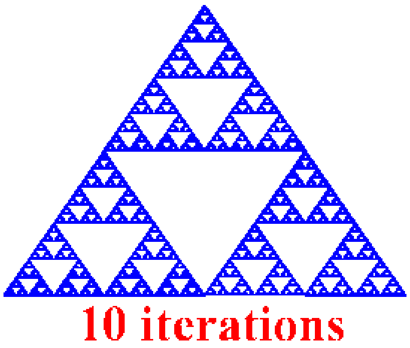
IFS Iteration

การทำซ้ำวิธีการ IFS (Iterated Function System) จะได้รูป fractal จากการเริ่มต้นด้วยรูปหรือจุด และต่อไปทำการแทนที่รูปเดิมที่ส่วนต่าง ๆ ด้วยรูปที่คล้ายรูปเดิมแต่ย่อส่วนเล็กลง ตัวอย่างเช่น การสร้างรูป Sierpinski Triangle fractal เราเริ่มจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และแทนที่รูปเดิมด้วย รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปเล็ก 3 รูป ในสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปเดิม ดังแสดงในรูป 1.1.13



รูป 1.1.13

เมื่อทำซ้ำครั้งที่ 2 เราก็แทนที่สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปเล็กกว่าเดิม 3 รูป ในแต่ละรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจากการทำซ้ำครั้งแรก เมื่อทำซ้ำไป 10 ครั้งจะได้รูป fractal ดังในรูป 1.1.14



รูป 1.1.14

อีกตัวอย่างหนึ่งก็คือรูปเฟิร์น (Fern fractal) ได้มาจากการเริ่มต้นด้วยรูปเฟิร์นจริงและลอกรูปเดิมแต่ย่อส่วน วางในตำแหน่งใบย่อยซ้ำ ๆ ไปเรื่อย ๆ จนได้ รูปเหมือนเฟิร์นจริง ดังรูป 1.1.15 ถ้าเราเลือกขยายก้านใดก้านหนึ่ง จะได้รูปเหมือนกับรูปใหญ่ และเมื่อขยายใบเล็ก ๆ ต่อไปเรื่อย ๆ ก็จะเห็นว่ามีรูปแบบเหมือนเดิมอีก เรียกว่า **รูปเหมือนตัวเอง (self-similarity)**

รูป 1.1.15 Fern Fractal

ในทางคณิตศาสตร์การแทนที่รูปทรงเดิมด้วยรูปอื่น เรียกว่า **การแปลงทางเรขาคณิต** (geometric transformation) จากตัวอย่างรูป Sierpinski Triangle Fractal และ Fern fractal มีการแปลง 2 ประเภทด้วยกันก็คือ การแปล (รูปทรงเลื่อนตำแหน่ง) และ การย่อขยาย (ขนาดของรูปสามเหลี่ยม และใบเฟิร์นเล็กลง) และประเภทที่สามก็คือการหมุน ซึ่งเป็นการสร้างรูป fractal โดยรูปเหมือนถูกวางในตำแหน่งที่มีมุมต่างจากเดิม เช่นการสร้างรูป fractal ของต้นไม้ เราจำเป็นต้องกำหนดให้กิ่ง ก้านอยู่ในตำแหน่งมุมต่างกันไป ส่วนการแปลงประเภทอื่น ๆ เช่น การสะท้อน (reflection) และการผกผัน (invesion) ก็ให้รูป fractal ที่ต่างกันออกไปมากมาย สำหรับรูป fractal สองมิติ มีการแปลงตัวแปร 6 แบบด้วยกันคือ

1. การเลื่อนตำแหน่งในแนวนอน
2. การเลื่อนตำแหน่งในแนวดิ่ง
3. การหมุนรูปในแนวนอน
4. การหมุนรูปในแนวดิ่ง
5. การย่อขยายรูปในแนวนอน
6. การย่อขยายรูปในแนวดิ่ง

สำหรับรูปสามมิติเราต้องใช้แกนเพิ่มอีกหนึ่งแกนคือแกน z

Formula Iteration

การสร้าง fractal โดยการทำซ้ำวิธีนี้ เป็นวิธีที่ทำให้ได้รูปที่ซับซ้อน และสวยงาม ซึ่งรูปที่ได้ขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งที่ทำซ้ำ และการแทนที่รูปเดิมด้วยการใช้สูตรคณิตศาสตร์ รูปที่ได้สามารถแยกออกเป็น 3 ประเภทตามการใช้สูตรการทำซ้ำที่ต่างกันดังนี้

1. **Strange Attractor** : เริ่มจากพิกัดของจุดเริ่มต้น และหาพิกัดของจุดถัดไปโดยใช้สูตรคำนวณ

2. **Julia Set** : เริ่มจากพิกัดของจุดบางจุด สีที่ได้ขึ้นกับว่าเกิดอะไรขึ้นหลังจากสิ้นสุดการทำซ้ำครั้งหนึ่ง ๆ

3. **Mandelbrot Set** : เริ่มต้นที่จุด (0,0) ใช้สูตรโดยแทนพิกัดของจุดบางจุดที่ใช้เป็นเหมือนค่าคงตัวในสูตร สีที่ได้ขึ้นกับเกิดอะไรขึ้นกับจุด (0,0) หลังจากสิ้นสุดการทำซ้ำครั้งหนึ่ง ๆ

โดยทั่วไปแล้วการคำนวณสูตรซ้ำ ๆทำให้มีการเปลี่ยนแปลงตัวเลข ด้วยเหตุนี้จึงถูกนำมาศึกษาสิ่งต่าง ๆ รอบตัวเรา เช่นปฏิกิริยาเคมี ประชากร และภูมิอากาศ (อย่างไร ?)

ตัวอย่างรูป fractal ที่เกิดจาก Formula Iteration

รูป 1.1.16 Spider Fractal

Strange Attractor

เป็นวิธีสร้างรูป fractal โดยเริ่มต้นที่จุดใดจุดหนึ่งบนระนาบหรือบนระบบพิกัดฉาก จุดพิกัดถัดไปคำนวณได้โดยแทนค่าจุดพิกัดจากการทำซ้ำที่ผ่านมาในสูตรคณิตศาสตร์ที่กำหนด สูตรต่าง ๆอาจเป็นแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบนี้

1. สูตรสำหรับระนาบเชิงซ้อน

   new z = f(z) เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนของจุดปัจจุบัน และ f เป็นฟังก์ชันบางฟังก์ชัน

2. สูตรสำหรับระบบพิกัดฉาก

   new x = f(x, y)

   new y = g(x, y)

   เมื่อ (x, y) เป็นพิกัดของจุดปัจจุบัน, f and g เป็นฟังก์ชันบางฟังก์ชัน

3. สูตรสำหรับระนาบ 3 มิติ

   new x = f(x, y, z)

   new y = g(x, y, z)

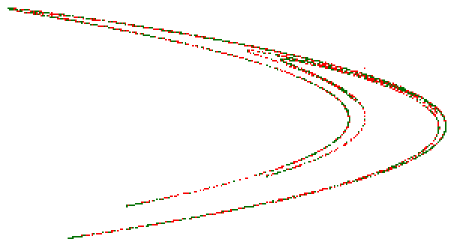
new z = h(x, y, z)

เมื่อ (x, y, z) เป็นพิกัดของจุดปัจจุบัน, f, g และ h เป็นฟังก์ชันบางฟังก์ชัน

รูป 1.1.17 แสดงรูป **the Henon Attractor** ซึ่งเป็นรูป fractal หนึ่งที่มีชื่อเสียง โดยได้มาจากการใช้สูตร

new $x = 1 + y - 1.4x^2$

new $y = 0.3x$

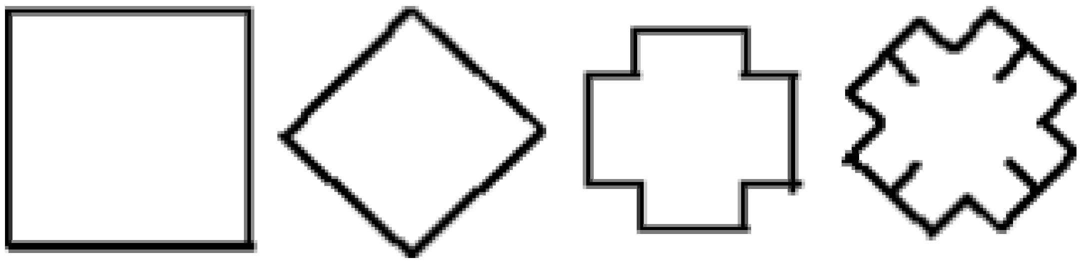


รูป 1.1.17 the Henon Attractor

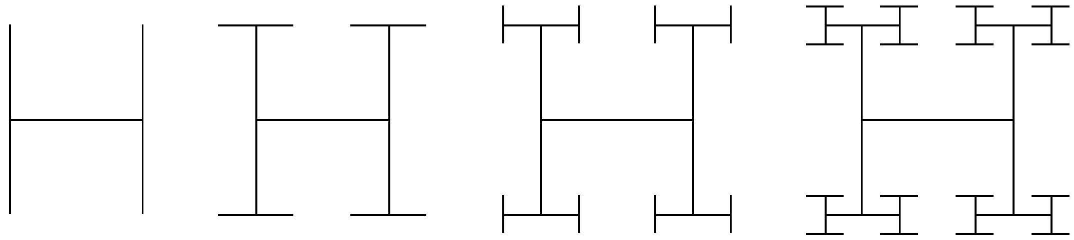
เป็นที่น่าประหลาดใจอย่างยิ่งที่เราสามารถสร้างรูป fractal ด้วยสูตรคณิตศาสตร์อย่างง่ายได้ นักคณิตศาสตร์จึงเรียกรูป fractal ที่ได้จากวิธีการทำซ้ำนี้ว่า Strange Attractor

วิธีการเดียวที่ Strange Attractor ใช้ก็คือการหาพิกัดใหม่โดยใช้สูตรการทำซ้ำ ทำให้มีประโยชน์ในการศึกษาธรรมชาติ เมื่อเราลองพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของประชากร อากาศ และปฏิกิริยาเคมี นักวิทยาศาสตร์พบรูปแบบ fractal ในการเปลี่ยนแปลงทางธรรมชาติหลายอย่าง เช่น Rossler Attractor Fractal และ Lorenz Attractor Fractal เป็นต้น (อย่างไร?)

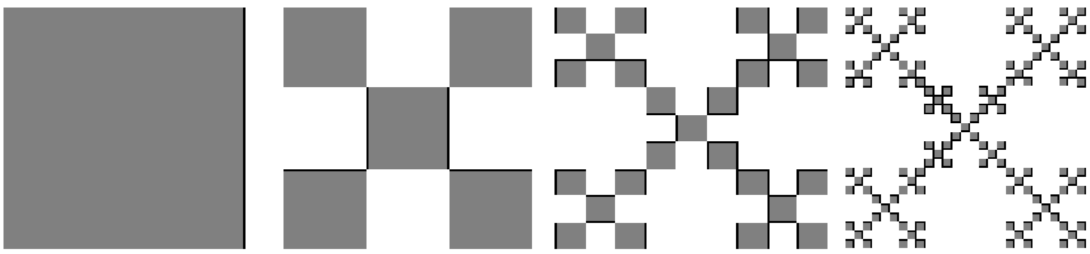
ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างต่าง ๆ ของ fractal



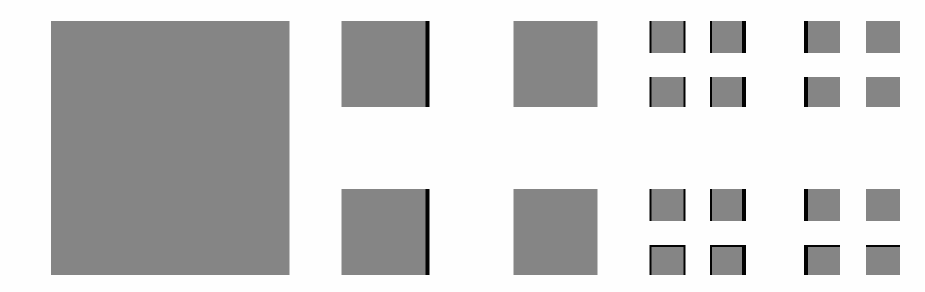
รูป 1.1.18 Levy Tapestry



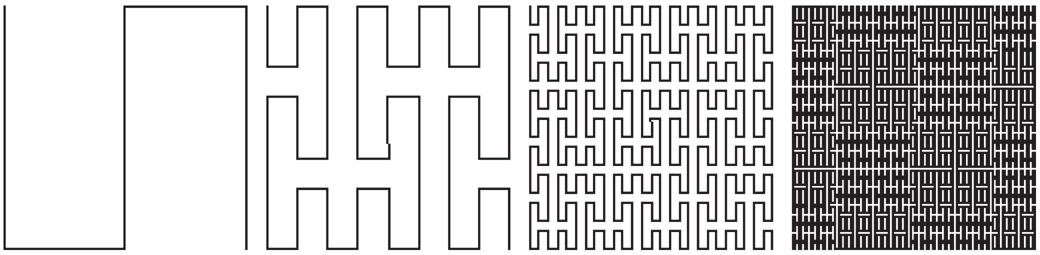
รูป 1.1.19 H-fractal



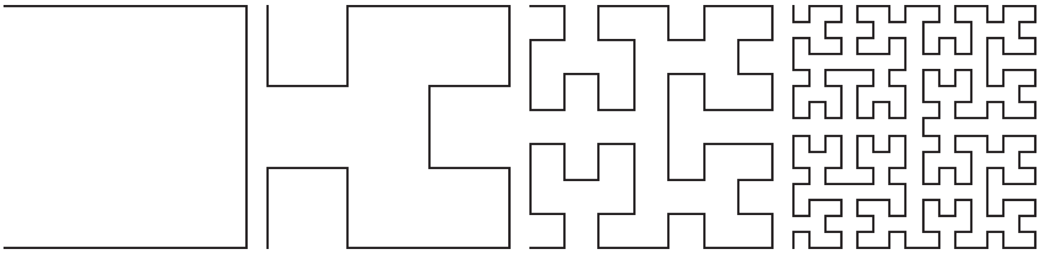
รูป 1.1.20 Box Fractal



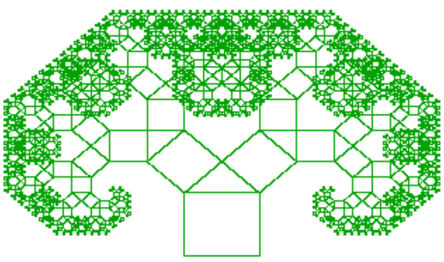
รูป 1.1.21 Cantor Square Fractal



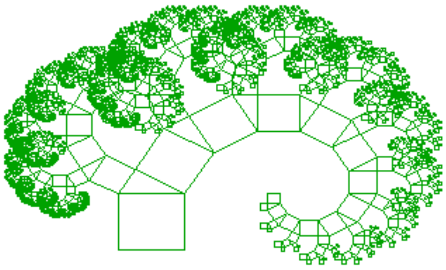
รูป 1.1.22 Peano Curve



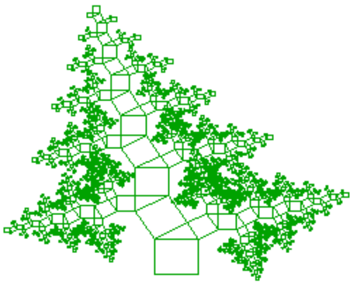
รูป 1.1.23 Hilbert Curve



Pythagoras Tree



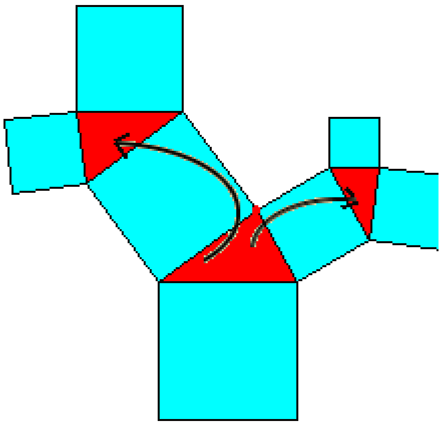
Skewed Pythagoras Trees



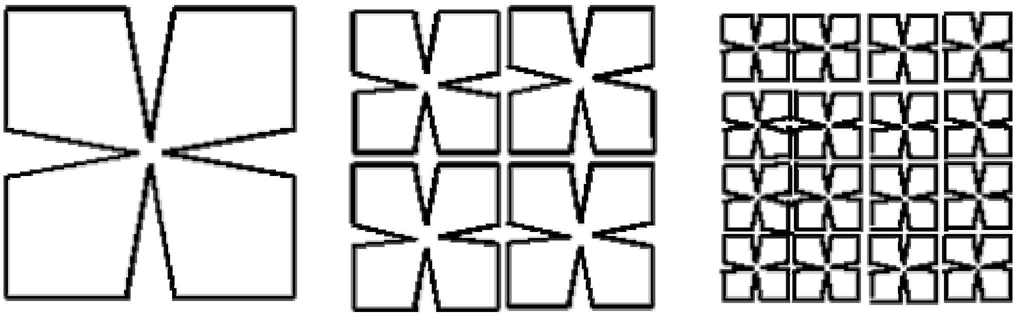
Pythagoras Christmas tree

รูป 1.1.24 Pythagoras trees

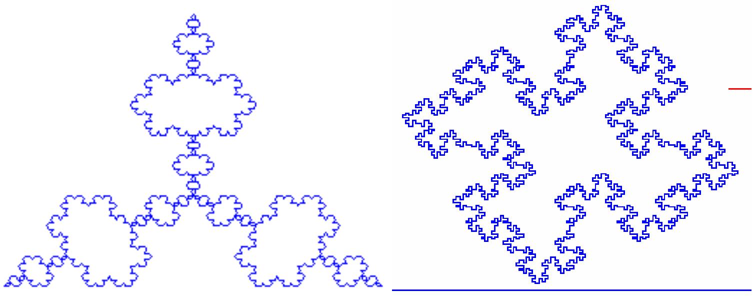
สร้างรูป Pythagoras trees โดยการทำซ้ำขั้นตอนไปนี้



1. วาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
2. วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมในข้อ 1. โดยให้ด้านนั้นเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก
3. วาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่อจากด้านที่เหลือทั้งสองด้าน
4. วาดรูปพลิกของสามเหลี่ยมคล้ายของสามเหลี่ยมแรกที่ด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสอง ดังรูป
5. วาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่อจากด้านทั้งสองของสามเหลี่ยมมุมฉาก

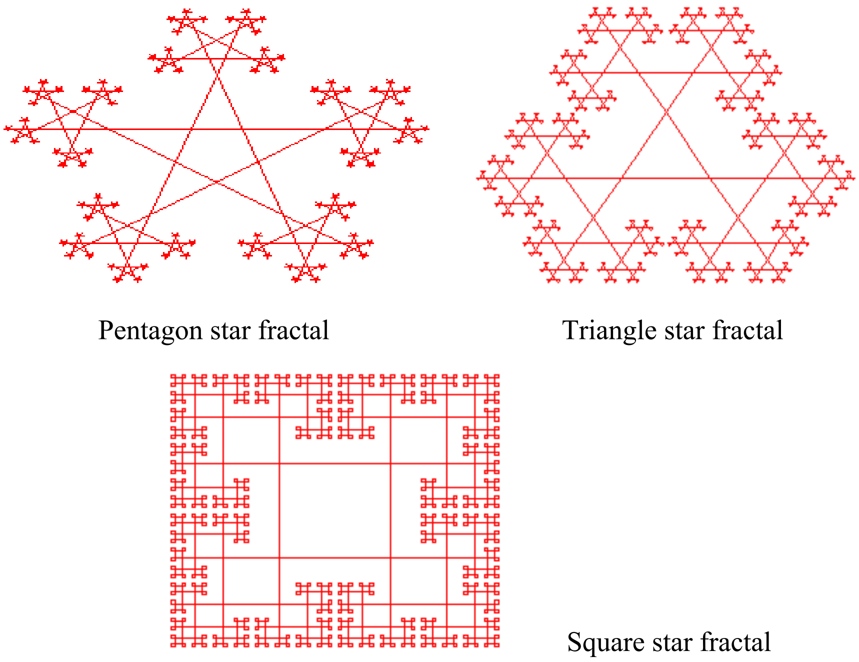


รูป 1.1.25 Cesaro Fractal



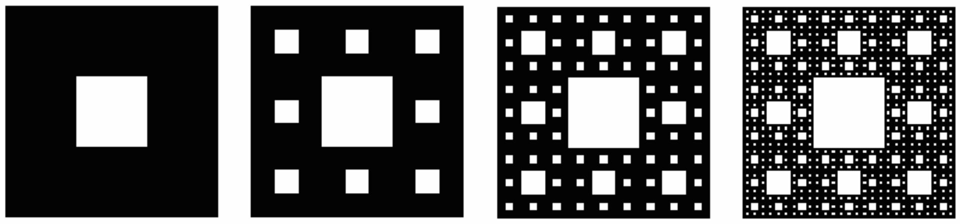
Koch snowflake
Koch anti-flake
Koch island

รูป 1.1.26 Koch Curves

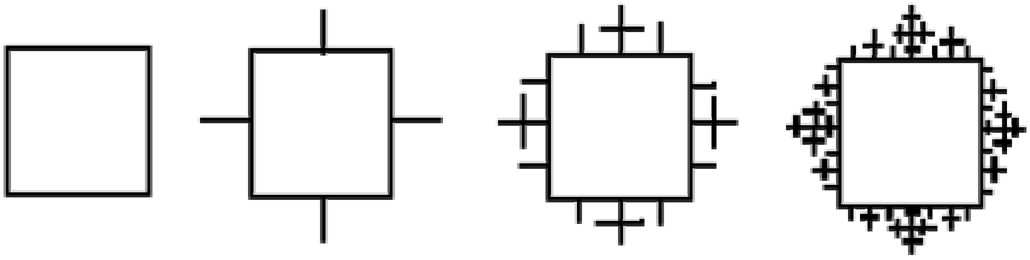


Pentagon star fractal
Triangle star fractal
Square star fractal

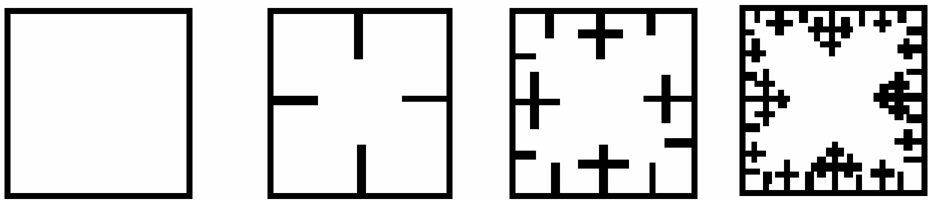
รูป 1.1.27 Star Fractals



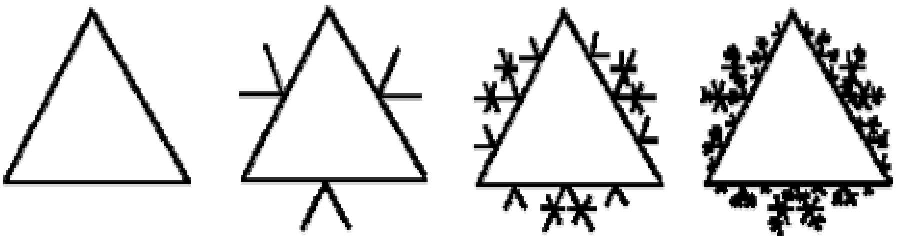
รูป 1.1.28 Sierpinski Carpet



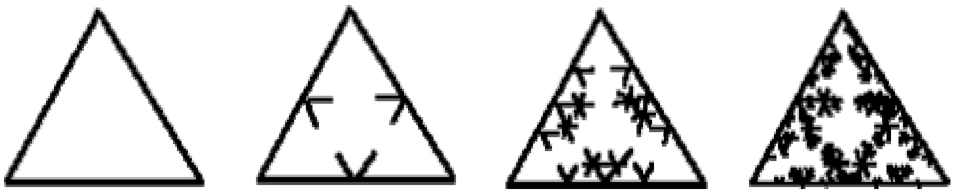
รูป 1.1.29 Square Ice Fractal



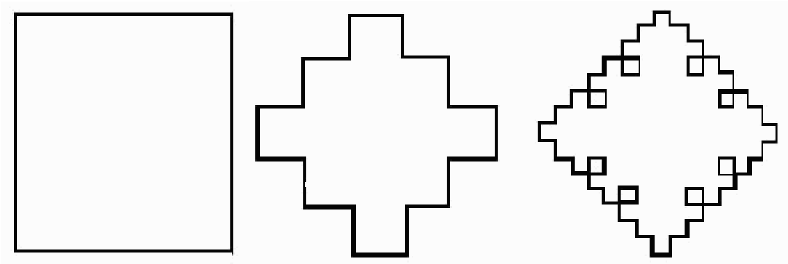
รูป 1.1.30 Anti-square Ice Fractal



รูป 1.1.31 Triangle Ice Fractal



รูป 1.1.32 Anti-triangle Ice Fractal



รูป 1.1.33 Cross-Stitch Curve

แบบฝึกปฏิบัติ 1

ให้นักเรียนหาการประยุกต์ของ fractal ในชีวิตประจำวัน

Web site อ้างอิง

http://math.youngzones.org/Fractal%20webpages

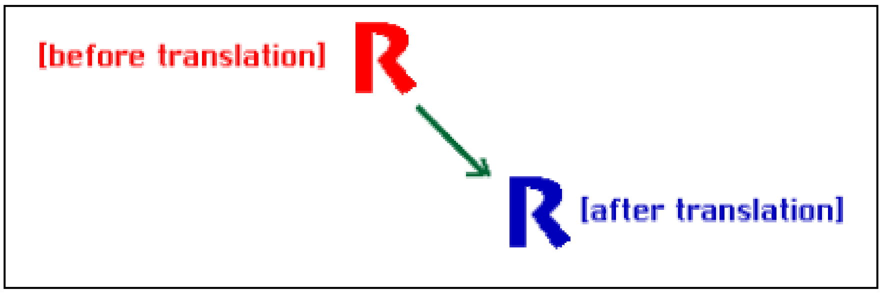
ตอนที่ 1.2 Tessellation

ความหมายและคุณสมบัติของ Tessellation

Tessellation คือ การสร้างแบบรูป (pattern) ของรูปต่าง ๆ บนระนาบ (plane) โดยไม่ก่อให้เกิดช่องว่างและการซ้อนทับกัน โดยมีคุณสมบัติที่สำคัญคือ ความสมมาตร (Symmetry)
ความสมมาตรใน Tessellation มีอยู่ 4 ลักษณะคือ

1. การเลื่อนขนาน (Translation)

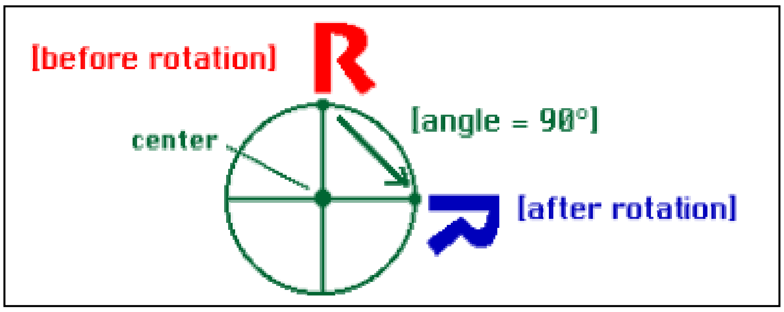
การเลื่อนขนานคือการเคลื่อนรูปไปตามทิศทางใดทิศทางหนึ่งโดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนานและรูปร่างของรูปตั้งต้น ดังแสดงในรูปที่ 1.2.1



รูปที่ 1.2.1 แสดงการเลื่อนขนานของ R

2. การหมุน (Rotation)

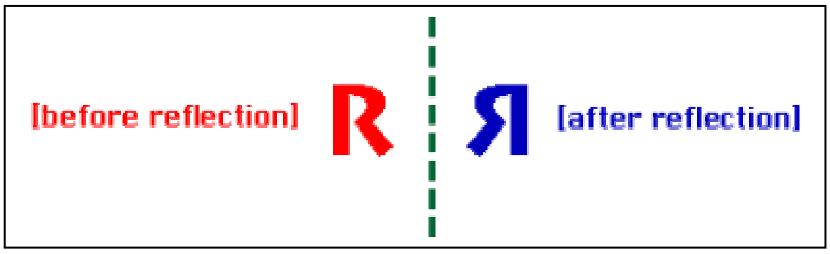
การหมุนคือเคลื่อนที่ของรูปรอบจุดคงที่จุดหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า จุดศูนย์กลาง (Center) ดังแสดงในรูปที่ 1.2.2



รูปที่ 1.2.2 แสดงการหมุนของ R รอบจุดศูนย์กลาง เป็นมุม 90 องศา

3. การสะท้อน (Reflection)

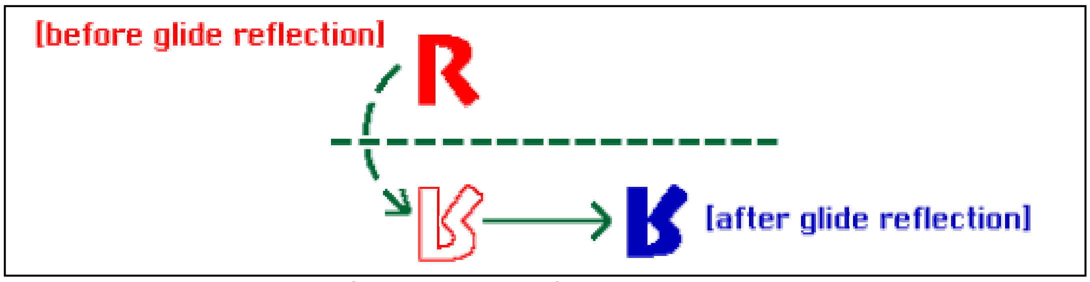
การสะท้อนเป็นการสร้างรูปผ่านเส้นคงที่ที่เรียกว่า เส้นสะท้อน (Mirror Line) ซึ่งรูปที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะเหมือนกับรูปตั้งต้นทุกประการ เพียงแต่จะกลับด้านจากซ้ายเป็นขวาแทน ลักษณะเช่นนี้จะเหมือนกับภาพเหมือนที่เกิดขึ้นในกระจกเงานั่นเอง ดังแสดงในรูปที่ 1.2.3



รูปที่ 1.2.3 แสดงการสะท้อนของ R

4. การเลื่อนสะท้อน (Glide Reflection)

การเลื่อนสะท้อนเป็นการผสมผสานระหว่างความสมมาตรใน 2 ลักษณะ คือ การสะท้อนและการเลื่อนขนาน ดังแสดงในรูปที่ 1.2.4



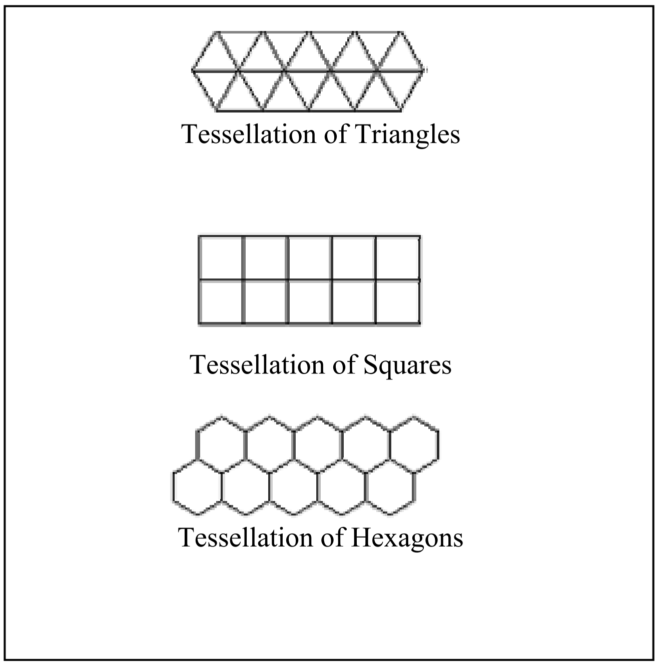
รูปที่ 1.2.4 แสดงการเลื่อนสะท้อนของ R

ตัวอย่าง Tessellation ที่ควรรู้จัก

✲ **Regular Tessellation**

Regular Tessellation คือ Tessellation ที่สร้างจากรูปหลายเหลี่ยมปกติ (regular polygon) เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และรูปหกเหลี่ยม เป็นต้น

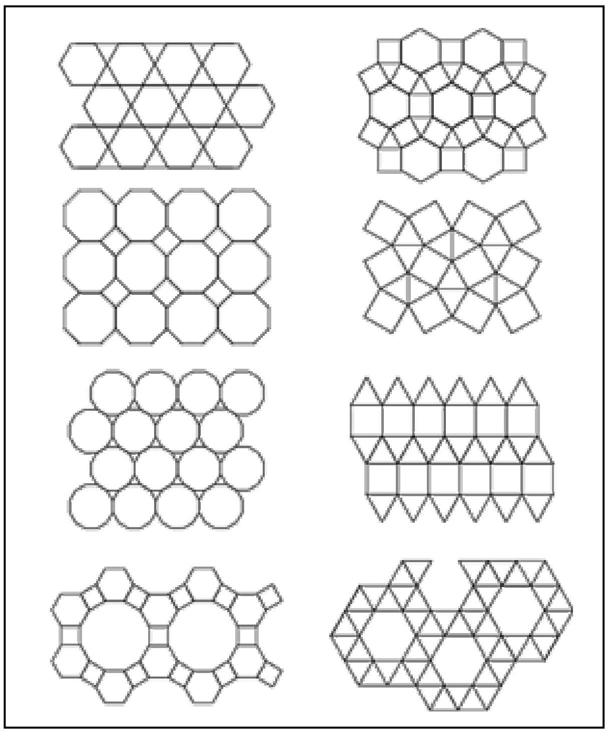
ตัวอย่างของ Regular Tessellation



รูปที่ 1.2.5 แสดงตัวอย่างของ Regular Tessellation

✵ **Semiregular Tessellation**

Semiregular Tessellation คือ Tessellation ที่ประกอบด้วยรูปหลายเหลี่ยมปกติมากกว่าหนึ่งรูป ตัวอย่างเช่น



รูปที่ 1.2.6 แสดงตัวอย่างของ Semiregular Tessellation

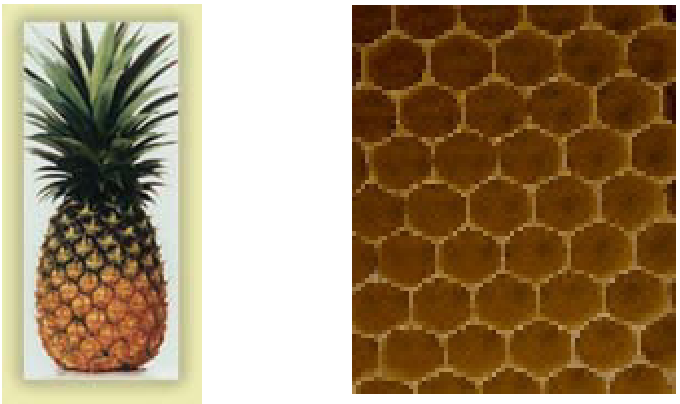
นอกจาก Regular Tessellation และ Semiregular Tessellation ซึ่งเป็น Tessellation ที่สร้างจากรูปทางเรขาคณิตแล้ว ยังมี Tessellation ที่สร้างจากรูปร่างอื่น ๆ ได้อีกด้วย ดังตัวอย่างใน รูปที่ 1.2.7

(a) **(b)**

รูปที่ 1.2.7 **(a)** แสดง Tessellation ที่สร้างจากรูปหมาป่า
(b) แสดง Tessellation ที่สร้างจากรูปนกอินทรีย์

Tessellation ในธรรมชาติ

เราจะพบเห็น Tessellation ในธรรมชาติได้มากมาย รูปที่ 1.2.8 เป็นตัวอย่างหนึ่งของ Tessellation ที่เกิดตามธรรมชาติที่สามารถสังเกตเห็นได้อย่างชัดเจน



(a) **(b)**

รูปที่ 1.2.8 แสดง Tessellation ในธรรมชาติ **(a)** ตาสับปะรด **(b)** รังผึ้ง

ประโยชน์ของ Tessellation

เราจะสังเกตเห็นว่าไม่ว่าจะเป็นเสื้อผ้า เครื่องประดับตกแต่ง รวมไปถึงอาคารบ้านเรือน ผู้เป็นเจ้าของย่อมต้องการให้สิ่งเหล่านั้นมีลวดลายงดงามเพื่อดึงดูดผู้พบเห็น การสร้างลวดลายของสิ่งเหล่านั้น มีหลายวิธีการด้วยกัน หนึ่งในนั้นเราสามารถใช้ Tessellation มาช่วยได้

รูปที่ 1.2.9-1.2.13 เป็นตัวอย่างของการนำ Tessellation มาสร้างลวดลายให้กับสิ่งต่าง ๆ

รูปที่ 1.2.9 แสดง Tessellation บนลายผ้าไหมไทย

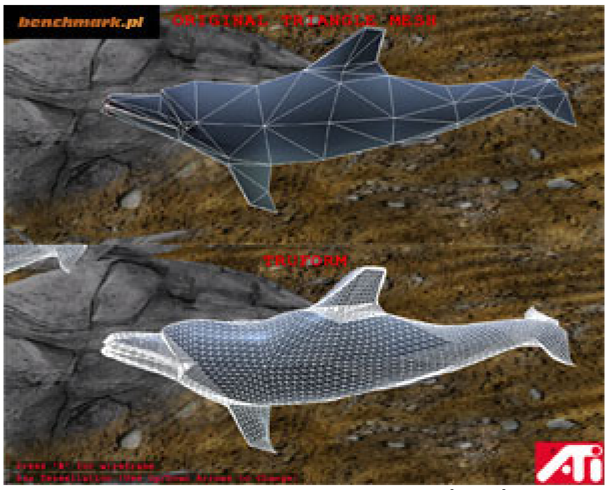
รูปที่ 1.2.10 แสดง Tessellation บนลายของพื้นโต๊ะ

รูปที่ 1.2.11 แสดง Tessellation บนลวดลายของภาชนะ

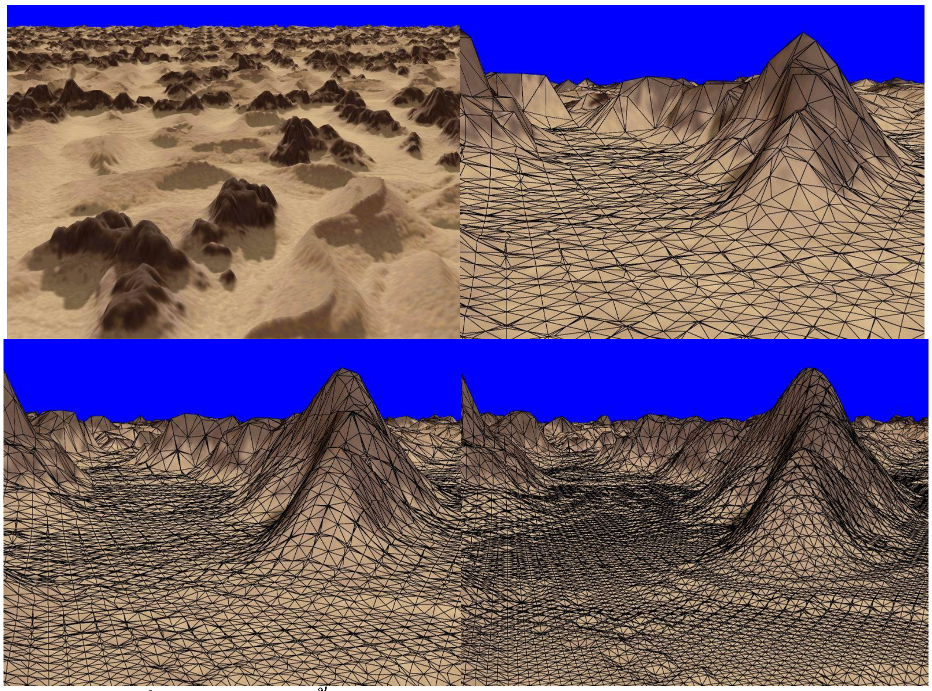
รูปที่ 1.2.12 แสดงการก่ออิฐเป็นลวดลายบนผนังอาคาร

รูปที่ 1.2.13 แสดงลวดลายบนพื้น

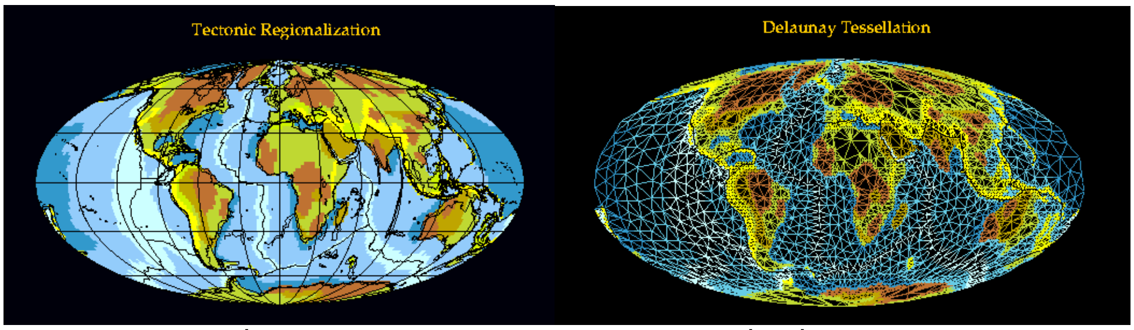
นอกจากในวงการของลวดลายแล้ว Tessellation ยังมีบทบาทสำคัญในวงการกราฟฟิคของการสร้างรูป 3 มิติ อีกด้วย โดยส่วนใหญ่แล้วนักคอมพิวเตอร์กราฟฟิคจะใช้ Regular Tessellation เพื่อร่างรูปร่างต่าง ๆ ซึ่งการทำให้รูปร่างต่าง ๆ จะดูสมจริงนั้นขึ้นอยู่กับขนาดและรูปร่างของรูปหลายเหลี่ยมที่นำมาใช้ ดังรูปที่ 1.2.14 - 1.2.17



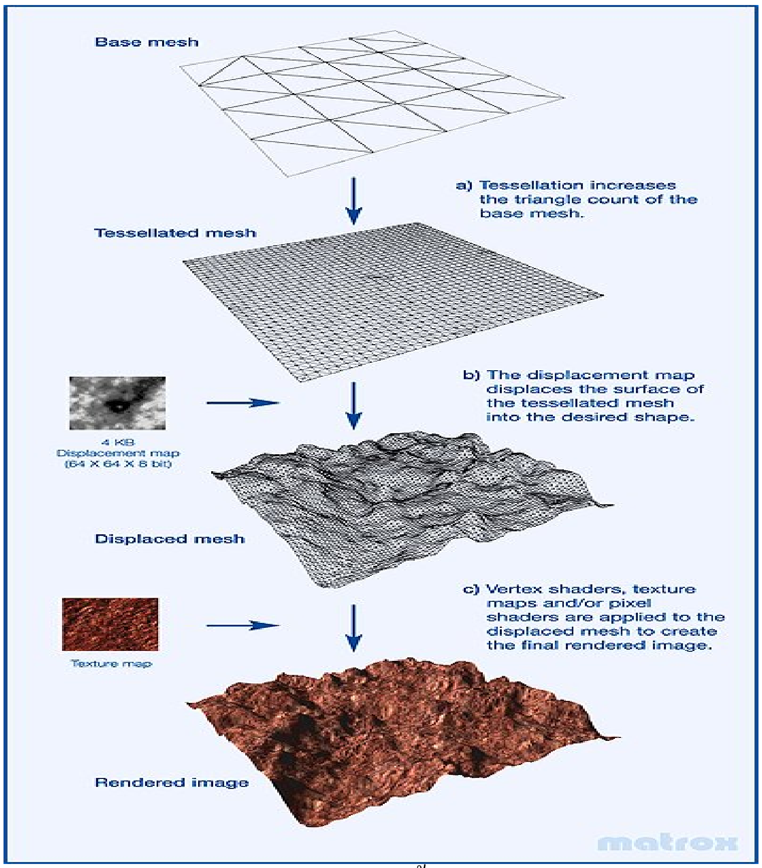
รูปที่ 1.2.14 แสดงการร่างปลาโลมาด้วยรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดแตกต่างกัน



รูปที่ 1.2.15 แสดงพื้นผิวทะเลทรายด้วย Semiregular Tessellation



รูปที่ 1.2.16 แสดงการร่างลูกโลกด้วยรูปหลายเหลี่ยมที่แตกต่างกัน



รูปที่ 1.2.17 กระบวนการร่างพื้นผิวโดยใช้ Tessellation

แบบฝึกปฏิบัติ 2

1. จงสร้าง Tessellation พร้อมทั้งอธิบายกระบวนการสร้างโดยละเอียด
2. จงยกตัวอย่าง Tessellation ในธรรมชาติ พร้อมทั้งหารูปประกอบ

หน่วยที่ 2

เกมชีวิตและหลักการทำรังนกพิราบ

ตอนที่ 2.1 เกมชีวิต

ตอนที่ 2.2 หลักการทำรังนกพิราบ

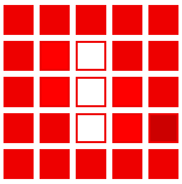
ตอนที่ 2.1 เกมชีวิต (Game of Life)

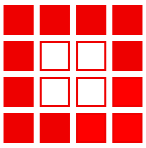
John Conway เป็นผู้คิดเกมชีวิตขึ้นมาโดยมีกติกาในการเล่นโดยพิจารณาพฤติกรรมของช่องในตารางสองมิติ (ตารางขนาด n x m) รูปแบบที่ปรากฏในตารางจะเปลี่ยนไปในแต่ละขั้นตอน ขั้นตอนหนึ่ง ๆ เรียกว่า generation แต่ละช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส (cell) ในตารางจะมีเพื่อนบ้านอยู่ 8 ช่องด้วยกัน กติกามีอยู่ว่า

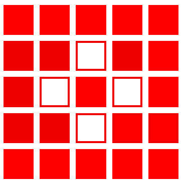
1. **สิ่งมีชีวิตจะอยู่ได้เมื่อมีเพื่อนบ้าน 2 หรือ 3 คนที่มีชีวิตอยู่ ถ้ามีเพื่อนบ้านอยู่ 0 หรือ 1 คน สิ่งมีชีวิตนั้นจะอดตาย และถ้ามีเพื่อนบ้านอยู่ 4 คนหรือมากกว่า ก็จะอึดอัดตายเพราะประชากรหนาแน่น**
2. **ชีวิตใหม่จะเกิดขึ้นที่ตำแหน่งนั้นเมื่อมีเพื่อนบ้านอยู่เพียงแค่ 3 คน**

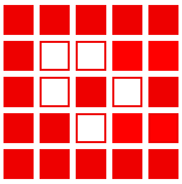
จากกติกา 2 ข้อข้างต้นทำให้เราได้รูปแบบที่ซับซ้อนและน่าสนใจทั้งนี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบเริ่มต้น เมื่อดำเนินเกมไปเรื่อย ๆ ในที่สุดถ้าไม่สนใจรูปแบบเริ่มต้น เราจะได้**รูปแบบเสถียร (stable pattern)** เกมชีวิตของ Conway สามารถนำไปใช้ในแสดงแบบจำลองของ darwinian evolution หรือของการเกิดรูปแบบของอะตอมเสถียร (stable atom) และโมเลกุลจากสถานะเริ่มต้นที่ยุ่งเหยิง (initial chaotic state) เมื่อรูปแบบเสถียรจะแทนสิ่งมีชีวิตที่สามารถมีชีวิตอยู่ได้

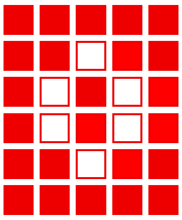
ต่อไปเป็นรูปแบบเสถียรบางรูปที่พบกันบ่อย ๆ

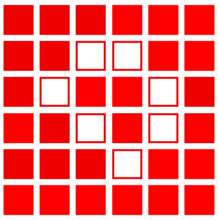

Blinker

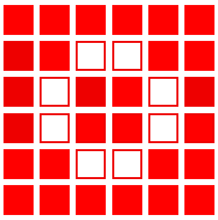

Block

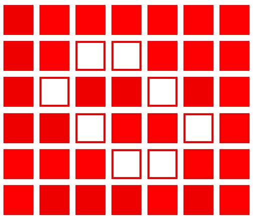

Tub

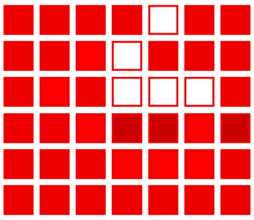

Boat


Beehive


Loaf


Pond


Mango


Glider

จะเห็นว่ารูปแบบเหล่านี้เป็นรูปแบบวง (cyclic pattern) ยกเว้นรูป Blinker และ Glider

Web site อ้างอิง

www.math.kth.se/~gunnarj/LIFE/WLIF/wlcframes.html

ตอนที่ 2.2 หลักการทำรังนกพิราบ (Pigeonhole Principle)

สมมติว่ามีนกพิราบอยู่ k+1 ตัว ต้องบินกลับรังในตอนเย็นซึ่งมีรังอยู่ k รัง ดังนั้น เราสรุปได้ว่าจะต้องมีรังอย่างน้อย 1 รัง ที่มีนกสองตัวอยู่ในรังเดียวกัน เราสามารถประยุกต์หลักดังกล่าวกับปัญหาอื่น ซึ่งจะกล่าวดังต่อไปนี้

หลักการทำรังนกพิราบ ถ้ามีของอยู่จำนวน k+1 ชิ้น หรือมากกว่า ใส่ลงในกล่อง k กล่อง เราสรุปได้ว่าจะต้องมีกล่องอย่างน้อยหนึ่งกล่อง ที่บรรจุของอย่างน้อยสองชิ้น

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง โดยสมมติให้ ไม่มีกล่องใดเลยที่มีของมากกว่า 1 ชิ้น ดังนั้นจะต้องมีของอย่างมากที่สุด k ชิ้น ซึ่งขัดแย้งเนื่องจากเรามีของอยู่ k+1 ชิ้น

ตัวอย่างต่อไปนี้อาศัยความรู้จากหลักการทำรังนกพิราบดังกล่าว เช่น

ตัวอย่าง 1 ในกลุ่มของคน 367 คน เราสรุปได้ว่าต้องมีคนอย่างน้อย 2 คน ที่เกิดวันและเดือนเดียวกัน เนื่องจากในรอบหนึ่งปีมี 366 วัน โดยที่นกคือคน และรังคือวันในหนึ่งปี

ตัวอย่าง 2 ในกลุ่มของคน 8 คน เราสรุปได้ว่าต้องมีคนอย่างน้อย 2 คน เกิดในวันเดียวกัน เนื่องจากในหนึ่งสัปดาห์มี 7 วัน โดยที่นกคือคน และรังคือวันในสัปดาห์

ตัวอย่าง 3 ในกลุ่มคน 6 คน เราสรุปได้ว่าต้องมีคนอย่างน้อย 2 คน ต้องได้เกรดวิชาคณิตศาสตร์เหมือนกัน เนื่องจากเกรดวิชาคณิตศาสตร์มี 5 เกรดคือ 0 1 2 3 และ 4 โดยที่ นกคือคน และรังคือเกรดวิชาคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 4 จงหาว่ามีจำนวนนักเรียนอย่างน้อยเท่าไร จึงจะสรุปได้ว่ามีนักเรียนอย่างน้อย 2 คน ได้คะแนนเท่ากัน โดยที่คะแนนเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 100

วิธีทำ จากโจทย์ นกคือคน และรังคือคะแนน เนื่องจากจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 100 มี 101จำนวน ดังนั้นจะมีคะแนนอยู่ 101 คะแนน จากหลักการทำรังนกพิราบสรุปได้ว่าต้องมีนักเรียนอย่างน้อย 102 คน จึงจะสรุปได้ว่ามีนักเรียนอย่างน้อย 2 คนได้คะแนนเท่ากัน

ตัวอย่าง 5 ถ้าเลือกรองเท้า 11 ข้าง จากรองเท้า 10 คู่ สรุปได้ว่า ต้องมีรองเท้าอย่างน้อย 2 ข้าง ที่เข้าคู่กัน โดยที่นกคือรองเท้า และรังคือคู่ของรองเท้า

ตัวอย่าง 6 ในกลุ่มคำภาษาอังกฤษ 27 คำต้องมีอย่างน้อย 2 คำ ที่ขึ้นต้นด้วยอักษรตัวเดียวกัน เนื่องจากตัวอักษรในภาษาอังกฤษมี 26 ตัว โดยที่นกคือคำในภาษาอังกฤษ และรังคือตัวอักษรภาษาอังกฤษ

ทฤษฎีบท (หลักการทำรังนกพิราบกรณีทั่วไป : The Generalized Pigeonhole Principle)

ถ้ามีของอยู่ N ชิ้น นำไปวางในกล่อง k กล่อง ดังนั้นมีอย่างน้อย 1 กล่อง ที่บรรจุของอย่างน้อย [N/k] ชิ้น

โดยที่ [m] หมายถึง จำนวนเต็มที่เล็กที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ m ตัวอย่างเช่น [2.3] = 3, [4.5] = 5, [-2.3] = -2, [-0.5] = -1

ในที่นี้จะขอละการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าว เราจะนำทฤษฎีนี้ไปใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7 ในกลุ่มคน 100 คน จะต้องมีอย่างน้อย [100/7] = 15 คน ซึ่งเกิดวันเดียว หรือกล่าวว่าต้องมีอย่างน้อย [100/12] = 9 คน ซึ่งเกิดในเดือนเดียวกัน

ตัวอย่าง 8 จงหาจำนวนนักเรียนที่น้อยสุดที่ทำให้แน่ใจได้ว่า มีนักเรียนอย่างน้อย 6 คน ได้เกรดวิชาคณิตศาสตร์ เกรดเดียวกัน

วิธีทำ ให้ x คือจำนวนนักเรียนซึ่งคือนก เกรดวิชาคณิตศาสตร์เป็นรัง ตามหลักการทำรังนกพิราบจะสรุปได้ว่า [x/5] = 6 ซึ่ง เราจะหา x = 5(5)+1 = 26 คน

ดังนั้นต้องมีนักเรียนอย่างน้อย 26 คน จึงแน่ใจได้ว่า มี 6 คนได้เกรดวิชาคณิตศาสตร์เกรดเดียวกัน

ตัวอย่าง 9 ถ้าต้องการแจกจ่ายจดหมาย 51 ฉบับ ใส่ตู้รับจดหมาย 50 ตู้ ดังนั้นต้องมีตู้จดหมายอย่างน้อย 1 ตู้ ที่บรรจุจดหมายอย่างน้อย 2 ฉบับ แต่ถ้าแจกจ่ายจดหมาย 51 ฉบับ ใส่ตู้รับจดหมาย 10 ตู้ ต้องมีอย่างน้อย 1 ตู้ ที่บรรจุจดหมายอย่างน้อย 6 ฉบับ

ตัวอย่าง 10 ตำบลหนึ่งมีอยู่ 20 หมู่บ้าน ถ้าบิ๊ก D2B (ตอนที่ร้องเพลงได้) ต้องการคัดเลือกคน 3 คน จากหมู่บ้านเดียวกันมาทานข้าวกับบิ๊ก บิ๊กได้ขอร้องให้เพื่อนช่วยประชาสัมพันธ์ให้รู้ทั่วถึงทั้ง 20 หมู่บ้าน โดยให้ผู้สนใจส่งใบสมัครกับบิ๊กโดยตรง ถามว่าบิ๊กต้องได้รับใบสมัครเป็นจำนวนเท่าไร จึงแน่ใจได้ว่าในบรรดาผู้ที่สมัครมาทานข้าวกับบิ๊กนั้นต้องมี 3 คน อยู่หมู่บ้านเดียวกัน

วิธีทำ ให้ x คือจดหมาย และรังคือ หมู่บ้าน ตามหลักการทำรังนกพิราบ สรุปได้ว่า [x/20] = 3

x = 20 (3-1) + 1 = 41 ฉบับ

ดังนั้นสรุปได้ว่า บิ๊ก ต้องได้รับจดหมายจำนวน 41 ฉบับ จึงแน่ใจได้ว่าคนที่มาทานข้าวกับบิ๊กมาจากหมู่บ้านเดียวกัน 3 คน

แบบฝึกปฏิบัติ 3

1. ถ้ามีถุงเท้าสีดำ, น้ำตาล ,น้ำเงิน, ขาว และ เหลือง (สีละ 1 คู่) อยู่ในลิ้นชัก เราจะต้องเลือกถุงเท้ากี่ข้างออกมาจากลิ้นชัก จึงจะแน่ใจว่ามี 2 ข้างที่มีสีเดียวกัน
2. ถ้ามีเป็ด 36 ตัว เหยือก 38 อัน ตะกร้า 30 ใบ และหมี 22 ตัว เราจะต้องเลือกของเหล่านี้ทั้งหมดกี่ชิ้นจึงจะแน่ใจได้ว่ามีของอย่างน้อย 18 ชิ้นที่เป็นพวกเดียวกัน
3. นักวิจัยผู้หนึ่งต้องการสำรวจข้อมูลบางอย่างเกี่ยวกับ 14 จังหวัดในภาคใต้ ในการนี้เขาต้องเลือกตัวแทน 3 คนซึ่งมาจากจังหวัดเดียวกันเพื่อเป็นผู้รวบรวมข้อมูลที่ต้องการ ดั้งนั้นเขาจึงลงประกาศรับสมัครในหนังสือพิมพ์ ถามว่า เขาจะต้องได้รับใบสมัครอย่างน้อยที่สุดกี่ฉบับ จึงจะแน่ใจได้ว่าเขาจะสามารถเลือกตัวแทนได้ตามต้องการ
4. ถ้ากล่อง ๆหนึ่งบรรจุดินสอ 101 แท่ง ซึ่งมีสีต่าง ๆกัน 4 สี จงอธิบายว่าทำไมต้องมีดินสออย่างน้อย 26 แท่งที่มีสีเดียวกัน
5. เราจะต้องเลือกจำนวนเต็มที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2n มากี่จำนวน จึงแน่ใจได้ว่ามีอย่างน้อย 1 จำนวนเป็นจำนวนคี่

เอกสารอ้างอิง

1.ช่อฟ้า นิลรัตน์. พีชคณิตการจัดหมู่. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์.

2.Rosen K.H. Discrete Mathematics and its applications 4ed.. Macgraw-hill international ed. Singapore. 1999.

หน่วยที่ 3
กราฟและการประยุกต์

ตอนที่ 3.1 จุดกำเนิดของทฤษฎีกราฟ
ตอนที่ 3.2 กราฟ
ตอนที่ 3.3 กราฟกับการแก้ปัญหา
ตอนที่ 3.4 การแทนกราฟด้วยเมทริกซ์
ตอนที่ 3.5 กราฟที่มีทิศทาง
ตอนที่ 3.6 การประยุกต์

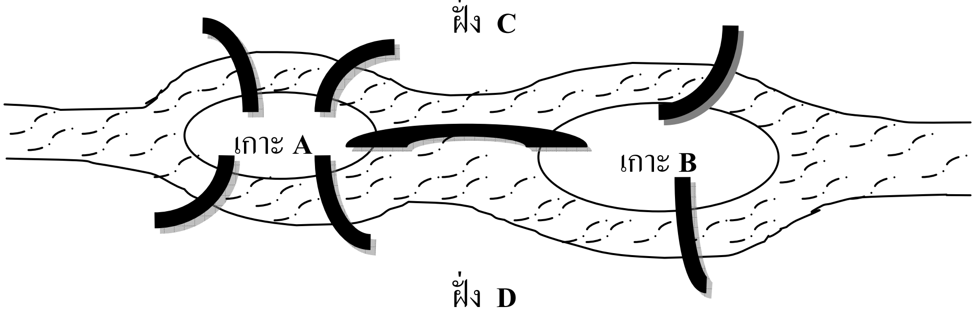
ตอนที่ 3.1 จุดกำเนิดของทฤษฎีกราฟ (Discovery)

ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) เป็นวิชาที่เกิดขึ้นในราวปี ค.ศ.1736 โดยเริ่มต้นจากปัญหาสะพานคอนนิกสเบอร์ก (The Konigsberg Bridge Problem) ซึ่งนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ชื่อ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonerd Euler) เป็นผู้แก้ปัญหาดังกล่าว ดังนั้นออยเลอร์จึงได้รับการยกย่องว่าเป็น**บิดาของวิชาทฤษฎีกราฟ** และปัญหาสะพานคอนนิกสเบอร์กก็ได้รับการยกย่องว่าเป็นปัญหาเริ่มต้นของการก่อกำเนิดทฤษฎีกราฟ ต่อมา เคอร์ชอฟ (Kirchhoff ค.ศ. 1824 - 1887) และเคเลย์ (Cayley ค.ศ. 1821 - 1895) ได้ขยายทฤษฎีกราฟให้กว้างขวางยิ่งขึ้น กล่าวคือเคอร์ชอฟแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า จึงทำให้เกิดการขยายความรู้เบื้องต้น และทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับต้นไม้ (Tree) ซึ่งต้นไม้นี้เป็นกราฟชนิดหนึ่ง ส่วนเคเลย์ได้ศึกษาต้นไม้เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาการหาจำนวนไอโซเมอร์ของสารเคมีบางชนิด นอกจากนี้ยังมีปัญหาที่เกี่ยวข้องกับกราฟอีกมากมาย เช่น ปัญหาที่ตั้งขึ้นโดยฮามินตัน (Hamilton ค.ศ. 1805 - 1865) และปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียงสี่สี (The Four Color Problem) ซึ่งปัญหานี้เป็นปัญหาที่มีชื่อเสียงมากที่สุดในทฤษฎีกราฟ

ปัจจุบันนี้ทฤษฎีกราฟได้ถูกพัฒนาขึ้นและนำไปใช้ประโยชน์ และนอกจากนี้ยังมีการค้นพบทฤษฎีกราฟมากมาย ซึ่งมีจุดเริ่มต้นมาจากปัญหาต่างๆ เช่น

1) ปัญหาสะพานคอนนิกสเบอร์ก (The Konigsberg Bridge Problem)

ในเมืองคอนนิกสเบอร์ก ประเทศเยอรมันมีเกาะอยู่ 2 เกาะ และมีสะพานอยู่ 7 สะพาน ซึ่งเชื่อมระหว่างเกาะและเชื่อมจากแต่ละเกาะไปยังฝั่งของแม่น้ำพรีเกล (Pregel River) ดังรูป 3.1.1

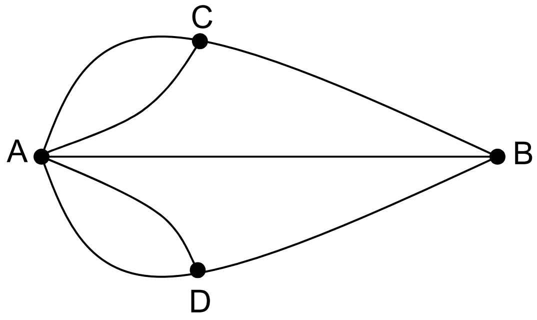


รูป 3.1.1

ปัญหาก็คือ เป็นไปได้หรือไม่ที่ใครสักคนหนึ่งจะท่องเที่ยวเมืองคอนนิกสเบอร์กนี้ โดยเริ่มต้นเดินทางจากเกาะหรือฝั่งที่ใดที่หนึ่ง แล้วข้ามสะพานแต่ละแห่งเพียงครั้งเดียวเท่านั้นจนครบทุกสะพาน และเมื่อข้ามสะพานสุดท้ายแล้วจะต้องกลับมาอยู่ที่บริเวณเริ่มต้น

นักคณิตศาสตร์หลายคนได้พยายามแก้ปัญหานี้ แต่ก็ไม่มีใครสามารถตอบได้ จนกระทั่งปี ค.ศ. 1736 ออยเลอร์ได้ตีพิมพ์บทความที่เป็นคำตอบของปัญหาดังกล่าวว่า เป็นไปไม่ได้

ออยเลอร์แก้ไขปัญหานี้ โดยการจำลองปัญหาดังกล่าวให้เป็นปัญหาของจุดและเส้น โดยให้จุด **A** และ **B** แทนเกาะทั้งสองเกาะ ส่วนจุด **C** และ **D** แทนสองฝั่งแม่น้ำ และให้เส้นแทนสะพานทั้งเจ็ดเชื่อมโยงระหว่างจุดทั้งหลาย จึงทำให้ได้แบบจำลองที่ประกอบด้วยจุดและเส้น ซึ่งเรียกว่า **กราฟ** (Graph) ดังรูป 3.1.2



รูป 3.1.2

เมื่อพิจารณาจากกราฟรูป 3.1.2 แล้ว ปัญหาจะกลายเป็น “เริ่มจากจุดใดจุดหนึ่ง ลากไปตามเส้นให้ครบทุกเส้น เส้นละ 1 ครั้ง แล้วกลับมาที่จุดเดิมได้หรือไม่”

ท่านคิดว่าสามารถทำได้หรือไม่ ถ้าได้จงแสดง…….

ออยเลอร์ให้เหตุผลว่า การเริ่มต้นเดินจากจุดใดๆ แล้วจะต้องเดินผ่านทุกเส้นๆ ละ 1 ครั้ง แล้วกลับมาที่จุดเดิม ผู้เดินทางจะต้องเดินเข้าและออกจุดต่างๆ เป็นจำนวนคู่ครั้ง ตัวอย่างเช่น เมื่อเข้าจุด **A** ก็ย่อมต้องเดินออกจากจุด **A** เช่นกัน ซึ่งหมายความว่าจำนวนครั้งที่เดินเข้าและออกจากจุดใดๆ จะต้องเป็นจำนวนคู่ เนื่องจากผู้เดินทางจะต้องเดินทางผ่านจุดต่างๆ โดยใช้เส้นทางที่ไม่ซ้ำกัน อีกทั้งจะต้องผ่านทุกๆ เส้นที่ปรากฏในแบบจำลอง ย่อมหมายความว่าจะต้องมีจำนวนเส้นที่ต่อกับแต่ละจุดในแบบจำลองเป็นจำนวนคู่ ซึ่งจากแบบจำลองที่แทนปัญหาดังรูป 3.1.2 นั้น จะพบว่าไม่มีจุดใดเลยที่มีจำนวนเส้นที่มาต่อกับจุดเป็นจำนวนคู่ ด้วยเหตุผลนี้เองจึงทำให้ออยเลอร์สรุปว่าปัญหาดังกล่าวเป็นไปไม่ได้

แนวการตอบของออยเลอร์นี้ สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ ได้อีก เช่น

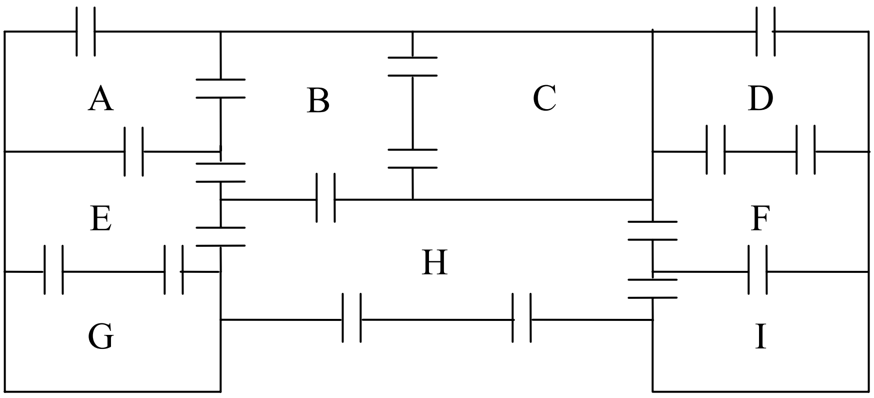
(1) ปัญหาบุรุษไปรษณีย์จีน (The Chinese Postman Problem)

ปัญหานี้มีอยู่ว่า ถ้ามีถนนสายต่างๆ และทราบความยาวของถนนแต่ละสาย บุรุษไปรษณีย์จะต้องเดินทางทั่วทุกถนนเพื่อจ่ายไปรษณียภัณฑ์ทั้งหมด บุรุษไปรษณีย์จะเดินทางให้ทั่วอย่างไรจึงจะทำให้ผลรวมของระยะทางมีค่าต่ำที่สุด และหลังจากที่จ่ายไปรษณียภัณฑ์ทั้งหมดแล้วจะต้องกลับมาที่จุดเริ่มต้น

จากปัญหานี้จะได้ว่า บุรุษไปรษณีย์จะต้องพยายามหาเส้นทางที่ใช้ถนนแต่ละสายเพียงครั้งเดียว ซึ่งปัญหานี้สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในแบบจำลองรูปกราฟได้ โดยให้กราฟแทนแผนที่ของถนน

(2) ปัญหาการเดินชมห้องต่างๆ ในบ้าน

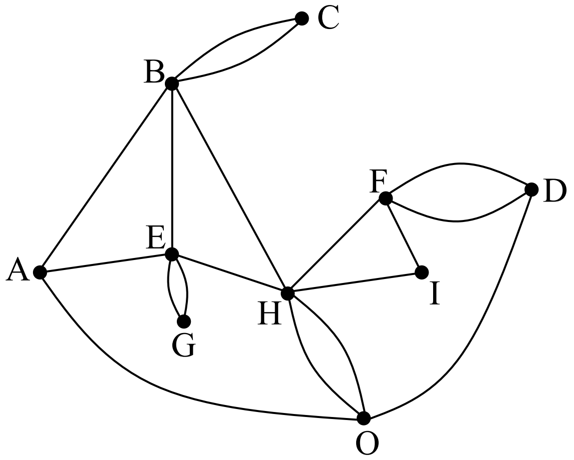
ถ้ารูป 3.1.3 คือ แปลนบ้านที่ประกอบด้วย 9 ห้อง โดยมีประตูเชื่อมระหว่างห้องต่างๆ และประตูเชื่อมระหว่างห้องกับบริเวณข้างนอก



รูป 3.1.3

ปัญหาคือ เจ้าของบ้านจะพาแขกเข้าชมบ้านโดยผ่านประตูทุกประตูเพียงครั้งเดียวแล้วกลับออกมาข้างนอกเหมือนเดิมได้หรือไม่

เราสามารถเปลี่ยนปัญหานี้เป็นปัญหาทางกราฟได้ โดยให้จุดแทนห้องต่างๆ และบริเวณข้างนอก ส่วนเส้นจะแทนประตู โดยห้องหรือบริเวณข้างนอกที่มีประตูถึงกันให้ลากเส้นเชื่อมถึงกัน ดังนั้นจะได้กราฟรูป 3.1.4 โดยให้ O แทนบริเวณข้างนอก

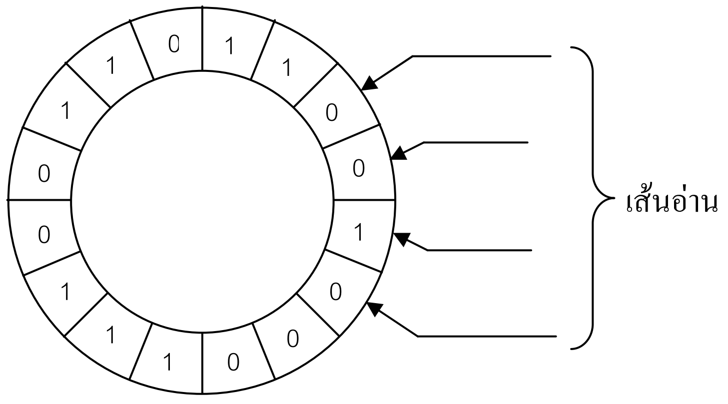


รูป 3.1.4

ปัญหานี้จะกลายเป็นปัญหาการหากราฟคือ จากจุด O ลากไปตามเส้นให้ครบทุกเส้นแล้วกลับมาที่จุดเดิมได้หรือไม่

(3) ปัญหาการออกแบบหน้าปัดคอมพิวเตอร์ (Designing And Efficient Computer Drum)

ต้องการทำหน้าปัดรูปวงแหวนสำหรับบันทึกข้อมูลในรูปความดันกระแสไฟฟ้า 2 สถานะ สถานะหนึ่งเป็น 0 อีกสถานะหนึ่งเป็น 1 โดยจะแบ่งพื้นที่รูปวงแหวนออกเป็นช่องเล็กๆ เท่าๆ กัน แต่ละช่องจะบรรจุสัญญาณกระแสไฟฟ้า (ตัวนำหรือฉนวน) อย่างใดอย่างหนึ่ง ช่องที่บรรจุตัวนำจะให้สัญญาณเป็น 1 (กระแสไฟฟ้าไหลผ่านได้) ส่วนช่องที่บรรจุฉนวนจะให้สัญญาณเป็น 0 (กระแสไฟฟ้าไหลผ่านไม่ได้) เช่น ถ้าตำแหน่งต่างๆของหน้าปัดเป็นดังรูป เครื่องจะอ่านตามเข็มนาฬิกาเป็น 0010 บนเส้นอ่าน 4 เส้นที่อยู่กับที่



รูป 3.1.5

ถ้าหมุนหน้าปัดนี้ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาไป 1 ช่อง เครื่องจะอ่านเป็น1001 ซึ่งจะถือว่าตำแหน่งที่อ่านครั้งแรก และอ่านครั้งที่สองนี้แตกต่างกัน เพราะเครื่องอ่านออกมาไม่เหมือนกัน ตัวเลข 4 ตัวที่เครื่องอ่านได้แต่ละครั้งอาจหมายถึง การสั่งให้เครื่องทำงานแต่ละอย่าง เช่น เครื่องซักผ้า

ถ้าเครื่องอ่านเป็น 0000 อาจหมายถึง ให้เครื่องหยุดทำงานทุกอย่าง

ถ้าเครื่องอ่านเป็น 0100 อาจหมายถึง ให้เครื่องทำการปั่น

ถ้าเครื่องอ่านเป็น 0010 อาจหมายถึง ให้เครื่องปล่อยน้ำทิ้ง เป็นต้น

ปัญหาก็คือ จะแบ่งพื้นที่รูปวงแหวนที่มีอยู่ออกเป็นช่องเท่าๆกัน อย่างน้อยกี่ช่อง เพื่อบรรจุตัวนำหรือฉนวนลงไปในแต่ละช่อง และจะบรรจุตัวนำหรือฉนวนลงในช่องใดบ้าง จึงจะทำให้เครื่องอ่านออกได้ตัวเลข 4 ตัว (ประกอบด้วย 0 หรือ 1) แบบต่างๆ มากที่สุด โดยเครื่องมีเส้นอ่าน 4 เส้น เช่น ถ้าช่องฉนวนมาอยู่ตรงเส้นอ่านทั้ง 4 เส้น เครื่องอ่านเป็น 0000 ถ้าช่องตัวนำมาอยู่ตรงกับเส้นที่ 1 และช่องฉนวนมาอยู่ตรงกับเส้นอ่านอีก 3 เส้นที่เหลือ เครื่องอ่านเป็น 1000 เป็นต้น

วิธีคิดหาคำตอบของปัญหานี้เราจะทำดังนี้

ถ้าเรานำเลข 0 และ 1 มาเขียนเรียงเป็นตัวเลข 4 ตัว จะได้แบบต่างๆกันทั้งหมด $= 2^4 = 16$ แบบ คือ $0000, 0001, 0010, 0100, 1000, \ldots, 1111$

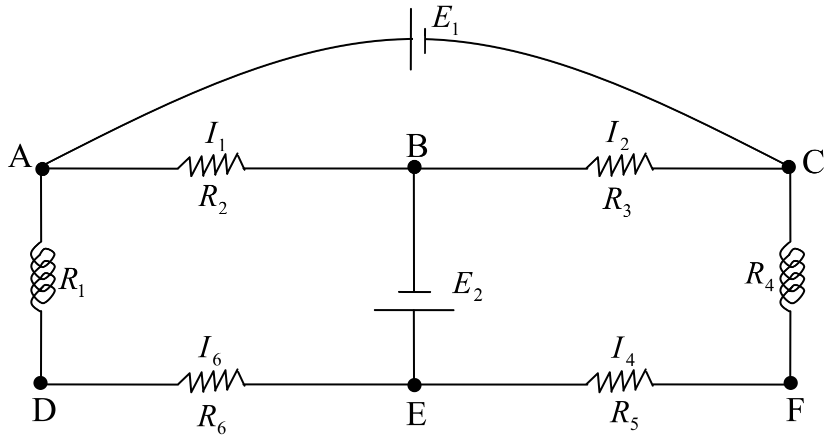
ปัญหาจึงกลายเป็นว่าจะใส่ตัวเลข 0 หรือ 1 ลงในช่องหน้าปัดรูปวงแหวนน้อยที่สุดกี่ตัว และใส่อย่างไร ซึ่งเมื่อหมุนวงแหวนไปทีละช่องแล้วเครื่องจะอ่านตัวเลขครั้งละ 4 ตัว ได้ครบ 16 ตัว โดยไม่ซ้ำกันเลย ซึ่งถ้าหากทำอย่างไม่ประหยัดก็จะต้องใส่ตัวเลข 0 หรือ 1 ถึง 64 ตัว (แบ่งพื้นที่วงแหวนออกเป็นช่องเล็กๆถึง 64 ช่อง) ซึ่งวิธีการที่จะหาคำตอบของปัญหานี้จะกล่าวหลังจากที่ได้ศึกษาเรื่องไดกราฟแล้ว

2) แผนผังวงจรไฟฟ้า (Electrical Network Problems)

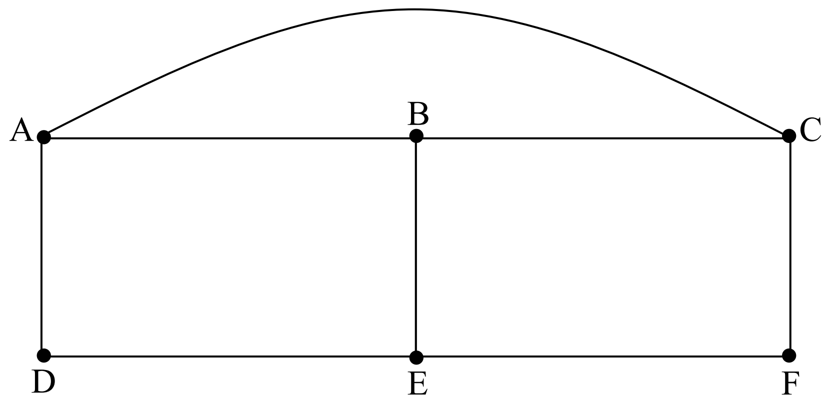
โดยทั่วไปแล้วแผนผังวงจรไฟฟ้าจะประกอบด้วย เครื่องต้านทานไฟฟ้า (Resister) เครื่องควบแน่น (Condenser) แบตเตอรี่ (Storange Batteries) ขดลวดเหนี่ยวนำ (Inductor) สวิตส์ (Swich) เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 1847 เคอร์ชอฟได้สร้างทฤษฎีบทของต้นไม้ (Tree) เพื่อช่วยในการหาผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งใช้หาค่าของกระแสไฟฟ้าที่ไหลในแต่ละวงจรไฟฟ้า โดยเคอร์ชอฟได้แทนแผนผังวงจรไฟฟ้าด้วยจุดและเส้น จนได้แบบจำลองรูปกราฟที่มีลักษณะโครงสร้างเช่นเดียวกับแผนผังวงจรไฟฟ้านั้นและจากแบบจำลองรูปกราฟนี้เคอร์ชอฟได้แสดงว่า ในการหาผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้นนั้นไม่จำเป็นต้องพิจารณาทุกวงจรของแผงผังวงจรไฟฟ้า แต่จะพิจารณาเฉพาะวงจรที่หาได้จากกราฟที่มีคุณสมบัติบางประการที่เรียกว่า **ต้นไม้แผ่ทั่ว** (Spanning Tree) ก็เพียงพอที่จะนำมาใช้คำนวณหากระแสไฟฟ้าได้

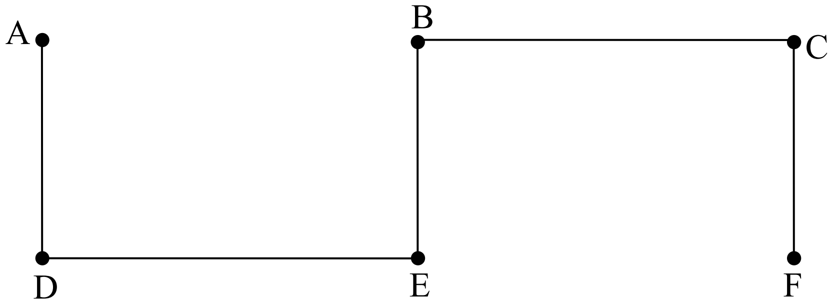
ถ้าให้รูป 3.1.6 แสดงถึงแผนผังวงจรไฟฟ้า แล้วรูป 3.1.7 จะเป็นกราฟแทนแผนผังวงจรไฟฟ้านี้ และรูป 3.1.8 จะเป็นต้นไม้แผ่ทั่วอันหนึ่งของกราฟ รูป 3.1.7



รูป 3.1.6



รูป 3.1.7



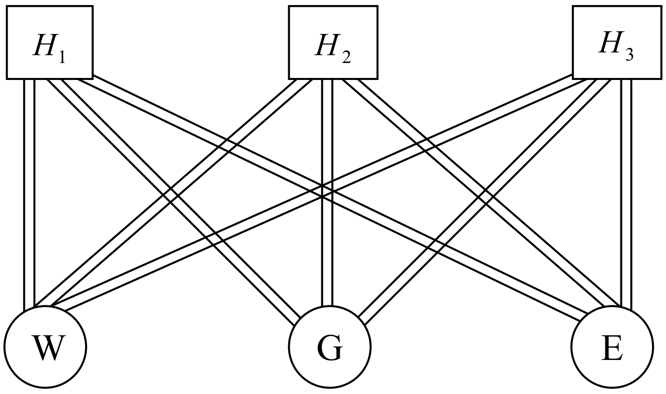
รูป 3.1.8

3) ปัญหาสาธารณูปโภค (Utilities Problem)

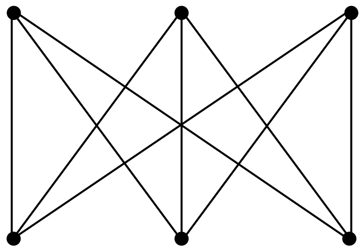
สมมติว่า มีบ้าน 3 หลัง คือ H_1, H_2, H_3 แต่ละหลังต้องการมีสาธารณูปโภค 3 อย่าง คือ ต้องการเดินท่อน้ำ (W) ท่อแก๊ส (G) และท่อไฟฟ้า (E) จากตรงจุดจ่ายน้ำ แก๊ส และไฟฟ้าตามลำดับ

ปัญหาคือ จะมีทางเป็นไปได้หรือไม่ที่จะฝังท่อสาธารณูปโภคทั้ง 3 อย่าง ไปยังบ้านแต่ละหลัง โดยไม่ให้มีท่อวางพาดบนท่ออื่น

ปัญหานี้สามารถแทนด้วยแผนภาพดังรูป 3.1.9 แล้วแทนด้วยรูปกราฟดังรูป 3.1.10 ซึ่งคำตอบก็คือเราสามารถวาดกราฟนี้ได้บนกระดาษโดยไม่มีเส้นเชื่อมใดตัดกันได้หรือไม่ คำตอบของปัญหานี้จะกล่าวหลังจากที่ได้ศึกษาเรื่อง **กราฟเชิงระนาบ** (Planar Graph) แล้ว



รูป 3.1.9



รูป 3.1.10

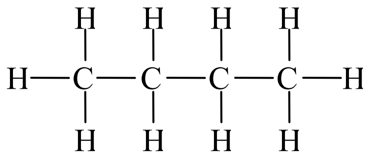
4) การหาจำนวนไอโซเมอร์แบบโครงสร้างในสารประกอบจำพวกอัลเคนส์

(Enumerative Isomers of Alkanes)

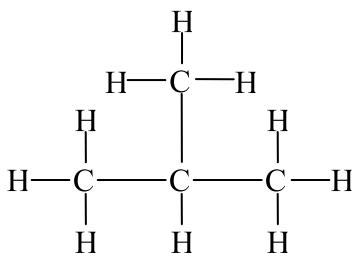
อัลเคนส์เป็นสารประกอบจำพวกไฮโดรคาร์บอนชนิดหนึ่งที่มีสูตรทั่วไป คือ C_nH_{2n+2} สารประกอบประเภทนี้ประกอบด้วยธาตุคาร์บอนและไฮโดรเจน

เคเลย์ได้ให้จุดแทนตำแหน่งอะตอมของธาตุคาร์บอนหรือไฮโดรเจน และเส้นเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด แทนพันธะเคมีระหว่างอะตอมของธาตุที่อยู่ติดกันในสารประกอบนั้น

เนื่องจากเลขโคออร์ดิเนชัน (Co-Ordination Number) ของธาตุคาร์บอนและไฮโดรเจนมีค่าเป็น 4 และ 1 ตามลำดับ เช่น อัลเคนส์ที่มีสูตรเป็น C_4H_{10} ซึ่งมีไอโซเมอร์แบบโครงสร้าง 2 แบบ คือ นอร์มาลบิวเทน (Normal Butane) และ ไอโซบิวเทน (Isobutane) มีการจัดเรียงตัวของอะตอมภายในโมเลกุล ดังรูป 3.1.11



นอร์มาลบิวเทน



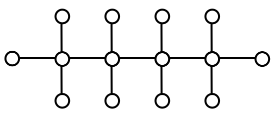
ไอโซบิวเทน

รูป 3.1.11

จะเห็นว่า นอร์มาลบิวเทน และ ไอโซบิวเทน มีสูตรโมเลกุลเหมือนกันคือ C_4H_{10} แต่สารทั้งสองมีโครงสร้างของโมเลกุลที่แตกต่างกัน เพราะการจัดเรียงตัวของอะตอมภายในแต่ละโมเลกุลมีโครงสร้างที่แตกต่างกัน

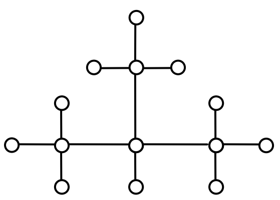
ปัญหาคือ ต้องการหาจำนวนไอโซเมอร์แบบโครงสร้าง (สารที่มีสูตรโมเลกุลเหมือนกัน แต่มีโครงสร้างของโมเลกุลที่ต่างกัน) ของอัลเคนส์ที่มีสูตรทั่วไป คือ C_nH_{2n+2}

รูป 3.1.11 จะแทนได้ด้วยรูปกราฟดังรูป 3.1.12 และรูป 3.1.13



นอร์มาลบิวเทน

รูป 3.1.12



ไอโซบิวเทน

รูป 3.1.13

กราฟรูป 3.1.12 และกราฟรูป 3.1.13 นี้ เป็นต้นไม้ (ต้นไม้ คือ กราฟประเภทหนึ่ง) และเนื่องจากกราฟของไอโซเมอร์แบบโครงสร้างของอัลเคนส์เป็นต้นไม้ ดังนั้นปัญหาจึงกลายเป็นการหาจำนวนต้นไม้ ซึ่งมี $3n+2$ จุด และแต่ละจุดมีระดับขั้นเป็น 1 หรือ 4 (ระดับขั้น คือ จำนวนเส้นที่มาบรรจบกันที่จุดจุดนั้น)

เคเลย์ได้นำเอาต้นไม้มาประยุกต์กับปัญหาการหาจำนวนไอโซเมอร์แบบโครงสร้างของอัลเคนส์ดังกล่าวข้างต้น ซึ่งเคเลย์ได้พบคำตอบของปัญหานี้ในปี ค.ศ. 1875 โดยการนับจำนวนวิธีที่สามารถสร้างต้นไม้ดังกล่าวได้

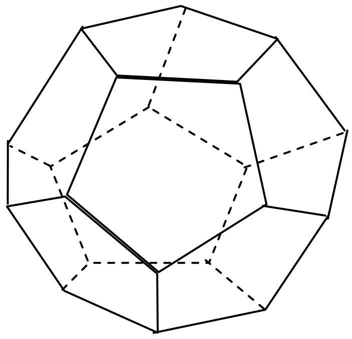
5) เกมส์การท่องเที่ยว (Around the World)

ในปี ค.ศ. 1859 นักคณิตศาสตร์ชื่อ เซอร์วิลเลียม ฮามิลตัน (Sir Willliam Hamilton ค.ศ. 1805 - 1865) ได้ตั้งเกมส์ขึ้นมา โดยใช้วัสดุของแข็งทำเป็นรูปจำลองทรง 12 หน้า (Dodecahedron) ซึ่งมีจุดทั้งหมด 20 จุด และมีเส้นทั้งหมด 30 เส้น โดยที่ทุกจุดมีเส้นมาพบกัน 3 เส้น

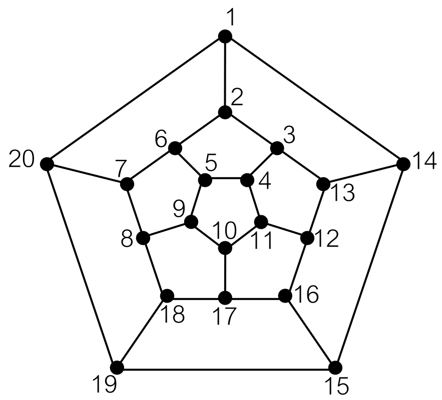
ฮามิลตันให้จุดแต่ละจุดแทนเมืองสำคัญต่างๆ ของโลก 20 แห่ง เช่น ลอนดอน (London) นิวยอร์ค (New York) ปารีส (Paris) ปักกิ่ง (Peking) มอสโคว์ (Moscow) โรม (Rome) โตเกียว (Tokyo) วอร์ซอว์ (Warsaw) ซิดนีย์ (Sedny) ซานฟรานซิสโก (San Fracisco) เบอร์ลิน (Berlin) อัมสเตอร์ดัม (Amsterdam) เป็นต้น

ปัญหาของเกมส์นี้ก็คือ ให้หาเส้นทางการท่องเที่ยวโดยแวะเมืองต่างๆ เพียงครั้งเดียว และให้กลับมาที่เดิม และมีเงื่อนไขว่าจะเดินทางจากเมืองหนึ่งไปอีกเมืองหนึ่งได้ ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างเมืองทั้งสองนั้น

รูปจำลองทรง 12 หน้า สามารถเขียนแสดงด้วยกราฟดังแสดงในรูป 3.1.15 ซึ่งกราฟนี้จะประกอบด้วยจุดและเส้นของรูปจำลองทรง 12 หน้า ดังนั้นการหาเส้นทางการท่องเที่ยวตามเงื่อนไขที่กำหนดให้นั้นก็จะทำให้ง่ายขึ้น และจะได้คำตอบว่ามีเส้นทางดังกล่าว เส้นทางที่จะไปตามจุดซึ่งเรียงตามลำดับ เป็น $1,\ 2,\ 3, K\ ,\ 20,\ 1$



รูป 3.1.14



รูป 3.1.15

6) ปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียง 4 สี (The Four Color Problem)

ปัญหานี้เป็นปัญหาการระบายสีแผนที่ประเทศต่างๆ บนระนาบ โดยมีเงื่อนไขว่าจะต้องระบายสีให้ประเทศที่มีพรมแดนติดกันมีสีต่างกัน ปัญหาก็คือ ต้องการหาจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการระบายสีของแผนที่แล้วให้ได้ตามเงื่อนไข

ถึงแม้ว่าจำนวนสีจะขึ้นอยู่กับจำนวนของประเทศ และความสัมพันธ์ทางภูมิศาสตร์ของแต่ละประเทศก็ตาม แต่กัธรี (Guthrie) ซึ่งเป็นนักทำแผนที่ก็คิดว่าสามารถใช้สีเพียง 4 สี ระบายทุกๆ แผนที่ตามเงื่อนไขได้ และนักคณิตศาสตร์หลายคนก็คิดว่าน่าจะใช้เพียง 4 สี

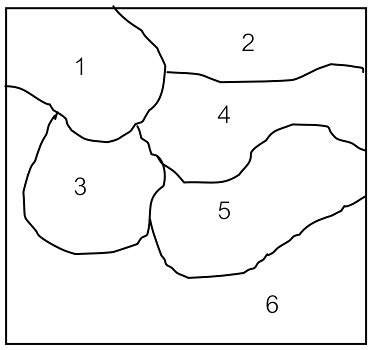
โมเบียส (Möbius ค.ศ. 1790 - 1868) ได้กล่าวถึง ปัญหานี้เป็นครั้งแรกในชั่วโมงการสอนของเขาเมื่อ ค.ศ. 1840 อีกประมาณ 10 ปีต่อมา คือประมาณปี ค.ศ. 1850 เดอร์มอร์แกน (De Morgan ค.ศ. 1806 -1871) ได้ทราบปัญหานี้จากกัธรี จากนั้น เดอร์มอร์แกนได้พิจารณาปัญหานี้ร่วมกับเพื่อนนักคณิตศาสตร์ที่ประเทศอังกฤษ และได้กล่าวถึงปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียง 4 สีนี้อย่างจริงจัง

ในปี ค.ศ. 1879 เคมป์ (Kempe) ได้พิสูจน์ว่า สามารถใช้สีเพียง 4 สี ระบายทุกๆ แผนที่ตามเงื่อนไขได้ แต่ในปี ค.ศ. 1890 เฮียวูด (Heawood) พบว่าที่เคมป์พิสูจน์ได้นั้นผิด และสามารถพิสูจน์ได้ ถ้าแทน 4 สี ด้วย 5 สี ในที่สุดปี ค.ศ. 1976 แอพเพล (Appel) และ ฮาเคน (Haken) สามารถพิสูจน์ได้โดยเขาได้แบ่งปัญหาออกเป็นเกือบ 2,000 กรณี ซึ่งเป็นการแบ่งตามจำนวนของการจัดเรียงประเทศในแผนที่ และหาวิธีที่เป็นไปได้ของการระบายสีแผนที่จากการจัดเรียงหลายๆ แบบนั้น โดยใช้คอมพิวเตอร์เข้าช่วยและหลังจากที่คอมพิวเตอร์ใช้เวลาคำนวณกว่า 1,200 ชั่วโมง แล้วเขาก็สรุปว่าใช้เพียง 4 สีก็พอ

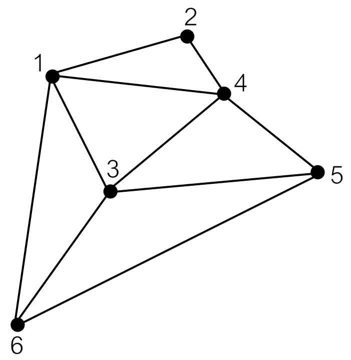
ถึงแม้ว่าจะได้คำตอบของปัญหาการระบายสี โดยใช้เพียง 4 สีแล้วก็ตาม แต่มีนักคณิตศาสตร์หลายคนที่ไม่พอใจในวิธีการพิสูจน์ ดังนั้นปัญหาใหม่จึงเกิดขึ้นว่าจะมีการพิสูจน์แบบคณิตศาสตร์อย่างเดียวโดยไม่ใช้คอมพิวเตอร์เข้าช่วยได้หรือไม่ ซึ่งปัญหานี้ปัจจุบันยังไม่มีใครสามารถพิสูจน์ได้

ปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียง 4 สี เกี่ยวข้องกับทฤษฎีกราฟ โดยการแทนแผนที่ด้วยกราฟ ซึ่งจุดแทนประเทศ และจุด 2 จุดใดมีเส้นเชื่อมต่อ ก็ต่อเมื่อประเทศที่แทนด้วยจุด 2 จุดนั้นมีพรมแดนติดต่อกัน

ถ้าให้รูป 3.1.16 เป็นแผนที่ของประเทศต่างๆ แล้ว จะได้กราฟที่แทนแผนที่นี้ดังรูป 3.1.17



รูป 3.1.16



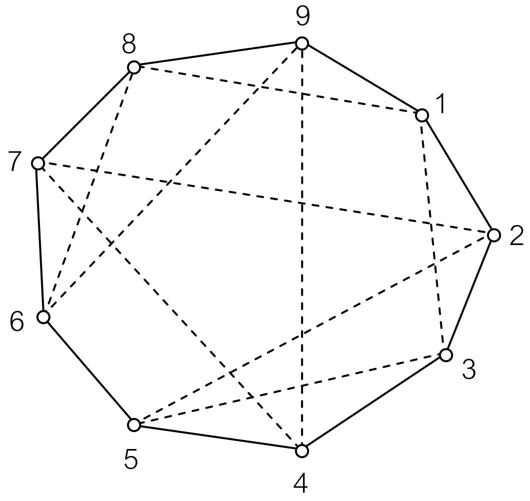
รูป 3.1.17

เมื่อแทนแผนที่ด้วยกราฟแล้ว ปัญหาจะกลายเป็นว่าเอากราฟของแผนที่รูปใดๆ มาจะสามารถระบายสีจุดต่างๆ ของกราฟนี้ด้วยสีเพียง 4 สี จุดละสีโดยให้จุดที่อยู่ติดกัน (มีเส้นเชื่อมถึงกัน) มีสีต่างกันได้หรือไม่

7) ปัญหาการจัดที่นั่ง (Seating Problem)

มีสมาชิกของสโมสรที่ตั้งใหม่แห่งหนึ่ง จำนวน 9 คน ทั้ง 9 คนนี้ต้องการร่วมรับประทานอาหารกลางวันบนโต๊ะกลม โดยการจัดที่นั่งให้สมาชิกทุกคนมีเพื่อนสมาชิกที่ต่างกันนั่งอยู่ติดกับตนเอง อยากทราบว่าจะต้องจัดให้มีการรับประทานอาหารกลางวันตามเงื่อนไขดังกล่าวทั้งหมดกี่วัน

ให้จุดแทนคน และเส้นเชื่อมจุดแทนการนั่งติดกัน



รูป 3.1.18

รูป 3.1.18 แสดงการจัดให้สมาชิกทั้ง 9 คนนั่งตามลำดับดังนี้

1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 (ตามเส้นทึบ) และ 1 3 5 2 7 4 9 6 8 1 (ตามเส้นประ)

จาก 2 วิธีที่จัดได้ จะเห็นว่า คนที่ 1 นั่งติดกับคนที่ 2 และคนที่ 9 ในครั้งแรก และคนที่ 1 นั่งติดกับคนที่ 3 และคนที่ 8 ในครั้งที่สอง ดังนั้น คนที่ 1 อาจนั่งติดกับคนที่ 4, 5, 6 หรือ 7 ได้อีก

ด้วยวิธีพิจารณาจากกราฟอีกเช่นกัน เราสามารถจัดได้อีก 2 วิธี ดังนี้ 1 5 7 3 9 2 8 4 6 1 และ 1 7 9 5 8 3 6 2 4 1

สรุปได้ว่า เมื่อมีคน n คน จำนวนวิธีที่จัดได้ตามเงื่อนไขที่กล่าวมาแล้วจะมีจำนวนเท่ากับ $\frac{(n-1)}{2}$ วิธี ถ้า n เป็นเลขคี่ และเท่ากับ $\frac{(n-2)}{2}$ วิธี ถ้า n เป็นเลขคู่

ปัญหาน่าคิด

ปัญหาที่ 1 บริษัทจัดหางานแห่งหนึ่งมีตำแหน่งงานว่างอยู่ 5 ตำแหน่ง และมีผู้สนใจสมัครเข้าทำงาน 4 คน คือ สมชาย สมคิด สมจิต และสมบูรณ์ โดยบุคคลทั้ง 4 มีความสามารถแตกต่างกันดังนี้

สมชาย มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3 และ 4

สมคิด มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3

สมจิต มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 1 และ 2

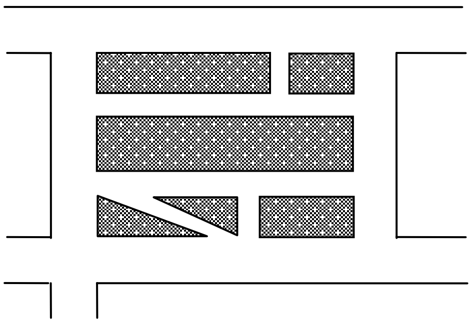
สมบูรณ์ มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 2 และ 5

จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่บุคคลทั้ง 4 คนจะได้เข้าทำงานในบริษัทแห่งนี้ทั้งหมด

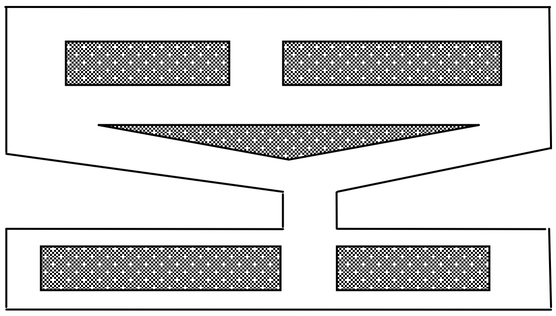
ปัญหาที่ 2 การแข่งขันปิงปองในกีฬาสีของโรงเรียน มีผู้สมัครแข่งขันทั้งหมด 5 คน โดยการแข่งขันเป็นแบบพบกันหมด จงจำลองสถานการณ์การแข่งขันปิงปองครั้งนี้ และจงหาว่าคณะกรรมการจัดการแข่งขันต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดจำนวนกี่คู่

ปัญหาที่ 3 วันโชคเป็นพ่อของวันชัย วันชัยเป็นน้าของรักดี ธงชัยเป็นพ่อของรักชาติ รักชาติเป็นสามีของวันดี วันดีมีน้องชายคนเดียวคือวันชัย จงพิจารณาว่า วันโชค ธงชัย รักชาติ เป็นอะไรกับรักดี

ปัญหาที่ 4 กำหนดแผนที่ถนนของเมืองสองเมืองดังรูป จงพิจารณาว่าเมืองทั้งสองเมืองนี้สามารถจัดการเดินรถให้เป็นระบบรถวิ่งทางเดียว (รถวิ่งสวนทางกันไม่ได้) โดยที่รถสามารถเดินทางจากแยกใดแยกหนึ่งบนถนนของเมืองนี้ไปยังแยกอื่นๆ ได้หรือไม่



รูป 3.1.19



รูป 3.1.20

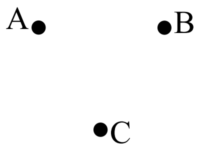
ตอนที่ 3.2 กราฟ (Graphs)

ในตอนที่ 3.1 เราได้รู้จักกับคำว่ากราฟ ซึ่งประกอบด้วยจุดและเส้น ในบทนี้จะเป็นการให้บทนิยามที่เป็นภาษาคณิตศาสตร์ของคำพื้นฐานต่างๆ เพื่อจะได้นำบทนิยามต่างๆ เหล่านี้ไปใช้ในการศึกษาและพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ ของทฤษฎีกราฟ นอกจากนี้ยังจะได้กล่าวถึงการนำกราฟไปใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ อีกด้วย

บทนิยามของกราฟ

แต่ก่อนที่จะกล่าวถึงบทนิยามต่างๆ นั้น เรามาลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.1 ถ้ากำหนดจุด 3 จุด คือ จุด A, B และ C ท่านคิดว่าท่านจะสามารถลากเส้นเชื่อมจุดทั้ง 3 นี้ได้กี่แบบ โดยสามารถใช้เส้นกี่เส้น (อาจเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง) ก็ได้

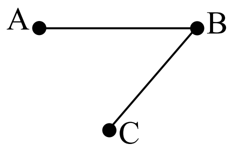


รูป 3.2.1

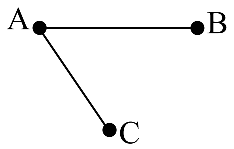
<u>วิธีทำ</u>

เมื่อลองลากเส้นเชื่อมจุดทั้ง 3 จุดนี้แล้ว ท่านจะได้กราฟรูปต่างๆ มากมาย ท่านคิดว่ากราฟน่าจะประกอบด้วยอะไรบ้าง และลองให้บทนิยามของ “กราฟ” ในแง่คณิตศาสตร์

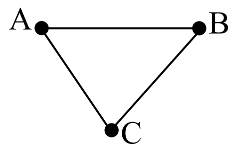
จากตัวอย่าง 3.2.1 จะได้ว่าเราสามารถลากเส้นเชื่อมจุดทั้ง 3 จุดได้มากมาย เช่น



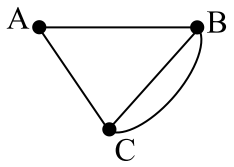
รูปที่ 1



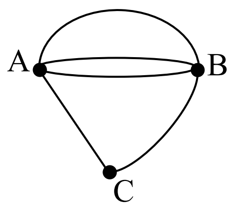
รูปที่ 2



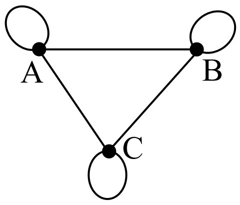
รูปที่ 3



รูปที่ 4



รูปที่ 5



รูปที่ 6

นี่เป็นเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น เรายังสามารถลากเส้นเชื่อมจุดทั้ง 3 จุดได้อีกมากมายหลายแบบ

จากรูป จะสังเกตเห็นว่า

1. ทุกรูปประกอบด้วยจุด 3 จุด คือ $A,\ B,\ C$ ดังนั้นเราจึงมี เซตของจุด
2. ทุกรูปประกอบด้วยเส้นเชื่อมระหว่างจุด และในแต่ละรูปจะเห็นว่ามีจำนวนเส้นไม่เท่ากัน ดังนั้นจะเห็นว่ากราฟในแต่ละรูปนอกจากจะบอกจำนวนจุดแล้ว จำเป็นต้องบอกจำนวนเส้นด้วย นั่นคือเรามีเซตของเส้น
3. จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 จะสังเกตเห็นว่ามีเส้นจำนวน 2 เส้นเท่ากัน แต่เส้นแต่ละเส้นนั้นมีการเชื่อมระหว่างจุดแตกต่างกัน คือ ในรูปที่ 1 มีเส้นเชื่อมจุด $A-B$ และ $B-C$ แต่รูปที่ 2 มีเส้นเชื่อมจุด $A-B$ และ $A-C$
4. รูปที่ 5 มีเส้นเชื่อมจุด $A-B$ จำนวน 3 เส้น

ดังนั้น การให้นิยามของคำว่ากราฟนั้น นอกจากจะต้องบอกจำนวนจุด และจำนวนเส้นแล้ว ยังจะต้องบอกความสัมพันธ์ระหว่างจุดและเส้นเพื่อแสดงเส้นเชื่อมด้วย ◈

นั่นคือจากตัวอย่าง 3.2.1 ที่กล่าวมา จะเห็นว่ารูปทั้ง 6 รูปนี้ประกอบไปด้วยเซตของจุด,เซตของเส้น และความสัมพันธ์ของจุดและเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดใดๆ ซึ่งเราเรียกรูปที่ประกอบด้วยจุดและเส้นเช่นนี้ว่า **กราฟ**

บทนิยาม 3.2.1 กราฟ คือ สิ่งทั้งสามที่เป็นอันดับ (V, E, φ) ใดๆ โดยที่ V, E เป็นเซตต่างสมาชิก (Disjoint Sets) และ φ เป็นฟังก์ชันจาก E ไปยังเซตของเซตย่อยของ V ซึ่ง $|\varphi(i)| = 1$ หรือ 2 สำหรับทุก ๆ $i \in E$

เราเรียก สมาชิกของ V ว่า **จุด** (Vertices)

เรียก สมาชิกของ E ว่า **เส้น** (Edges)

เรียก ฟังก์ชัน φ ว่า **ฟังก์ชันตกกระทบ** (Incidence Function)

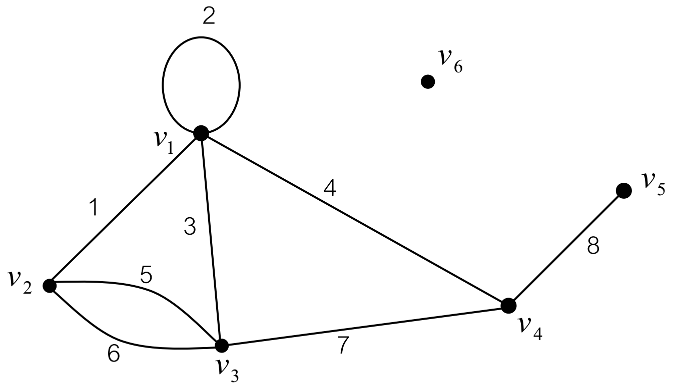
ถ้า $\varphi(i) = \{u, v\}$ เราจะกล่าวว่า u และ v เป็น **จุดปลาย** (End Point) ของเส้น i และจะกล่าวว่า i เป็น **เส้นเชื่อม** (Link) ระหว่างจุด u กับ v

ถ้า $|\varphi(i)| = 1$ เราเรียก i ว่า **วงวน** (Loop)

ถ้า $\varphi(i_1) = \varphi(i_2) = \varphi(i_3) = \ldots = \varphi(i_n)$, $n \geq 2$ เราจะกล่าวว่า $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ เป็น **เส้นหลายชั้น** (Multiple Edges)

<u>**หมายเหตุ**</u> เพื่อความสะดวกในบางครั้งจะเขียนกราฟ G แทนกราฟ $G = (V, E, \varphi)$

ตัวอย่าง 3.2.2



รูป 3.2.2

จากรูป จงหา V, E, φ ที่ทำให้ (V, E, φ) เป็นกราฟ และจงหาวงวน และ เส้นหลายชั้น ถ้ามี

<u>วิธีทำ</u>

จากรูปในตัวอย่าง 3.2.2 จะได้ว่า

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

ให้ $\varphi : E \rightarrow$ เซตของเซตย่อยของ V โดยที่

$\varphi(1) = \{v_1, v_2\}$, $\varphi(2) = \{v_1\}$, $\varphi(3) = \{v_1, v_3\}$, $\varphi(4) = \{v_1, v_4\}$, $\varphi(5) = \{v_2, v_3\}$, $\varphi(6) = \{v_2, v_3\}$, $\varphi(7) = \{v_3, v_4\}$, $\varphi(8) = \{v_4, v_5\}$

จะเห็นว่า $|\varphi(1)| = |\varphi(3)| = |\varphi(4)| = |\varphi(5)| = |\varphi(6)| = |\varphi(7)| = |\varphi(8)| = 2$

และ $|\varphi(2)| = 1$

2 คือ วงวน เพราะ $|\varphi(2)| = 1$

5 และ 6 คือ เส้นหลายชั้น เพราะ $\varphi(5) = \varphi(6)$ ◈

ตัวอย่าง 3.2.3 กำหนดให้ V, E, φ ดังนี้

$$V = \{a, b, c, d, e\}, \quad E = \{1, 2, 3, 4\}$$

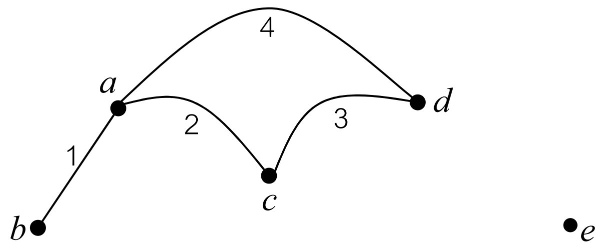
$\varphi : E \longrightarrow$ เซตของเซตย่อยของ V โดยที่

$$\varphi(1) = \{a, b\}, \ \varphi(2) = \{a, c\}, \ \varphi(3) = \{c, d\}, \ \varphi(4) = \{a, d\}$$

จงเขียน $G = (V, E, \varphi)$ ซึ่งสอดคล้องกับสิ่งที่กำหนดให้

<u>**วิธีทำ**</u>

จากสิ่งที่กำหนดให้ เราสามารถเขียนแผนภาพได้ ดังรูป 3.2.3



รูป 3.2.3

จะเห็นว่า กราฟ G ที่ได้เป็นกราฟที่ไม่มีวงวน และไม่มีเส้นหลายชั้น ◈

กราฟ G ที่ไม่มีวงวน และไม่มีเส้นหลายชั้น ดังเช่นตัวอย่าง 3.2.3 นี้ เราจะเรียกว่า **กราฟเชิงเดียว (Simple Graph)**

ตัวอย่าง 3.2.4 1.) กำหนดกราฟ $G=(V,E,\varphi)$ ซึ่ง $V=\{a\}$, $E=\phi$
จงเขียน $G=(V,E,\varphi)$ ซึ่งสอดคล้องกับสิ่งที่กำหนดให้

<u>วิธีทำ</u>

2.) ถ้ากำหนดกราฟ $G=(V,E,\varphi)$ ซึ่ง $V=\{a,\ b,\ c\}$ โดยที่ $E=\phi$ จงเขียน $G=(V,E,\varphi)$ ซึ่งสอดคล้องกับสิ่งที่กำหนดให้

<u>วิธีทำ</u>

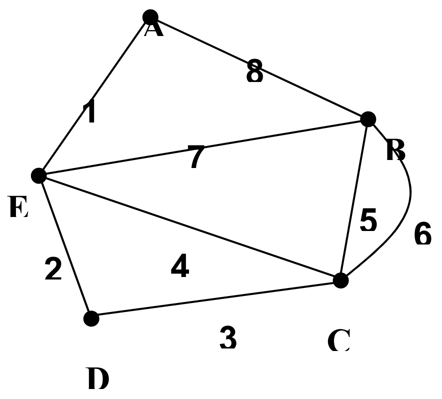
บทนิยาม 3.2.2 ให้ $G = (V, E, \varphi)$ เป็นกราฟ

แนวเดิน (Walk) ใน G หมายถึง ลำดับจำกัด $W = v_0\, i_1\, v_1\, i_2\, v_2 \ldots i_n\, v_n$ ใดๆ ซึ่ง $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n \in E$ และ $\varphi(i_k) = \{v_{k-1}, v_k\}$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

บทนิยาม 3.2.3 ถ้า $W = v_0\, i_1\, v_1\, i_2\, v_2 \ldots i_n\, v_n$ เป็นแนวเดินใน G แล้ว เราจะกล่าวว่า n เป็น **ความยาว** (Length) ของ W

หรืออาจกล่าวอย่างง่ายๆว่า **แนวเดิน** ก็คือ ลำดับจำกัดของจุดกับเส้นสลับกัน โดยเริ่มต้นด้วยจุดและจบลงด้วยจุด แต่ละจุดปลายของเส้นในลำดับต้องปรากฏเป็นพจน์ที่มาก่อนและตามหลังเส้นนั้น เช่น ถ้าแนวเดิน W เริ่มต้นที่จุด v_0 และจบลงที่จุด v_n เราเรียกจุด v_0 ว่าจุดเริ่มต้น และเรียกจุด v_n ว่าจุดปลาย โดยที่จุด v_0 และ v_n อาจเป็นจุดเดียวกันก็ได้ และเรียกจำนวนเส้นในแนวเดิน $v_0 - v_n$ ว่าความยาวของแนวเดิน $v_0 - v_n$

ตัวอย่าง 3.2.5 ถ้า G มีกราฟ ดังรูป 3.2.4



รูป 3.2.4

จากกราฟรูป 3.2.4 จะได้ว่า

A 8 B	เป็นแนวเดินจาก A ถึง B ซึ่งมีความยาวเป็น 1
A 1 E 7 B	เป็นแนวเดินจาก.......ถึง....... ซึ่งมีความยาวเป็น.......
A 1 E 7 B 5 C 6 B 8 A	เป็นแนวเดินจาก.......ถึง....... ซึ่งมีความยาวเป็น.......
E 2 D 3 C 4 E	เป็นแนวเดินจาก.......ถึง....... ซึ่งมีความยาวเป็น.......

C 3 D 3 C 5 B 8 A　　เป็นแนวเดินจาก.......ถึง.......　ซึ่งมีความยาวเป็น.......

A 1 E 3 C　　ไม่เป็นแนวเดินจาก A ถึง C

จากกราฟรูป 3.2.4 จะได้ว่า

A 8 B　　เป็นแนวเดินจาก A ถึง B ซึ่งมีความยาวเป็น 1

A 1 E 7 B　　เป็นแนวเดินจาก A ถึง B ซึ่งมีความยาวเป็น 2

A 1 E 7 B 5 C 6 B 8 A　　เป็นแนวเดินจาก A ถึง A ซึ่งมีความยาวเป็น 5

E 2 D 3 C 4 E　　เป็นแนวเดินจาก E ถึง E ซึ่งมีความยาวเป็น 3

C 3 D 3 C 5 B 8 A　　เป็นแนวเดินจาก C ถึง A ซึ่งมีความยาวเป็น 4 ◈

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกจะเขียน A 8 B แทนลำดับ A, 8, B ซึ่งเป็นแนวเดินอันหนึ่งจาก A ถึง B

บทนิยาม 3.2.4 แนวเดินปิด (Closed Walk)

คือ แนวเดินที่มีจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายเป็นจุดเดียวกัน

แนวเดินเปิด (Open Walk)

คือ แนวเดินที่มีจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายไม่ใช่จุดเดียวกัน

เช่น จากกราฟรูป 3.2.4 ท่านคิดว่าแนวเดินที่กำหนดให้ เป็นแนวเดินเปิด หรือ แนวเดินปิด

A 8 B　　เป็นแนวเดิน……………………..

A 1 E 7 B 5 C 6 B 8 A　　เป็นแนวเดิน……………………..

C 3 D 3 C 5 B 8 A　　เป็นแนวเดิน……………………..

บทนิยาม 3.2.5 วิถี (Path) คือ แนวเดินที่มีเส้นไม่ซ้ำกันและมีจุดไม่ซ้ำกัน จะใช้สัญลักษณ์ P_n แทนวิถีที่มี n จุด

เช่น จากกราฟรูป 3.2.4 จะได้ว่า

A 8 B　　เป็นวิถีจาก .... ถึง ....

E 4 C 6 B 8 A　　เป็นวิถีจาก .... ถึง ....

A 1 E 7 B 5 C 6 B 8 A　　ไม่เป็นวิถีจาก .... ถึง ....

C 3 D 3 C 5 B 8 A　　ไม่เป็นวิถีจาก .... ถึง ....

เช่น จากกราฟรูป 3.2.4 จะได้ว่า

A 8 B	เป็นแนวเดินเปิด
A 1 E 7 B 5 C 6 B 8 A	เป็นแนวเดินปิด
C 3 D 3 C 5 B 8 A	เป็นแนวเดินเปิด ◈

และ

A 8 B	เป็นวิถีจาก A ถึง B
E 4 C 6 B 8 A	เป็นวิถีจาก E ถึง A
A 1 E 7 B 5 C 6 B 8 A	ไม่เป็นวิถีจาก A ถึง A เพราะใช้จุด A และ B ซ้ำ
C 3 D 3 C 5 B 8 A	ไม่เป็นวิถีจาก C ถึง A เพราะใช้จุด C ซ้ำ และเส้น 3 ซ้ำ ◈

บทนิยาม 3.2.6 วัฏจักร (Cycle) คือ แนวเดินที่มีเส้นไม่ซ้ำกันและมีจุดไม่ซ้ำกัน ยกเว้นจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายซ้ำกัน และจะใช้สัญลักษณ์ C_n แทนวัฏจักรที่มี n จุด

เช่น จากกราฟรูป 3.2.4 จะได้ว่า

A 1 E 4 C 5 B 8 A	เป็นวัฏจักร
B 6 C 5 B	เป็นวัฏจักร ◈

จากรูป 3.2.4 จงหาวัฏจักรที่มี 3 จุด มาทั้งหมด

....

....

....

....

....

จากรูป 3.2.4 จงหาวัฏจักร ทั้งหมด

....

....

....

....

....

....

บทนิยาม 3.2.7 **ทัวร์** (Tour) คือ แนวเดินปิดซึ่งใช้เส้นของกราฟครบทุกเส้น และอาจจะใช้เส้นซ้ำได้
ออยเลอร์ทัวร์ (Euler Tour) คือ ทัวร์ที่ใช้เส้นไม่ซ้ำ

เช่น จากกราฟรูป 3.2.4 จะได้ว่า

A 1 E 7 B 8 A 1 E 2 D 3 C 6 B 5 C 4 E 1 A เป็นทัวร์ แต่ไม่เป็นออยเลอร์ทัวร์
A 1 E 2 D 3 C 4 E 7 B 5 C 6 B 8 A เป็นทัวร์และเป็นออยเลอร์ทัวร์
C 4 E 7 B 8 A 1 E 2 D 3 C 6 B 5 C เป็นทัวร์และเป็นออยเลอร์ทัวร์ ◈

จากรูป 3.2.4 จงหาออยเลอร์ทัวร์ที่มีจุดเริ่มต้น คือ

1.) จุด A

....
....
....

2.) จุด B

....
....
....

3.) จุด C

....
....
....

4.) จุด D

....
....
....

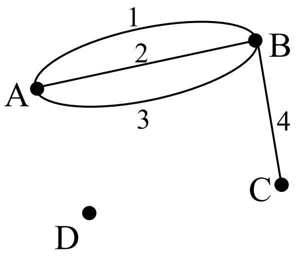
5.) จุด E

....
....
....

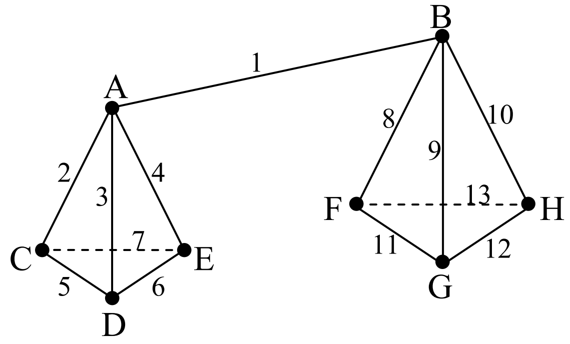
<u>**คำสั่ง**</u> ท่านจงสรุปเงื่อนไขของการที่กราฟมีออยเลอร์ทัวร์

แบบฝึกปฏิบัติ 4

1. กำหนดแผนภาพดังรูป



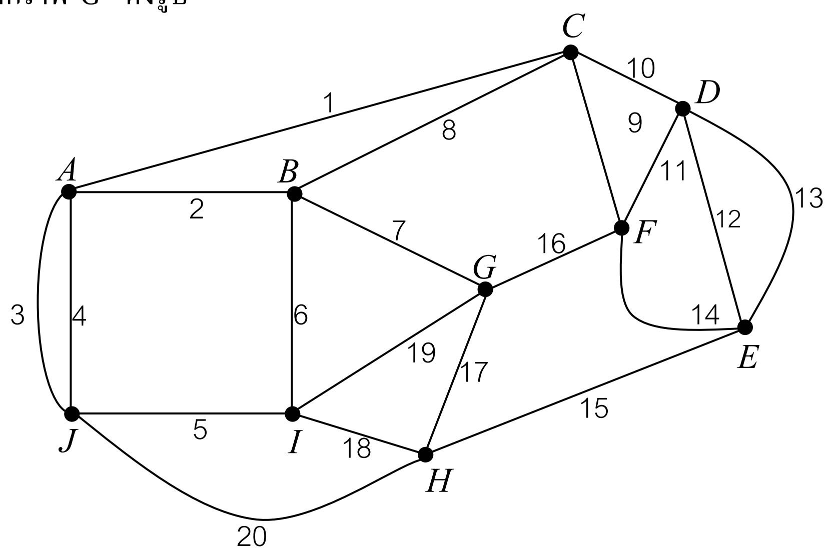
กราฟ G_1



กราฟ G_2

จากรูป จงหา V, E, φ ที่ทำให้ (V, E, φ) เป็นกราฟ และมีรูปกราฟตามแผนภาพที่กำหนดให้

2. กำหนดกราฟ G ดังรูป



กราฟ G

จงหา

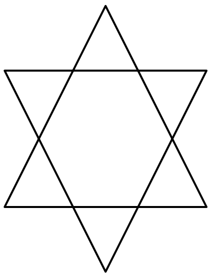
1.) แนวเดินจาก A ถึง J ซึ่งมีความยาวเป็น 15

2.) วิถีจาก A ถึง J และบอกความยาวของวิถีด้วย

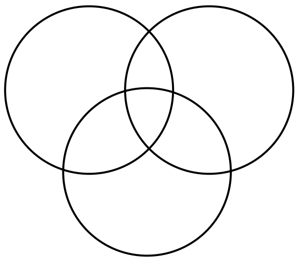
3.) วัฏจักรที่มีความยาวของวัฏจักรเป็น 10

4.) กราฟที่กำหนดให้ มีออยเลอร์ทัวร์หรือไม่ ถ้ามีจงหาออยเลอร์ทัวร์

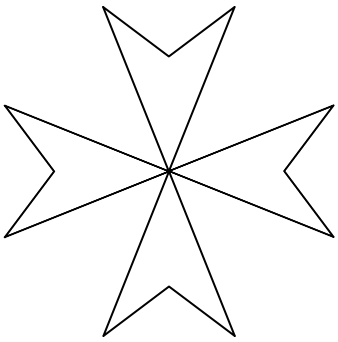
3. จงพิจารณาว่า กราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีออยเลอร์ทัวร์หรือไม่ ถ้ามีให้ออยเลอร์ทัวร์โดยให้ท่านกำหนดชื่อจุดตามใจชอบ



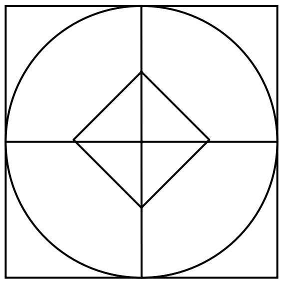
รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3



รูปที่ 4

ตอนที่ 3.3 กราฟกับการแก้ปัญหา

3.3.1 การระบายสี

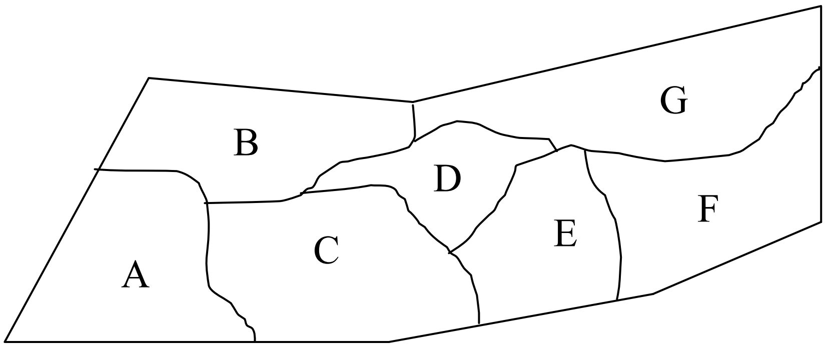
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียง 4 สี การระบายสีจุดของกราฟ โดยให้จุดที่อยู่ประชิดกันมีสีต่างกันและการระบายสีเส้นของกราฟ โดยให้เส้นที่ประชิดกันมีสีต่างกัน ตลอดจนนำความรู้ทั้ง 2 เรื่องนี้ไปประยุกต์ในการจัดตารางการทำงานต่างๆ เช่น ตารางการเรียนการสอน เป็นต้น

การระบายสีจุดของกราฟ (Vertex – Colouring)

หากเรามีกราฟ G ที่มี n จุด และถ้าต้องการระบายสีจุดของกราฟ โดยให้จุดที่ประชิดกันมีสีต่างกันแล้ว ก็จะเกิดปัญหาว่าจะต้องระบายสีอย่างไร และต้องใช้สีกี่สี

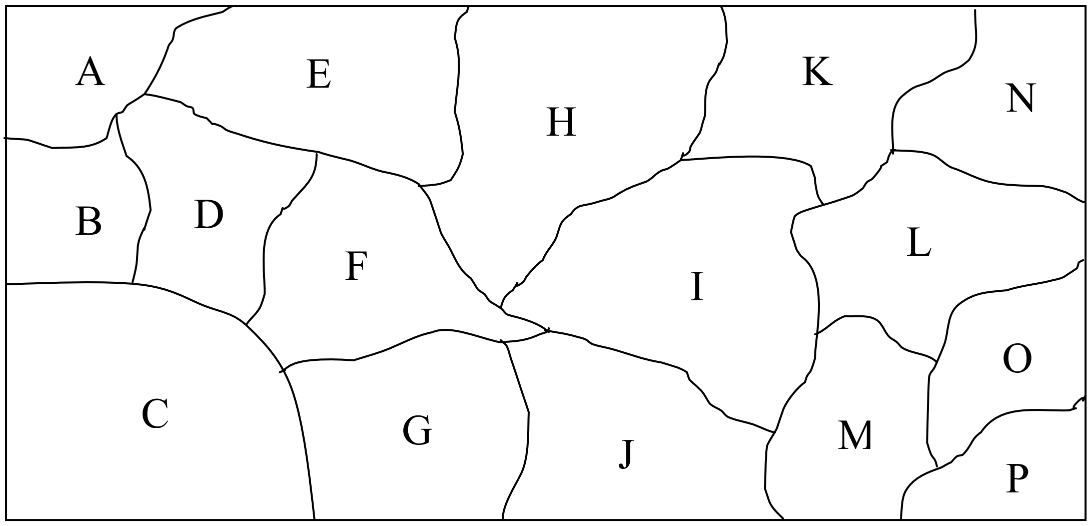
<u>ปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียง 4 สี</u> (The Four Color Problem)

จากแผนที่ดังรูป 3.3.1, รูป 3.3.2 และรูป 3.3.3 ให้ท่านระบายสีแผนที่ของประเทศต่างๆ โดย A, B, C, … , P แทนประเทศ และให้ใช้สีน้อยที่สุดโดยที่สีของแต่ละประเทศที่อยู่ติดกันมีสีต่างกัน



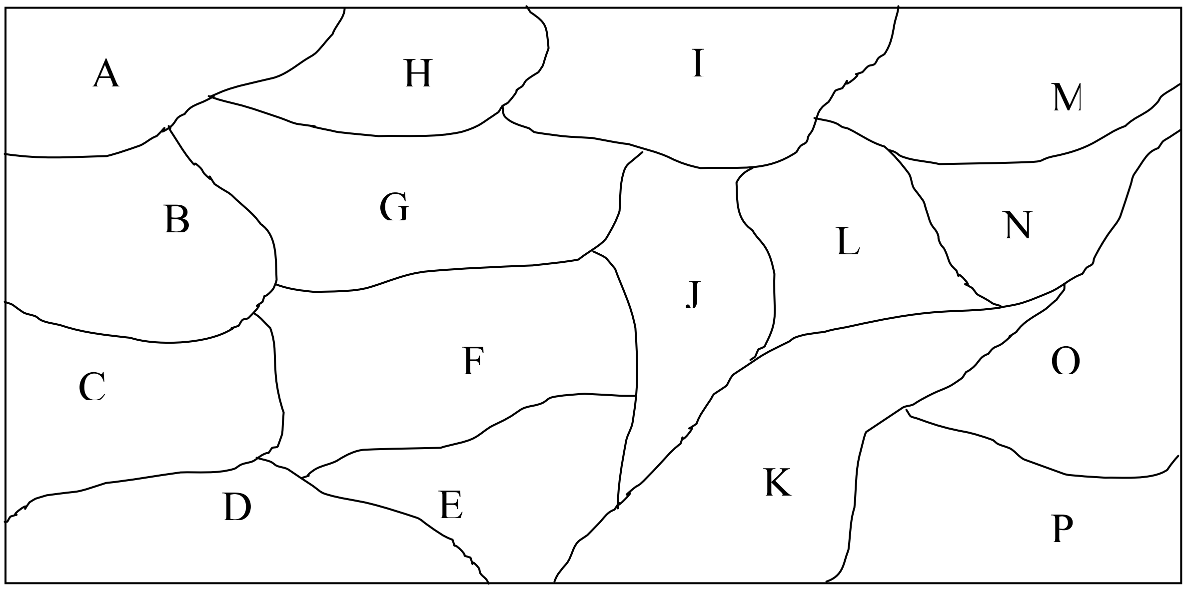
รูป 3.3.1

ท่านคิดว่าจะใช้สีอย่างน้อยที่สุดกี่สี ....



รูป 3.3.2

ท่านคิดว่าจะใช้สีอย่างน้อยที่สุดกี่สี..



รูป 3.3.3

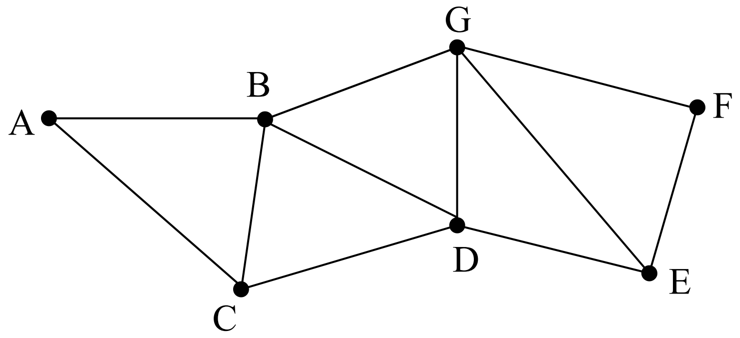
ท่านคิดว่าจะใช้สีอย่างน้อยที่สุดกี่สี..

จากแผนที่เราสามารถแทนแผนที่ให้อยู่ในรูปกราฟได้ โดยการแทนจุดแทนประเทศ เส้นแทนประเทศที่อยู่ติดกัน

จากรูป 3.3.1

วิธีทำ

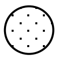
จากแผนที่เราสามารถแทนแผนที่ให้อยู่ในรูปกราฟได้ โดยการแทนจุดแทนประเทศ เส้นแทนประเทศที่อยู่ติดกัน ดังรูป 3.3.4

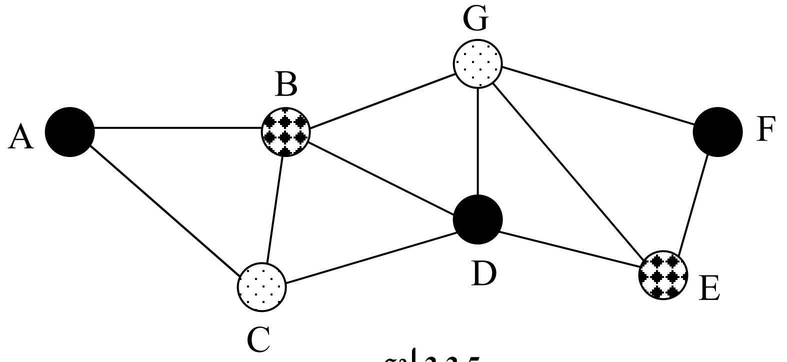


รูป 3.3.4

เมื่อระบายสีลงไปที่แต่ละจุด

โดยกำหนดให้  แทนสีแดง  แทนสีน้ำเงิน

 แทนสีเขียว



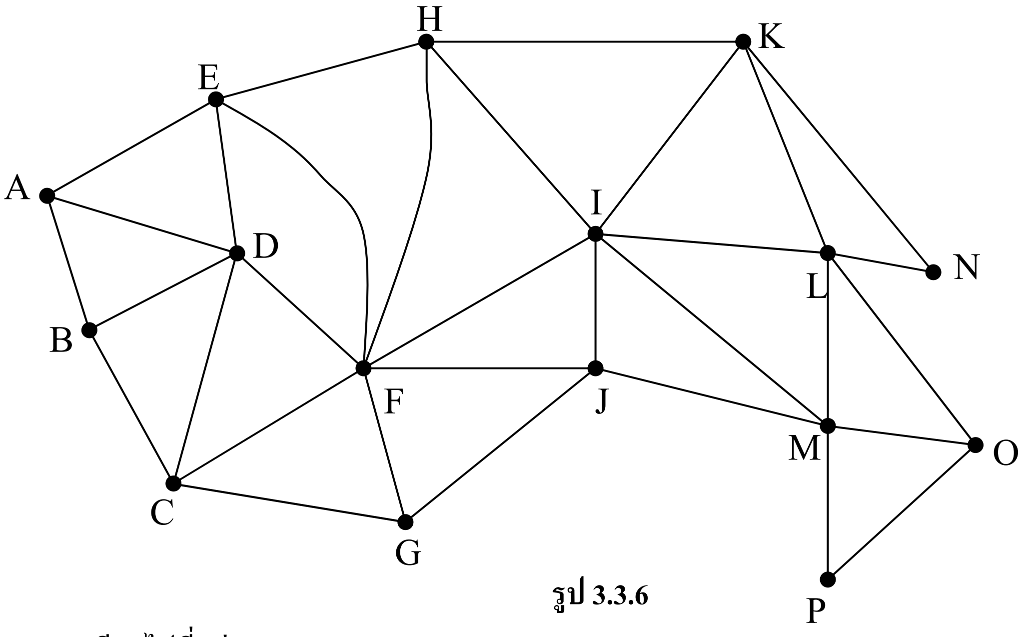
รูป 3.3.5

ดังนั้นเราสามารถใช้สีให้น้อยที่สุดได้ 3 สี

จากรูป 3.3.2

วิธีทำ

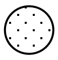
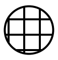
จากแผนที่เราสามารถแทนแผนที่ให้อยู่ในรูปกราฟได้ โดยการแทนจุดแทนประเทศ เส้นแทนประเทศที่อยู่ติดกัน ดังรูป 3.3.6

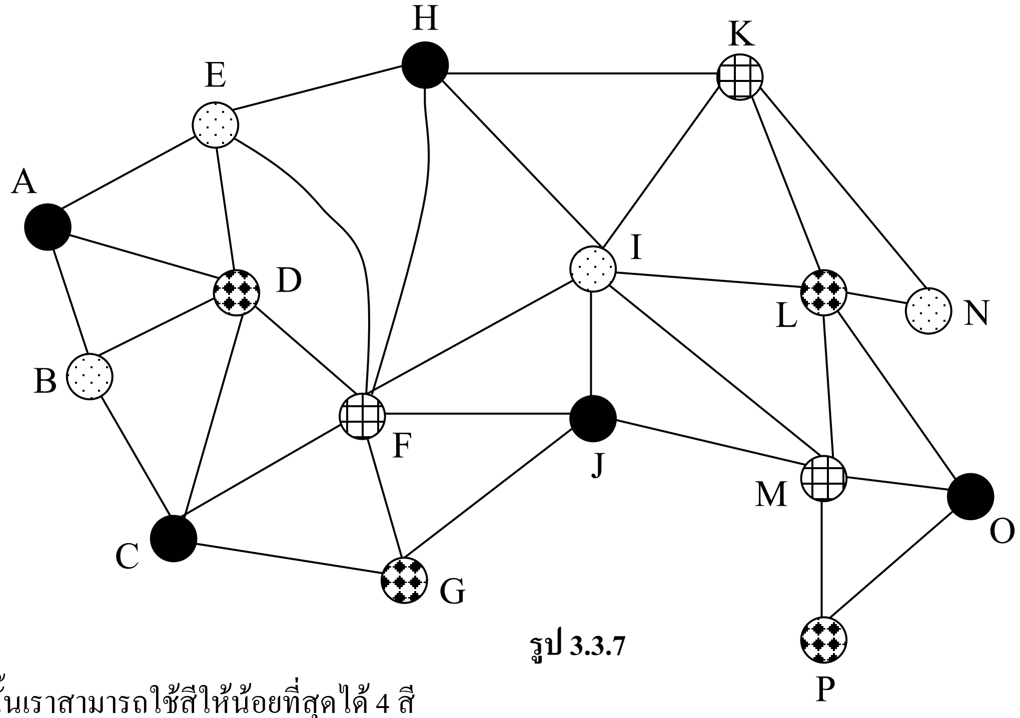


รูป 3.3.6

เมื่อระบายสีลงไปที่แต่ละจุด

โดยกำหนดให้  แทนสีแดง  แทนสีน้ำเงิน

 แทนสีเขียว  แทนสีเหลือง



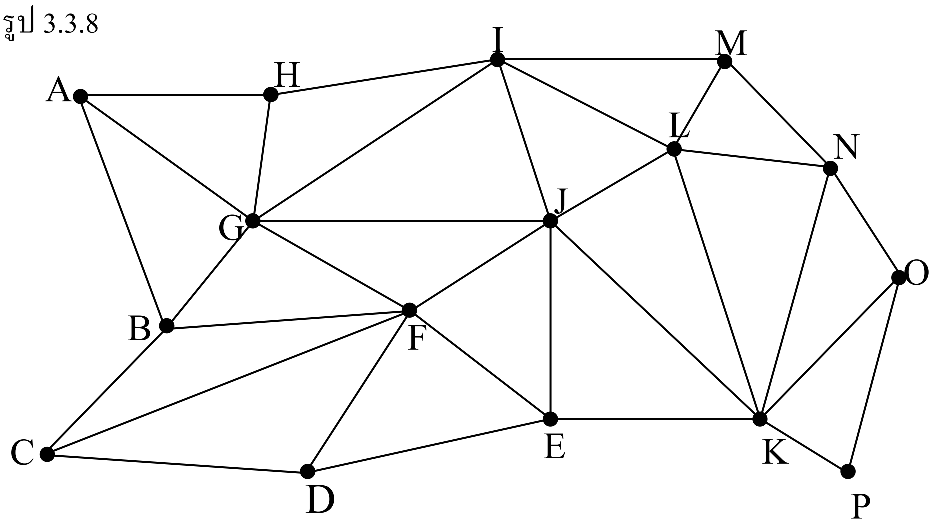
รูป 3.3.7

ดังนั้นเราสามารถใช้สีให้น้อยที่สุดได้ 4 สี

จากรูป 3.3.3

วิธีทำ

จากแผนที่เราสามารถ แทนแผนที่ให้อยู่ในรูปกราฟได้ โดยการแทนจุดแทนประเทศ เส้นแทนประเทศที่อยู่ติดกัน ดังรูป 3.3.8

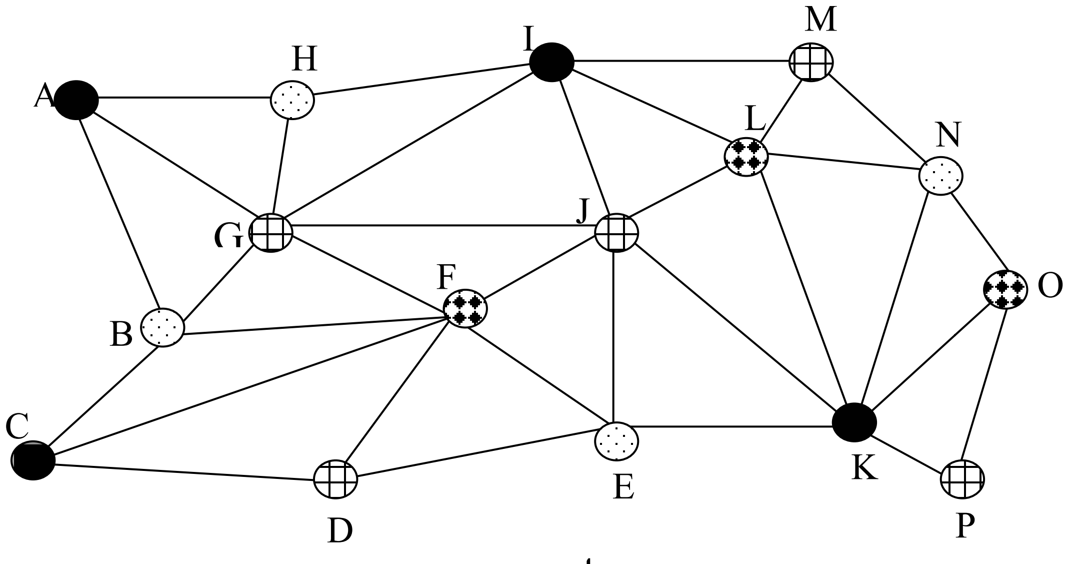


รูป 3.3.8

เมื่อระบายสีลงไปที่แต่ละจุด

โดยกำหนดให้ แทนสีแดง แทนสีน้ำเงิน

แทนสีเขียว แทนสีเหลือง



รูป 3.3.9

ดังนั้นเราสามารถใช้สีให้น้อยที่สุดได้ 4 สี

ถึงแม้ว่าจำนวนสีจะขึ้นอยู่กับจำนวนของประเทศและความสัมพันธ์ด้านภูมิศาสตร์ของแต่ละประเทศก็ตาม แต่กัธรี (Guthrie) ซึ่งเป็นนักทำแผนที่คิดว่าสามารถใช้สีเพียง 4 สี ระบายทุกๆแผนที่ตามเงื่อนไขได้ และนักคณิตศาสตร์หลายคนก็คิดว่าน่าจะใช้สีเพียง 4 สี

โมเบียส (Mobius ค.ศ. 1790-1868) ได้กล่าวถึงปัญหานี้เป็นครั้งแรกในชั่วโมงการสอนของเขาเมื่อ ค.ศ.1840 อีกประมาณ 10 ปีต่อมาคือ ประมาณ ค.ศ.1850 เดอร์มอแกน (De Morgan ค.ศ.1806-1871) ได้รับทราบปัญหานี้จากกัธรี เดอร์มอแกนได้พิจารณาปัญหานี้ร่วมกับเพื่อนนักคณิตศาสตร์ที่ประเทศอังกฤษ และได้กล่าวถึงปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียง 4 สีนี้อย่างจริงจัง

ในปี ค.ศ. 1879 เคมป์ (Kempe) ได้พิสูจน์ว่าสามารถใช้สีเพียง 4 สีระบายทุกๆแผนที่ตามเงื่อนไขได้ แต่ในปี ค.ศ. 1890 เฮียวูด (Heawood) พบว่า ที่เคมป์พิสูจน์ได้นั้นผิด และสามารถพิสูจน์ได้ถ้าแทน 4 สี ด้วย 5 สี ในที่สุดปี ค.ศ.1976 แอพเพล (Appel) และฮาเคน (Haken) สามารถพิสูจน์ได้โดยเขาได้แบ่งปัญหาออกเป็นเกือบ 2,000 กรณี ซึ่งเป็นการแบ่งตามจำนวนของการจัดเรียงประเทศในแผนที่และหาวิธีที่เป็นไปได้ของการระบายสีแผนที่จากการจัดเรียงหลายๆแบบนั้น โดยใช้คอมพิวเตอร์เข้าช่วย และหลังจากที่คอมพิวเตอร์ใช้เวลาคำนวณกว่า 1,200 ชั่วโมง แล้วเขาก็สรุปว่าใช้เพียง 4 สีพอ

ถึงแม้ว่าจะได้คำตอบของปัญหาการระบายสี โดยใช้เพียง 4 สีแล้วก็ตาม แต่ก็มีนักคณิตศาสตร์หลายคนที่ไม่พอใจในวิธีการพิสูจน์ ดังนั้น ปัญหาใหม่จึงเกิดขึ้นว่าจะมีการพิสูจน์แบบคณิตศาสตร์อย่างเดียวโดยไม่ใช่คอมพิวเตอร์เข้าช่วยได้หรือไม่ ซึ่งปัญหานี้ปัจจุบันยังไม่มีใครสามารถพิสูจน์ได้

ตัวอย่าง 3.3.1 สมมติว่าเราต้องการจัดเวลาให้กับวิชาต่างๆ และเราทราบว่ามีบางวิชาที่ไม่สามารถจะจัดในเวลาเดียวกันได้ เพราะอาจจะมีนักศึกษาที่ต้องการเรียนทั้งสองวิชา หรือสองวิชานั้นมีผู้สอนคนเดียวกัน ปัญหาคือ จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะจัดตารางสอนโดยมีเงื่อนไขดังกล่าว

ตัวอย่าง มีเวลาอยู่ 4 คาบ (เช่น คาบที่ 1 คือ จันทร์-พุธ-ศุกร์ เวลา 8.00-9.00น. คาบที่ 2 คือ จันทร์-พุธ-ศุกร์ เวลา 9.00-10.00น. คาบที่ 3 คือ จันทร์-พุธ-ศุกร์ เวลา 10.00-11.00น. คาบที่ 4 คือ จันทร์-พุธ-ศุกร์ เวลา 11.00-12.00น.) และต้องการจัดเวลาให้กับวิชา A, B, C, D, E และถ้ากำหนดให้วิชา 2 วิชา ที่ไม่สามารถจัดในเวลาเดียวกันได้มีดังต่อไปนี้ คือ A และ B, A และ C, A และ D, B และ E, B และ C, C และ D, C และ E, D และ E จงหาว่าจัดตารางสอนตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นได้หรือไม่ และถ้าได้ จงหาวิธีที่จะจัดตารางสอนนี้มา 1 แบบ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

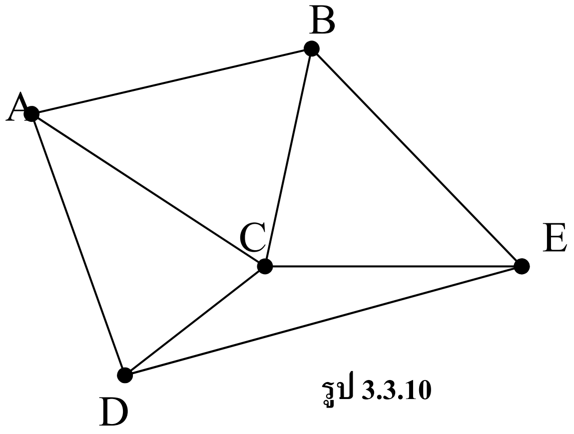
....

....

....

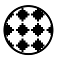
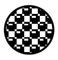
....

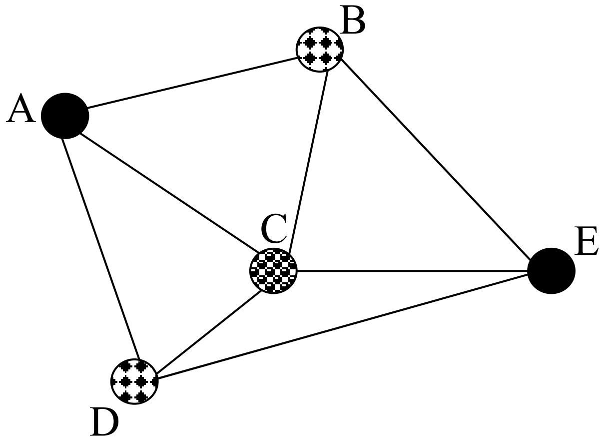
จากโจทย์เราสามารถนำมาสร้างกราฟได้โดยการให้ จุดแทน วิชา และลากเส้นเชื่อมระหว่างคู่ของจุดที่แทนวิชาที่ไม่สามารถจัดในเวลาเดียวกันได้ จะได้กราฟ G ดังรูป 3.3.10



รูป 3.3.10

จากกราฟ G จะได้เราสามารถระบายสีน้อยสุดได้ 3 สี
ดังนั้นจะต้องใช้จำนวนคาบน้อยสุดคือ 3 คาบ
เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ 4 คาบ ดังนั้นเราสามารถจัดตารางสอนตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นได้

ดังนั้นตารางสอนแบบหนึ่งสามารถจัดได้ดังนี้
ให้จุด (วิชา) ที่ระบายด้วยสี  มาอยู่ในคาบที่ 1
 มาอยู่ในคาบที่ 2
 มาอยู่ในคาบที่ 3



รูป 3.3.11

หรือจะได้ตารางสอนแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

คาบ	วิชา
1	วิชา A,E
2	วิชา B,D
3	วิชา C

ตัวอย่าง 3.3.2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง กำหนดให้มีการเปิดสอนวิชาต่างๆ สำหรับนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 7 วิชาดังนี้

- การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) ซึ่งจะแทนด้วยตัวอักษร N
- ทฤษฎีกลุ่ม (Group Theory) ซึ่งจะแทนด้วยอักษร G
- ทฤษฎีเซต (Set Theory) ซึ่งจะแทนด้วยอักษร S
- คณิตศาสตร์เชิงการจัดหมู่ (Combinatorial Mathematics) ซึ่งจะแทนด้วยอักษร C
- การวิเคราะห์จำนวนจริง (Real Analysis) ซึ่งจะแทนด้วยอักษร R
- ทฤษฎีจำนวน (Theory of Number) ซึ่งจะแทนด้วยอักษร T
- สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) ซึ่งจะแทนด้วยอักษร D

มีนักศึกษาที่คาดว่าจะลงวิชาต่างๆ ดังนี้

ธวัช	:	C,N,T	ทวีศักดิ์	:	S,N,C
ปราณี	:	R,D	นงนุช	:	R,T
สุนทร	:	G,S	จันทนา	:	G,R,D
ปรีดา	:	T,N,D	ภูษิต	:	S,T
สุดา	:	G,R	สมศักดิ์	:	N,R,C,T
ดวงตา	:	D,C	พจน์	:	D,G

จงหาว่า ในการจัดตารางสอนให้นักศึกษาทุกคนลงทะเบียนตามที่ต้องการได้จะต้องใช้จำนวนคาบน้อยสุดเท่าไร ถ้าผู้สอนไม่มีปัญหาในการสอน

....

....

....

....

....

....

....

....

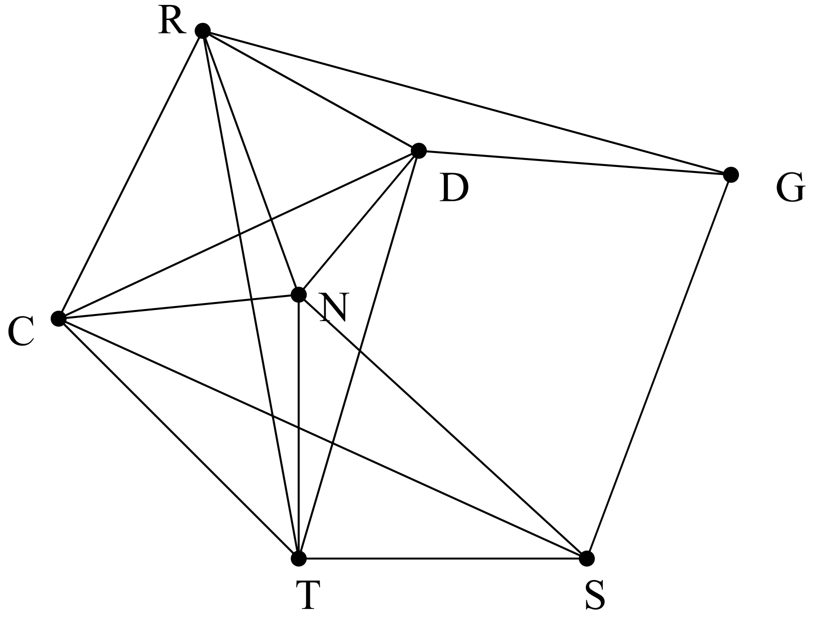
....

....

....

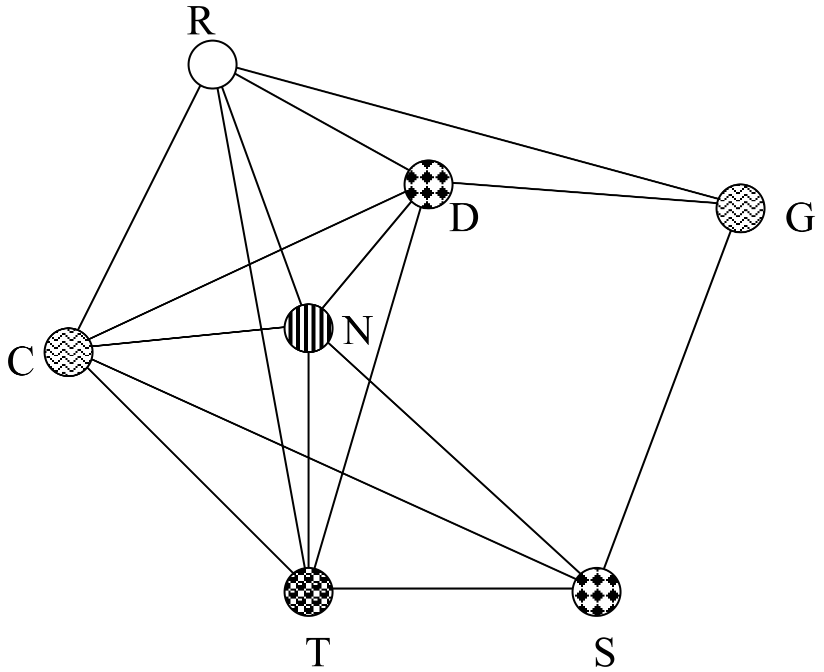
....

จากโจทย์เราสามารถนำมาสร้างกราฟได้โดยการให้ จุดแทนวิชา และลากเส้นเชื่อมระหว่างคู่ของจุดที่แทนวิชาที่ไม่สามารถจัดในเวลาเดียวกันได้ จะได้กราฟ G ดังรูป 3.3.12



รูป 3.3.12

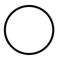
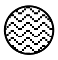
จากกราฟ G เราสามารถระบายสีน้อยสุดได้ 5 สี

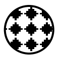


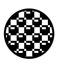
รูป 3.3.13

ดังนั้นจะต้องใช้จำนวนคาบน้อยสุดคือ 5 คาบ

ดังนั้นตารางสอนแบบหนึ่งสามารถจัดได้ดังนี้

ให้จุด (วิชา) ที่ระบายด้วยสี  มาอยู่ในคาบที่ 1  มาอยู่ในคาบที่ 4

 มาอยู่ในคาบที่ 2  มาอยู่ในคาบที่ 5

 มาอยู่ในคาบที่ 3

หรือจะได้ตารางสอนแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

คาบ	วิชา
1	วิชา R
2	วิชา D และ S
3	วิชา T
4	วิชา C และ G
5	วิชา N

แบบฝึกปฏิบัติ 5

1. ภาควิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง กำหนดให้มีการสอนวิชาต่างๆ สำหรับนักศึกษาวิชาเอก จำนวน 7 วิชา คือ วิชา A, B, C, D, E, F, G โดยจะมีนักศึกษาลงทะเบียนเรียนวิชาต่างๆดังนี้

แดง	: A, B, C	ตาล	: A, C, F
นุช	: D, E	ปราง	: B, E
อ้อย	: F, G	ส้ม	: D, E, G
ปลา	: A, B, D	รส	: B, F
สุดา	: E, G	นัท	: A, C, E
แก้ว	: C, D	นก	: D, G

1.1) จงหาว่าในการจัดตารางสอนให้นักศึกษาทุกคนลงทะเบียนตามที่ต้องการได้ จะต้องใช้จำนวนผู้สอนน้อยสุดเท่าไร ถ้าผู้สอนไม่มีปัญหาในการสอน

1.2) ให้นำผลจากข้อ 1.1 มาจัดตารางสอน 1 แบบ

3.3.2 การจับคู่ (Matching) และการจับคู่ที่เหมาะสมที่สุด (Optimal Matchings)

พิจารณาปัญหาต่างๆ ดังนี้

1. ปัญหาการจัดคนเข้าทำงาน (The Personal Assignment Problem)

ถ้าโรงเรียนแห่งหนึ่งมีครูอยู่ 4 คน ได้แก่ ครูสมศรี ครูธงไชย ครูสมชาย และ ครูสมหญิง และมีวิชาที่ต้องสอนให้กับนักเรียนอยู่ 4 วิชา ได้แก่ วิชาคณิตศาสตร์ วิชาฟิสิกส์ วิชาสังคม วิชาชีววิทยา โดยที่ครูแต่ละคนมีความสามารถสอนวิชาดังนี้

ครูสมศรี สามารถสอนวิชาคณิตศาสตร์และวิชาฟิสิกส์

ครูธงไชย สามารถสอนวิชาสังคม

ครูสมชาย สามารถสอนวิชาคณิตศาสตร์และวิชาชีววิทยา

ครูสมหญิง สามารถสอนวิชาฟิสิกส์และวิชาสังคม

ท่านคิดว่าจะจัดครูทั้งสี่ให้สอนวิชาตามที่ถนัดได้หรือไม่ ถ้าได้ควรจัดอย่างไร

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

จากปัญหา เราจะเห็นว่าเราสามารถจัดครูทั้งสี่ให้สอนวิชาตามที่ถนัดได้ โดยที่เราจะแทนครูทั้ง 4 เป็น m_1 , m_2 , m_3 และ m_4 ดังนี้

m_1 แทนครูสมศรี

m_2 แทนครูธงไชย

m_3 แทนครูสมชาย

m_4 แทนครูสมหญิง

สำหรับวิชาทั้งสี่เราจะแทนด้วย w_1 , w_2 , w_3 และ w_4 ดังนี้

w_1 แทนวิชาคณิตศาสตร์

w_2 แทนวิชาฟิสิกส์

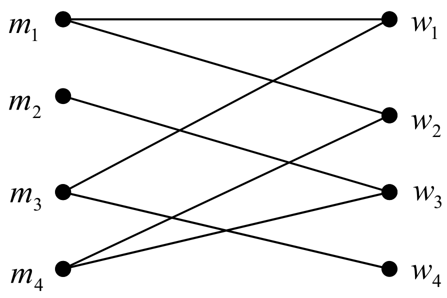
w_3 แทนวิชาสังคม

w_4 แทนวิชาชีววิทยา

นำข้อมูลที่ได้มาเขียนดังนี้

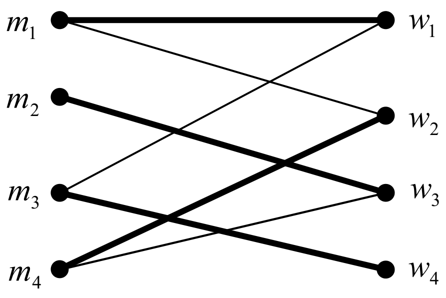
ครู	วิชา
m_1	w_1 , w_2
m_2	w_3
m_3	w_1 , w_4
m_4	w_2 , w_3

และให้จุดแทนคนและวิชา แล้วลากเส้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคนกับวิชาจะได้ดังรูป 3.3.14



รูป 3.3.14

เราจะเห็นว่า คำตอบชุดหนึ่งที่ได้แทนด้วยเส้นทึบในรูป



รูป 3.3.15

ซึ่งก็คือ ครูสมศรี สอนวิชาคณิตศาสตร์
ครูธงไชย สอนวิชาสังคม
ครูสมชาย สอนวิชาชีววิทยา
ครูสมหญิง สอนวิชาฟิสิกส์

ดังนั้นปัญหาข้างต้นจะเป็นปัญหาเกี่ยวกับการจัดคนเข้าทำงานโดยถ้ามีคนอยู่ m คน สมมติเป็น $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ และมีงานอยู่ n สมมติว่าเป็น $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ ต้องการให้คนแต่ละคนได้ทำงานคนละอย่างน้อย 1 อย่าง ซึ่งจะมีคำถามว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะจัดคนให้ทำงานทุกคน โดยที่แต่ละคนได้ทำงานคนละอย่างตามที่ถนัด ◈

2. ปัญหาการนัดพบ (The Date Problem)

ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่งมีผู้ชาย 4 คน ได้แก่ แดน โก้ ชาย ตั้ม และผู้หญิง 4 คน ได้แก่ เมย์ พรรณ พร สุ โดยที่ผู้ชายแต่ละคนรู้จักผู้หญิงดังนี้

แดน รู้จักกับ เมย์ พร
โก้ รู้จักกับ พรรณ สุ
ชาย รู้จักกับ เมย์ พรรณ
ตั้ม รู้จักกับ พร สุ

ท่านคิดว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่ผู้ชายทั้งหมดจะจับคู่เพื่อไปเต้นรำโดยให้ผู้ชายแต่ละคนเต้นรำกับผู้หญิงที่ตนรู้จัก ถ้าได้ควรจัดอย่างไร

....

....

....

....

จากปัญหานี้เราสามารถแก้ปัญหาได้ในทำนองเดียวกันกับปัญหาการจัดคนเข้าทำงานซึ่งก็คือ ให้ผู้ชายแต่ละคนแทนด้วย b_1 , b_2 , b_3 และ b_4 ดังนี้

แดน แทนเป็น b_1
โก้ แทนเป็น b_2
ชาย แทนเป็น b_3
ตั้ม แทนเป็น b_4

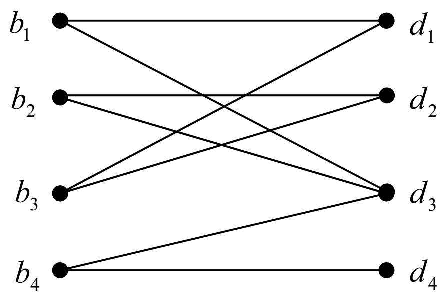
ส่วนผู้หญิงแต่ละคนแทนด้วย d_1 , d_2 , d_3 และ d_4 ดังนี้

เมย์ แทนเป็น d_1
พรรณ แทนเป็น d_2
พร แทนเป็น d_3
สุ แทนเป็น d_4

นำข้อมูลที่ได้มาเขียนดังนี้

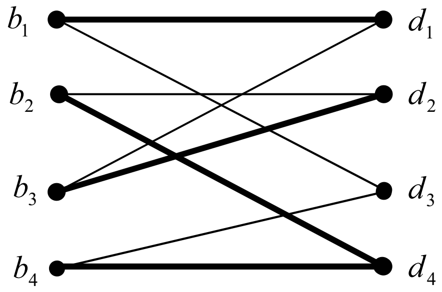
ผู้ชาย	ผู้หญิง
b_1	d_1 , d_3
b_2	d_2 , d_4
b_3	d_1 , d_2
b_4	d_3 , d_4

และให้จุดแทนผู้ชายและผู้หญิง แล้วลากเส้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่างผู้ชายกับผู้หญิงจะได้ดังรูป 3.3.16



รูป 3.3.16

เราจะเห็นว่า คำตอบชุดหนึ่งที่ได้แทนด้วยเส้นทึบในรูป 3.3.17



รูป 3.3.17

ซึ่งก็คือ แดน เต้นรำกับ เมย์
โก้ เต้นรำกับ สุ
ชาย เต้นรำกับ พรรณ
ตั้ม เต้นรำกับ พร ◈

<u>หมายเหตุ</u> คำตอบของปัญหานี้ อาจมีหลายชุด เช่น
แดน เต้นรำกับ พร
โก้ เต้นรำกับ พรรณ
ชาย เต้นรำกับ เมย์
ตั้ม เต้นรำกับ สุ

แบบฝึกปฏิบัติ 6

1. บริษัทแห่งหนึ่งมีงาน 10 อย่าง ให้พนักงาน 10 คนทำ สมมติว่า พนักงานคือ ก ข ค ง จ ฉ ช ซ ฌ ญ และงานคือ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

ตารางต่อไปนี้เป็นการแสดงว่า พนักงานแต่ละคนทำงานใดได้บ้าง

งาน / พนักงาน	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ก					✓				✓	
ข		✓		✓			✓			
ค		✓				✓		✓		
ง			✓				✓			
จ	✓									✓
ฉ					✓				✓	
ช				✓			✓			
ซ						✓		✓		
ฌ		✓		✓	✓		✓		✓	
ญ			✓			✓				

บริษัทอยากจะทราบว่า จะสามารถจัดให้พนักงานได้ทำงานทุกคน โดยแต่ละคนทำงานคนละอย่างที่ตนถนัดได้หรือไม่ ถ้าจัดได้ให้จัดมาให้ดู และถ้าจัดไม่ได้ ควรจะจัดให้พนักงานอย่างไร จึงจะทำให้บริษัทได้ผลงานออกมามากที่สุด

2. ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่ง เมธินีได้เชิญเพื่อนมา 7 คน คือ สมชาย สมหญิง สมศรี สมปอง สมศักดิ์ สมพร และสมหมาย มาร่วมในงานเลี้ยงและได้เตรียมขนมหวานไว้สำหรับคนเพียง 1 คนไว้ 8 อย่างคือ ขนมชั้น ขนมเค้ก ทองหยอด ทองหยิบ ซาหริ่ม ตะโก้ จ่ามงกุฎ ทองม้วน

เมธินีได้ถามเพื่อนเรื่องขนมหวานที่แต่ละคนชอบ แลได้รับคำตอบดังนี้

สมชาย	ชอบ	ขนมทองม้วน ขนมเค้ก จ่ามงกุฎ
สมหญิง	ชอบ	ขนมชั้น ทองหยอด ทองหยิบ
สมศรี	ชอบ	ขนมทองม้วน ขนมชั้น ซาหริ่ม
สมปอง	ชอบ	ขนมชั้น ทองหยอด ตะโก้
สมศักดิ์	ชอบ	ขนมเค้ก ทองหยิบ
สมพร	ชอบ	ขนมทองม้วน ซาหริ่ม ตะโก้
สมหมาย	ชอบ	ขนมชั้น ขนมเค้ก จ่ามงกุฎ

ปัญหาคือเป็นไปได้หรือไม่ที่เมธินีจะจัดอาหารให้เพื่อนทุกคน โดยที่แต่ละคนได้ขนมหวานที่เขาชอบคนละ 1 อย่าง ถ้าจัดได้ให้จัดมาให้ดู

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3.3.3 ออยเลอร์ทัวร์ (Euler tour)

เราได้รู้จักกราฟพร้อมทั้งนิยามต่าง ๆ มาแล้ว เช่น แนวเดิน (Walk) วิถี (Path) วัฏจักร (Cycle) และ ออยเลอร์ทัวร์ (Euler tour) เป็นต้น ต่อไปนี้ จะกล่าวถึงนิยาม ของระดับขั้นของจุด (Vertex Degrees) การเชื่อมโยง (Connnected Graph) เพื่อ นำไปสู่ทฤษฎีบทเกี่ยวกับออยเลอร์ทัวร์

บทนิยาม 3.3.1 ให้ v เป็นจุดใดๆ ในกราฟ G

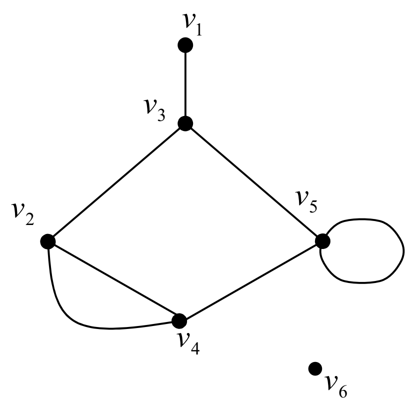
ระดับขั้น (Degree) ของจุด v หมายถึง จำนวนเส้นที่ตกกระทบกับจุด v (จำนวนเส้นที่ตกกระทบกับจุด v คือ จำนวนเส้นที่มาพบกันที่จุด v นั่นเอง) ซึ่งเขียนแทนด้วย $d(v)$ และ สำหรับวงวนให้นับสองครั้ง

ถ้า $d(v)$ เป็นจำนวนคู่ เราจะเรียกจุด v ว่า **จุดคู่** (Even Vertex)

ถ้า $d(v)$ เป็นจำนวนคี่ เราจะเรียกจุด v ว่า **จุดคี่** (Odd Vertex)

ถ้า $d(v)=0$ แล้ว เราจะเรียก v ว่า **จุดเอกเทศ** (Isolated Vertex)

ตัวอย่าง 3.3.3 ถ้า G มีกราฟ ดังรูป 3.3.18



รูป 3.3.18

จากกราฟรูป 3.3.18 จะได้ว่า

$d(v_1) = 1$ ดังนั้น v_1 เป็นจุดคี่

$d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 3$ ดังนั้น v_2, v_3, v_4 เป็นจุดคี่

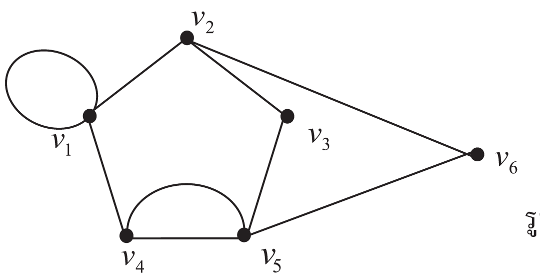
$d(v_5) = 4$ ดังนั้น v_5 เป็นจุดคู่

$d(v_6) = 0$ ดังนั้น v_6 เป็นจุดเอกเทศ

และ จะเห็นว่า $\sum_{v \in V} d(v) = 1+3+3+3+4+0$

$= 14$ ◈

ตัวอย่าง 3.3.4 กำหนดให้ G มีกราฟดังรูป



รูป 3.3.19

จงหา $d(v_i)$ สำหรับ i = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6
และบอกด้วยว่าจุดใดเป็นจุดคู่ จุดใดเป็นจุดคี่

....

....

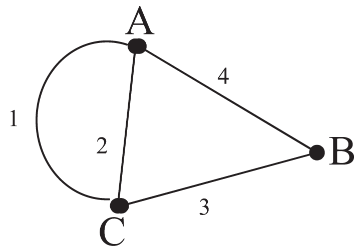
....

....

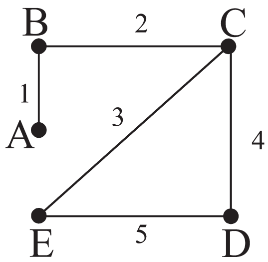
....

บทนิยาม 3.3.2 กราฟเชื่อมโยง (Connected Graph) คือ กราฟที่ระหว่าง 2 จุดใดๆ มีแนวเดินถึงกัน ส่วนกราฟที่ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยงเราจะเรียกว่า **กราฟไม่เชื่อมโยง** (Disconnected Graph)

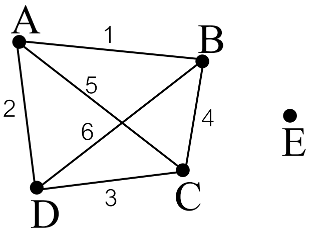
ตัวอย่าง 3.3.5 จงพิจารณากราฟต่อไปนี้ กราฟใดเป็นกราฟเชื่อมโยงหรือ กราฟไม่เชื่อมโยงพร้อมบอกเหตุผล



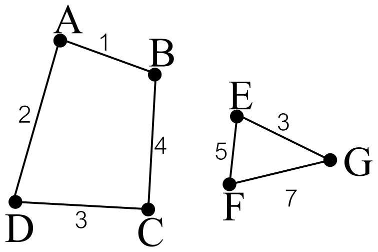
....
....
....



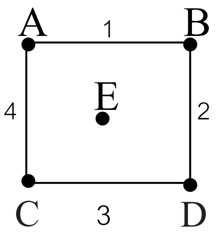
....
....
....



....
....
....



....
....
....



……………………………………………. ………
……………………………………………. ………

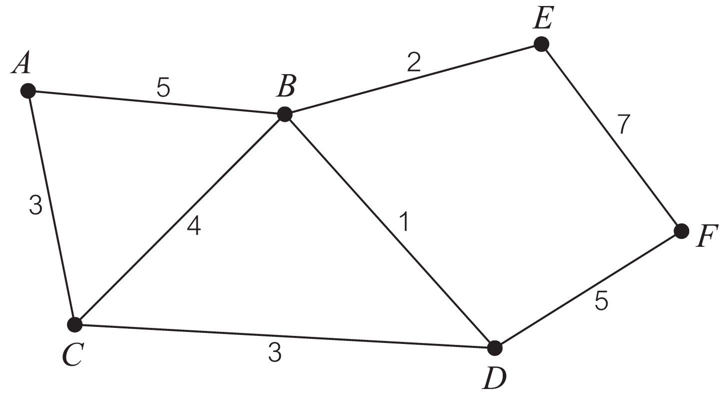
◈

จากบทนิยาม 3.3.1 และบทนิยาม 3.3.2 ทำให้ได้ว่า ทฤษฎีบทเกี่ยวกับกราฟมีออย์เลอร์ทัวร์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.1 กราฟมีออยเลอร์ทัวร์ (Euler Tour) ก็ต่อเมื่อ กราฟนั้นเป็นกราฟเชื่อมโยง(Connected Graph) และทุกจุดมีระดับขั้น (Degree) เป็นเลขคู่

กราฟที่มีน้ำหนัก (Weighted Graph) และปัญหาการหาวิถีที่สั้นที่สุด (The Shortest Path Problem)

เราทราบมาแล้วว่า วิถี (Path) คือ แนวเดินที่มีเส้นไม่ซ้ำและมีจุดไม่ซ้ำกัน ซึ่งปัญหาการหาวิถีที่สั้นที่สุดนั้นเราจะกล่าวถึงการหาวิถีที่สั้นที่สุดระหว่าง 2 จุดใดๆ ของกราฟ โดยวิธีของไดจค์สตาร์ (Dijkstra)



รูป 3.3.20

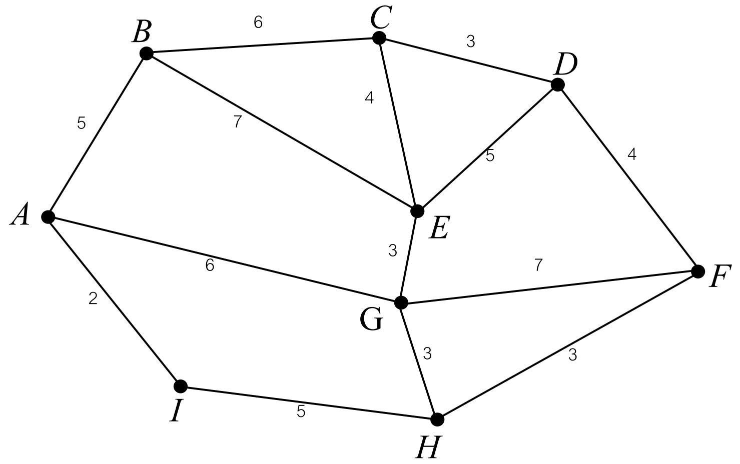
เราจะเรียกค่าของจำนวนจริงที่สัมพันธ์กับแต่ละเส้นว่า น้ำหนัก (Weight) ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3.3 ให้ $G = (V, E, \varphi)$ เป็นกราฟ ถ้ามีจำนวนจริง $w(e)$ เข้ามาสัมพันธ์กับแต่ละเส้น e ของกราฟ G แล้ว เราจะเรียก $w(e)$ ว่า **น้ำหนัก** (Weight) ของ e และกราฟที่ทุกเส้นมีน้ำหนัก เราจะเรียกว่า **กราฟที่มีน้ำหนัก** (Weighted Graph) และจะแทน**ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดใน** G **ด้วย** $W(G)$

นั่นคือ $$W(G) = \sum_{e \in E} w(e)$$

จากกราฟ G ดังรูป 3.3.20 จะเห็นว่า G เป็นกราฟที่มีน้ำหนัก ที่มีผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดใน G เป็น $W(G) = 5+3+4+3+1+2+7+5 = 30$

ถ้ามีกราฟที่มีน้ำหนัก G ดังรูป 3.3.21 โดยที่จุดต่างๆ แทนเมือง 9 เมือง คือเมือง $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ และมีเส้นแทนถนน (หรือเส้นทางบิน เป็นต้น) ที่เชื่อมระหว่างเมืองต่างๆ ถ้ากำหนดน้ำหนักของแต่ละเส้น คือ ความยาวของถนน (หรือค่าใช้จ่ายหรือเวลาที่ใช้ในการเดินทางในแต่ละเส้นทาง เป็นต้น)



รูป 3.3.21

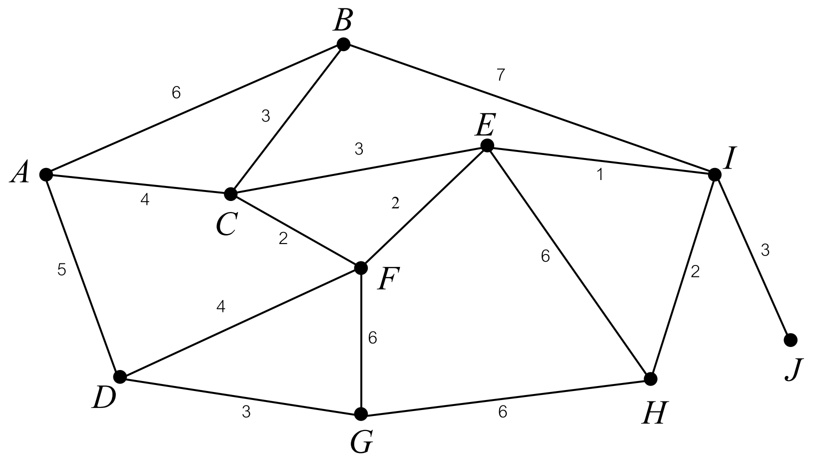
ปัญหาคือ จะหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (หรือ เส้นทางที่เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด หรือ เส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุด เป็นต้น) ใช้ในการเดินทาง จากเมือง A ไปเมือง F ท่านคิดว่าเส้นทางที่สั้นที่สุดที่จากเมือง A ไปเมือง F เท่ากับเท่าไร (ให้แสดงเส้นทางเดินด้วย)

....
....
....
....
....
....
....

ในการหาวิถีที่สั้นที่สุด หรือเส้นทางที่สั้นที่สุดนี้จะยึดหลักที่ว่า ถ้าเรามีเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง F และถ้า D เป็นจุดที่ประชิดกับ F และเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง F ผ่าน D เราจะได้ว่าระยะทางจาก A ถึง D บนเส้นทางเดิมเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง D เมื่อเรามีเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง D และถ้า E เป็นจุดที่ประชิดกับ D และเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง D ผ่าน E เราจะได้ว่าระยะทางจาก A ถึง E บนเส้นทางเดิมเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง E เช่นนี้เรื่อยๆ

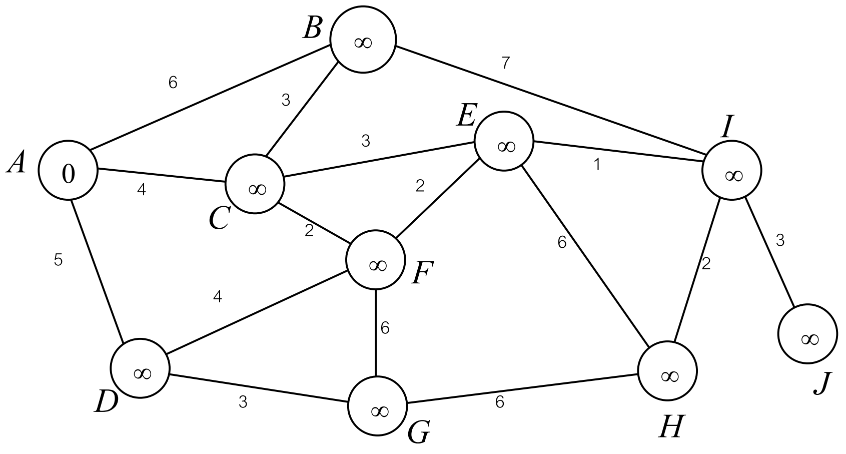
ก่อนที่จะอธิบายถึงขั้นตอนในการหาวิถีที่สั้นที่สุดตามวิธีของไดจค์สตาร์นั้น ให้ดูตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3.6 สมมติมีกราฟที่มีน้ำหนักดังรูป 3.3.23 โดยที่จุดต่างๆ แทนเมือง 9 เมือง คือเมือง $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ และมีเส้นแทนถนนที่เชื่อมระหว่างเมืองต่างๆ ถ้ากำหนดน้ำหนักแต่ละเส้น คือ ระยะทางที่ใช้ในการเดินทางในแต่ละเส้นทาง ต้องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง J



รูป 3.3.22

ที่จุด A นี้ กำหนดค่าให้เป็น 0 ส่วนจุดอื่นๆให้เป็น ∞



รูป 3.3.23

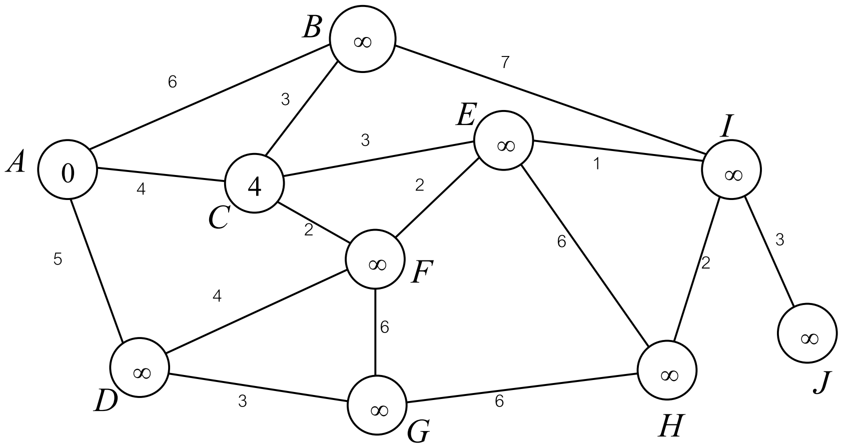
ให้ $S_0 = \{A\}$ และ $\overline{S}_0 = \{B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$

พิจารณาระยะทางจากจุดที่อยู่ใน $\overline{S}_0$ ซึ่งประชิดกับจุดใน S_0 (คือ A นั่นคือ พิจารณาระยะทางจากจุดต่างๆ ที่ประชิดกับ A) ถ้าจุดใน $\overline{S}_0$ จุดใดมีระยะห่างจาก A น้อยที่สุด ก็ให้นำมาเป็นสมาชิกตัวหนึ่งของ S_1

จากรูป 3.3.23 จะเห็นว่า A ประชิดกับ B, C และ D

ดังนั้น $\min\{\infty,\ 0+6,\ 0+4,\ 0+5\} = 4$ ซึ่ง 4 นี้ คือ ระยะทางจาก A ถึง C

เพราะฉะนั้นให้ $S_1 = \{A,\ C\}$ และ $\overline{S}_1 = \{B,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J\}$ และจุด C เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 4 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(C) = 4$



รูป 3.3.24

ให้ $S_1 = \{A,\ C\}$ และ $\overline{S}_1 = \{B,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J\}$

พิจารณาระยะทางจากจุดที่อยู่ใน $\overline{S}_1$ ซึ่งประชิดกับจุดใน S_1 โดยเลือกจุดใน $\overline{S}_1$ ที่ทำให้ระยะห่างจุดนั้นไปยังจุดที่ประชิดกับใน S_1 มีระยะทางสั้นที่สุด นำจุดที่ได้มานั้นเป็นสมาชิกตัวหนึ่งใน S_2

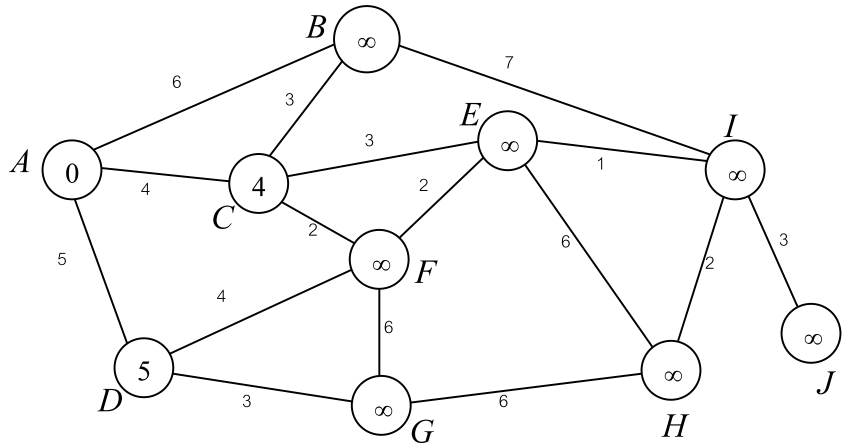
จากรูป 3.3.24 จะเห็นว่า A ประชิดกับ B และ D

และ C ประชิดกับ B, E และ F

ดังนั้น $\min\{\infty,\ 0+6,\ 0+5,\ 4+3,\ 4+3,\ 4+2\} = 5$

ซึ่ง 5 นี้ คือ ระยะทางจาก A ถึง D

เพราะฉะนั้นให้ $S_2 = \{A,\ C,\ D\}$ และ $\overline{S}_2 = \{B,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J\}$ และจุด D เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 5 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(D) = 5$



รูป 3.3.25

ให้ $S_2 = \{A, C, D\}$ และ $\overline{S}_2 = \{B, E, F, G, H, I, J\}$

พิจารณาระยะทางจากจุดที่อยู่ใน $\overline{S}_2$ ซึ่งประชิดกับจุดใน S_2 โดยเลือกจุดใน $\overline{S}_2$ ที่ทำให้ระยะห่างจุดนั้นไปยังจุดที่ประชิดกับใน S_2 มีระยะทางสั้นที่สุด นำจุดที่ได้มานั้นเป็นสมาชิกตัวหนึ่งใน S_3

จากรูป 3.3.25 จะเห็นว่า A ประชิดกับ B

C ประชิดกับ B, E และ F

และ D ประชิดกับ F และ G

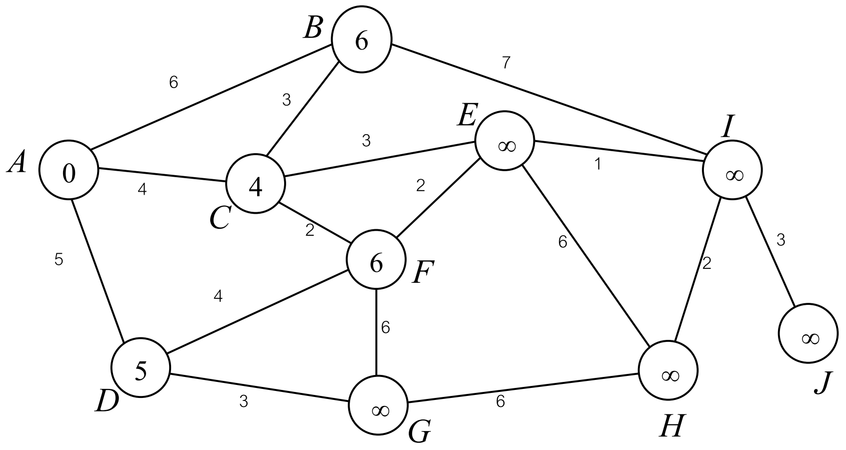
ดังนั้น $\min\{\infty,\ 0+6,\ 4+3,\ 4+3,\ 4+2,\ 5+4,\ 5+3\} = 6$

ซึ่ง 6 นี้ คือ ระยะทางจาก A ถึง B และ ระยะทางจาก C ถึง F

เพราะฉะนั้นให้ $S_3 = \{A, B, C, D, F\}$ และ $\overline{S}_3 = \{E, G, H, I, J\}$

จุด B เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 6 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(B) = 6$

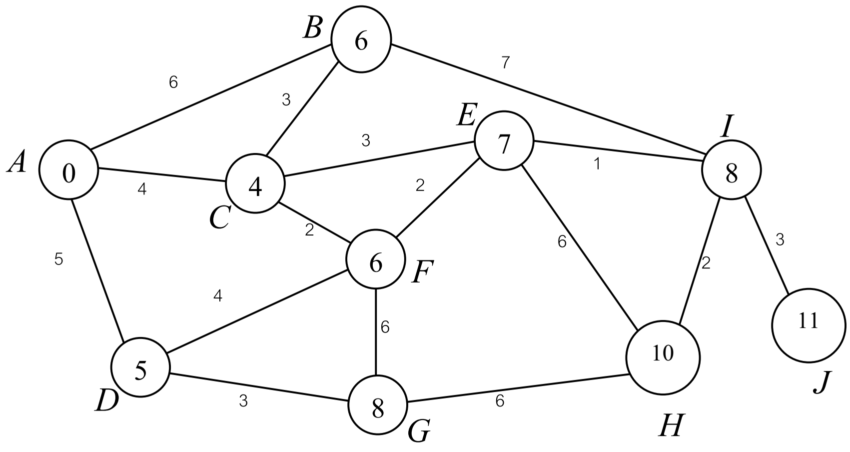
จุด F เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 6 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(F) = 6$



รูป 3.3.26

ในทำนองเดียวกันที่กล่าวมาแล้ว เราจะได้

$\ell(E) = 7,\ \ell(I) = 8,\ \ell(G) = 8,\ \ell(H) = 10,\ \ell(J) = 11$



รูป 3.3.27

ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุด จาก A ถึง J จะยาว = 11 หน่วย

การหาเส้นทางก็พิจารณาจาก 11 มาจาก $3+8$ และ 8 นี้ คือ $\ell(I) = 8$

ดังนั้นลากเส้นทางจาก J ไป I [═══]

$\ell(I) = 8$ และ 8 นี้มาจาก $1+7$ และ 7 นี้ คือ $\ell(E)=7$

ดังนั้นลากเส้นทางจาก I ไป E [═══]

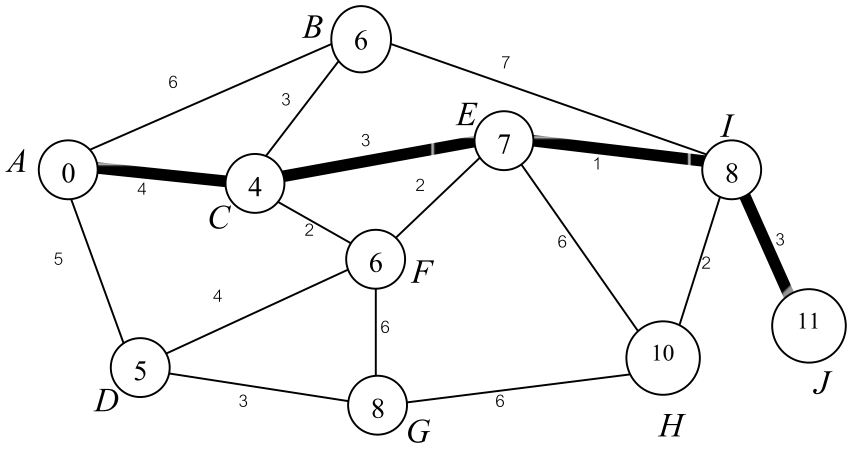
$\ell(E)=7$ และ 7 นี้มาจาก $3+4$ และ 4 นี้ คือ $\ell(C)=4$

ดังนั้นลากเส้นทางจาก E ไป C [═══]

$\ell(C)=4$ และ 4 นี้มาจาก $4+0$ และ 0 นี้ คือ $\ell(A)$

ดังนั้นลากเส้นทางจาก E ไป C [═══]

ดังนั้น เส้นทางเดิน คือ A, C, E, I, J



รูป 3.3.28

◈

ซึ่งจากขั้นตอนที่ทำมาทำให้เราสรุปวิธีของไดจค์สตาร์ ได้ดังนี้

ขั้นตอนวิธีในการหาวิถีที่สั้นที่สุดตามวิธีของไดจค์สตาร์ (Kijkstra's Algorithm)

ถ้ามี $G=(V, E, \varphi)$ เป็นกราฟที่มีน้ำหนักที่น้ำหนักของแต่ละเส้น คือ ระยะทาง

ให้ $\ell(u)$ คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดเริ่มต้น ถึง u

และ $w(uv)$ คือ ระยะทางจาก u ถึง v

<u>ขั้นที่ 1</u> ให้ $\ell(u_0)=0,\ \ell(v)=\infty$ สำหรับ $v \neq u_0$

$S_0 = \{u_0\}$ และ $i = 0$

<u>ขั้นที่ 2</u> สำหรับแต่ละ $v \in \bar{S}_i$ จะแทน $\ell(v)$ ด้วย $\min\{\ell(v),\ \ell(u) + w(u_i v)\}$

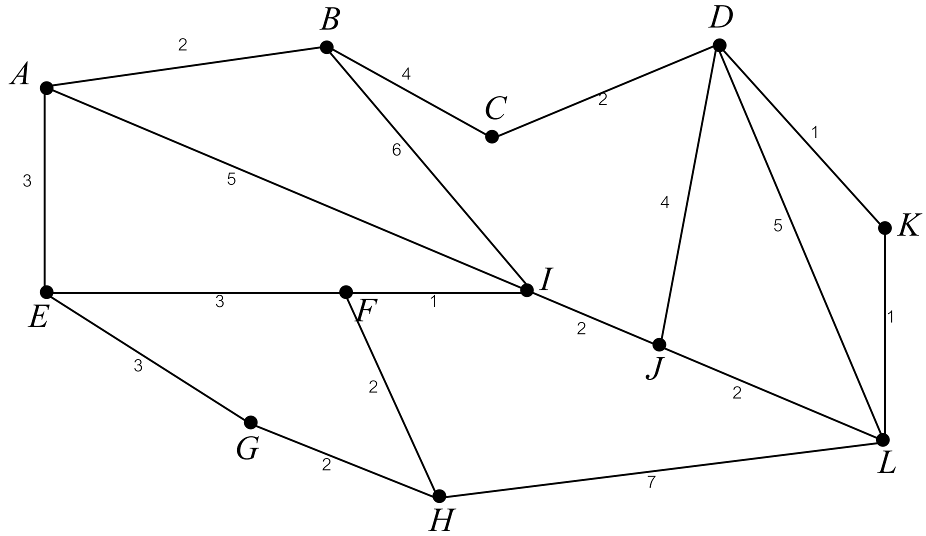
คำนวณ $\min\limits_{v \in \bar{S}_i}\{\ell(v)\}$ และให้ u_{i+1} แทนจุด ซึ่งให้ค่า $\min\limits_{v \in \bar{S}_i}\{\ell(v)\}$

ให้ $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$

<u>ขั้นที่ 3</u> ถ้า $i = |V| - 1$ ให้หยุดทำ

ถ้า $i < |V| - 1$ ให้แทน i ด้วย $i+1$ และกลับไปทำที่ขั้นที่ 2 ใหม่

ตัวอย่าง 3.3.7 จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง L



รูป 3.3.29

วิธีทำ

....

....

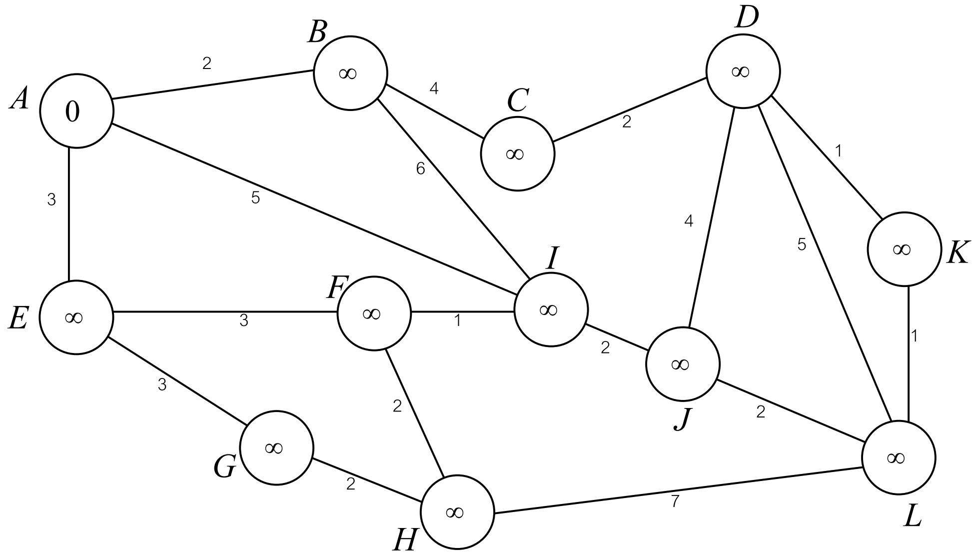
....

....

....

....

จากตัวอย่าง ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง L เป็นดังนี้
ที่จุด A นี้ กำหนดค่าให้เป็น 0 ส่วนจุดอื่นๆ ให้เป็น ∞ ดังรูป 3.3.30



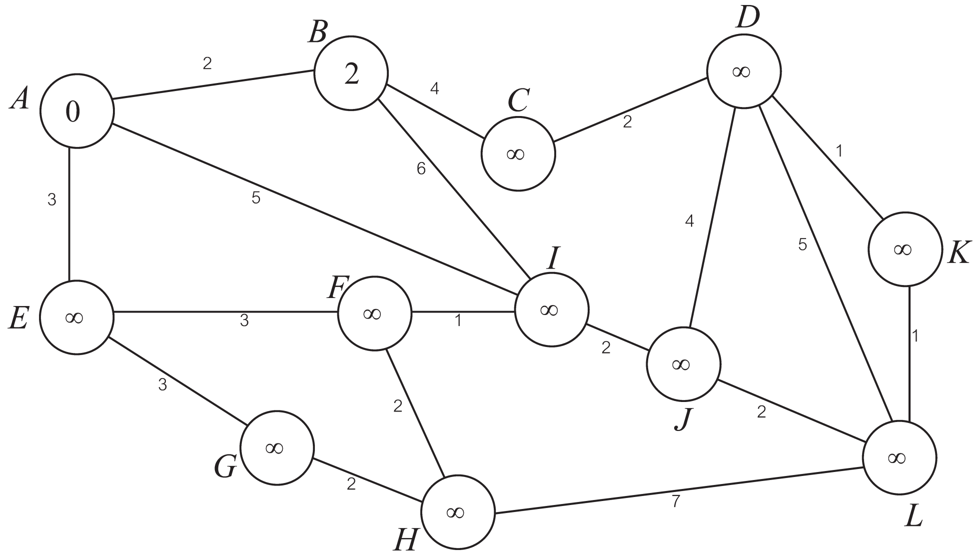
รูป 3.3.30

ให้ $S_0 = \{A\}$ และ $\overline{S}_0 = \{B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$

จากรูป 3.3.30 จะเห็นว่า A ประชิดกับ B, I และ E

ดังนั้น $\min\{\infty,\ 0+2,\ 0+5,\ 0+3\} = 2$ ซึ่ง 2 นี้คือระยะทางจาก A ถึง B

เพราะฉะนั้นให้ $S_1 = \{A, B\}$ และ $\overline{S}_1 = \{C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$ และจุด B เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 2 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(B) = 2$



รูป 3.3.31

ให้ $S_1 = \{A,\ B\}$ และ $\overline{S}_1 = \{C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L\}$

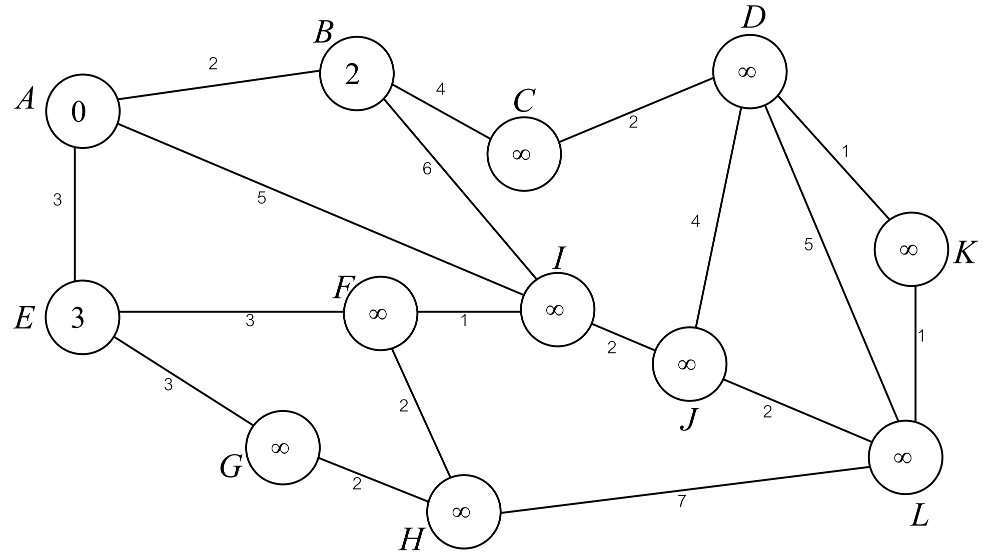
จากรูป 3.3.31 จะเห็นว่า A ประชิดกับ I และ E

และ B ประชิดกับ C และ I

ดังนั้น $\min\{\infty,\ 0+5,\ 0+3,\ 2+4,\ 2+6\} = 3$

ซึ่ง 3 นี้คือระยะทางจาก A ถึง E

เพราะฉะนั้นให้ $S_2 = \{A,\ B,\ E\}$ และ $\overline{S}_2 = \{C,\ D,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L\}$ และจุด E เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 3 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(E) = 3$



รูป 3.3.32

ให้ $S_2 = \{A,\ B,\ E\}$ และ $\overline{S}_2 = \{C,\ D,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L\}$

จากรูป 3.3.32 จะเห็นว่า A ประชิดกับ I

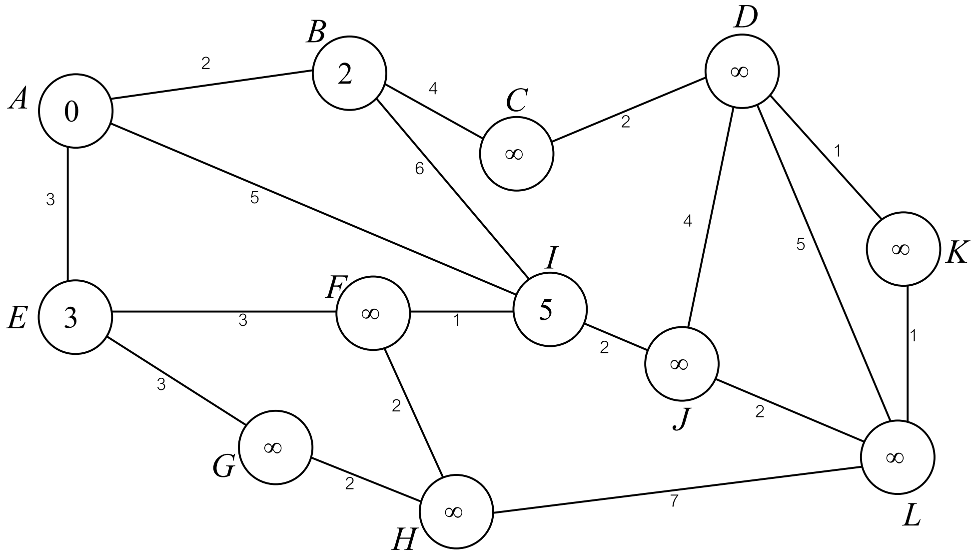
B ประชิดกับ C และ I

และ E ประชิดกับ F และ G

ดังนั้น $\min\{\infty,\ 0+5,\ 2+4,\ 2+6,\ 4+2,\ 3+3,\ 3+3\} = 5$

ซึ่ง 5 นี้คือระยะทางจาก A ถึง I

เพราะฉะนั้นให้ $S_3 = \{A,\ B,\ E,\ I\}$ และ $\overline{S}_3 = \{C,\ D,\ F,\ G,\ H,\ J,\ K,\ L\}$ และจุด I เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 5 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(I) = 5$



รูป 3.3.33

ให้ $S_3 = \{A,\ B,\ E,\ I\}$ และ $\overline{S}_3 = \{C,\ D,\ F,\ G,\ H,\ J,\ K,\ L\}$

จากรูป 3.3.33 จะเห็นว่า B ประชิดกับ C

E ประชิดกับ F และ G

และ I ประชิดกับ F และ J

ดังนั้น $\min\{\infty,\ 2+4,\ 3+3,\ 3+3,\ 5+1,\ 5+2\} = 6$

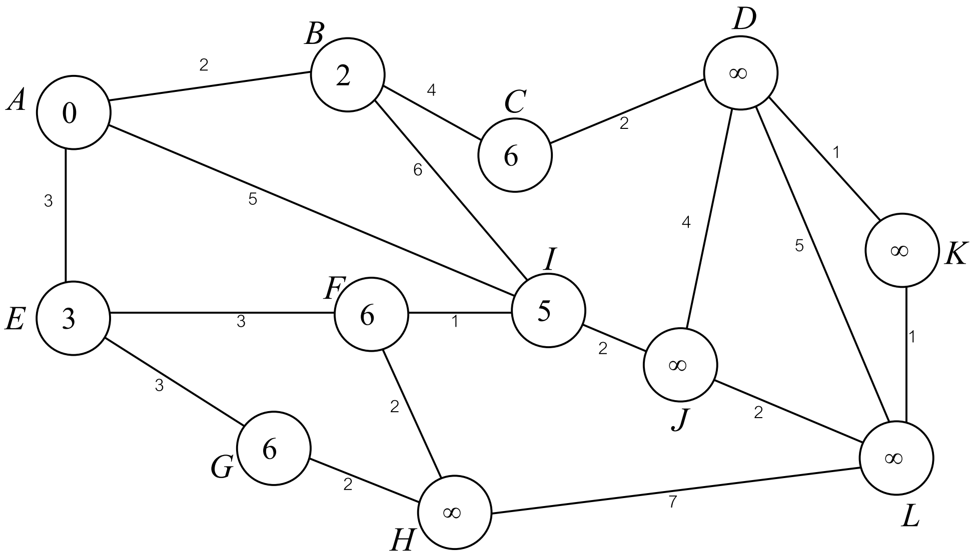
ซึ่ง 6 นี้คือระยะทางจาก B ถึง C , E ถึง F , E ถึง G และ I ถึง F

เพราะฉะนั้นให้ $S_4 = \{A,\ B,\ C,\ E,\ F,\ G,\ I\}$ และ $\overline{S}_4 = \{D,\ H,\ J,\ K,\ L\}$

และ จุด C เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 6 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(C) = 6$

จุด F เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 6 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(F) = 6$

จุด G เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 6 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(G) = 6$



รูป 3.3.34

ให้ $S_4 = \{A,\ B,\ C,\ E,\ F,\ G,\ I\}$ และ $\overline{S}_4 = \{D,\ H,\ J,\ K,\ L\}$

จากรูป 3.3.34 จะเห็นว่า C ประชิดกับ D

F ประชิดกับ H

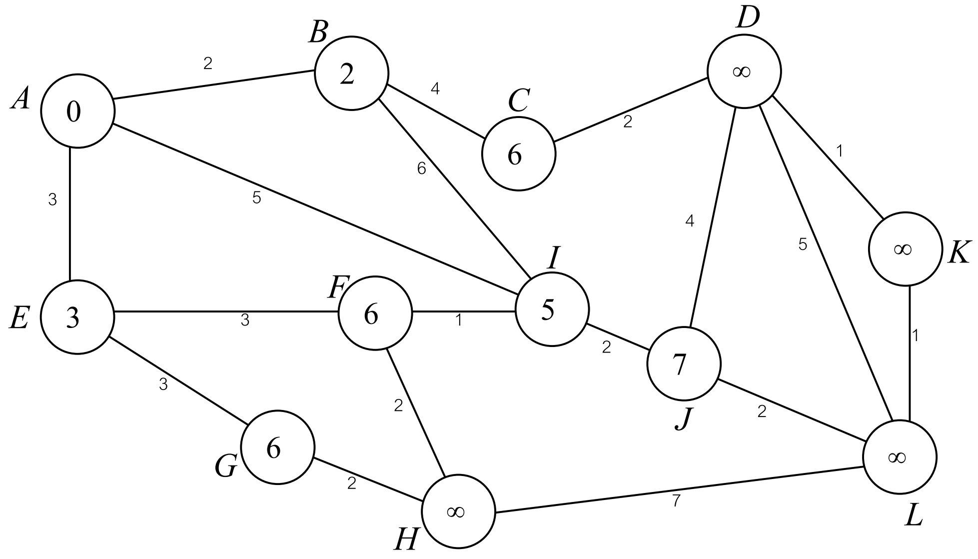
G ประชิดกับ H

และ I ประชิดกับ J

ดังนั้น $\min\{\infty,\ 6+2,\ 6+2,\ 6+2,\ 5+2\} = 7$

ซึ่ง 7 นี้คือระยะทางจาก I ถึง J

เพราะฉะนั้นให้ $S_5 = \{A,\ B,\ C,\ E,\ F,\ G,\ I,\ J\}$ และ $\overline{S}_5 = \{D,\ H,\ K,\ L\}$ และ จุด J เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 7 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(J) = 7$



รูป 3.3.35

ให้ $S_5 = \{A, B, C, E, F, G, I, J\}$ และ $\overline{S}_5 = \{D, H, K, L\}$

จากรูป 3.3.35 จะเห็นว่า C ประชิดกับ D

F ประชิดกับ H

G ประชิดกับ H

J ประชิดกับ D

และ J ประชิดกับ L

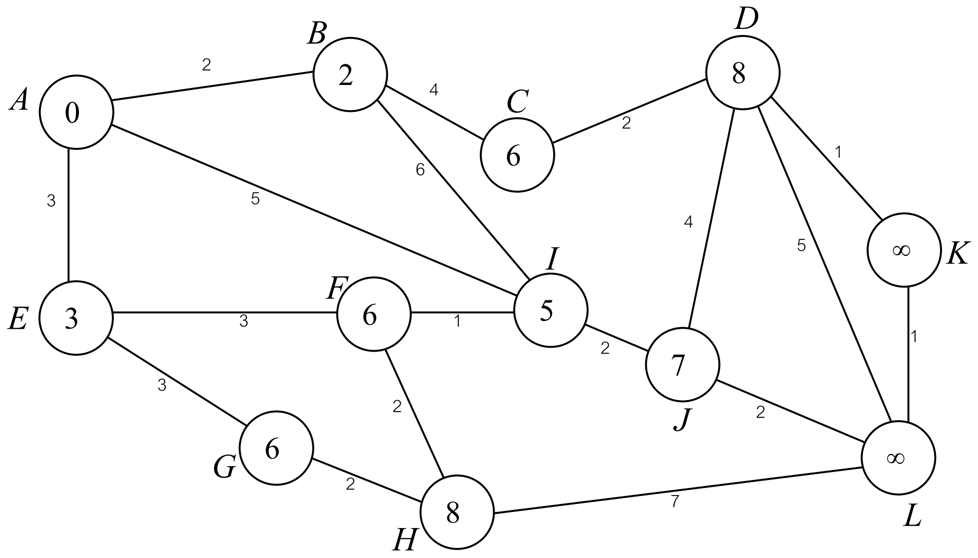
ดังนั้น $\min\{\infty, 6+2, 6+2, 6+2, 7+4, 7+2\} = 8$

ซึ่ง 8 นี้คือระยะทางจาก C ถึง D, F ถึง H และ G ถึง H

เพราะฉะนั้นให้ $S_6 = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$ และ $\overline{S}_6 = \{K, L\}$

และ จุด D เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 8 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(D) = 8$

จุด H เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 8 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(H) = 8$



รูป 3.3.36

ให้ $S_6 = \{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J\}$ และ $\overline{S}_6 = \{K,\ L\}$

จากรูป 3.3.36 จะเห็นว่า D ประชิดกับ K
D ประชิดกับ L
H ประชิดกับ L
และ J ประชิดกับ L

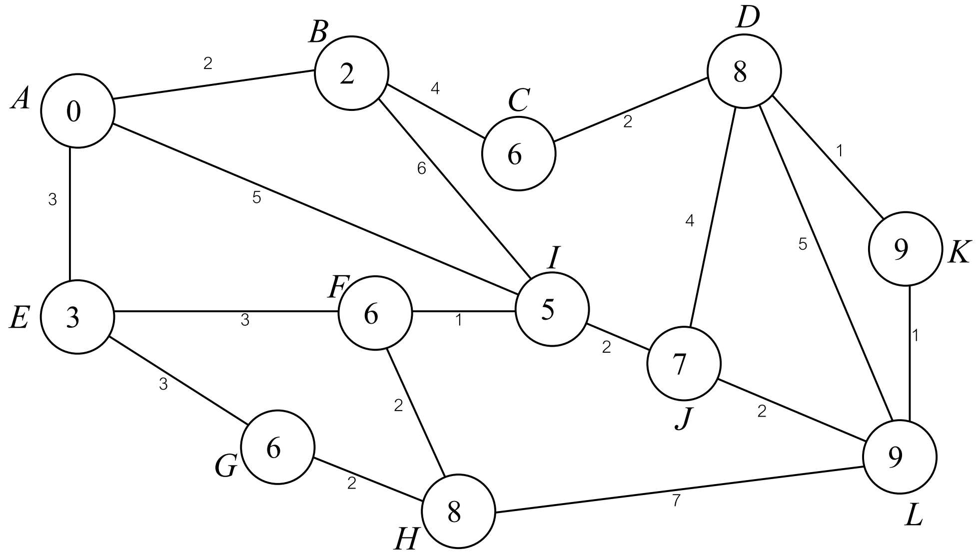
ดังนั้น $\min\{\infty,\ 8+1,\ 8+5,\ 8+7,\ 7+2\} = 9$

ซึ่ง 9 นี้คือระยะทางจาก D ถึง K และ J ถึง L

เพราะฉะนั้นให้ $S_7 = \{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L\}$

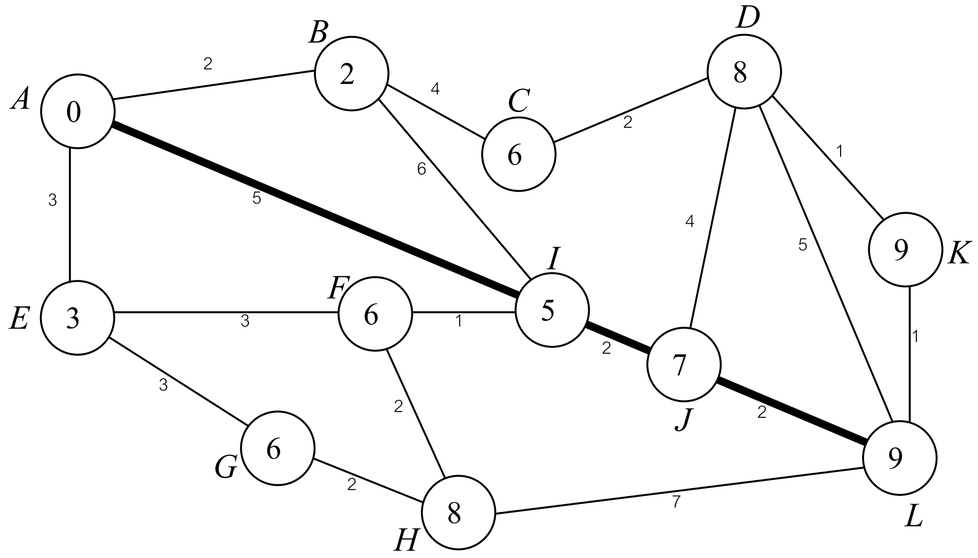
และ จุด K เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 9 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(K) = 9$

จุด L เปลี่ยนจาก ∞ เป็น 9 ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\ell(L) = 9$



รูป 3.3.37

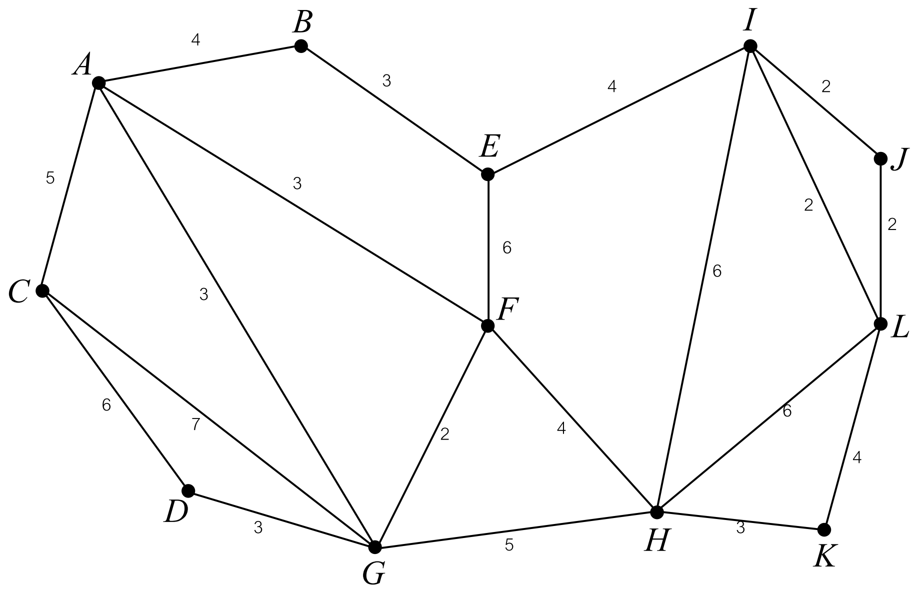
ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง L จะยาว $=$ 9 หน่วย
และมีเส้นทางเดินดังนี้ A, I, J, L



รูป 3.3.38

◈

ตัวอย่าง 3.3.8 จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง L



รูป 3.3.39

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

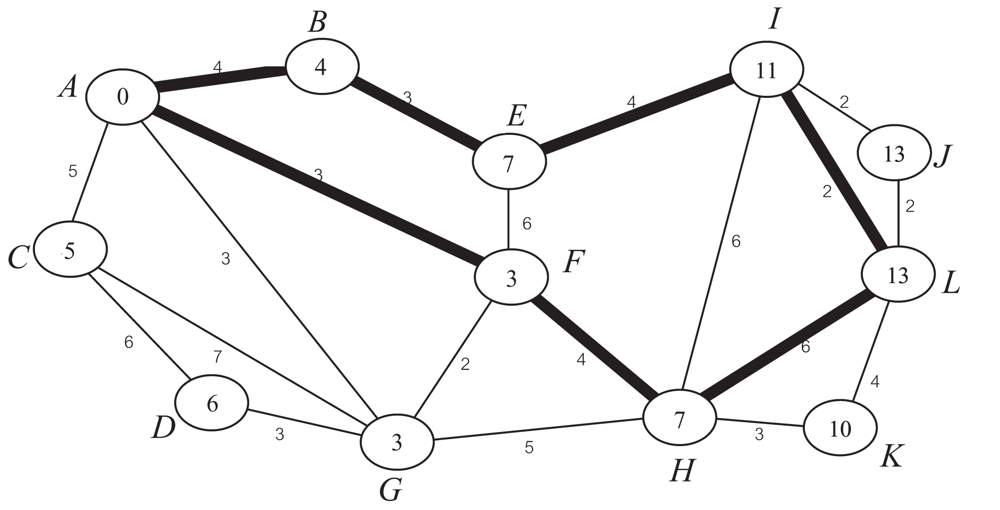
....

....

....

....

จากตัวอย่าง ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง L เป็นดังนี้



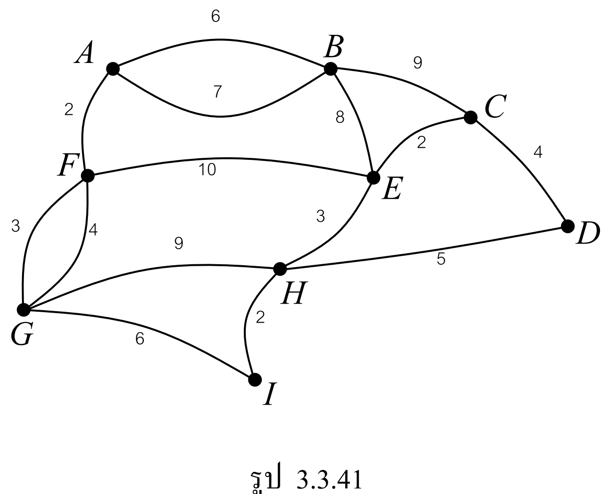
รูป 3.3.40

ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง L จะยาว = 13 หน่วย
และมีเส้นทางเดิน 2 ทาง ดังนี้

1. A, B, E, I, L 〔 ═══ 〕
2. A, F, H, L 〔 ═══ 〕

◈

ตัวอย่าง 3.3.9 สมมติว่า มีแผนที่ถนนที่แทนด้วยกราฟที่มีน้ำหนัก G ดังรูป 3.3.41 ถ้าบุรุษไปรษณีย์จะต้องเดินทางไปยังถนนทุกเส้นแล้ว บุรุษไปรษณีย์จะต้องเดินทางเป็นระยะทางสั้นที่สุดเท่าใด



รูป 3.3.41

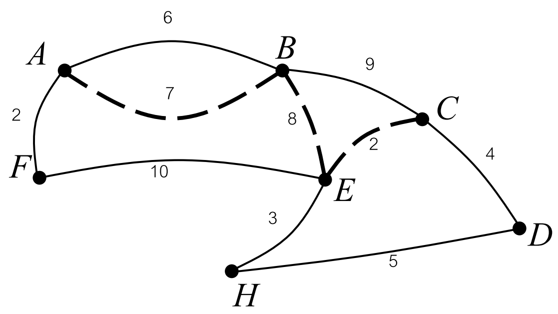
จงตอบคำถามต่อไปนี้

1.) กราฟรูป 3.3.41 มีออยเลอร์ทัวร์หรือไม่

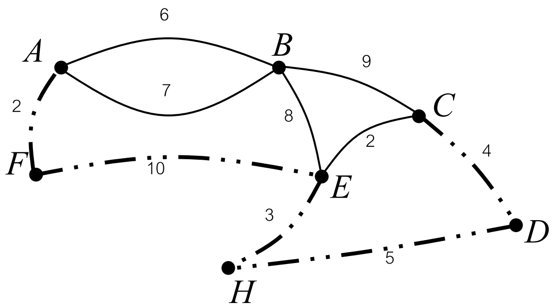
2.) บุรุษไปรษณีย์ควรเดินทางซ้ำเส้นทางใด จึงจะใช้ระยะสั้นที่สุด

3.) หาผลรวมของระยะทางที่จะต้องเดินทางเป็นระยะทางสั้นที่สุด

วิธีทำ จากรูป 3.3.41 จะเห็นว่า กราฟ G มีจุดคี่ 2 จุด คือ จุด A และจุด C วิถีจาก A ถึง C มีหลายวิถี (เช่น วิถีตามเส้น — — —(รูป 3.3.42) หรือ วิถีตามเส้น — · · — (รูป 3.3.43) เป็นต้น)



รูป 3.3.42



รูป 3.3.43

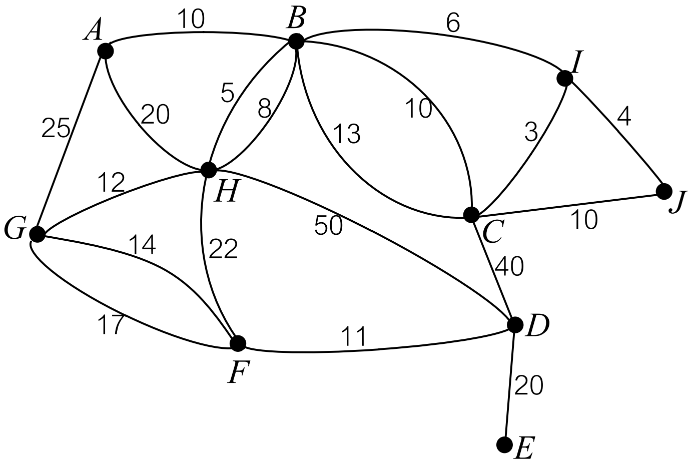
หาวิถีที่สั้นที่สุดจาก A ถึง C โดยวิธีของไดจค์สตาร์ หรือวิธีอื่น

จะได้ระยะทางจาก A ถึง C ที่สั้นที่สุด = 14 หน่วย โดนเป็นเส้นทางจาก A ถึง F, F ถึง E และ E ถึง C ซึ่งบุรุษไปรษณีย์จะต้องใช้เส้นทางนี้ซ้ำ

เพราะฉะนั้นบุรุษไปรษณีย์จะต้องเดินทางเป็นระยะทางสั้นที่สุด

$= W(G)+14 = 80+14 = 94$ หน่วย ◈

ตัวอย่าง 3.3.10 สมมติว่า มีแผนที่ถนนที่แทนด้วยกราฟที่มีน้ำหนัก G ดังรูป 3.3.44 ถ้าจะเดินทางไปทั่วทุกถนนแล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้น แล้วจะต้องเดินทางเป็นระยะทางสั้นที่สุดเท่าใด



รูป 3.3.44

วิธีทำ

เฉลย จะเห็นว่า กราฟ G มีจุดคี่อยู่ 4 จุด คือ A, C, E และ I

ดังนั้น เราจะหา $\min\{$ ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง C + ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก E ถึง I , ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง E + ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก C ถึง I , ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง I + ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก C ถึง E $\}$

จากกราฟรูป 3.3.44 สามารถหา

ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง C = 19 หน่วย

ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก E ถึง I = 63 หน่วย

ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง E = 68 หน่วย

ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก C ถึง I = 3 หน่วย

ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง I = 16 หน่วย

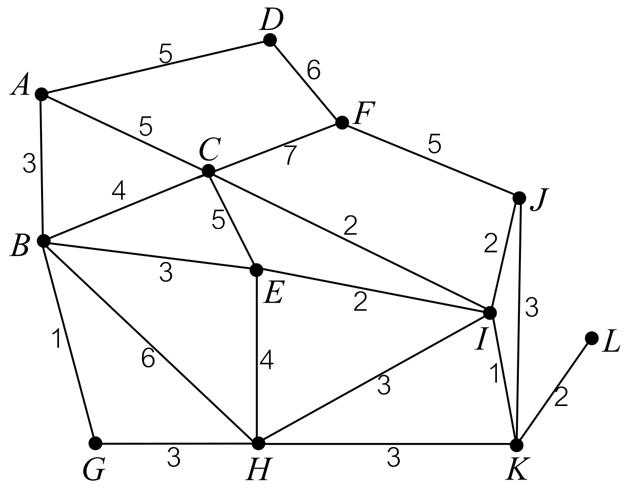
ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก C ถึง E = 60 หน่วย

เพราะฉะนั้น $\min\{19+63,\ 68+3,\ 16+60\} = 71$

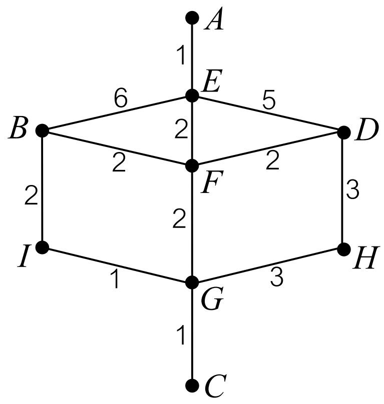
ดังนั้น จะต้องเดินทางเป็นระยะทางสั้นที่สุด $= W(G)+71 = 300+71$ $= 371$ หน่วย ◈

แบบฝึกปฏิบัติ 7

1. จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง L



2. นักศึกษาวิชาทหารได้รับคำสั่งจากครูฝึก ให้เดินทางไกลจากศูนย์ฝึก(จุด A) ตามเส้นทางที่แสดงดังรูป โดยมีเงื่อนไขว่าต้องผ่านทุกเส้นและกลับมาศูนย์ฝึก(จุด A) ให้ทันตามเวลาที่กำหนดให้ ถ้ากลับมาไม่ทันตามเวลาที่กำหนดจะถูกลงโทษ นักศึกษาวิชาทหารจะเลือกใช้เส้นทางใดจากเส้นทางที่กำหนดให้ (ระยะทางหน่วยเป็นกิโลเมตร)



เฉลย

1. ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง L จะยาว = 10 หน่วย

และมีเส้นทางเดินดังนี้ A, C, I, K, L

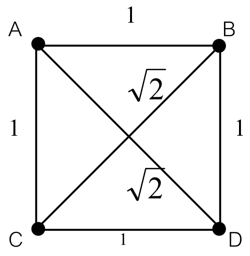
2. ระยะทางทั้งหมดที่ใช้ในการเดินทาง = 39 กิโลเมตร

และมีเส้นทางเดินดังนี้ $A, E, B, I, G, C, G, H, D, E, F, D, F, B, I, G, F, E, A$

3.4 การแทนกราฟด้วยเมทริกซ์ (Representation of Graphs)

จากรูปกราฟที่มีอยู่ เราสามารถเขียนแทนกราฟด้วยเมทริกซ์ได้ ซึ่งจะได้เมทริกซ์ตามที่เรากำหนดคุณสมบัติการเป็นสมาชิกของเมทริกซ์ เช่น

ตัวอย่าง 3.4.1 กำหนดสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังรูป ซึ่งมีด้านความยาว 1 หน่วย



รูป 3.4.1

ให้ a_{ij} แทนระยะทางระหว่างจุด i และ j

จงสร้างเมทริกซ์ของระยะทาง , $A = [a_{ij}]_{4\times4}$

วิธีทำ

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}
\end{array}$$

ตัวอย่าง 3.4.2 กำหนดจุด 4 จุดในระนาบเป็น $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (0,2)$, $P_2 = (-1,0)$, และ $P_4 = (0,-1)$

จงสร้างเมทริกซ์ A ซึ่งสมาชิก a_{ij} เป็นระยะทางจากจุด P_i ถึง P_j

วิธีทำ

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

เฉลย จากตัวอย่าง 3.4.1 จะได้เมทริกซ์ของระยะทาง คือ

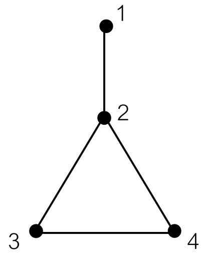
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

และตัวอย่าง 3.4.2 จะได้เมทริกซ์ A คือ

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{5} & 3 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{5} & 3 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

◈

ตัวอย่าง 3.4.3 กำหนดกราฟ G ดังรูป 3.4.2



รูป 3.4.2

จงสร้างเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$ โดยที่

$a_{ij} = 0$ ถ้า i และ j ไม่มีเส้นเชื่อมถึงกัน และ

$a_{ij} = 1$ ถ้า i และ j มีเส้นเชื่อมถึงกัน

วิธีทำ

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

เฉลย จากตัวอย่าง 3.4.3 จะได้จะได้เมทริกซ์ A คือ

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

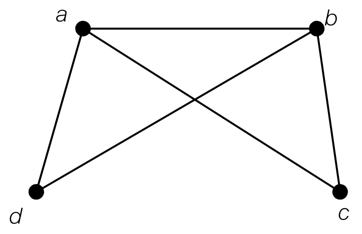
◈

แต่วิธีการเขียนกราฟแทนด้วยเมทริกซ์ที่นิยมกันมากมี 2 แบบ คือ เมทริกซ์ประชิด (Adjacency matrix) และเมทริกซ์ตกกระทบ (Incidence matrix)

บทนิยาม 3.4.1 ให้ $G = (V, E, \varphi)$ เป็นกราฟเชิงเดียว โดยที่ $|V| = n$
สมมติให้ $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
เมทริกซ์ประชิด (Adjacency matrix) A ของ G คือ เมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งมีสมาชิกเป็น 0 และ 1 โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } v_i \text{ ประชิดกับ } v_j \\ 0 & \text{ถ้าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 3.4.4 กำหนด G มีกราฟดังรูป



รูป 3.4.3

ถ้าเราจัดอันดับ (order) จุดดังนี้ $a,\ b,\ c,\ d$ แล้วเราจะได้เมทริกซ์ประชิด คือ

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

ถ้าจัดอันดับจุดเป็น $b,\ c,\ d,\ a$ แล้วจะได้เมทริกซ์ประชิด

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} b & c & d & a \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ c \\ d \\ a \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

◈

หมายเหตุ เมทริกซ์ประชิดของกราฟขึ้นอยู่กับการจัดอันดับจุด ดังนั้นเราจะได้ว่า เมทริกซ์ประชิดของกราฟ G จะมีได้ $n!$ ที่แตกต่างกัน ทั้งนี้เพราะเรามีวิธีจัดอันดับจุด n ได้ $n!$ วิธี

ตัวอย่าง 3.4.5 จงเขียนกราฟจากเมทริกซ์ประชิดที่กำหนดให้

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

โดยมีการเรียงอันดับของจุด คือ $a,\ b,\ c,\ d$

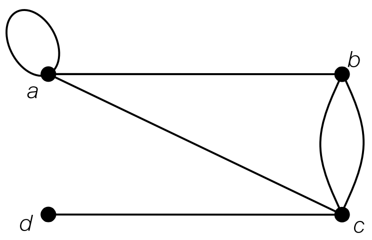
วิธีทำ

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วจะเห็นได้ว่าเมทริกซ์ประชิดของกราฟเชิงเดียว มีลักษณะดังนี้

1. เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเฉพาะ 0 และ 1
2. เป็นเมทริกซ์สมมาตร เพราะมี $a_{ij} = a_{ji}$
3. เนื่องจากกราฟเชิงเดียวไม่มีวงวน ดังนั้น $a_{ii} = 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

นอกจากนี้เมทริกซ์ยังสามารถนำไปเป็นตัวแทนของกราฟที่มีวงวน หรือ เส้นหลายชั้นได้ และในกรณีที่กราฟมีเส้นหลายชั้นแล้ว เมทริกซ์ประชิดจะ**ไม่ใช่**เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเฉพาะ 0 และ 1

ตัวอย่าง 3.4.6 จงหาเมทริกซ์ประชิดที่เป็นตัวแทนของกราฟ ดังรูป



รูป 3.4.4

วิธีทำ ถ้าเราจัดอันดับจุดเป็น a, b, c, d จะได้เมทริกซ์ประชิดเป็นดังนี้

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

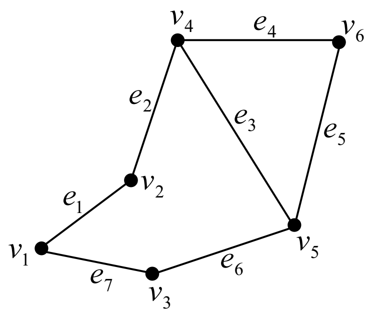
◈

เฉลย จากกราฟ จะได้เมทริกซ์ประชิดเป็นดังนี้

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

◈

ตัวอย่าง 3.4.7 กราฟต่อไปนี้ได้จากการแทนจุดต่อ (node) ของข่ายงานการสื่อสารด้วยจุดของกราฟ และแทนการเชื่อมติดกันระหว่างจุดต่อ 2 จุด ของข่ายงานด้วยเส้นกราฟ



รูป 3.4.5

ให้เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{6\times 6}$ เป็นเมทริกซ์ประชิด ที่เป็นตัวแทนของกราฟข้างต้น โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } v_i \text{ และ } v_j \text{ มีเส้นเชื่อมถึงกัน} \\ 0 & \text{ถ้า } v_i \text{ และ } v_j \text{ ไม่มีเส้นเชื่อมถึงกัน} \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

◈

ข้อสังเกต จะเห็นว่า A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ถ้าให้ $W_1 = v_1 e_1 v_2 e_2 v_4 e_3 v_5$ จะได้ว่าเป็นแนวเดินจาก v_1 ถึง v_5 และมีความยาวเป็น 3

$W_2 = v_1 e_1 v_2 e_2 v_4 e_4 v_6 e_5 v_5$ จะได้ว่าเป็นแนวเดินจาก v_1 ถึง v_5 และมีความยาวเป็น 4

$W_3 = v_1 e_7 v_3 e_7 v_1 e_7 v_3 e_6 v_5$ จะได้ว่าเป็นแนวเดินจาก v_1 ถึง v_5 และมีความยาวเป็น 4

ข้อสังเกต เพื่อความสะดวกจะแทนแนวเดิน W_1 ด้วย $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$

โดยทั่วๆ ไป การหาจำนวนแนวเดินที่มีความยาวตามที่กำหนดให้ สามารถหาได้จากการคูณกันหลายๆ ครั้งของเมทริกซ์ประชิด ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ประชิดขนาด $n \times n$ และ $a_{ij}^{(k)}$ แทนสมาชิกในแถวที่ i แนวตั้งที่ j ของ A^k แล้ว จะได้ว่า

$a_{ij}^{(k)}$ คือ จำนวนแนวเดินที่มีความยาว k จาก v_i ถึง v_j

พิสูจน์ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ สมาชิกแต่ละตัวของ A^k คือ จำนวนแนวเดินที่มีความยาว k ระหว่างจุดที่สมนัยกับตำแหน่งของสมาชิกที่มีแนวเดินถึงกัน

ถ้า $k = 1$ จากการที่ A เป็นเมทริกซ์ประชิด เพราะฉะนั้น

a_{ij} จะแทนจำนวนแนวเดินที่มีความยาว 1 จาก v_i ถึง v_j

ถ้าให้ $P(m)$ จริง นั่นคือ สมาชิกแต่ละตัวของ A^m คือ จำนวนแนวเดินที่มีความยาว m ระหว่างจุดที่สมนัยกับตำแหน่งของสมาชิกที่มีแนวเดินถึงกัน

ดังนั้น $a_{ie}^{(m)}$ คือ จำนวนแนวเดินที่มีความยาว m จาก v_i ถึง v_e

ถ้ามีเส้น 1 เส้นเชื่อมระหว่าง v_e ถึง v_j จะได้ว่า $a_{ej} = 1$

ดังนั้น $a_{ie}^{(m)} \cdot a_{ej} = a_{ie}^{(m)}$ คือ จำนวนแนวเดินที่มีความยาว $m+1$ จาก v_i ถึง v_j และอยู่ในรูปแบบ $v_i \to \ldots \to v_e \to v_j$

ทำให้ได้ว่า จำนวนแนวเดินที่มีความยาว $m+1$ จาก v_i ถึง v_j ก็คือ

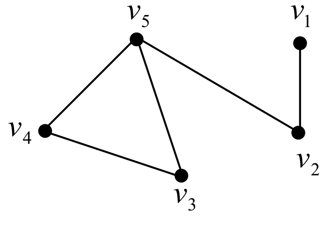
$a_{i1}^{(m)} a_{1j} + a_{i2}^{(m)} a_{2j} + \ldots + a_{in}^{(m)} a_{nj}$

ซึ่งพบว่าผลบวกนี้ก็คือ สมาชิกในแถวที่ i แนวตั้งที่ j ของ A^{m+1}

นั่นคือ $P(m+1)$ จริง

ดังนั้น $P(k)$ เป็นจริงทุกจำนวนนับ k ใดๆ ◈

ตัวอย่าง 3.4.8 จงหาจำนวนแนวเดินที่มีความยาว 3 ระหว่าง 2 จุดใดๆ ของกราฟดังรูป



รูป 3.4.6

วิธีทำ

เฉลย จากกราฟ จะได้เมทริกซ์ประชิด A ขนาด 5×5 ดังนี้

$$A = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ดังนั้น

$$A^3 = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ v_3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ v_4 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ v_5 & 0 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{array}$$

จำนวนแนวเดินที่มีความยาว 3 จาก v_2 ถึง v_5 คือ $a_{25}^{(3)} = 4$

จำนวนแนวเดินที่มีความยาว 3 จาก v_4 ถึง v_3 คือ $a_{43}^{(3)} = 3$ เป็นต้น ◈

และ จากกราฟรูป 3.4.6 จะได้ว่า

1.) จงหาแนวเดินที่มีความยาว 3 จาก v_2 ถึง v_5

2.) จงหาแนวเดินที่มีความยาว 3 จาก v_4 ถึง v_3

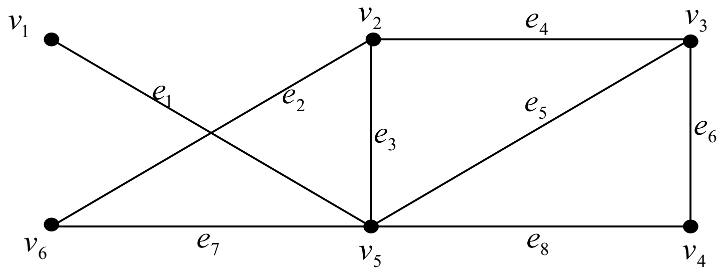
บทนิยาม 3.4.2 ถ้า $G = (V, E, \varphi)$ เป็นกราฟที่ไม่มีวงวน โดยที่

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ และ $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

แล้ว จะได้ว่าเมทริกซ์ตกกระทบ (Incidence matrix) (เมื่อให้การเรียงอันดับของ V และ E ดังกล่าวข้างต้น) คือ เมทริกซ์ $M = [m_{ij}]_{n\times m}$ โดยที่

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } v_i \text{ ตกกระทบกับ } e_j \\ 0 & \text{ถ้าเป็นอย่างอื่น} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 3.4.9 จงหาเมทริกซ์ตกกระทบที่เป็นตัวแทนของกราฟที่กำหนดให้



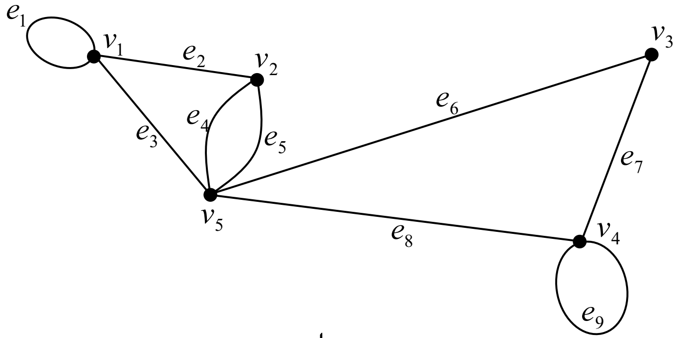
รูป 3.4.7

เมทริกซ์ตกกระทบ คือ

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

นอกจากนี้เมทริกซ์ตกกระทบยังสามารถนำไปเป็นตัวแทนของกราฟที่มีวงวนได้

ตัวอย่าง 3.4.10 จงหาเมทริกซ์ตกกระทบทีเป็นตัวแทนของกราฟที่กำหนดให้



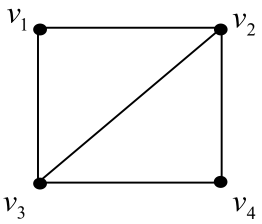
รูป 3.4.8

วิธีทำ

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccccccc} 2 & & & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & 1 & \end{array}\right) \end{array}$$

แบบฝึกปฏิบัติ 8

1. กำหนดกราฟ G ดังนี้



1.1) ถ้าให้ A เป็นเมทริกซ์ประชิดที่มีการจัดอันดับจุดเป็น v_1 , v_2 , v_3 , v_4 จงหาเมทริกซ์ A

1.2) จงหา A^3

1.3) จาก 1.2) จงหาจำนวนแนวเดินที่มีความยาว 3 จาก v_1 ถึง v_4

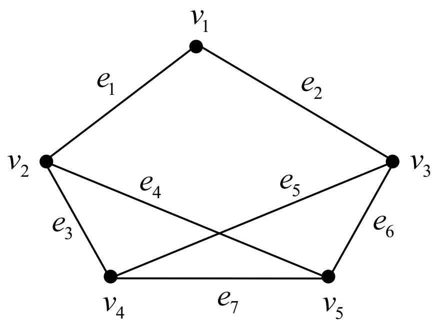
1.4) จงเขียนแนวเดินในข้อ 1.3)

2. จงเขียนกราฟจากเมทริกซ์ประชิดที่กำหนดให้

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

โดยมีการเรียงอันดับของจุด คือ a, b, c, d

3. กำหนดกราฟ G ดังนี้



จงหาเมทริกซ์ตกกระทบ

เฉลย

1.

1.1)
$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} = A$$

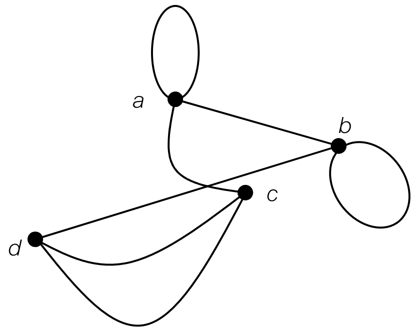
1.2)
$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3) จงหาจำนวนแนวเดินที่มีความยาว 3 จาก v_1 ถึง v_4 $= 2$

1.4) แนวเดินในข้อ 1.3) คือ $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$ และ $v_1\ v_3\ v_2\ v_4$

2.



3.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

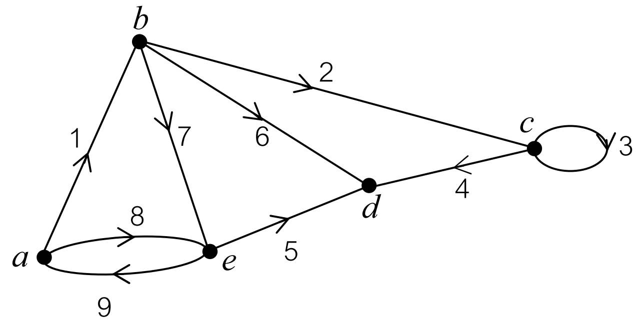
3.5 กราฟมีทิศทาง (Digraph)

จากที่เราได้ศึกษาเรื่องกราฟมาแล้ว เราสามารถแปลงปัญหาที่มีอยู่ให้เป็นปัญหาทางกราฟซึ่งประกอบด้วยจุดและเส้นได้ แต่เราก็พบว่าปัญหาอีกมากมาย เช่น ปัญหาการจราจร (แบบกำหนดเส้นทาง) ปัญหาการการทำงานที่มีการกำหนดขั้นตอน เป็นต้น ซึ่งปัญหาเหล่านี้เมื่อแปลงเป็นปัญหาทางกราฟ แล้วจะพบว่าเส้นเชื่อมระหว่าง จุด 2 จุดใด ๆ ต้องมีการกำหนดทิศทางด้วย

3.5.1 กราฟมีทิศทาง (Digraph หรือ Directed Graph)

ก่อนอื่นเรา จะพิจารณาว่ากราฟมีทิศทางประกอบด้วยอะไรบ้าง และสามารถเขียนบทนิยามทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไร โดยพิจารณาจากตัวอย่าง 3.5.1

ตัวอย่าง 3.5.1 กำหนดกราฟมีทิศทาง D ดังรูป 3.5.1



รูป 3.5.1

1. ท่านคิดว่า กราฟมีทิศทางรูป 3.5.1 มีส่วนประกอบอะไรบ้าง

....

....

....

....

....

2. ให้ท่านบอกทิศทางของส่วนโค้งทุกส่วนโค้งว่ามีทิศทางอย่างไร
เช่น ส่วนโค้ง 1 มีทิศทางจาก a ไป b

....
....
....
....
....
....

3. จากส่วนโค้ง 8 และส่วนโค้ง 9 ท่านได้ข้อสังเกตอะไรบ้าง

....
....
....
....
....
....

4. จากบทนิยามของกราฟ ท่านจงให้บทนิยามของกราฟมีทิศทาง (Digraph)

....
....
....
....
....
....

บทนิยาม 3.5.1 กราฟมีทิศทาง (Digraph) คือ สิ่งทั้งสามที่เป็นอันดับ (V, A, ϕ) ใดๆ โดยที่ V, A เป็นเซตที่ต่างกัน และ ϕ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง $V \times V$

เราเรียกสมาชิกของ V ว่า **จุด**

เราเรียกสมาชิกของ A ว่า **ส่วนโค้ง** (Arc)

เราเรียกฟังก์ชัน ϕ ว่า **ฟังก์ชันตกกระทบ** (incident function)

ถ้า $\phi(i) = (u, v)$ เราเรียก u เป็น**หาง** (Tail) ของ i

เราเรียก v เป็น**หัว** (Head) ของ i

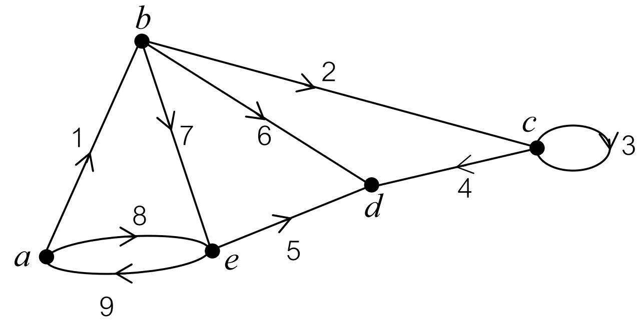
ถ้า $\phi(i) = (u, v)$ เรากล่าวว่า i เชื่อม u ถึง v

ถ้า $\phi(i) = (u, v)$ และ $u = v$ เรากล่าวว่า i เป็น**วงวน** (loop)

ถ้า $\phi(i) = (u, v)$ และ $u \neq v$ เรากล่าวว่า i เป็น**เส้นเชื่อม**

จากที่เราได้ศึกษาบทนิยามของกราฟมีทิศทางแล้วให้ท่านตอบคำถามต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.5.2 จงหา $D = (V, A, \phi)$ จากรูป 3.5.1



1. $V = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
2. $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
3. $\phi : A \to V \times V$

$\phi(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\phi(\ldots..) = (b, c)$

$\phi(\ldots..) = (c, c)$ $\qquad$ $\phi(4) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\phi(.....) = (a, e)$ $\qquad$ $\phi(.....) = (e, a)$

$\phi(7) = ...$ $\qquad$ $\phi(.....) = (e, d)$

$\phi(.....) = (b, d)$

เฉลย จาก $D = (V, A, \phi)$ ดังรูป 3.5.1

1. $V = \{a, b, c, d, e\}$
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
3. $\phi : A \rightarrow V \times V$

$\phi(1) = (a, b)$ $\qquad$ $\phi(2) = (b, c)$

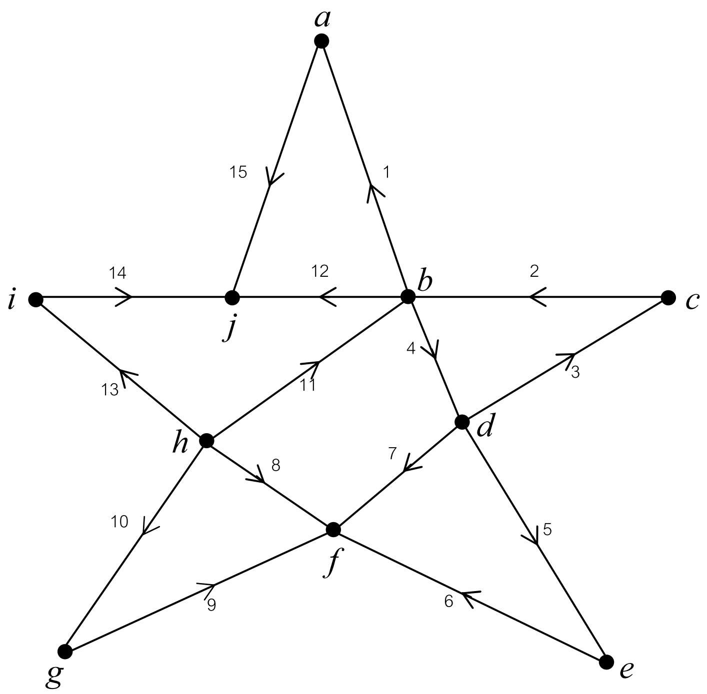
$\phi(3) = (c, c)$ $\qquad$ $\phi(4) = (c, d)$

$\phi(8) = (a, e)$ $\qquad$ $\phi(9) = (e, a)$

$\phi(7) = (b, e)$ $\qquad$ $\phi(5) = (e, d)$

$\phi(6) = (b, d)$

ตัวอย่าง 3.5.3 กำหนดกราฟมีทิศทาง D ดังรูป 3.5.2



รูป 3.5.2

จงหา (V, A, ϕ) ที่ทำให้ $D = (V, A, \phi)$ เป็นกราฟมีทิศทางดังรูป 3.5.2

....

....

....

....

....

เฉลย จากกราฟมีทิศทาง $D = (V, A, \phi)$ ดังรูป 3.5.2

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$\phi : A \to V \times V$

$\phi(1) = (b, a)$ $\qquad$ $\phi(2) = (c, b)$

$\phi(3) = (d, c)$ $\qquad$ $\phi(4) = (b, d)$

$\phi(5) = (d, e)$ $\qquad$ $\phi(6) = (e, f)$

$\phi(7) = (d, f)$ $\qquad$ $\phi(8) = (h, f)$

$\phi(9) = (g, f)$ $\qquad$ $\phi(10) = (h, g)$

$\phi(11) = (h, b)$ $\qquad$ $\phi(12) = (b, j)$

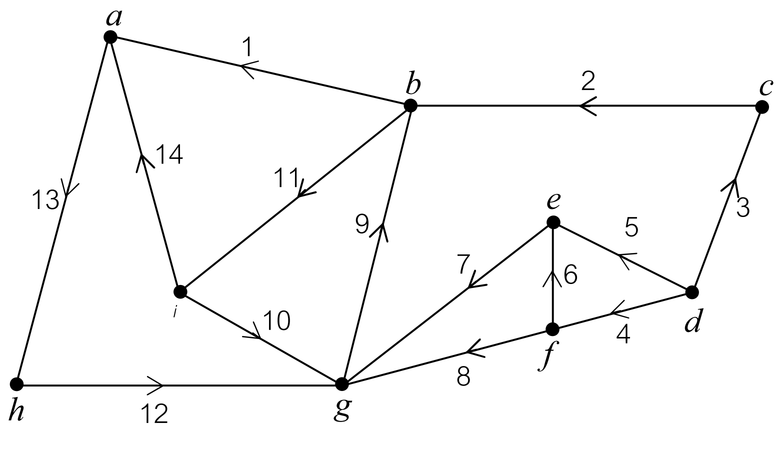
$\phi(13) = (h, i)$ $\qquad$ $\phi(15) = (a, j)$

◈

3.5.2 แนวเดินที่มีทิศทาง (Diwalk)

เราได้ศึกษาเกี่ยวกับแนวเดิน วิถี วัฏจักร ออยเลอร์ทัวร์สำหรับกราฟที่ไม่กำหนดทิศทาง ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเรื่องเหล่านี้สำหรับกราฟมีทิศทาง ดังนั้นเราสามารถนิยามแนวเดินที่มีทิศทาง วิถีที่มีทิศทาง วัฏจักรที่มีทิศทาง ออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง และอื่นๆ ในทำนองเดียวกันได้

ตัวอย่าง 3.5.4 กำหนดกราฟมีทิศทาง D ดังรูป 3.5.3

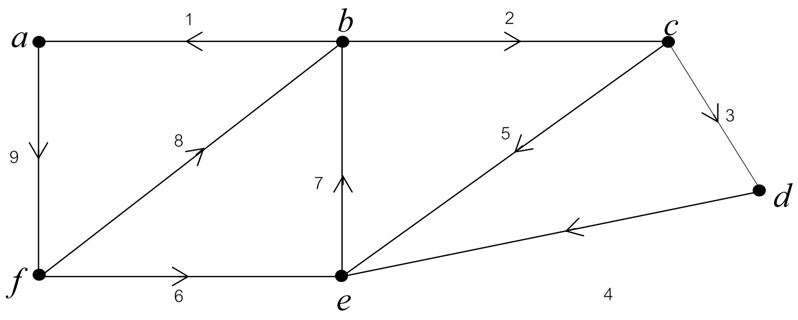


รูป 3.5.3

จะได้ว่า $a\ 13\ h\ 12\ g$ เป็นแนวเดินที่มีทิศทางจาก a ถึง g และเป็นวิถีที่มีทิศทางจาก a ถึง g ที่มีความยาวเป็น 2

$i\ 10\ g\ 9\ b\ 11\ i\ 14\ a$ เป็นแนวเดินที่มีทิศทางจาก i ถึง a ที่มีความยาวเป็น 4 แต่ไม่เป็นวิถีที่มีทิศทาง จาก i ถึง a เนื่องจากใช้จุด i ซ้ำ ◈

ตัวอย่าง 3.5.5 กำหนดกราฟมีทิศทาง $D = (V, A, \phi)$ ดังรูป 3.5.4



รูป 3.5.4

จงหาแนวเดินที่มีทิศทางต่อไปนี้ (ถ้าสามารถหาได้) โดยให้มีความยาวเท่าไรก็ได้

แนวเดินที่มีทิศทางจาก a ถึง b

……………………………………………………………………………………..

แนวเดินที่มีทิศทางจาก a ถึง c

…………………………………………………………………………………….

แนวเดินที่มีทิศทางจาก a ถึง d

……………………………………………………………………………………..

แนวเดินที่มีทิศทางจาก a ถึง e

…………………………………………………………………………………….

แนวเดินที่มีทิศทางจาก a ถึง f

……………………………………………………………………………………..

แนวเดินที่มีทิศทางจาก b ถึง a

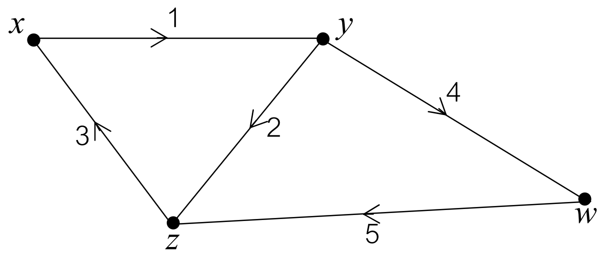
…………………………………………………………………………………….

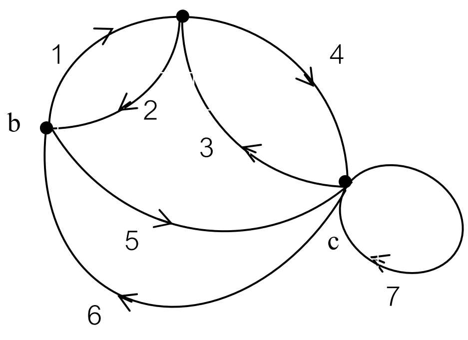
แนวเดินที่มีทิศทางจาก b ถึง c

…………………………………………………………………………………….

ต่อไปนี้เราจะพิจารณาเงื่อนไขของการที่กราฟมีทิศทาง จะมีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง

ตัวอย่าง 3.5.6 กำหนดกราฟมีทิศทาง D_1 และ D_2 ดังรูป 3.5.5





รูป 3.5.5

1. จงพิจารณาว่ากราฟมีทิศทางรูปใด ที่มีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง กล่าวคือ " เริ่มต้นที่จุดใดจุดหนึ่ง ลากไปตามทิศทางของเส้นโค้งทุกเส้นโค้งโดยใช้เส้นโค้งเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้ " และให้หาออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง

....

....

....

2. จากข้อ 1 ท่านคิดว่า D_1 และ D_2 มีความแตกต่างอะไรบ้าง ในประเด็นของการมีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง

....

....

....

3. ให้ท่านสรุปเงื่อนไขการที่กราฟมีทิศทางใดๆ จะมีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง

....

....

....

พิจารณากราฟ D_1 ดังรูป 3.5.5

จะได้ว่า $\phi(1) = (x, y)$ x เป็นหาง (Tail) ของ 1
y เป็นหัว (Head) ของ 1

$\phi(2) = (y, z)$ y เป็นหาง (Tail) ของ 2
z เป็นหัว (Head) ของ 2

$\phi(3) = (z, x)$ z เป็นหาง (Tail) ของ 3
x เป็นหัว (Head) ของ 3

$\phi(4) = (y, w)$ y เป็นหาง (Tail) ของ 4
w เป็นหัว (Head) ของ 4

$\phi(5) = (w, z)$ w เป็นหาง (Tail) ของ 5
z เป็นหัว (Head) ของ 5

เราจะเห็นว่าจุด 1 จุด สามารถเป็นได้ทั้งหัวและหางของเส้นโค้ง และอาจเป็นหัวหรือหางของเส้นโค้งได้มากกว่า 1

บทนิยาม 3.5.2 ให้ v เป็นจุดใดๆ ของกราฟมีทิศทาง เราจะเรียกจำนวนส่วนโค้งที่มี v เป็นหัวว่า **ระดับขั้นเข้า** (Indegree) ของ v เขียนแทนด้วย $d^-(v)$ และจะเรียกจำนวนส่วนโค้งที่มี v เป็นหางว่า **ระดับขั้นออก** (Outdegree) ของ v เขียนแทนด้วย $d^+(v)$ สำหรับ จำนวนส่วนโค้งทั้งหมดที่มาตกกระทบกับจุด v เราจะเรียกว่า **ระดับขั้นของ** v เขียนแทนด้วย $d(v)$

เช่น จากตัวอย่าง 3.5.6 เราจะได้ว่า แต่ละจุดของกราฟ D_1 มีระดับขั้นเข้า และ ระดับขั้นออก ดังนี้

$d^-(w) = 1, \quad d^+(w) = 1$

$d^-(x) = 1, \quad d^+(x) = 1$

$d^-(y) = 1, \quad d^+(y) = 2$

$d^-(z) = 2, \quad d^+(z) = 1$

และแต่ละจุดของกราฟ D_2 มีระดับขั้นเข้า และ ระดับขั้นออก ดังนี้

$d^-(a) = \qquad , \quad d^+(a) =$

$d^-(b) = \qquad , \quad d^+(b) =$

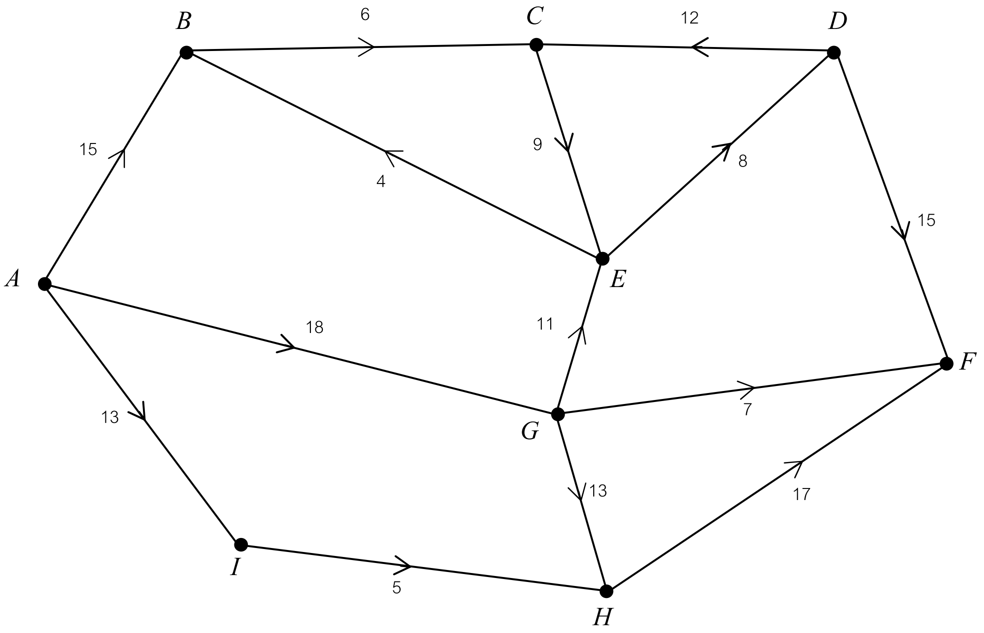
$d^-(c) = \qquad , \quad d^+(c) =$

จากตัวอย่าง 3.5.6 และบทนิยาม 3.5.2 ทำให้เราสามารถสรุปเงื่อนไขการที่กราฟมีทิศทาง มีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทางได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5.1 กราฟมีทิศทาง D มีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง ก็ต่อเมื่อ D เป็นกราฟเชื่อมโยง และสำหรับทุก ๆ v ซึ่งเป็นจุดใน D มี $d^-(v) = d^+(v)$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.4.1

ตัวอย่าง 3.5.7 กำหนดกราฟมีทิศทาง $D = (V, A, \phi)$ ดังรูป 3.5.6



รูป 3.5.6

1. จงหา $d^{-}(v)$, $d^{+}(v)$, $d(v)$ ทุกจุด v

....
....
....
....
....

2. กราฟมีทิศทางรูป 3.5.6 มีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทางหรือไม่ ถ้ามีให้หาออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง

....
....
....
....

เฉลย จากกราฟมีทิศทาง $D = (V, A, \phi)$ ที่กำหนดให้ดังรูป 3.5.6

1. ค่า $d(v)$, $d^-(v)$, $d^+(v)$ ทุกจุด $v \in V$

$d^-(A) = 0$, $d^+(A) = 3$ และ $d(A) = 3$

$d^-(B) = 2$, $d^+(B) = 1$ และ $d(B) = 3$

$d^-(C) = 2$, $d^+(C) = 1$ และ $d(C) = 3$

$d^-(D) = 1$, $d^+(D) = 2$ และ $d(D) = 3$

$d^-(E) = 2$, $d^+(E) = 2$ และ $d(E) = 4$

$d^-(F) = 3$, $d^+(F) = 0$ และ $d(F) = 3$

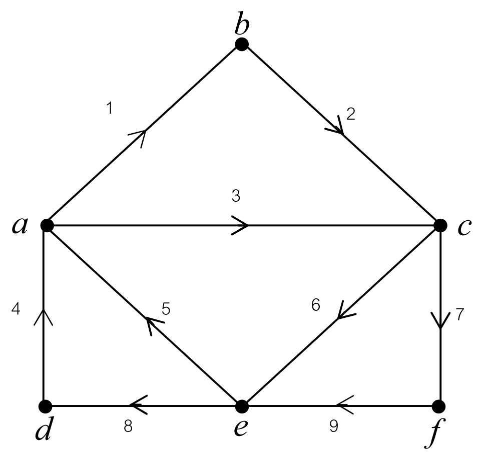
$d^-(G) = 1$, $d^+(G) = 3$ และ $d(G) = 4$

$d^-(H) = 2$, $d^+(H) = 1$ และ $d(H) = 3$

$d^-(I) = 1$, $d^+(I) = 1$ และ $d(I) = 2$

2. เราไม่สามารถหาออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทางได้ เพราะมี v ซึ่งเป็นสมาชิกของจุดในกราฟที่มี $d^-(v) \neq d^+(v)$

ตัวอย่าง 3.5.8 กำหนดจากกราฟที่มีทิศทาง $D = (V, A, \phi)$ ดังรูป 3.5.7



รูป 3.5.7

1. จงหา $d^{-}(v)$, $d^{+}(v)$, $d(v)$ ทุกจุด v

....
....
....
....
....

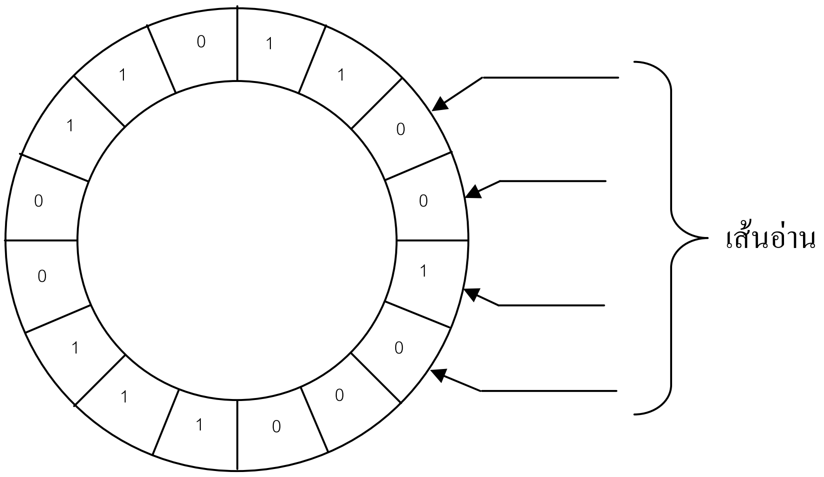
2. กราฟมีทิศทางรูป 3.5.7 มีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทางหรือไม่ ถ้ามีให้หาออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง

....
....
....
....

3.6 การประยุกต์

3.6.1 ปัญหาการออกแบบหน้าปัดคอมพิวเตอร์ (Designing And Efficient Computer Drum)

ต้องการทำหน้าปัดรูปวงแหวนสำหรับบันทึกข้อมูลในรูปความดันกระแสไฟฟ้า 2 สถานะ สถานะหนึ่งเป็น 0 อีกสถานะหนึ่งเป็น 1 โดยจะแบ่งพื้นที่รูปวงแหวนออกเป็นช่องเล็กๆ เท่าๆ กัน แต่ละช่องจะบรรจุสัญญาณกระแสไฟฟ้า (ตัวนำหรือฉนวน) อย่างใดอย่างหนึ่ง ช่องที่บรรจุตัวนำจะให้สัญญาณเป็น 1 (กระแสไฟฟ้าไหลผ่านได้) ส่วนช่องที่บรรจุฉนวนจะให้สัญญาณเป็น 0 (กระแสไฟฟ้าไหลผ่านไม่ได้) เช่น ถ้าตำแหน่งต่างๆของหน้าปัดเป็นดังรูป เครื่องจะอ่านตามเข็มนาฬิกาเป็น 0010 บนเส้นอ่าน 4 เส้นที่อยู่กับที่



ถ้าหมุนหน้าปัดนี้ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาไป 1 ช่อง เครื่องจะอ่านเป็น1001 ซึ่งจะถือว่าตำแหน่งที่อ่านครั้งแรก และอ่านครั้งที่สองนี้แตกต่างกัน เพราะเครื่องอ่านออกมาไม่เหมือนกัน ตัวเลข 4 ตัว ที่เครื่องอ่านได้แต่ละครั้งอาจหมายถึง การสั่งให้เครื่องทำงานแต่ละอย่าง เช่น เครื่องซักผ้า

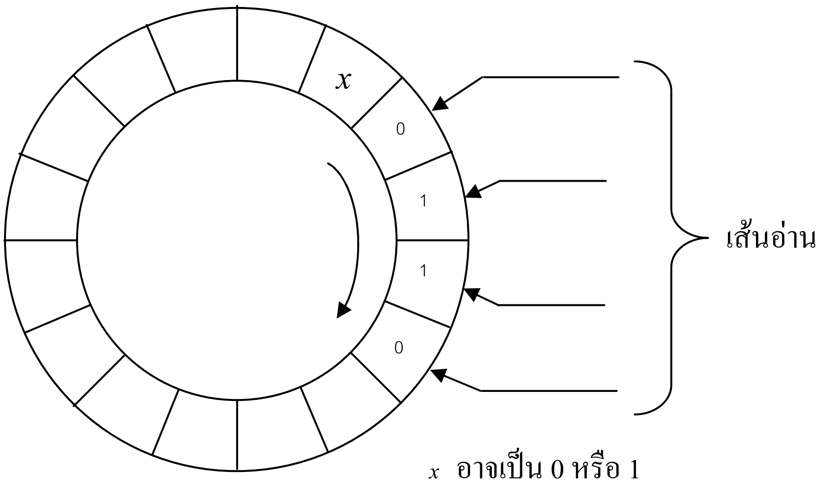
ถ้าเครื่องอ่านเป็น 0000 อาจหมายถึง ให้เครื่องหยุดทำงานทุกอย่าง
ถ้าเครื่องอ่านเป็น 0100 อาจหมายถึง ให้เครื่องทำการปั่น
ถ้าเครื่องอ่านเป็น 0010 อาจหมายถึง ให้เครื่องปล่อยน้ำทิ้ง เป็นต้น

ปัญหาก็คือ จะแบ่งพื้นที่รูปวงแหวนที่มีอยู่ออกเป็นช่องเท่าๆกัน อย่างน้อยกี่ช่อง เพื่อบรรจุ

ตัวนำหรือฉนวนลงไปในแต่ละช่อง และจะบรรจุตัวนำหรือฉนวนลงในช่องใดบ้าง จึงจะทำให้เครื่องอ่านออกได้ตัวเลข 4 ตัว (ประกอบด้วย 0 หรือ 1) แบบต่างๆ มากที่สุด โดยเครื่องมีเส้นอ่าน 4 เส้น เช่น ถ้าช่องฉนวนมาอยู่ตรงเส้นอ่านทั้ง 4 เส้น เครื่องอ่านเป็น 0000 ถ้าช่องตัวนำมาอยู่ตรงกับเส้นที่ 1 และช่องฉนวนมาอยู่ตรงกับเส้นอ่านอีก 3 เส้นที่เหลือ เครื่องอ่านเป็น 1000 เป็นต้น

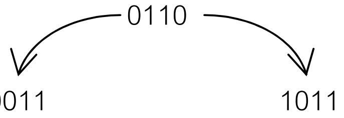
วิธีคิดหาคำตอบของปัญหานี้เราจะทำดังนี้

ถ้าเรานำเลข 0 และ 1 มาเขียนเรียงเป็นตัวเลข 4 ตัว จะได้แบบต่างๆกัน ทั้งหมด $= 2^4 = 16$ แบบ คือ 0000 , 0001 , 0010 , 0100 , 1000 , … , 1111

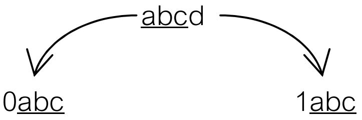


x อาจเป็น 0 หรือ 1

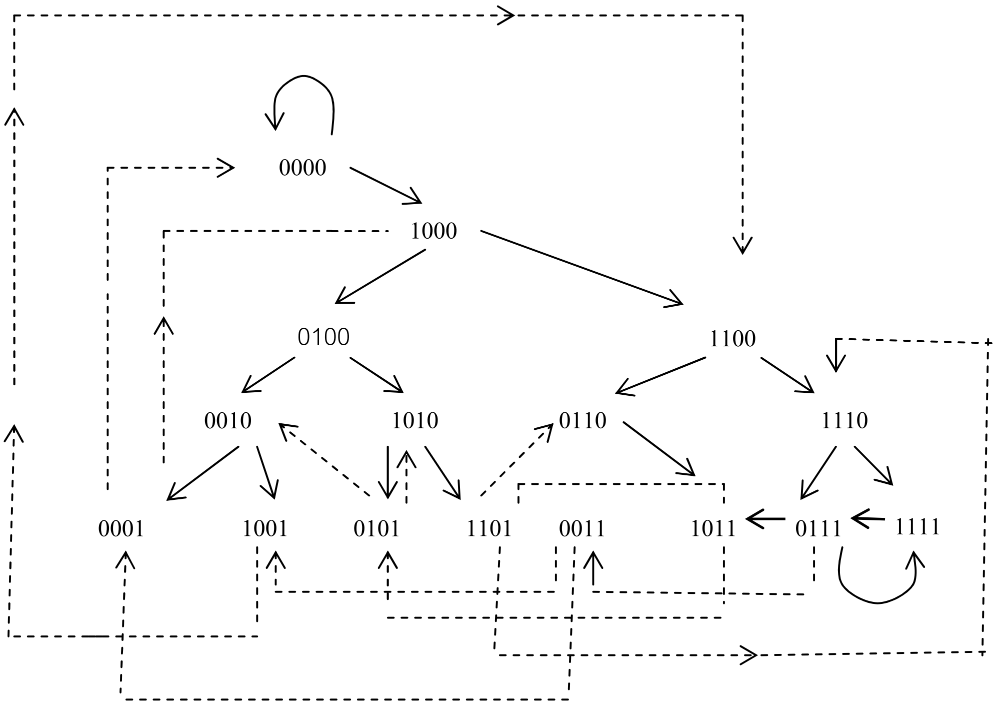
จากเดิมที่เครื่องอ่านเป็น 0110 เมื่อหมุนไป 1 ครั้ง อาจกลายเป็น 0011 หรือ1011



ดังนั้น ถ้าเดิมเครื่องอ่านเป็น abcd โดยที่ a,b,c,d คือ 0 หรือ 1 เมื่อหมุนไป 1 ครั้ง เครื่องจะอ่านเป็น 0abc หรือ1abc



ดังนั้นจะได้แผนภาพดังรูป 3.6.1

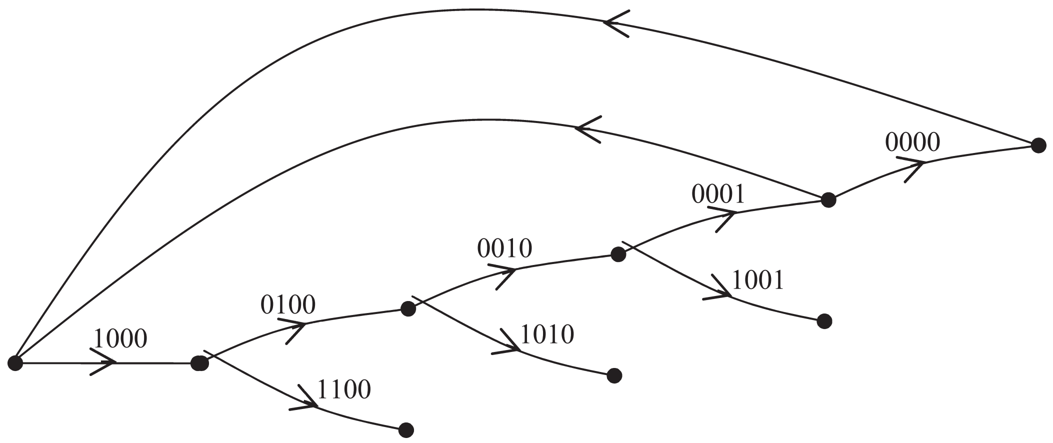


รูป 3.6.1

ปัญหาจึงกลายเป็นว่าจะใส่ตัวเลข 0 หรือ 1 ลงในช่องหน้าปัดรูปวงแหวนน้อยที่สุดกี่ตัว และใส่อย่างไร ซึ่งเมื่อหมุนวงแหวนไปทีละช่องแล้วเครื่องจะอ่านตัวเลขครั้งละ 4 ตัว ได้ครบ 16 แบบ โดยไม่ซ้ำกันเลย ซึ่งถ้าหากทำอย่างไม่ประหยัดก็จะต้องใส่ตัวเลข 0 หรือ 1 ถึง 64 ตัว (แบ่งพื้นที่วงแหวนออกเป็นช่องเล็กๆถึง 64 ช่อง)

จากรูป 3.6.1 ถ้าเราเริ่มต้นที่ 0000 แล้วจะมีวิธีใดที่จะลากส่วนโค้งผ่านชุดตัวเลข 0 หรือ 1 ที่มีอยู่ทั้งหมด และกลับมาที่เดิมได้

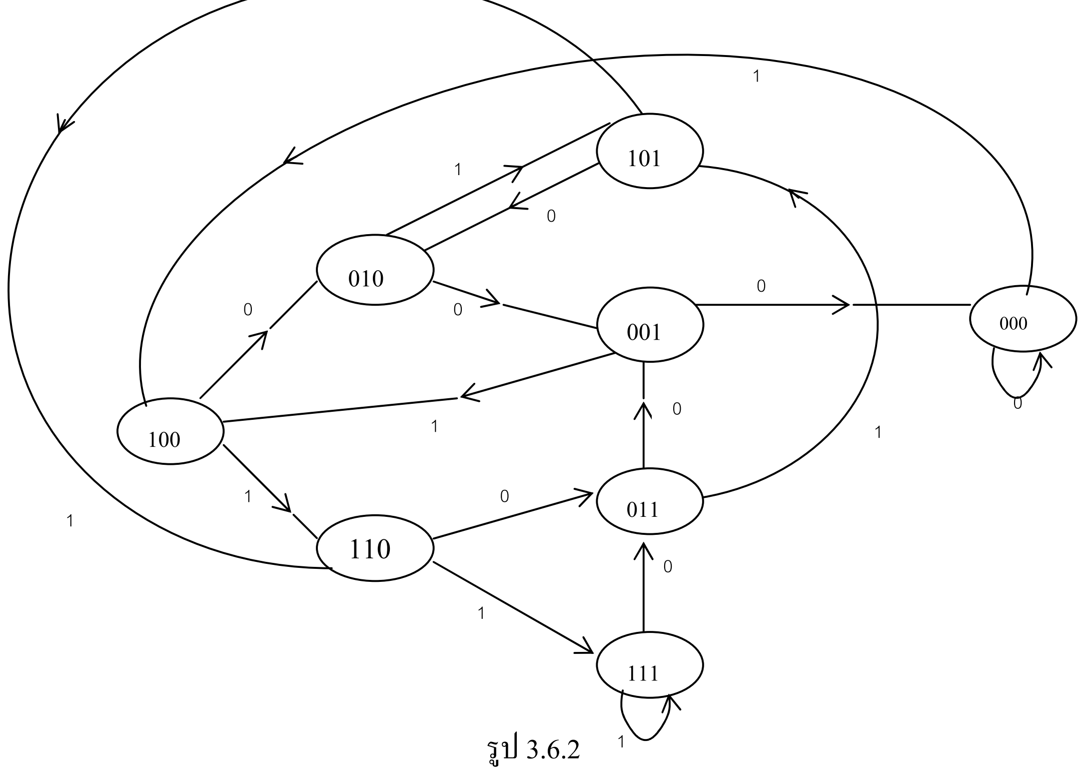
ถ้าเราคิดว่าชุดของตัวเลข 0 หรือ 1 ที่ต้องการลากเส้นผ่านนั้นเป็นจุด ดังนั้นปัญหาคือ เราต้องการลากเส้นผ่านทุกจุด จุดละครั้งแล้วกลับมาที่เดิมได้หรือไม่ซึ่งปัญหานี้จะนำเอาทฤษฎีบท 3.4.1 มาใช้โดยตรงไม่ได้ เพราะการมีออยเลอร์ทัวร์นั้นเป็นการลากเส้นผ่านทุกเส้น เส้นละครั้งเดียวแต่อาจจะซ้ำจุด ถ้าเราจะนำทฤษฎีบท 3.5.1 มาใช้ ก็จะต้องเอาชุดของตัวเลข 0 หรือ 1 ซึ่งเขียนเรียงกันทีละ 4 ตัว ทั้ง 16 แบบ นั้นมาตั้งเป็นชื่อเส้น



เนื่องจากเดิม <u>100</u>0 อาจเปลี่ยนไปเป็น 0<u>100</u> หรือ 1<u>100</u> ซึ่งจะเห็นว่าเลข 3 ตัวแรกที่เริ่มต้นจะเหมือนกับเลข 3 ตัวหลัง ในกรณีนี้เราจะให้ชื่อจุด คือ 100

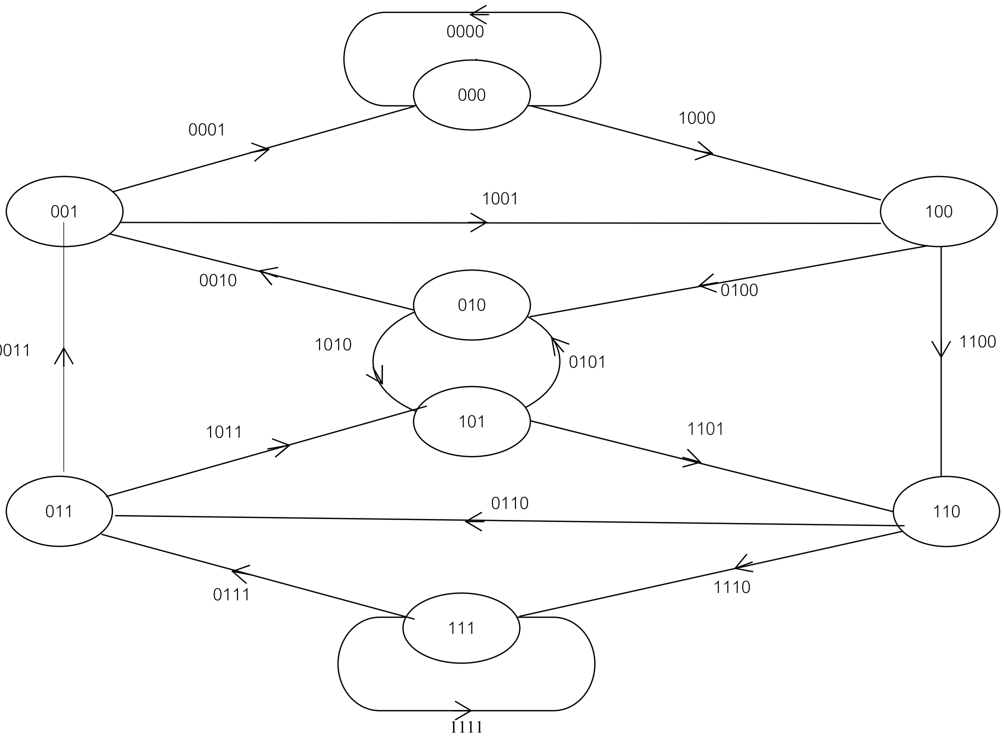
จากเดิม 1000 ถ้าเปลี่ยนไปเป็น 0100 เราจะลากเส้นเชื่อมจุด 100 และจุด 010 โดยให้เส้นเชื่อมทั้ง 2 จุดนี้เป็น 0

จากเดิม 1000 ถ้าเปลี่ยนไปเป็น 1100 เราจะลากเส้นเชื่อมจุด 100 และจุด 110 โดยให้เส้นเชื่อมทั้ง 2 จุดนี้เป็น 1 เป็นต้น ในที่สุดจะได้แผนภาพดังรูป 3.6.2



รูป 3.6.2

จากรูป 3.6.2 จะสังเกตเห็นว่า จากชื่อจุดที่ประกอบด้วยเลข 3 ตัวนั้น ถ้าเลข 2 ตัวหน้าของจุดแรกเหมือนกับเลข 2 ตัวหลังของจุดหลัง จะมีเส้นเชื่อมจากจุดแรกไปยังจุดหลัง โดยที่หัวลูกศรอยู่ที่จุดหลัง และถ้าให้เส้นเชื่อมนี้ประกอบด้วยตัวเลข 4 ตัว เมื่อตัวเลขตัวแรกคือ ตัวเลขที่กำกับอยู่บนเส้นเชื่อมจุดทั้งสอง และตัวเลข 3 ตัวหลังคือ ชื่อของจุดแรก ดังนั้นจากรูป 3.6.2 จะทำให้แผนภาพในรูป 3.6.3

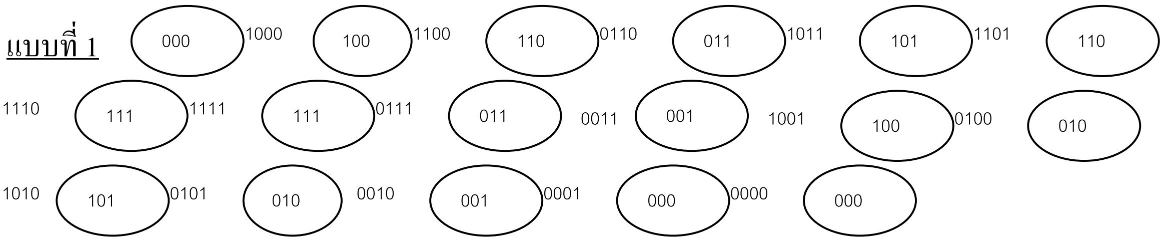


รูป 3.6.3

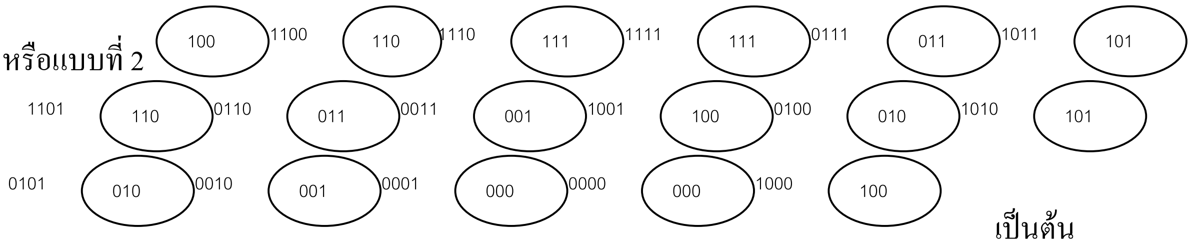
รูป 3.6.3 เป็นกราฟที่เส้นทุกเส้นมีทิศทางกำกับ ซึ่งเราจะเรียกว่ากราฟมีทิศทาง

จะเห็นว่ากราฟ 3.6.3 เป็นกราฟเชื่อมโยงและทุกจุดมีระดับขั้นเป็นเลขคู่ (จำนวนเส้นที่ลากเข้าและลากออกที่แต่ละจุดเท่ากันด้วย) ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.5.1 กราฟรูป 3.6.3 นี้จะมีออยเลอร์ทัวร์ (ชนิดที่มีทิศทางกำกับบนแต่ละเส้นด้วย) ตัวอย่างของออยเลอร์ทัวร์ เช่น

<u>แบบที่ 1</u>

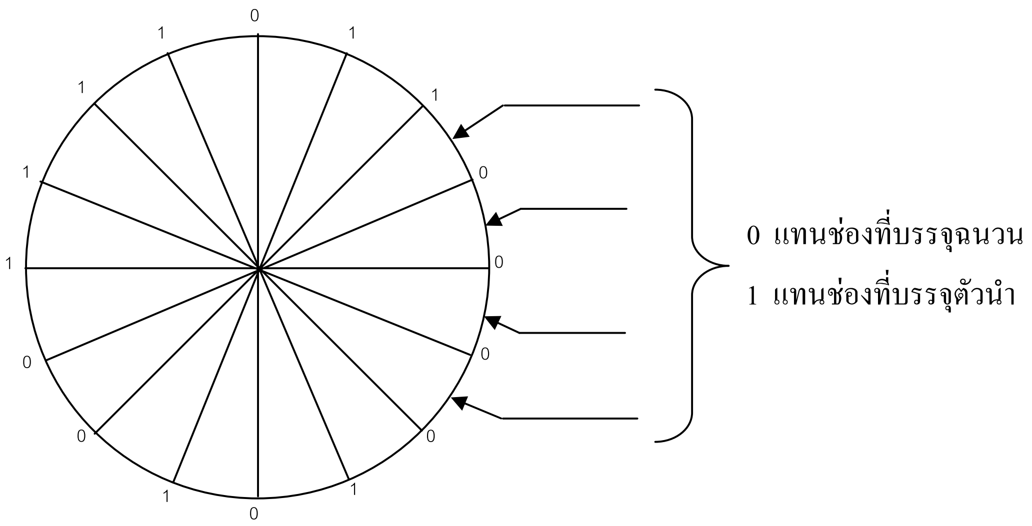


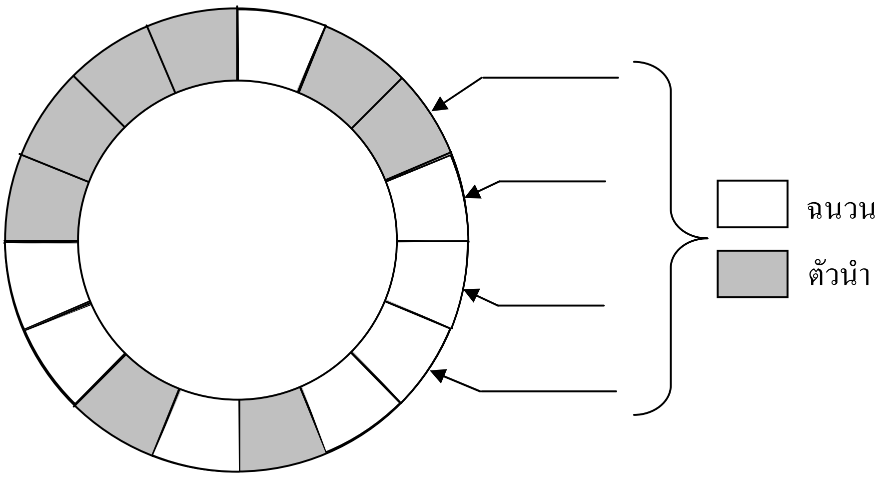
หรือแบบที่ 2



เป็นต้น

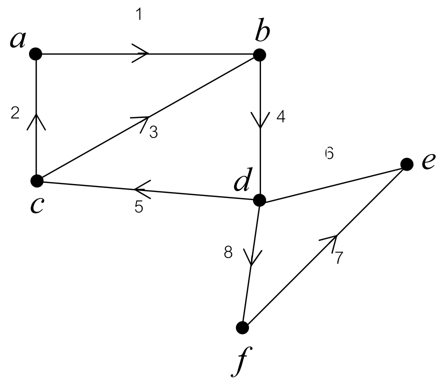
นำออยเลอร์ทัวร์แบบที่ 1 มาออกแบบหน้าปัดรูปวงแหวนได้ดังนี้





แบบฝึกปฏิบัติ 9

1. กำหนดกราฟมีทิศทาง D ดังรูป



1.1 จงหา V, A, ϕ ที่ทำให้ $D = (V, A, \phi)$ เป็นกราฟมีทิศทางดังรูป

1.2 กราฟมีทิศทาง D นี้มีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทางได้หรือไม่ ถ้ามีให้หาออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง

2. จงสร้างกราฟมีทิศทาง $D = (V, A, \phi)$

ถ้ากำหนด $V = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ให้ $\varphi : A \to V \times V$

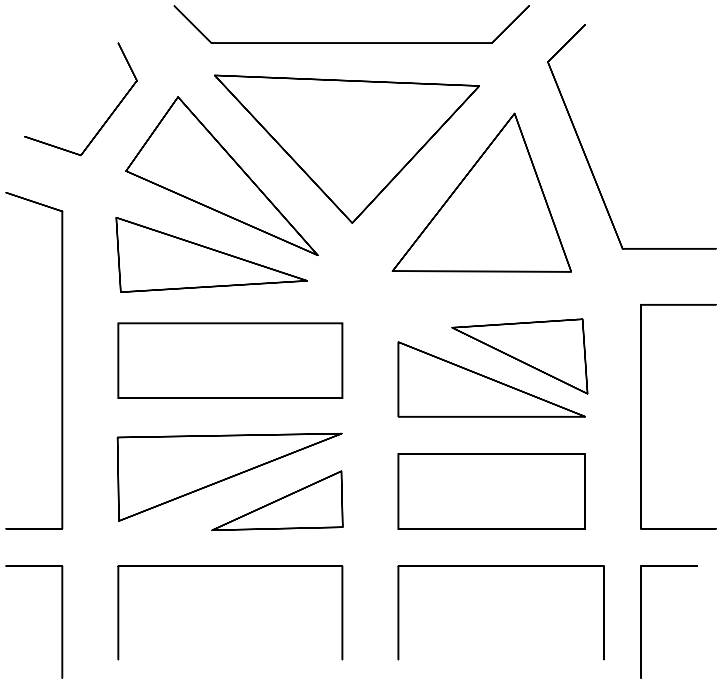
$\phi(1) = (a, a)$	$\phi(2) = (b, a)$
$\phi(3) = (a, b)$	$\phi(4) = (a, c)$
$\phi(5) = (b, a)$	$\phi(6) = (c, b)$
$\phi(7) = (c, d)$	$\phi(8) = (d, e)$
$\phi(9) = (e, f)$	$\phi(10) = (f, c)$

3. กราฟ D ใน ข้อ 2. มีออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทางหรือไม่ ถ้ามีให้หาออยเลอร์ทัวร์ที่มีทิศทาง

4. ต้องการแบ่งพื้นที่วงแหวนออกเป็นส่วนๆ เท่าๆกัน และพื้นที่แต่ละส่วนที่แบ่งได้นั้นจะนำตัวนำหรือฉนวนมาใส่ เพื่อนำวงแหวนดังกล่าวไปสร้างหน้าปัดเครื่องมือที่มีเส้นอ่าน 3 เส้น โดยที่ถ้าส่วนที่เป็นตัวนำมาอยู่ตรงเส้นอ่าน เครื่องจะอ่านเป็น 1 และถ้าส่วนที่เป็นฉนวนมาอยู่ตรงเส้นอ่านเครื่องจะอ่านเป็น 0

อยากทราบว่าจะแบ่งพื้นที่รูปวงแหวนออกเป็นกี่ส่วน และในแต่ละส่วนนั้นควรจะใส่ตัวนำหรือฉนวน ซึ่งทำให้เมื่อหมุนรูปวงแหวนนี้ผ่านเส้นอ่านแล้วทำให้เครื่องอ่านได้แบบต่างๆมากที่สุด

5. กำหนดแผนที่ถนนให้ ดังแสดงในรูป จงหาว่าจะสามารถจัดถนนให้เป็นวันเวย์ (One-way) โดยที่สามารถเดินทางจากที่ใดที่หนึ่งของเมืองนี้ ไปยังที่อื่น ๆ ได้ทุกที่ จะได้หรือไม่ ถ้าได้จงแสดงวิธีการจัดถนนด้วย



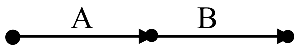
3.6.2 การวางแผนโครงการ (Project Scheduling)

ถ้าเรามีโครงการหนึ่งที่จะต้องทำและโครงการนั้นประกอบด้วยงานย่อยหลายๆอย่าง งานย่อยบางอย่างสามารถทำได้ในเวลาเดียวกัน แต่งานย่อยบางอย่างต้องทำให้เสร็จก่อนงานย่อยอื่น ซึ่งถ้าเราวางแผนโครงการก่อนที่จะทำงาน จะทำให้การทำงานของงานย่อยต่างๆนั้นมีประสิทธิภาพ และใช้เวลาในการทำงานน้อยที่สุดเพื่อให้งานทั้งหมดของโครงการบรรลุเป้าหมายภายในเวลาที่ต้องการ

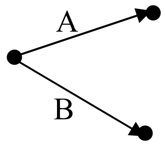
ในการวางแผนโครงการนั้น เราจะแทนงานทั้งหมดของโครงการด้วยกราฟมีทิศทางโดยอาศัยบทนิยามและสัญลักษณ์ต่อไปนี้

บทนิยาม 3.6.3 ข่ายงานกิจกรรม (Activity Network) คือ กราฟที่มีน้ำหนักและมีทิศทาง (V, A, φ) โดยกำหนดให้แต่ละส่วนโค้งแทนงานย่อยต่างๆ ที่ไม่ซ้ำซ้อนของโครงการ และให้น้ำหนักของแต่ละส่วนโค้งแทนระยะเวลาที่ใช้ในการทำงานย่อยนั้น ถ้างานย่อย w_1 เริ่มจากจุด u ไปสิ้นสุดที่จุด v เราจะแทนงานย่อย w_1 ด้วยส่วนโค้ง (u,v) และจะให้จุด $S, E \in V$ เป็นจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดของโครงการ ตามลำดับ

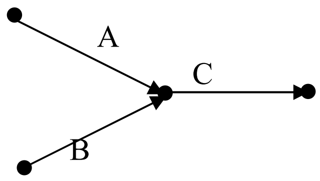
สัญลักษณ์และหลักการเขียนข่ายงานกิจกรรม

1. 

หมายความว่า ทำงาน A เสร็จก่อนแล้วจึงทำงาน B ต่อไป

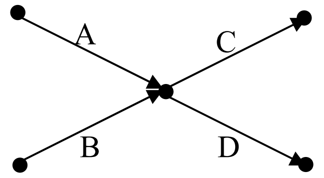
2. 

หมายความว่า งาน A และงาน B ต้องเริ่มทำพร้อมๆกัน

3. 

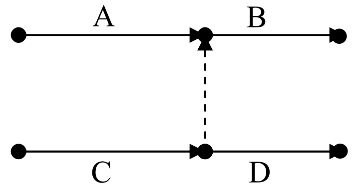
หมายความว่า งาน C จะเริ่มทำได้ก็ต่อเมื่องาน A และงาน B ทำเสร็จแล้ว

4.



หมายความว่า งาน C และ งาน D จะเริ่มทำพร้อมกันได้ ก็ต่อเมื่องาน A และงาน B ทำเสร็จแล้ว

5.



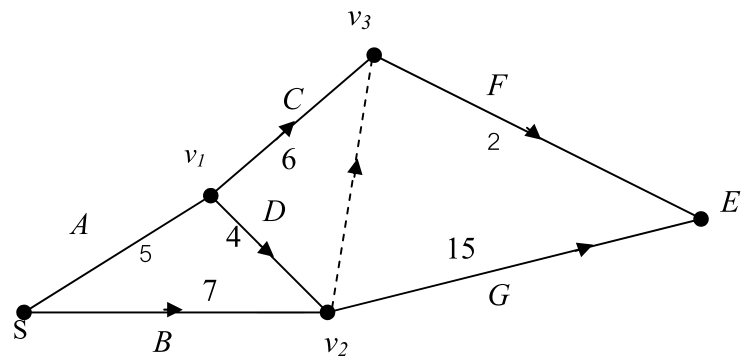
เส้นประ หมายถึง การรองาน โดยไม่ต้องใช้เวลาในการทำงาน และงาน B จะเริ่มต้นทำได้ก็ต่อเมื่องาน A และงาน C ทำเสร็จก่อน แต่งาน D ทำต่อจากงาน C ได้เลย

ตัวอย่าง 3.6.1 ถ้ากำหนดโครงการหนึ่งประกอบด้วยงานย่อยต่างๆ พร้อมข้อจำกัดดังนี้

1. งาน A และ B เริ่มทำโครงการพร้อมๆกัน
2. งาน A ต้องทำให้เสร็จก่อนที่จะเริ่มงาน C และ D
3. งาน C ต้องทำให้เสร็จก่อนที่จะเริ่มงาน F
4. งาน B และงาน D ต้องทำให้เสร็จก่อนที่จะเริ่มงาน G และ F

โดยงานย่อย A, B, C, D, G และ F ใช้เวลาในการทำงาน 5, 7, 6, 4, 15 และ 2 วัน ตามลำดับ

วิธีทำ ถ้าเราแทนโครงการนี้ด้วยข่ายงาน โดยที่งานที่ต่อเนื่องกันจะลากเส้นเชื่อมกัน จากโจทย์เราจะได้ข่ายงานดังรูป 3.6.4



รูป 3.6.4

โดยที่ S แทนจุดเริ่มต้นและ E แทนจุดสิ้นสุด

จากข่ายงานดังรูป 3.6.4 เราจะเรียกว่า **ข่ายงานกิจกรรม (Activity Network)** ◈

ตัวอย่าง 3.6.2 กำหนดโครงงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยงานย่อยต่างๆ พร้อมด้วยข้อจำกัดดังต่อไปนี้

1. งาน A, B, C เริ่มโครงการทำพร้อมกัน
2. งาน A และ B ต้องทำให้เสร็จก่อนที่จะเริ่มงาน D
3. งาน B ต้องทำให้เสร็จก่อนที่จะเริ่มงาน F, H และ P
4. งาน C และ F ต้องทำให้เสร็จก่อนที่จะเริ่มงาน G
5. งาน H และ P ต้องทำให้เสร็จก่อนที่จะเริ่มงาน I และ J
6. งาน D และ J ต้องทำให้เสร็จก่อนที่จะเริ่มงาน K
7. งาน C, F และ K ต้องทำให้เสร็จก่อนที่จะเริ่มงาน L

โดยกำหนดเวลาที่ใช้ในการทำงานย่อยแต่ละอย่างดังนี้

งาน	เวลาที่ใช้ในการทำงาน (วัน)
A, C, H	7
D, F, K	5
P	6
G, J	3
B, I	4
L	2

จงเขียนข่ายงานกิจกรรมของโครงการนี้

....

....

....

....

....

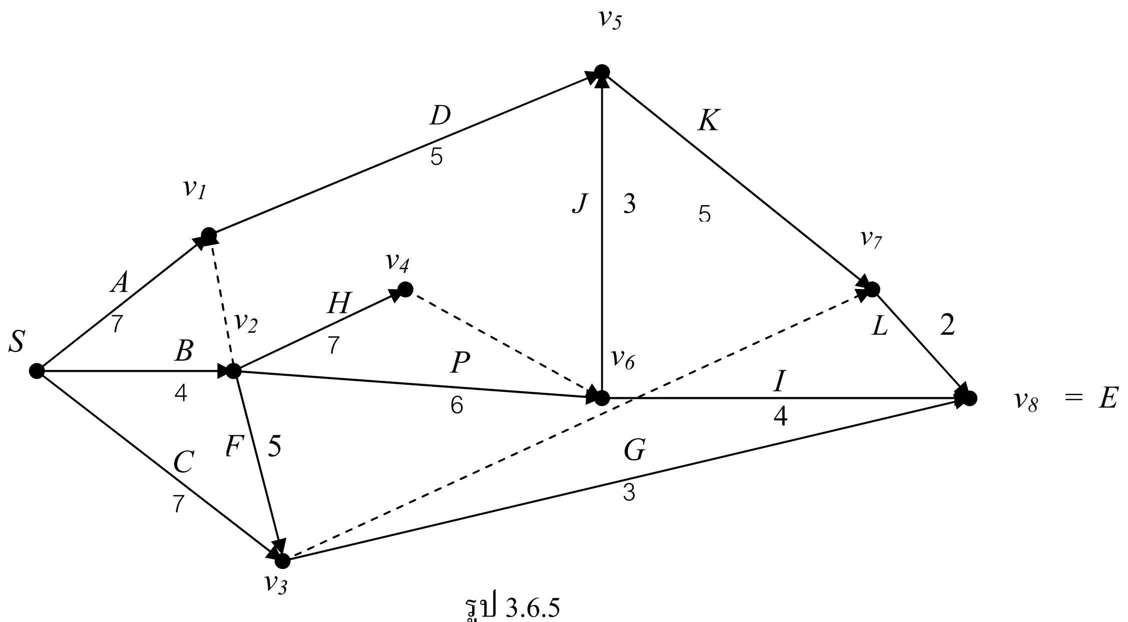
....

....

....

จากตัวอย่าง 3.6.2

ถ้าให้ S และ E เป็นจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดของโครงการตามลำดับแล้ว โครงการดังกล่าวข้างต้นสามารถเขียนแทนได้ด้วยข่ายงานกิจกรรมดังรูป 3.6.5



รูป 3.6.5

◈

> **บทนิยาม 4.4** ให้ N เป็นข่ายงานกิจกรรม ที่มี S และ E เป็นจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดตามลำดับ ถ้า P คือวิถีที่มีทิศทางจาก S ถึง E โดยที่ผลรวมของน้ำหนักของส่วนโค้งทั้งหมดใน P มีค่าสูงสุดแล้ว เราจะกล่าวว่า P เป็น**วิถีวิกฤต (Critical Path)** ใน N

จากรูป 3.6.5

ให้ $T(v)$ แทน ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีมีทิศทางจาก S ถึง v

ดังนั้น $T(S) = 0$

$$T(v_1) = 5$$

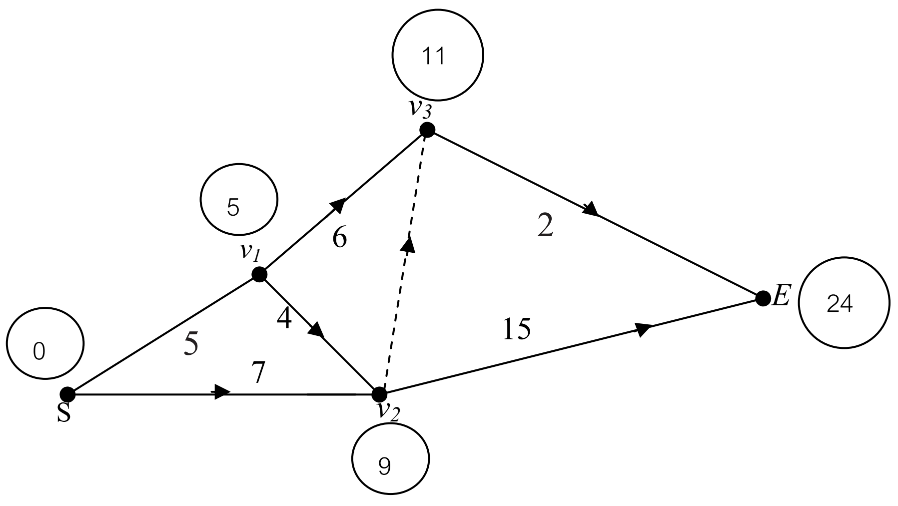
$$T(v_2) = \max\{T(v_1)+4, 7\} = 9$$

$$T(v_3) = \max\{T(v_1)+6, T(v_2)+0\} = 11$$

$$T(E) = \max\{T(v_3)+2, T(v_2)+15\} = 24$$

จะได้ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤต เท่ากับ 24

ซึ่งเราสามารถกำกับระยะเวลาที่ใช้ในวิถีวิกฤตจาก S ถึง E ดังรูป 3.6.6



รูป 3.6.6

ดังนั้นโครงการนี้จะเสร็จสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อต้องใช้เวลา 24 วันและเราสามารถกล่าวว่าค่าของ $T(v_i)$ แต่ละค่าที่จุดต่างๆ จะแทนเวลาเริ่มงานอย่างเร็วที่สุดของงาน (v_i, v_j) เช่น $T(v_3) = 11$ จะหมายถึง งาน (v_3, E) จะเริ่มงานอย่างเร็วที่สุดเมื่อเวลาผ่านไป 11 วันนับจากวันแรกที่เริ่มต้นทำงานของโครงการนี้

ข้อสังเกต จะเห็นว่าการหาเวลาที่น้อยที่สุดในการทำงานให้เสร็จทุกขั้นตอนนั้นก็คือ การหาผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤตนั่นเอง

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นการพิสูจน์ว่า ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤตจะเท่ากับระยะเวลาที่น้อยที่สุดในการทำงานของโครงการนั้น

ทฤษฎีบท 3.5.2 ถ้า N เป็น ข่ายงานกิจกรรมของโครงการหนึ่ง แล้วจะได้ว่า น้ำหนักของวิถีวิกฤต ใน N จะเท่ากับระยะเวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการทำงานทั้งหมดของโครงการนั้น

พิสูจน์ ให้ S และ E เป็นจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของข่ายงานกิจกรรม N ตามลำดับ

ให้วิถีมีทิศทาง $P : S = v_0, v_1, v_2, v_3, .., v_n = E$ เป็นวิถีวิกฤตที่น้ำหนักของ P มีค่าเท่ากับ t

เนื่องจากงานย่อย (v_i, v_{i+1}) เมื่อ $0 \le i \le n-1$ จะเริ่มต้นทำได้ก็ต่อเมื่องานย่อย (v_{i-1}, v_i) ทำเสร็จแล้ว

ดังนั้น จะได้ว่าเวลาที่ใช้ในการทำงานทั้งหมดของโครงการนี้จะต้องไม่น้อยกว่าเวลาt

ต่อไปจะแสดงว่าทุก ๆ งานย่อยใน N สามารถทำให้เสร็จได้ภายในเวลา t

สมมติให้ A เป็นงานย่อยใด ๆ ของโครงการนี้

ถ้า A เป็นงานที่อยู่ในวิถีวิกฤต P จะได้ว่างาน A จะเสร็จภายในเวลา t

สมมติว่า A เป็นงานที่ไม่อยู่ในวิถีวิกฤต P

ให้ Q เป็นวิถีมีทิศทางจาก S ถึง E โดยที่งาน A อยู่ในวิถีมีทิศทาง Q

เนื่องจากวิถีมีทิศทาง Q เริ่มที่จุด S และสิ้นสุดที่จุด E

ดังนั้นวิถีมีทิศทาง P และ Q จะต้องมีจุดร่วมกันอย่างน้อย 2 จุด (อย่างน้อยก็มีจุด S และ E)

ดังนั้นจะต้องมีวิถีมีทิศทาง $Q' : u_0, u_1, ..., u_k$ ซึ่งเป็นวิถีมีทิศทางย่อยใน Q ซึ่ง A อยู่ใน Q' และ $u_0 = v_i$ และ $u_k = v_j$ สำหรับ $0 \le i \le j \le n$ และจุด $u_1, u_2, ..., u_{k-1}$ ไม่อยู่ใน P

เนื่องจาก P เป็นวิถีวิกฤต ดังนั้นวิถีมีทิศทาง

$$S = v_0, v_1, ..., v_i = u_0, u_1, u_2, ..., u_k = v_j, v_{j+1}, ..., v_n = E$$

จะมีผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดอย่างมากที่สุดเท่ากับ t

นั่นคือ งาน A ซึ่งอยู่ในวิถีมีทิศทาง $u_0, u_1, ..., u_k$ จะสามารถทำเสร็จภายในเวลา t โดย $u_0, u_1, ..., u_k$ จะสามารถทำในช่วงเวลาเดียวกันกับงานในวิถีมีทิศทาง $v_i, v_{i+1}, ..., v_j$ ซึ่งอยู่ใน P

เนื่องจาก A เป็นงานย่อยใด ๆ ดังนั้นงานย่อยทุกอย่างของโครงการนี้จะสามารถทำเสร็จได้ภายในเวลา t

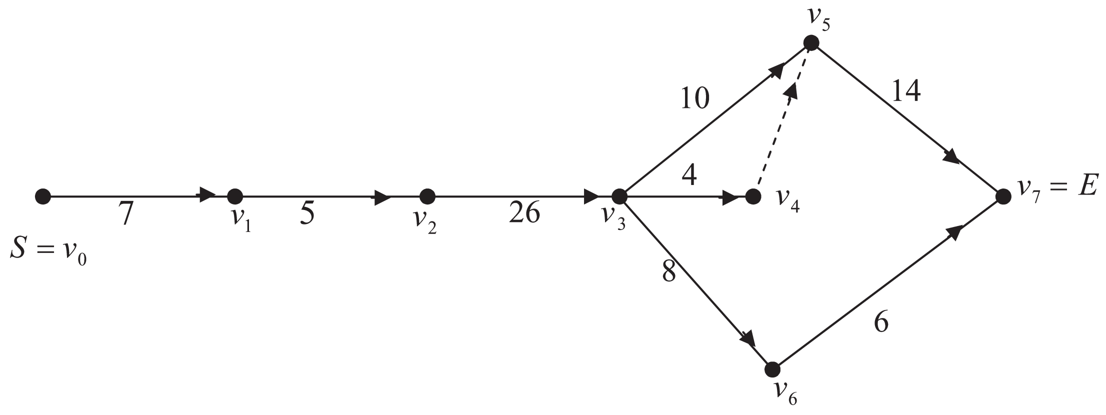
นั่นคือ ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤตใน N จะเท่ากับระยะเวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการทำงานทั้งหมดของโครงการนั้น ◈

ในการแก้ปัญหาการวางแผนโครงการนั้น มีวิธีการที่รู้จักกันดีอยู่ 2 วิธี คือ ซีพีเอ็ม (CPM ย่อมาจาก Critical Path Method) และเพิร์ท (PERT ย่อมาจาก Program Evalution and Review Technique) สำหรับในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีเพิร์ทเท่านั้น

ตัวอย่าง 3.6.3 ผู้รับเหมาก่อสร้างวางแผนสร้างบ้านหลังหนึ่ง โดยแบ่งงานออกเป็น 8 ขั้นตอน ดังรายละเอียดดังต่อไปนี้

งาน	ระยะเวลาที่ใช้ในการทำงาน
(1.) ปรับพื้นฐาน	7
(2.) สร้างฐาน	5
(3.) สร้างตัวบ้าน	26
(4.) งานไฟฟ้า	10
(5.) งานประปา	4
(6.) ตกแต่งภายใน	14
(7.) ตกแต่งภายนอก	8
(8.) ตกแต่งบริเวณบ้าน	6

วิธีทำ แทนโครงการดังกล่าวด้วยข่ายงานดังรูป 3.6.7



รูป 3.6.7

แต่ละจุด v ให้ $T(v)$ แทน ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของกราฟมีทิศทางจาก S ถึง v ดังนั้นจากรูป 3.6.7 จะได้ว่า

ที่จุด S ได้ $T(S) = 0$

ที่จุด v_1 ได้ $T(v_1) = T(S)+7 = 7$

ที่จุด v_2 ได้ $T(v_2) = T(v_1)+5 = 12$

ที่จุด v_3 ได้ $T(v_4) = T(v_2)+4 = 42$

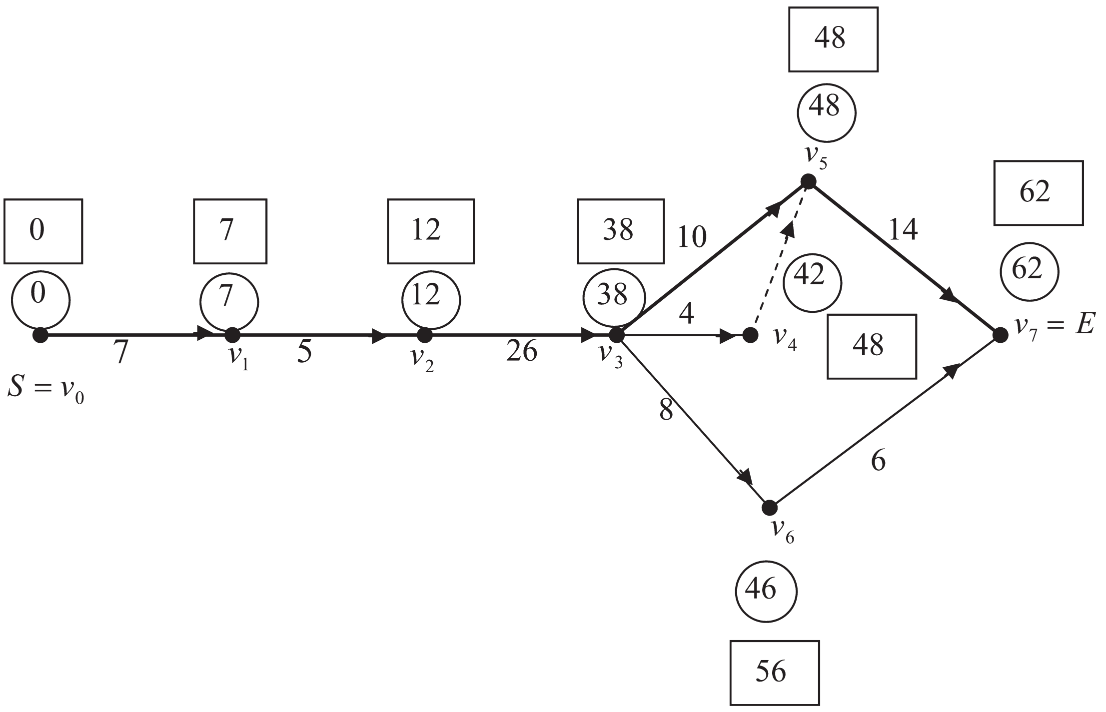
ที่จุด v_4 ได้ $T(v_4) = T(v_3)+4 = 42$

ที่จุด v_5 ได้ $T(v_5) = \max\{T(v_3)+10, T(v_4)+0\} = 48$

ที่จุด v_6 ได้ $T(v_6) = T(v_3)+8 = 46$

ที่จุด E ได้ $T(E) = \max\{T(v_5)+14, T(v_6)+6\} = 62$

จะเขียนค่า $T(v)$ ลงในช่อง ◯ ซึ่งกำกับไว้ที่แต่ละจุด v ดังแสดงในรูป 3.6.8



รูป 3.6.8

จะได้ว่า ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤต เท่ากับ 62 และวิถีวิกฤตคือ S, v_1, v_2, v_3, v_5, E ซึ่งแสดงด้วยเส้นหนักในรูป 3.6.8

ดังนั้น โครงการสร้างบ้านนี้จะเสร็จสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อ ต้องใช้เวลา 62 วัน

นอกจากนี้ เรายังสามารถหาเวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุดของงานย่อยแต่ละอย่าง เมื่องานทั้งหมดของโครงการเสร็จภายใน 62 วันโดยใช้วิธีพิจารณาย้อนจากจุด E ไปจนครบทุกจุดของข่ายงานกิจกรรม ดังนี้

พิจารณาย้อนจากจุด E เราจะเห็นว่า จากจุด E ถึงจุด v_6 ใช้เวลา $62-6=56$ ถึงจุด v_5 ใช้เวลา $62-14=48$ ถึงจุด v_4 ใช้เวลา $48-0=48$ ถึงจุด v_3 ใช้เวลา $\min\{48-10, 48-4, 56-8\} = 38$ ถึงจุด v_2 ใช้เวลา $38-26=12$ ถึงจุด v_1 ใช้เวลา $12-5=7$ ถึงจุด S ใช้เวลา $7-7=0$ จากนั้นเขียนเวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุดของงานย่อยแต่ละอย่างลงในช่อง ซึ่งกำกับไว้ที่แต่ละจุด v ดังในรูป 3.6.8 จะเห็นว่า ที่จุด v_4 มีตัวเลข 48 ลงในช่อง

ซึ่งหมายความว่า งาน (v_3, v_4) จะเสร็จงานอย่างช้าที่สุด 48 วัน สำหรับค่า $T(v_i)$ ซึ่งอยู่ในช่อง นั้น จะเป็นเวลาเริ่มงานอย่างเร็วที่สุดของงาน (v_i, v_j) เช่น
งาน (v_3, v_5) จะเริ่มงานอย่างเร็วที่สุดเมื่อเวลาผ่านไป 38 วัน นับจากวันแรกที่เริ่มต้นทำงานของโครงการนี้

สิ่งที่กล่าวมาแล้วเป็นการหาเวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุด และเวลาเริ่มงานอย่างเร็วที่สุดของงานย่อยแต่ละอย่าง ต่อไปนี้เราจะกล่าวถึงการหาเวลาเสร็จงานอย่างเร็วที่สุด และเวลาเริ่มงานอย่างช้าที่สุดของงานย่อยแต่ละอย่างของโครงการ โดยที่งานทั้งหมดของโครงการเสร็จภายในเวลา 62 วัน

เวลาเสร็จงานอย่างเร็วที่สุด = เวลาที่เริ่มทำงานอย่างเร็วที่สุด + เวลาที่ใช้ในการทำงาน
เวลาเริ่มงานอย่างช้าที่สุด = เวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุด – เวลาที่ใช้ในการทำงาน

เมื่อได้เวลาเสร็จงานอย่างเร็วที่สุดและเวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุดแล้ว เราสามารถหาเวลาที่เหลือได้ดังนี้

เวลาที่เหลือ = เวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุด – เวลาเสร็จงานอย่างเร็วที่สุด

จะเห็นว่าเวลาที่เหลือจะหมายถึง เวลาที่ว่างงานขณะที่รองานอื่นให้เสร็จก่อน แล้วจึงเริ่มงานต่อไป ดังนั้นสำหรับงานก่อสร้าง ผู้รับเหมาก่อสร้างสามารถประหยัดค่าจ้างคนงานรายวันในช่วงเวลาเหล่านี้ได้ โดยหยุดงานชั่วคราวหรือย้ายคนงานไปทำหน้าที่อื่น

เราสามารถสร้างตารางการทำงานของโครงการนี้ได้ดังนี้

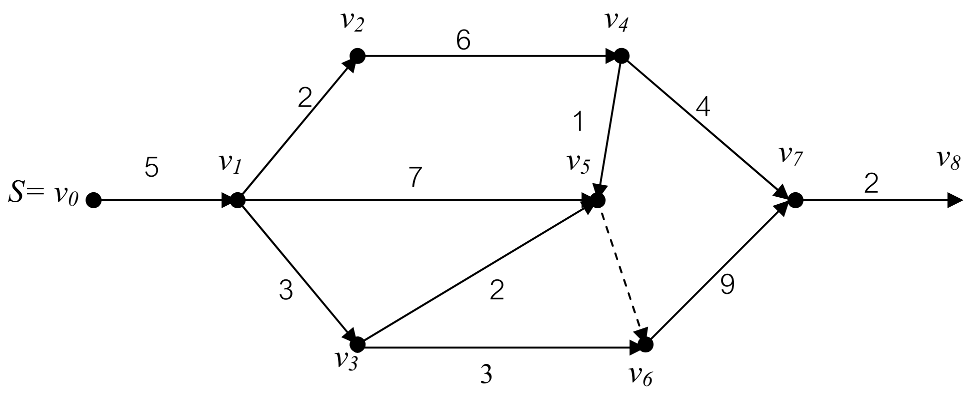
งาน	เวลาที่ใช้ในการทำงาน	เวลาเริ่มงานอย่างเร็วที่สุด	เวลาเสร็จงานอย่างเร็วที่สุด	เวลาเริ่มงานอย่างช้าที่สุด	เวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุด	เวลาที่เหลือ
(S, v_1)	7	0	7	0	7	0
(v_1, v_2)	5	7	12	7	12	0
(v_2, v_3)	26	12	38	12	38	0
(v_3, v_4)	4	38	42	44	48	6
(v_3, v_5)	10	38	48	38	48	0
(v_3, v_6)	8	38	46	48	56	10
(v_5, E)	14	48	62	48	62	0
(v_6, E)	6	46	52	56	62	10

ข้อสังเกต จะเห็นว่า งานทุกงานที่อยู่ในวิถีวิกฤต จะจะมีเวลาเหลือเท่ากับศูนย์ และจากรูป 3.6.8 จะเห็นว่าจุดทั้งหมดในวิถีวิกฤตจะมีตัวเลขในช่อง ◯ และเท่ากับตัวเลขในช่อง $\boxed{}$

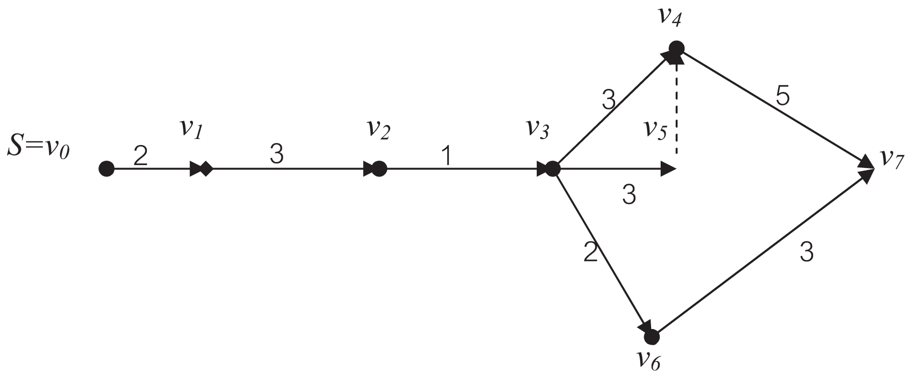
แบบฝึกปฏิบัติ 10

จงหาวิถีวิกฤตและเวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการทำงานโครงการต่อไปนี้

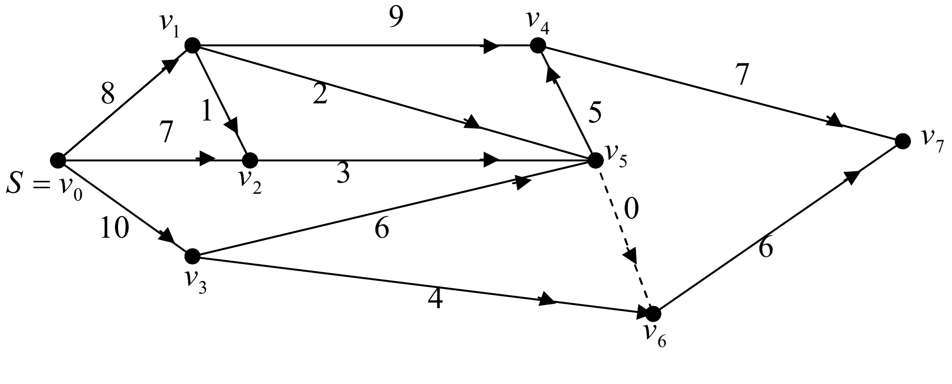
1.



2.



3. ถ้าโครงการหนึ่งแทนด้วยข่ายงานกิจกรรมดังรูป



3.1 จงหาวิถีวิกฤต และเวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการทำงานโครงการนี้

3.2 จงสร้างตารางการทำงานแสดงการเริ่มงาน และเสร็จงานทั้งอย่างเร็วที่สุดและอย่างช้าที่สุด และหาเวลาที่เหลือ

4. ถ้าผู้รับเหมาก่อสร้างวางแผนสร้างหมู่บ้านจัดสรรแห่งหนึ่ง โดยแบ่งงานออกเป็นงานย่อยแต่ละอย่างต่อไปนี้

งาน	รายละเอียดของงาน	งานที่ต้องทำก่อน	เวลาที่ใช้ในการทำงาน (เดือน)
A	ซื้อที่ดิน	ไม่มี	6
B	ออกแบบ	A	3
C	ปรับพื้นที่	A, B	3
D	เปิดจองตึกร้านค้าและหมู่บ้าน	A, B, C	2
F	สร้างตึกร้านค้า	A, B, C	12
G	สร้างหมู่บ้าน	A, B, C	15
H	ปรับปรุงบริเวณ	A, B, C, D, F, G	3

4.1 จงหาวิถีวิกฤตและเวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการทำงานโครงการนี้

4.2 จงสร้างตารางการทำงานแสดงการเริ่มงาน และเสร็จงานทั้งอย่างเร็วที่สุดและอย่างช้าที่สุด และหาเวลาที่เหลือ

เฉลย

1. วิถีวิกฤตและเวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการทำงานโครงการนี้

ให้ $T(v)$ แทนผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีมีทิศทางจาก S ถึง v

ดังนั้น $T(S) = 0$

$T(v_1) = 5$

$T(v_2) = T(v_1)+2 = 7$

$T(v_3) = T(v_1)+3 = 8$

$T(v_4) = T(v_2)+6 = 13$

$T(v_5) = \max\{T(v_1)+7, T(v_3)+2, T(v_4)+1\} = 14$

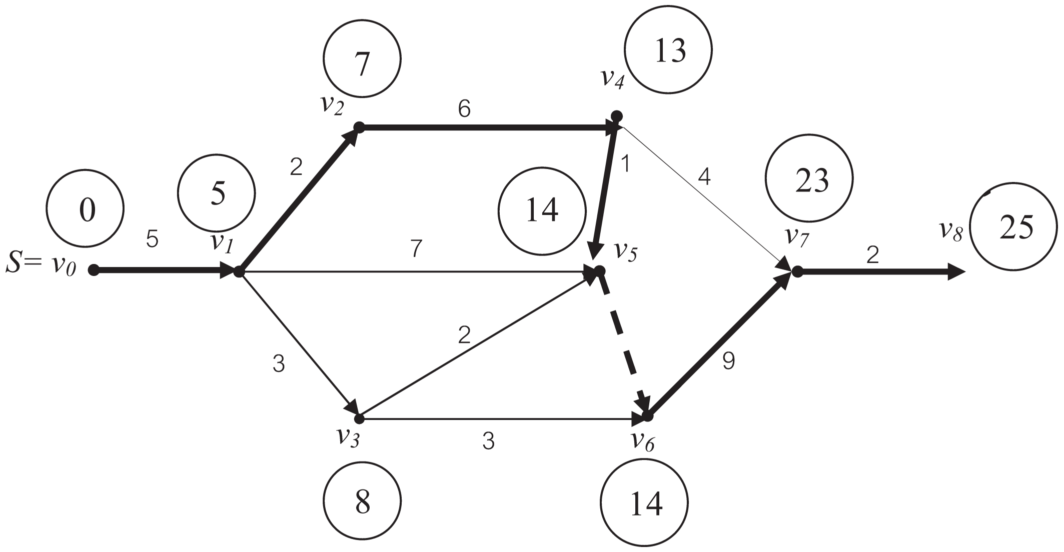
$T(v_6) = \max\{T(v_3)+3, T(v_5)+0\} = 14$

$T(v_7) = \max\{T(v_4)+4, T(v_6)+9\} = 23$

$T(v_8) = T(v_7)+2 = 25$

จะได้ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤต เท่ากับ 25

วิถีวิกฤต คือ



2. วิถีวิกฤตและเวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการทำงานโครงการนี้

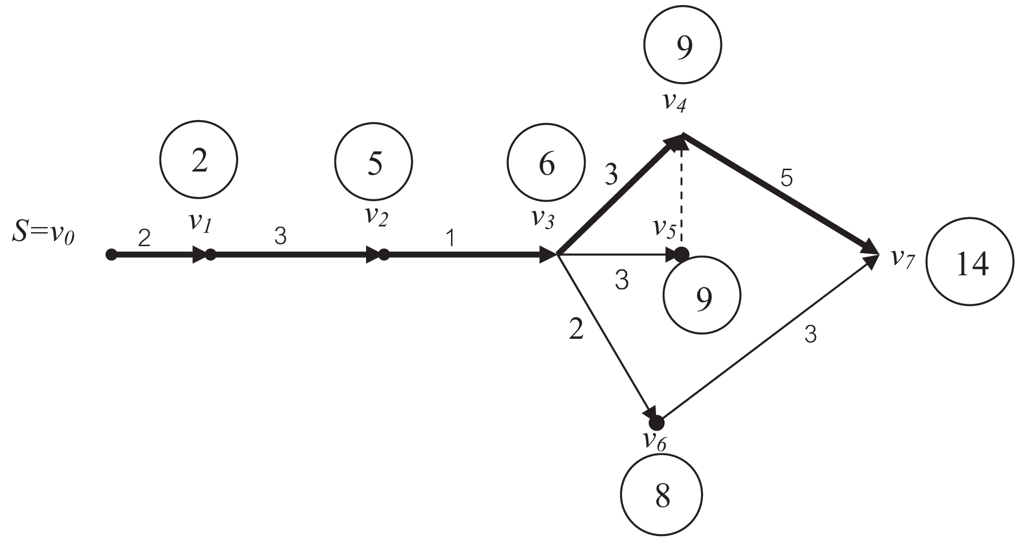
ให้ $T(v)$ แทนผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีมีทิศทางจาก S ถึง v

ดังนั้น $T(S) = 0$

$$T(v_1) = 2$$
$$T(v_2) = T(v_1)+3 = 5$$
$$T(v_3) = T(v_2)+1 = 6$$
$$T(v_5) = T(v_3)+3 = 9$$
$$T(v_6) = T(v_3)+2 = 8$$
$$T(v_4) = \max\{T(v_3)+3, T(v_5)+0\} = 9$$
$$T(v_7) = \max\{T(v_4)+5, T(v_6)+3\} = 14$$

จะได้ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤต เท่ากับ 14

วิถีวิกฤต คือ



3. วิถีวิกฤตและเวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการทำงานโครงการนี้

ให้ $T(v)$ แทนผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีมีทิศทางจาก S ถึง v

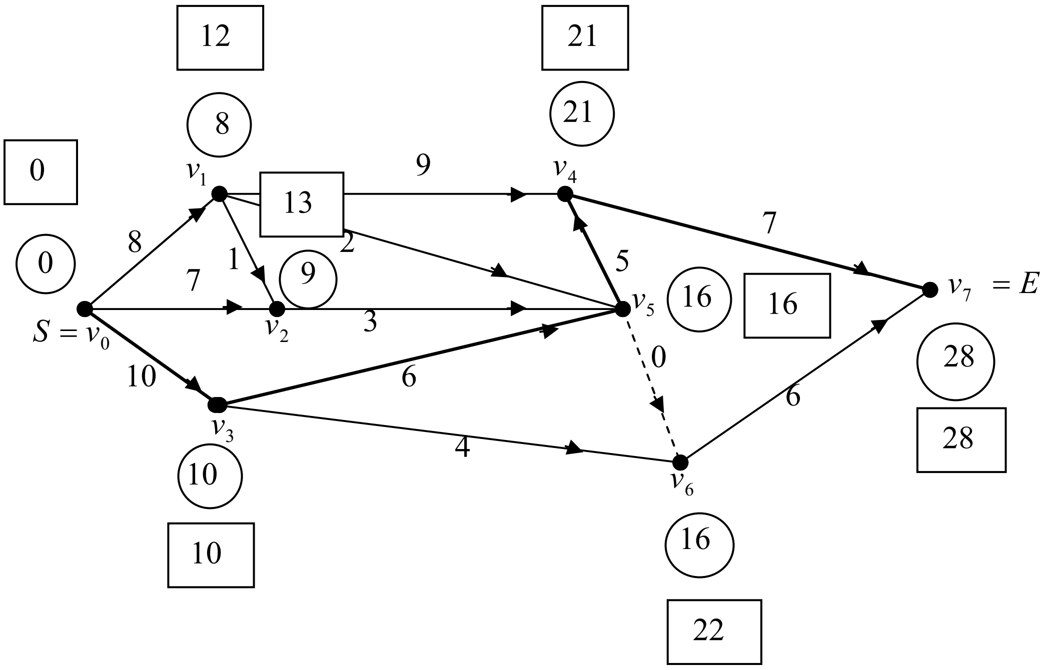
ดังนั้น $T(S) = 0$

$$T(v_1) = 8$$
$$T(v_2) = \max\{T(v_1)+1, 7\} = 8$$
$$T(v_3) = 10$$
$$T(v_5) = \max\{T(v_1)+2, T(v_2)+3, T(v_3)+6\} = 16$$

$$T(v_4) = \max\{T(v_1)+9, T(v_5)+5\} = 21$$
$$T(v_6) = \max\{T(v_3)+4, T(v_5)+0\} = 16$$
$$T(v_7) = \max\{T(v_4)+7, T(v_6)+6\} = 28$$

จะได้ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤตเท่ากับ 28

วิถีวิกฤต คือ



โดยที่ตัวเลขใน ◯ แทนเวลาเริ่มงานอย่างเร็วที่สุดของงาน

หาเวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุดของงานย่อยแต่ละอย่าง

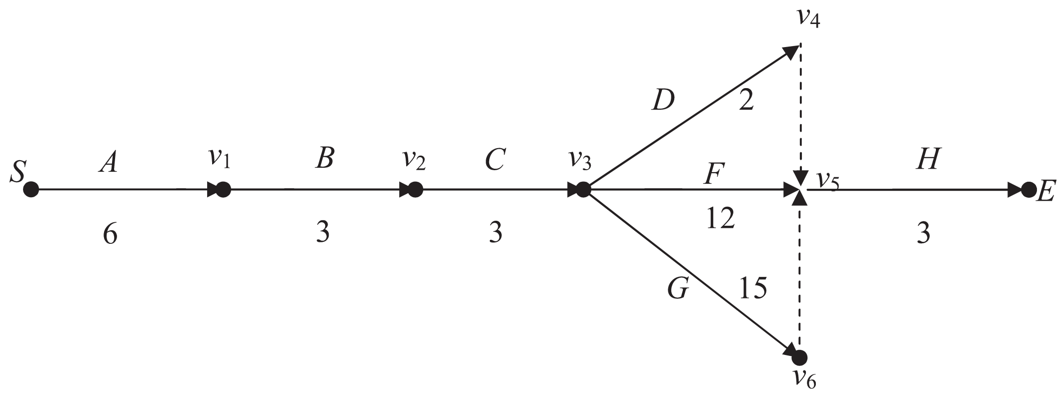
โดยเราใช้วิธีพิจารณาย้อนจากจุด E ไปจนครบทุกจุดของข่ายงานกิจกรรม ดังนี้

พิจารณาจากจุด E เราจะเห็นว่าจากจุด E ถึงจุด v_4 ใช้เวลา $28-7=21$ ถึงจุด v_6 ใช้เวลา $28-6=22$ ถึงจุด v_5 ใช้เวลา $\min\{21-5, 22-0\} = 16$ ถึงจุด v_3 ใช้เวลา $\min\{22-4, 16-6\} = 10$ ถึงจุด v_2 ใช้เวลา $16-3 = 13$ ถึงจุด v_1 ใช้เวลา $\min\{21-9, 16-2, 13-1\} = 12$ ถึงจุด S ใช้เวลา $\min\{12-8, 13-7, 10-10\} = 0$ ซึ่งแสดงเวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุดของงานย่อยแต่ละอย่างลงในช่อง ☐

และเราสามารถสร้างตารางการทำงานของโครงการได้ดังต่อไปนี้

งาน	เวลาที่ใช้ในการทำงาน	เวลาเริ่มงานอย่างเร็วที่สุด	เวลาเสร็จงานอย่างเร็วที่สุด	เวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุด	เวลาเริ่มงานอย่างช้าที่สุด	เวลาที่เหลือ
(S,v_1)	8	0	8	12	4	4
(S,v_2)	7	0	7	13	6	6
(S,v_3)	10	0	10	10	0	0
(v_1,v_2)	1	8	9	13	12	4
(v_1,v_4)	9	8	17	21	12	4
(v_1,v_5)	2	8	10	16	14	6
(v_2,v_5)	3	9	12	16	13	4
(v_3,v_5)	6	10	16	16	10	0
(v_3,v_6)	4	10	14	22	18	8
(v_4,v_7)	7	21	28	28	21	0
(v_5,v_4)	5	16	21	21	16	0
(v_6,v_7)	6	16	22	28	22	6

4. จากโจทย์เราสามารถเขียนข่ายงานกิจกรรมที่แทนโครงการนี้คือ



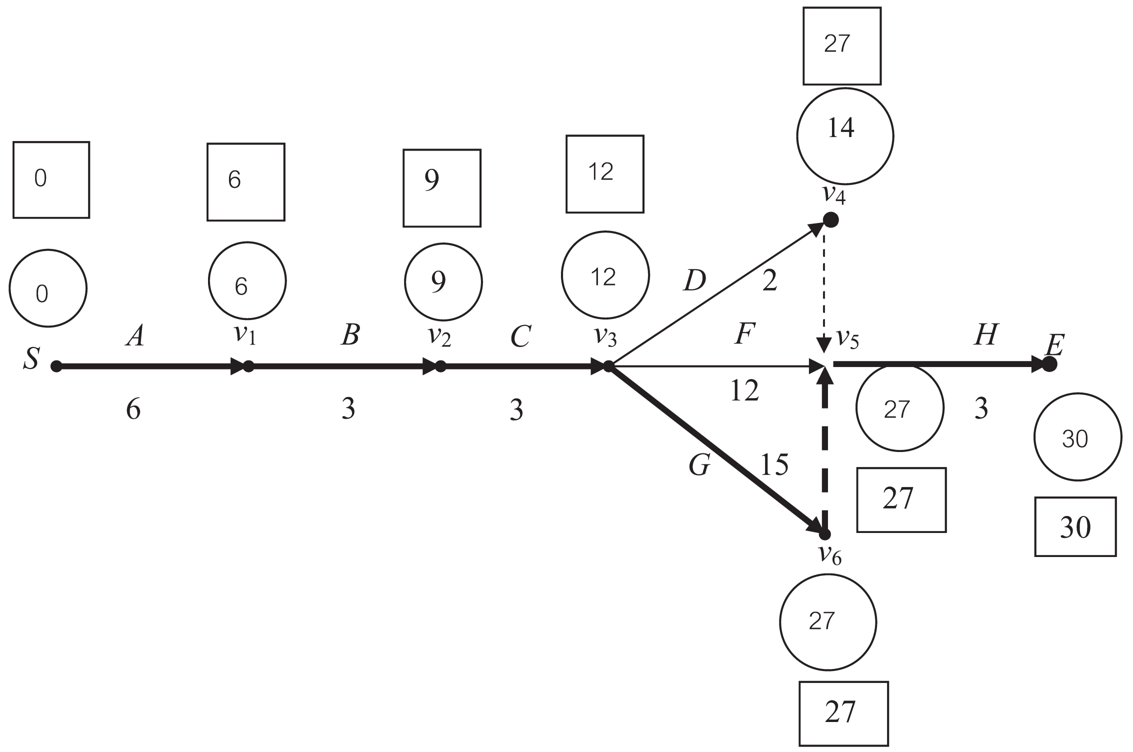
ให้ $T(v)$ แทนผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤตจาก S ถึง v

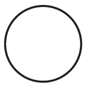
ดังนั้น $T(S) = 0$

$$T(v_1) = 6$$
$$T(v_2) = T(v_1)+3 = 9$$
$$T(v_3) = T(v_2)+3 = 12$$
$$T(v_4) = T(v_3)+2 = 14$$
$$T(v_6) = T(v_3)+15 = 27$$
$$T(v_5) = \max\{T(v_3)+12, T(v_4)+0, T(v_6)+0\} = 27$$
$$T(v_7) = T(v_5)+3 = 30$$

จะได้ผลบวกของน้ำหนักทั้งหมดของวิถีวิกฤต เท่ากับ 30

วิถีวิกฤต คือ



โดยที่ตัวเลขใน  แทนเวลาเริ่มงานอย่างเร็วที่สุดของงาน

หาเวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุดของงานย่อยแต่ละอย่าง

โดยเราใช้วิธีพิจารณาย้อนจากจุด E ไปจนครบทุกจุดของข่ายงานกิจกรรม ดังนี้

พิจารณาจากจุด E เราจะเห็นว่าจากจุด E ถึงจุด v_5 ใช้เวลา $30-3 = 27$ ถึงจุด v_6 ใช้เวลา $27-0 = 27$ ถึงจุด v_4 ใช้เวลา 27-0 = 27 ถึงจุด v_3 ใช้เวลา $\min\{27-2, 27-12, 27-15\} = 12$ ถึงจุด v_2 ใช้เวลา $12-3 = 9$ ถึงจุด v_1 ใช้เวลา $9-3 = 6$ ถึงจุด S ใช้เวลา $6-6 = 0$ ซึ่งแสดงเวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุดของงานย่อยแต่ละอย่างลงในช่อง $\boxed{}$

และเราสามารถสร้างตารางการทำงานของโครงการได้ดังต่อไปนี้

งาน	เวลาที่ใช้ในการทำงาน	เวลาเริ่มงานอย่างเร็วที่สุด	เวลาเสร็จงานอย่างเร็วที่สุด	เวลาเสร็จงานอย่างช้าที่สุด	เวลาเริ่มงานอย่างช้าที่สุด	เวลาที่เหลือ
(S, v_1)	6	0	6	6	0	0
(v_1, v_2)	3	6	9	9	6	0
(v_2, v_3)	3	9	12	12	9	0
(v_3, v_4)	2	12	14	27	25	13
(v_3, v_5)	12	12	24	27	15	3
(v_3, v_6)	15	12	27	27	12	0
(v_5, E)	3	27	30	30	27	0

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ดร.อำรุง จันทวานิช	เลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์	ที่ปรึกษาด้านวิจัยและประเมินผลการศึกษา
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

คณะนักวิจัย :

รศ.อาริสา รัตนเพ็ชร์	หัวหน้าคณะวิจัย
อาจารย์สุธิตา มณีชัย	
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร	
อาจารย์เอธัสวัฒน์ คำมณี	

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นางสาวบุญเทียม	ศิริปัญญา	หัวหน้าโครงการ
นางสาวกิ่งกาญจน์	เมฆา	ประจำโครงการ
นางสาววิชชุลาวัณย์	พิทักษ์ผล	ประจำโครงการ

พิจารณารายงาน :

รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์

บรรณาธิการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา
นางสาววิชชุลาวัณย์ พิทักษ์ผล

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ 0 2668 7123 ต่อ 2530 โทรสาร 0 2668 7329
web site : http://www.onec.go.th และ http://www.thaigifted.org