

หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษากาโด

371.95	สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา.
ส 691 ผ	แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กรุงเทพฯ : 2550 141 หน้า ISBN 978-974-559-069-4 1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร 2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง

**แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**

สิ่งพิมพ์ สกศ.	อันดับที่ 7 /2551
พิมพ์ครั้งที่ 1	ธันวาคม 2550
จำนวน	1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่	สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา 99/20 ถนนสุขุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300 โทร. 0-2668-7123 ต่อ 2530 โทรสาร. 0-2243-1129, 0-2668-7329 Web site: http:// www.onec.go.th และ www.thaigifted.org
ผู้พิมพ์	บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด 580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1 ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230 โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753




คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ่งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตนเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสรา รัตนเพชร และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหาร โรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

๐๑๖๗ 

(นายอรุณ จันทวานิช)

เลขาธิการสภาการศึกษา

คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษา ระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตร การศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพนั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิม ครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัด โปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตร ที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียน ในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน



**ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**

ระดับ	เนื้อหา	จำนวน คาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบ เขียนแผนการจัดการเรียนรู้	
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		7. ทรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึกและมหาวิทยาลัยราชวรุ
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวิทยาลัยราชวรุ
รวม		200		
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวิทยาลัยราชวรุ
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินทิเกรต	40	โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย จ.สตูล	
รวม		200		
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		<ul style="list-style-type: none"> ▪ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ) ▪ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ) ▪ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ) 		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี โรงเรียนพุนพิทยาคม
รวม		100		



สารบัญ

เรื่อง	หน้า
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง จำนวนจริง	1
เอกสารแนบแนวทางที่ 1	7
เอกสารฝึกหัดที่ 1	8
แบบทดสอบ	9
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง สมบัติของระบบจำนวนจริง	11
เอกสารแนบแนวทางที่ 2.1	16
เอกสารแนบแนวทางที่ 2.2	17
เอกสารแนบแนวทางที่ 2.3	18
เอกสารแนบแนวทางที่ 2.4	19
เอกสารแนบแนวทางที่ 2.5	20
เอกสารฝึกหัดที่ 2	22
เอกสารแนบแนวทางที่ 2.6	24
เอกสารความรู้ที่ 2	25
เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม	27
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการพิสูจน์	28
เอกสารแนบแนวทางที่ 3	30
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การลบและการหารจำนวนจริง	33
เอกสารแนบแนวทางที่ 4.1	35
เอกสารแนบแนวทางที่ 4.2	36
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง ทฤษฎีบทเศษเหลือ	38
เอกสารแนบแนวทางที่ 5.1	40
เอกสารแนบแนวทางที่ 5.2	41
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 เรื่อง การแก้สมการตัวแปรเดียว	43
เอกสารแนบแนวทางที่ 6.1	46
เอกสารแนบแนวทางที่ 6.2	47
เอกสารแนบแนวทางที่ 6.3	48
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 เรื่อง สมบัติการไม่เท่า	51
เอกสารแนบแนวทางที่ 7.1	56
เอกสารแนบแนวทางที่ 7.2	57
เอกสารฝึกหัดที่ 7	58
เอกสารความรู้ที่ 7	59



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 เรื่อง ช่วง	60
เอกสารแนะแนวทางที่ 8	64
เอกสารฝึกหัดที่ 8.1	65
เอกสารฝึกหัดที่ 8.2	66
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 เรื่อง การแก้อสมการ	67
เอกสารฝึกหัดที่ 9	73
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 เรื่อง การแก้อสมการ(ต่อ)	74
เอกสารแนะแนวทางที่ 10	78
เอกสารความรู้ที่ 10	80
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์	82
เอกสารแนะแนวทางที่ 11.1	87
เอกสารแนะแนวทางที่ 11.2	90
เอกสารฝึกหัดที่ 11.1	91
เอกสารฝึกหัดที่ 11.2	92
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์(ต่อ)	93
เอกสารฝึกหัดที่ 12	97
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 เรื่อง สัจพจน์ของความบริบูรณ์	98
เอกสารแนะแนวทางที่ 13	102
เอกสารฝึกหัดที่ 13	103
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14 เรื่อง การหารลงตัว	104
เอกสารแนะแนวทางที่ 14	109
เอกสารฝึกหัดที่ 14	110
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15 เรื่อง สมบัติของจำนวนเต็ม (ต่อ)	111
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16 เรื่อง ตัวหารร่วมมาก(ห.ร.ม.)	116
เอกสารฝึกหัดที่ 16	122
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 17 เรื่อง ตัวคูณร่วมน้อย(ค.ร.น.)	123
แบบฝึกหัดระคน	125



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง จำนวนจริง

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระบบจำนวนจริง

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 เขียนเซตของจำนวนนับได้
- 1.2 เขียนเซตของจำนวนเต็มได้
- 1.3 เขียนเซตของจำนวนตรรกยะได้
- 1.4 บอกได้ว่าจำนวนจริงใดเป็นจำนวนตรรกยะหรืออตรรกยะ
- 1.5 บอกได้ว่าจำนวนที่กำหนดให้เป็นจำนวนชนิดใด
- 1.6 บอกความสัมพันธ์ของเซตของจำนวนต่างๆ ได้

2. แนวความคิดหลัก

ระบบจำนวนจริงเป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง กับโอเปอเรชันบวกและคูณที่สอดคล้องกับสัจพจน์ 15 ข้อ

3. เนื้อหาสาระ

เซตของจำนวนที่เป็นสับเซตของจำนวนจริง และความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่างๆ ในรูปแผนผัง

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ทบทวนความแตกต่างของความหมายของจำนวนกับตัวเลข ตามที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น พร้อมทั้งเล่าประวัติความเป็นมาของตัวเลขและจำนวนพอสังเขป (โดยให้นักเรียนทุกคนอ่านจากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4)

4.2 ให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างตัวเลขที่นักเรียนเคยเรียนตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยการถามตอบ แล้วครูเขียนบนกระดานดำ จนกระทั่งได้ตัวเลขในรูปแบบต่างๆ กัน ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ครบทุกรูปแบบ คือ จำนวนเต็มบวกหรือจำนวนนับ, จำนวนเต็มลบ, ศูนย์, เศษส่วน, ทศนิยมซ้ำ, ทศนิยมไม่ซ้ำ, จำนวนที่ติดเครื่องหมายกรณฑ์ เช่น $3, -3, \frac{2}{3}, 0, 0.5, 0.\dot{5}, 0.14253948\dots, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$ เป็นต้น

4.3 ครูใช้วิธีการถามตอบ เพื่อให้นักเรียนแยกประเภทจำนวนที่ได้จากข้อ 1 ออกเป็น 2 กลุ่มซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่า



กลุ่มที่ 1 เป็นประเภทที่สามารถเขียนได้ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม โดยที่ส่วนไม่เป็น 0 ซึ่งได้แก่จำนวนเต็มทั้งหมด เศษส่วน และทศนิยมซ้ำ เช่น $3, -3, \frac{2}{3}, 0, 0.5, 0.\dot{5}$

กลุ่มที่ 2 เป็นประเภทที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ เช่น $0.101101110\dots, 0.14253948\dots, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$ เป็นต้น

ครูเขียนจำนวนทั้ง 2 กลุ่มบนกระดานดำ

4.4 ครูให้นักเรียนพิจารณาลักษณะของจำนวนในกลุ่มที่ 1 ประเภทที่เป็นจำนวนเต็ม โดยการถามตอบ แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปเกี่ยวกับเซตของจำนวนที่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งนักเรียนควรสรุปได้ว่า เซตของจำนวนที่เป็นจำนวนเต็ม อาจแยกได้เป็นดังนี้

เซตของจำนวนเต็มบวก หรือจำนวนนับ ซึ่งแทนด้วย I^+ หรือ N

$$\text{โดยที่ } I^+ = N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

เซตของจำนวนเต็มลบ ซึ่งแทนด้วย I^-

$$\text{โดยที่ } I^- = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

เซตของจำนวนเต็มศูนย์ ซึ่งแทนด้วย I^0

$$\text{โดยที่ } I^0 = \{0\}$$

และถ้า I แทนเซตของจำนวนเต็ม นักเรียนควรสรุปได้ว่า $I = I^+ \cup I^0 \cup I^-$

4.5 ครูแจ้งให้นักเรียนทราบว่าในกรณีที่ ถ้า $a, b \in N$ แล้ว $(a + b) \in N$ จะกล่าวว่าเซตของจำนวนนับมีสมบัติปิดของการบวก และถ้า $a, b \in N$ แล้ว $ab \in N$ จะกล่าวว่าเซตของจำนวนนับมีสมบัติปิดของการคูณ

4.6 ครูถามนักเรียนว่าจำนวนเต็มอื่นๆ นอกจาก I^+ มีสมบัติปิดของการบวกและการคูณหรือไม่ ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่าเซตอื่นๆ ที่มีสมบัติปิดทั้งการบวกและการคูณคือ I^0 ส่วน I^- มีสมบัติปิดการบวกเพียงอย่างเดียว

4.7 ครูใช้การถามตอบเพื่อให้นักเรียนเขียนจำนวนที่กำหนดให้เป็นเศษส่วนของจำนวนเต็ม โดยที่ส่วนไม่เป็น 0 ตามวิธีการที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

เช่น

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \dots$$

$$-3 = -\frac{3}{1} = -\frac{6}{2} = -\frac{9}{3} = \dots$$

$$0.5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots$$

$$0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$



$$0.1\dot{3} = \frac{12}{90}$$

$$1.1\dot{3} = 1\frac{12}{90}$$

ครูบอกนักเรียนว่าจำนวนใดๆ ก็ตาม ที่เขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ โดยที่ส่วนไม่เป็น 0 จะเรียกว่า **จำนวนตรรกยะ** ส่วนจำนวนที่เขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มไม่ได้เรียกว่า **จำนวนอตรรกยะ**

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของจำนวนตรรกยะได้ดังนี้

นิยาม เซตของจำนวนตรรกยะ คือ เซตของจำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม โดยที่ส่วนไม่เป็นศูนย์

ถ้าแทนเซตของจำนวนตรรกยะด้วย Q สามารถเขียน Q แบบบอกเงื่อนไขได้เป็น

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ เมื่อ } a, b \in \mathbb{I}, b \neq 0 \right\}$$

และแทนเซตของจำนวนอตรรกยะด้วย Q' ซึ่งหมายถึง เซตของจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

4.8 ครูให้นักเรียนช่วยกันบอกจำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะ ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่าจำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะ ได้แก่

1. จำนวนเต็ม เช่น $5 = \frac{10}{2}, -4 = -\frac{8}{2}, \dots$

2. เศษส่วนของจำนวนเต็มที่ส่วนไม่เป็นศูนย์ เช่น $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

3. จำนวนที่อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ เช่น $0.7, 2.\dot{3}, 4.\dot{1}\dot{5}, \dots$

$$\text{ซึ่ง } 0.7 = \frac{7}{10}, 2.\dot{3} = \frac{7}{3}, 4.\dot{1}\dot{5} = \frac{137}{33}$$

4.9 ครูถามนักเรียนว่าเศษส่วนที่ส่วนเป็น 0 เป็นจำนวนอะไร นักเรียนควรตอบได้ว่า เศษส่วนที่ส่วนเป็น 0 หาผลลัพธ์ไม่ได้ (ตามที่เคยเรียนในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น) แต่นักเรียนส่วนใหญ่ตอบเหตุผลไม่ได้ ครูจึงแสดงเหตุผลให้นักเรียนดู โดยการถามตอบ ดังต่อไปนี้ (ในวงเล็บควรเป็นคำตอบของนักเรียน)

1. $0 + 3$ มีค่าเท่าไร (3)

2. $0 - 3$ มีค่าเท่าไร (-3)

3. 0×3 มีค่าเท่าไร (0)

4. $\frac{0}{3}$ มีค่าเท่าไร (0)

5. $3 + 0$ มีค่าเท่าไร (3)



6. $3 - 0$ มีค่าเท่าไร (3)
7. 3×0 มีค่าเท่าไร (0)
8. $\frac{3}{0}$ มีค่าเท่าไร (นักเรียนอาจตอบ 0 หรือ 3 หรืออย่างอื่นซึ่งครูยังไม่เฉลยคำตอบที่ถูกต้อง)
9. $\frac{3}{3}$ มีค่าเท่าไร (1)
10. $\frac{5}{5}$ มีค่าเท่าไร (1)
11. $\frac{0}{0}$ มีค่าเท่าไร (นักเรียนอาจตอบ 0 หรือ 1 หรืออย่างอื่น ซึ่งครูยังไม่เฉลยคำตอบที่ถูกต้อง)

ไม่เฉลยคำตอบที่ถูกต้อง)

เพื่อที่จะหาคำตอบที่ถูกต้องของคำถามข้อ 8 กับ 11 ครูถามนักเรียนต่อไปว่า

$$\frac{8}{2} = 4 \quad \text{เป็นจริงหรือเท็จ (จริง)}$$

$$8 = 4 \times 2 \quad \text{เป็นจริงหรือเท็จ (จริง)}$$

เพื่อที่จะหาคำตอบของ $\frac{3}{0}$ ว่ามีค่าเท่าไร

$$\text{ให้ } \frac{3}{0} = \square$$

นั่นคือ $3 = \square \times 0$ ถามนักเรียนว่าจะมีจำนวนใดที่มาแทนที่ \square แล้วคูณกับศูนย์ได้ผลลัพธ์ 3 ซึ่งผู้เรียนจะหาจำนวนนั้นไม่ได้ แสดงว่า $\frac{3}{0}$ หาผลลัพธ์ไม่ได้ หรือ $\frac{3}{0}$ เป็นสัญลักษณ์ที่ไม่มีความหมาย

(Meaningless) ทางคณิตศาสตร์ เพื่อที่จะหาคำตอบของ $\frac{0}{0} = ?$

$$\text{ให้ } \frac{0}{0} = \Delta$$

นั่นคือ $0 = \Delta \times 0$ ถามนักเรียนว่าจะมีจำนวนใดที่มาแทน Δ แล้วคูณกับศูนย์ ได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์ นักเรียนจะตอบได้หลายค่าซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้องทุกค่า

แสดงว่า $\frac{0}{0}$ เป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนด (Indeterminate form)

ดังนั้นจำนวนที่เขียนในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม ตัวหารคือ b จะเป็นศูนย์ไม่ได้

4.10 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 1 เรื่องการเปลี่ยนทศนิยมให้เป็นเศษส่วน ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน

4.11 ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 1 โดยการถามตอบ เพื่อหาข้อสรุปการทำทศนิยมซ้ำให้เป็นเศษส่วน เป็นการทบทวนที่เคยเรียนมาแล้วในชั้น ม.3 ซึ่งสรุป เป็นวิธีสั้นๆ ได้ดังนี้



$$0.\dot{4} = \frac{4}{9}$$

$$0.2\dot{3} = \frac{23}{99}$$

$$0.4\dot{3}\dot{5} = \frac{435 - 4}{990} = \frac{431}{990}$$

$$2.35\dot{4} = 2 \frac{354 - 35}{900} = 2 \frac{319}{900}$$

หรือ $2.35\dot{4} = \frac{2354 - 235}{900} = \frac{2119}{900}$

$$0.999\dots = 1$$

$$5.999\dots = 6$$

$$0.7999\dots = 0.8$$

4.12 ครูยกตัวอย่างจำนวนที่เป็นทศนิยมไม่ซ้ำ เช่น $0.010010001\dots, 1.592837156\dots$ เพื่อให้ นักเรียนทำให้เป็นเศษส่วน (นักเรียนควรบอกได้ว่าไม่สามารถทำให้เป็นเศษส่วนได้) ครูบอกนักเรียนว่า จำนวนเหล่านี้เรียกว่า จำนวนอตรรกยะ แล้วให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างจำนวนอตรรกยะอื่นๆ ที่เคย เห็น เช่น $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ และเรารู้ว่าจำนวนอตรรกยะและจำนวนอตรรกยะทุกจำนวนสามารถจัด รวมเข้าด้วยกันได้โดย

$$Q \cup Q' = R \text{ เมื่อ } R \text{ เป็นจำนวนจริง และ } Q \cap Q' = \emptyset$$

นั่นคือไม่มีจำนวนจริงใดเป็นทั้งจำนวนอตรรกยะและจำนวนตรรกยะ

ครูกล่าวถึงจำนวนอตรรกยะอื่นๆ เพิ่มเติม เช่น e มีค่าประมาณ 2.71828 π มีค่าประมาณ 3.14159

ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดที่ 1 ฝึกความเข้าใจ ใช้เวลา 15 นาที แล้วครูเฉลย และให้ทำแบบฝึกหัด

2.1 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้น ม.4 เป็นการบ้าน

4.13 ครูแจ้งให้นักเรียนทราบว่ายังมีจำนวนอีกประเภทหนึ่ง ที่ได้จากการแก้สมการ $x^2 = -1$ ซึ่งบอกไม่ได้ว่ามากกว่าศูนย์หรือน้อยกว่าศูนย์ จำนวนพวกนี้ไม่ใช่จำนวนจริง ยูเนียนของเซตของจำนวนจริงและเซตของจำนวนชนิดนี้เรียกว่า เซตของจำนวนเชิงซ้อน

4.14 ให้นักเรียนช่วยกันสรุป ความสัมพันธ์ของเซตของจำนวนต่างๆ โดยการถามตอบ แล้วครู แสดงแผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆ ที่เป็นสับเซตของจำนวนจริง แล้วทดสอบ 10 นาที



5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 เอกสารแนะแนวทางที่ 1
- 5.2 เอกสารฝึกหัดที่ 1
- 5.3 แผ่นผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่างๆ
- 5.5 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สสวท.
- 5.6 แบบทดสอบ

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากความสนใจ	2. นักเรียนให้ความสนใจดี ตั้งใจเรียน
3. ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 1	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 90 %
4. ทำโจทย์เอกสารฝึกหัดที่ 1	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %
5. ทำแบบทดสอบ	5. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 90 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 1

คำสั่ง จงเปลี่ยนจำนวนต่อไปนี้ให้เป็นเศษส่วน

1. $0.252525\dots$

วิธีทำ ให้ $0.252525\dots = x \dots\dots(1)$

$(1) \times 100 ; \quad 25.252525\dots = 100x \dots\dots(2)$

$(2)-(1) ; \quad 25 = 99x$

$x = \dots\dots\dots$

นั่นคือ $0.252525\dots = \dots\dots\dots$

2. $0.45\overline{326}$

วิธีทำ ให้ $0.45326326\dots = x \dots\dots(1)$

$(1) \times 100 ; \dots\dots\dots = \dots\dots\dots(2)$

$(1) \times 100000 ; \dots\dots\dots = \dots\dots\dots(3)$

$(3) - (2) \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots$

นั่นคือ $0.45326326\dots = \dots\dots\dots$

ข้อสังเกต $0.45326326\dots = \frac{45326 - 45}{99900} = \frac{45281}{99900}$

3. $2.3\overline{54}$

.....

4. $4.9999\dots$

.....



เอกสารฝึกหัดที่ 1

1. จงพิจารณาว่าจำนวนใดเป็นสมาชิกของเซตใด แล้วเขียนเครื่องหมาย $\sqrt{\quad}$ ลงในช่องเซตนั้น

จำนวน	จำนวนนับ N	จำนวนเต็ม I	จำนวนเต็ม ลบ I'	จำนวน ตรรกยะ Q	จำนวน อตรรกยะ Q'	จำนวนจริง R
$\frac{0}{5}$						
$\frac{6}{2}$						
$-\frac{1}{3}$						
$\sqrt{2}$						
$-\sqrt{9}+1$						
$\sqrt{(-4)^2}$						
$6-\sqrt{16}$						
$\sqrt[3]{-8}+2$						
1.333...						
3.999...						
$\frac{22}{7}$						

2. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

..... 2.1 $\sqrt{3}$ ไม่ใช่จำนวนอตรรกยะ

..... 2.2 $3.999... \in I$

..... 2.3 $\sqrt{-4} \in R$

..... 2.4 $\sqrt{5} \in Q'$

..... 2.5 $0.3033033303... \in Q$ เป็นจำนวนตรรกยะ

..... 2.6 $0.303300330003... \in Q$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

..... 2.7 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ และ $\sqrt{7}$ เป็นจำนวนอตรรกยะทั้งหมด

..... 2.8 $1.15\bar{4} + 3.66\bar{7}8$ เป็นจำนวนตรรกยะ

..... 2.9 ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว a^2 จะเป็นจำนวนตรรกยะ

..... 2.10 $Q \cap Q' = \emptyset$



แบบทดสอบ

คำสั่ง จงเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว แล้วทำเครื่องหมาย (×) ให้ตรงกับข้อที่เลือก

1. จำนวนในข้อใดเป็นจำนวนตรรกยะ

- ก. 4.6394...
- ข. 1.458458458...
- ค. 1.3244235...
- ง. 0.112111211112...

2. จำนวนในข้อใดไม่ใช่จำนวนจริง

- ก. 2π
- ข. $\sqrt{2}$
- ค. $\sqrt{(-3)^2}$
- ง. $\sqrt{-4}$

3. ข้อใดเป็นจริง

- ก. ถ้า x เป็นจำนวนจริงแล้ว $x > 0$ หรือ $x < 0$
- ข. ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว \sqrt{x} เป็นจำนวนอตรรกยะ
- ค. ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว x^2 เป็นจำนวนคู่
- ง. เซตของจำนวนคี่เป็นจำนวนอตรรกยะ

4. ข้อใดไม่จริง

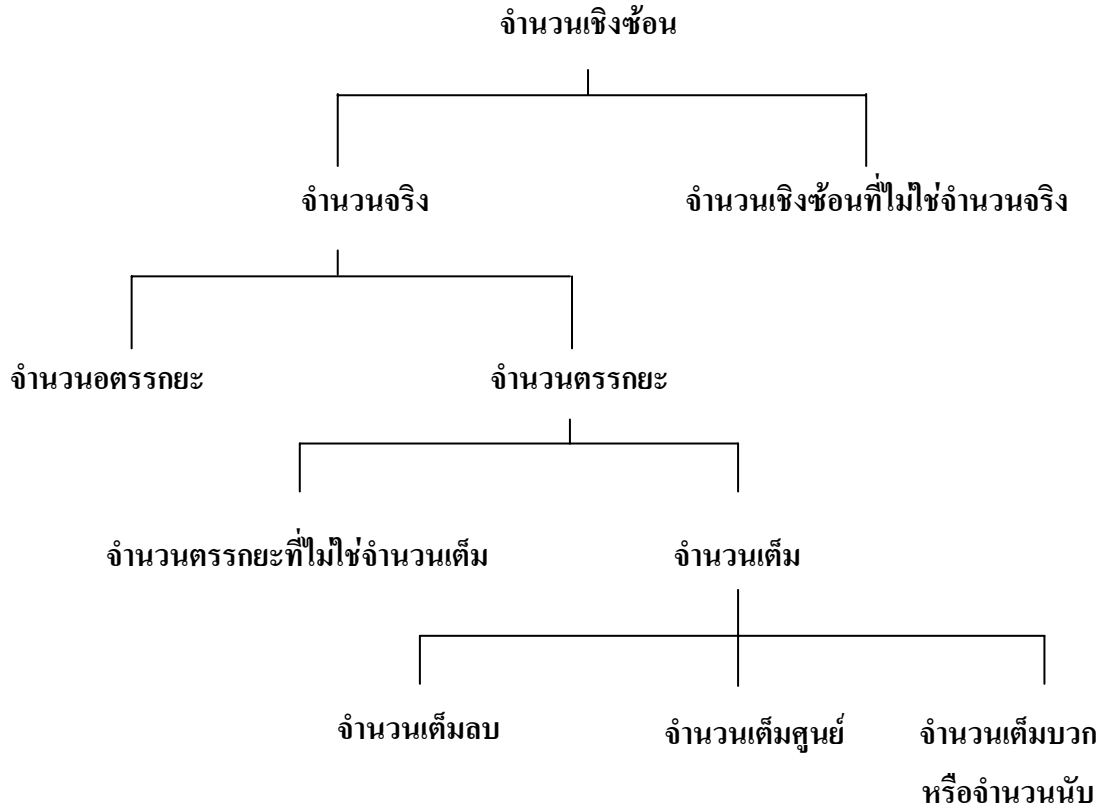
- ก. 4.999... เป็นจำนวนนับ
- ข. $\frac{0}{\pi}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- ค. มีจำนวนตรรกยะอยู่ระหว่าง 0.5 กับ 0.6
- ง. จำนวนเต็มลบมีสมบัติปิดของการบวก

5. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

- ก. จำนวนเต็มที่มีมากที่สุด และมากกว่า 5 คือ 6
- ข. เป็นจำนวนเต็มบวก และเป็นจำนวนตรรกยะ
- ค. จำนวนจริงที่น้อยที่สุดและน้อยกว่า 8 คือ 7
- ง. จำนวนเต็มที่มีมากที่สุดที่น้อยกว่า 11.06 คือ 11



แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่างๆ



...TTTTTTT...



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง สมบัติของระบบจำนวนจริง

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำสมบัติต่างๆ เกี่ยวกับจำนวนจริง และการดำเนินการไปใช้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกสมบัติการเท่ากันในระบบจำนวนจริงได้
- 1.2 นำสมบัติการเท่ากันในระบบจำนวนจริงไปใช้ได้
- 1.3 บอกสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกได้
- 1.4 บอกสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการคูณได้
- 1.5 นำสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณไปใช้ในการคำนวณได้

2. แนวความคิดหลัก

สมบัติพื้นฐานของระบบจำนวนจริง คือ สัจพจน์ 11 ข้อแรก ได้แก่ สมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณ สมบัติการสลับที่สำหรับการบวกและการคูณ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวกและการคูณ สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวกและการคูณ สมบัติการมีอินเวอร์สสำหรับการบวกและการคูณ และสมบัติการแจกแจง

3. เนื้อหาสาระ

1. การเท่ากันในระบบจำนวนจริง

สมบัติการเท่ากัน เมื่อ $a, b, c \in R$

- 1.1 สมบัติการสะท้อน $a = a$
- 1.2 สมบัติการสมมาตร ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
- 1.3 สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
- 1.4 สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
- 1.5 สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

2. การบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง



บทนิยาม 1 ในระบบจำนวนจริง เรียกจำนวนจริงที่บวกกับจำนวนจริงใดก็ตาม ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงนั้นว่า “เอกลักษณ์การบวก” กล่าวคือ ให้ $x \in \mathbb{R}$ และ e คือเอกลักษณ์การบวก ดังนั้น $x + e = x = e + x$

ในระบบจำนวนจริง มี 0 เป็นเอกลักษณ์ของการบวก

$$0 + a = a = a + 0$$

บทนิยาม 2 ในระบบจำนวนจริง อินเวอร์สการบวกของจำนวนจริง a แทนด้วย $-a$ ซึ่งหมายถึง จำนวนจริงที่บวกกับ a แล้วได้ศูนย์ กล่าวคือ $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

บทนิยาม 3 ในระบบจำนวนจริง เรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งเมื่อนำมาคูณกับจำนวนจริงใดแล้วได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงนั้นว่า “เอกลักษณ์การคูณ”

ถ้า e เป็นเอกลักษณ์การคูณ และ $e \neq 0$ แล้ว

$$ea = a = ae \text{ เมื่อ } a \in \mathbb{R}$$

ในระบบจำนวนจริงจะมี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

บทนิยาม 4 ในระบบจำนวนจริง อินเวอร์สการคูณของจำนวนจริง a เมื่อ $a \neq 0$ จะเขียนแทนด้วย a^{-1} ซึ่งหมายถึง จำนวนที่คูณกับ a แล้วได้ 1

$$\text{ดังนั้น } aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$$

$$\text{ถ้า } a \in \mathbb{R} \text{ และ } a \neq 0 \text{ จะได้ } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

3. สมบัติของระบบจำนวนจริง

ระบบจำนวนจริงประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง \mathbb{R} กับการบวกและการคูณซึ่งมีสมบัติดังต่อไปนี้

3.1 สมบัติปิดของการบวก เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ และ $b \in \mathbb{R}$ จะได้ $a + b \in \mathbb{R}$

3.2 สมบัติการสลับที่ของการบวก เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ $a + b = b + a$



3.3 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3.4 เอกลักษณ์การบวก ในระบบจำนวนจริง มี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ ซึ่ง $a + 0 = 0 + a = a$

3.5 อินเวอร์สการบวกในระบบจำนวนจริง ถ้า $a \in \mathbb{R}$ จะมี $-a \in \mathbb{R}$

ซึ่ง $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

3.6 สมบัติปิดของการคูณ เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ และ $b \in \mathbb{R}$ จะได้ $a \cdot b \in \mathbb{R}$

3.7 สมบัติการสลับที่ของการคูณ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ $ab = ba$

3.8 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ $(ab)c = a(bc)$

3.9 สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ มี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

3.10 สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ ถ้า $a \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$ แล้วจะมี $a^{-1} \in \mathbb{R}$

ซึ่ง $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ ถ้า $a \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$

3.11 สมบัติการแจกแจง เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ $a(b + c) = ab + ac$

$$(b + c)a = ba + ca$$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ครูกล่าวถึงสัญลักษณ์แทนการเท่ากันหรือเป็นสิ่งเดียวกันในทางคณิตศาสตร์ จะใช้ “=” ครูถามนักเรียนว่าสัญลักษณ์แทนการกระทำที่ทำให้เกิดการเท่ากันมีอะไรบ้าง นักเรียนควรตอบได้ว่า เครื่องหมายบวก ลบ คูณ หาร และ เครื่องหมายกรณฑ์

เช่น $2 + 3 = 5$
 $5 - 1 = 4$
 $2 \times 5 = 10$
 $20 \div 4 = 5$
 $\sqrt{4} = 2$
 $1.\dot{9} = 2$

ครูให้นักเรียนสังเกตว่าจำนวนเดียวกันแทนได้ด้วยหลายสัญลักษณ์ แต่สัญลักษณ์เดียวจะแทนจำนวนเพียงจำนวนเดียว เช่น $\frac{4}{2} = 2$, $\sqrt{4} = 2$, $1.\dot{9} = 2$

4.2 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 2.1 ให้นักเรียนศึกษาและตอบคำถามใช้เวลา 10 นาที แล้วครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ เพื่อเป็นการย้ำสมบัติการเท่ากันของจำนวนจริงให้นักเรียนเข้าใจยิ่งขึ้น



4.3 แบ่งนักเรียนออกเป็น 8 กลุ่ม กลุ่มละประมาณ 5 คน ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 2.2, 2.3 ให้ทุกคนได้ศึกษา และช่วยกันคิดตอบคำถามใช้เวลา 15 นาที แล้วครูใช้วิธีสุ่มตัวแทนของแต่ละกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน ออกมาสรุปนิยามของ เอกล็กษณ์การบวก อินเวอร์สการบวก เอกล็กษณ์การคูณ และอินเวอร์สการคูณ โดยครูคอยให้คำแนะนำ

4.4 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.2 ก ข้อ 1, 2, 3 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

4.5 ครูทบทวนนิยามของเอกล็กษณ์และอินเวอร์สของการบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง โดยครูยกตัวอย่างจำนวน แล้วให้นักเรียนตอบ เช่น อินเวอร์สการบวกและการคูณของ $\sqrt{3} - 1$ คืออะไร นักเรียนควรตอบได้ว่า

$$\text{อินเวอร์สการบวกของ } \sqrt{3} - 1 \text{ คือ } -\sqrt{3} + 1$$

$$\text{อินเวอร์สการคูณของ } \sqrt{3} - 1 \text{ คือ } \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$

4.6 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 2.4 และ 2.5 ให้นักเรียนศึกษาสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ แล้วตอบคำถามใช้เวลา 15 นาที

4.7 ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 2.4 และ 2.5 โดยการถามตอบ มีส่วนไหนที่นักเรียนคนใดไม่เข้าใจ ครูจะอธิบายโดยยกตัวอย่างเพิ่มเติมและสรุปสมบัติจากเอกสารแนะแนวทางที่ 2.4 และ 2.5 อีกครั้ง

4.8 ครูแจกเอกสารฝึกหัดที่ 2 ให้นักเรียนทุกคนทำ ใช้เวลา 10 นาที แล้วครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ

4.9 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.2 ก ข้อ 1 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

4.10 ครูเฉลยแบบฝึกหัด 2.2 ข้อที่นักเรียนส่วนใหญ่ทำผิด หรือข้อที่นักเรียนสงสัย

4.11 แจกเอกสารแนะแนวทางที่ 2.6 ให้นักเรียนทุกคนศึกษาเกี่ยวกับการนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้กับการกระทำ (Operation) อื่นๆ นอกเหนือจากการบวกและการคูณ เช่น $*$, \oplus , Δ โดยการกำหนดนิยามของการกระทำ $*$, \oplus , Δ ใหม่ใช้เวลา 10 นาที แล้วครูเฉลยคำตอบและอธิบายเพิ่มเติมสำหรับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจ

4.12 ให้นักเรียนศึกษาเอกสารความรู้ที่ 2 ซึ่งเป็นตัวอย่างการตรวจสอบสมบัติของโอเปอเรชันที่กำหนดให้ ถ้ามีส่วนไหนไม่เข้าใจ ครูจะอธิบายเพิ่มเติม

4.13 ให้นักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก 5 ข้อ และเกี่ยวกับการคูณ 6 ข้อ และแจ้งให้นักเรียนทราบว่าสมบัติของจำนวนจริงทั้ง 11 ข้อนี้ มีความสำคัญและจะใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ เกี่ยวกับจำนวนจริงต่อไป ให้นักเรียนดูสมบัติของจำนวนจริงทั้ง 11 ข้อ จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ หน้า 58

4.14 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2.2 ก ข้อ 4 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ของ สสวท.



5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 เอกสารแนะแนวทางที่ 2.1 ถึง 2.6
- 5.2 เอกสารฝึกหัดที่ 2
- 5.3 เอกสารความรู้ที่ 2
- 5.4 ตารางแสดงสมบัติของระบบจำนวนจริง 11 ข้อ
- 5.5 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท.

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องดีมาก
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนร่วมกิจกรรมดี
3. สังเกตจากความสนใจ	3. นักเรียนให้ความสนใจดี
4. ทำโจทย์เอกสารแนะแนวทางที่ 2.1-2.6 และ ทำโจทย์เอกสารฝึกหัดที่ 2	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 95 %
5. ทำโจทย์ในหนังสือแบบเรียนแบบฝึกหัดที่ 2.2 ก	5. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 95 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 2.1

คำสั่ง จงศึกษาสมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

สมบัติการเท่ากัน เมื่อ $a, b, c \in R$

สมบัติการสะท้อน

$$a = a$$

สมบัติการสมมาตร

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } b = a$$

สมบัติการถ่ายทอด

$$\text{ถ้า } a = b \text{ และ } b = c \text{ แล้ว } a = c$$

สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } a + c = b + c$$

สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } ac = bc$$

จากสมบัติการเท่ากันข้างต้น จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง พร้อมทั้งบอกสมบัติของการเท่ากันที่

สอดคล้องกับข้อความ

1. ถ้า $a = 4$ แล้ว $4 =$ _____ สมบัติ _____
2. ถ้า $x = y$ แล้ว $y =$ _____ สมบัติ _____
3. ถ้า $a = \sqrt{3}$ แล้ว $a + 2 =$ _____ สมบัติ _____
4. ถ้า $b = 3.5$ แล้ว $b +$ _____ $= 3.5 + 8$ สมบัติ _____
5. ถ้า $c = 8$ แล้ว $c \times 10 = 8 \times$ _____ สมบัติ _____
6. ถ้า $x = 3$ และ $y = 3$ จะได้ $x =$ _____ สมบัติ _____
7. ถ้า $15 = x$ และ $y = x$ จะได้ _____ $=$ _____ สมบัติ _____
8. ถ้า $y = 5$ แล้ว $8y =$ _____ สมบัติ _____
9. ถ้า $x + 3 = 8$ แล้ว $x = 5$ สมบัติ _____
10. ถ้า $5x = 20$ แล้ว $x = 4$ สมบัติ _____



เอกสารแนะแนวทางที่ 2.2

1. จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1.1 $3 + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

1.2 $\underline{\hspace{1cm}} + 3 = 3$

1.3 $(-2) + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

1.4 $\underline{\hspace{1cm}} + (-5) = 0$

1.5 $\sqrt{3} + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

1.6 $x + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

หมายเหตุ จากข้อ 1.1-1.6 เรียก 0 ว่าเป็น เอกลักษณ์ของการบวก

2. จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

2.1 $2 + \underline{\hspace{1cm}} = 0$

2.2 $\underline{\hspace{1cm}} + (-3) = 3$

2.3 $\sqrt{5} + \underline{\hspace{1cm}} = 0$

2.4 $-\sqrt{2} + \underline{\hspace{1cm}} = 0$

2.5 $a + \underline{\hspace{1cm}} = 0$

หมายเหตุ จากข้อ 2.1 เรียก -2 ว่าเป็นอินเวอร์สการบวกของ 2

2.2 เรียก 3 ว่าเป็น $\underline{\hspace{2cm}}$

2.3 อินเวอร์สการบวกของ $\sqrt{5}$ คือ $\underline{\hspace{2cm}}$

2.4 อินเวอร์สการบวกของ $-\sqrt{2}$ คือ $\underline{\hspace{2cm}}$

2.5 อินเวอร์สการบวกของ a คือ $\underline{\hspace{2cm}}$

สรุปเป็นบทนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง อินเวอร์สการบวกของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วย $-a$ ซึ่งหมายถึง จำนวนจริงที่บวกกับ a แล้วได้ 0 กล่าวคือ

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

หรือกล่าวได้ว่า a และ $-a$ เป็นอินเวอร์สการบวกซึ่งกันและกัน

เอกสารแนะแนวทางที่ 2.3

คำสั่ง จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1. $5 \times \underline{\quad} = 5$

2. $\underline{\quad} \times (-5) = -5$

3. $\sqrt{2} \times \underline{\quad} = \sqrt{2}$

4. $\frac{1}{3} \times \underline{\quad} = \frac{1}{3}$

5. $a \times \underline{\quad} = a, a \in \mathbb{R}$

6. $2 \times \underline{\quad} = 1$

7. $-3 \times \underline{\quad} = 1$

8. $\left(-\frac{1}{5}\right) \times \underline{\quad} = 1$

9. $\underline{\quad} \times \sqrt{3} = 1$

10. $\frac{1}{a} \times \underline{\quad} = 1, a \neq 0$

หมายเหตุ คำตอบในข้อ 1-5 คือ 1 เพราะว่า 1 คูณจำนวนใดก็ตาม จะได้จำนวนจริงนั้นเสมอ จะเรียก 1 ว่าเป็นเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนจริง

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง เรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0 ซึ่งเมื่อนำไปคูณกับจำนวนจริงใดแล้วได้จำนวนจริงนั้น ว่า เอกลักษณ์การคูณ

หมายเหตุ คำตอบในข้อ 6-10 ผลคูณของสองจำนวนใดมีค่าเป็น 1 จะเรียกสองจำนวนนั้นว่าเป็นอินเวอร์สการคูณซึ่งกันและกัน

ดังนั้น อินเวอร์สการคูณของ 2 คือ $\frac{1}{2}$

อินเวอร์สการคูณของ -3 คือ $-\frac{1}{3}$

อินเวอร์สการคูณของ $-\frac{1}{5}$ คือ -5

อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{3}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

อินเวอร์สการคูณของ $\frac{1}{a}$ คือ $a, a \neq 0$

สรุปเป็นบทนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง อินเวอร์สการคูณของจำนวนจริง a เมื่อ $a \neq 0$ จะแทนด้วย a^{-1} หมายถึงจำนวนที่คูณกับ a แล้วได้ **เอกลักษณ์การคูณ**

ดังนั้น $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

ถ้า $a \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$ แล้ว $a^{-1} = \frac{1}{a}$



เอกสารแนะแนวทางที่ 2.4

คำสั่ง จงศึกษาข้อความในตอนที่ 1 แล้วตอบคำถาม

ตอนที่ 1 สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก

1. สมบัติปิดของการบวก

เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ และ $b \in \mathbb{R}$ จะได้ $a + b \in \mathbb{R}$

เช่น $2 \in \mathbb{R}$ และ $-5 \in \mathbb{R}$ จะได้ $2 + (-5) \in \mathbb{R}$

2. สมบัติการสลับที่ของการบวก

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ $a + b = b + a$

$2, 3 \in \mathbb{R}$ จะได้ $2 + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก

เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ $(a + b) + c = a + (b + c)$

$(2 + 3) + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

4. เอกลักษ์ณ์การบวก

ในระบบจำนวนจริง มี $\underline{\hspace{2cm}}$ เป็นเอกลักษ์ณ์การบวก สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ ซึ่ง

$a + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} + a$

5. อินเวอร์สการบวก

ในระบบจำนวนจริง ถ้า $a \in \mathbb{R}$ จะมี $-a \in \mathbb{R}$

ซึ่ง $a + (-a) = (-a) + a = \underline{\hspace{2cm}}$

ตอนที่ 2 จงบอกสมบัติของจำนวนจริงจากข้อความต่อไปนี้

1. $2 + \pi$ เป็นจำนวนจริง

สมบัติปิดของการบวก

2. $12 + 0 = 12$

3. $(3 + 4) + 5 = (4 + 3) + 5$

4. $(1 + 3) + 5 = 5 + (1 + 3)$

5. $(2 + 4) + 6 = 2 + (4 + 6)$

6. $0 + 0 = 0$

7. $(5 + 7) + 9 = (5 + 9) + 7$

8. $b + (-b) = 0$



เอกสารแนวทางการที่ 2.5

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนศึกษาข้อความต่อไปนี้ แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่าง

สมบัติของระบบจำนวนจริงเกี่ยวกับการคูณ

1. สมบัติปิดของการคูณ

เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ และ $b \in \mathbb{R}$ จะได้ $a \cdot b \in \mathbb{R}$

เช่น $2 \in \mathbb{R}$ และ $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ จะได้ _____

2. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ $ab = ba$

$2, 5 \in \mathbb{R}$ จะได้ _____

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ

เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ $(ab)c = a(bc)$

$2, 4, 6 \in \mathbb{R}$ จะได้ _____

4. สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ

ในระบบจำนวนจริง มี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ

นั่นคือ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

5. สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ

ถ้า $a \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$ แล้วจะมี $a^{-1} \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

ถ้า $a \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$2 \cdot 2^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

6. สมบัติการแจกแจง

เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ $a(b + c) = ab + ac$

$$(b + c)a = ba + ca$$

เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ $5(x + 2) = \underline{\hspace{1cm}}$



ตอนที่ 2 จงบอกสมบัติของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

1. $20 \times (-5)$ เป็นจำนวนจริง สมบัติ _____

2. $(2 \times 3) \times 5 = (3 \times 2) \times 5$ สมบัติ _____

3. $(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$ สมบัติ _____

4. $1 \times (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ สมบัติ _____

5. $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$ สมบัติ _____

6. $-2(5 + 7) = (-2 \times 5) + (-2 \times 7)$ สมบัติ _____

7. $(77 - 3)(99 + 2) = (77 - 3)(99) + (77 - 3)(2)$ สมบัติ _____

8. $895\frac{1}{4} + 104\frac{3}{4} = (895 + 104) + (\frac{1}{4} + \frac{3}{4})$ สมบัติ _____



เอกสารฝึกหัดที่ 2

1. จงบอกสมบัติของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

- 1.1 $(x + 2)5$ เป็นจำนวนจริง _____
- 1.2 $3(x + 5) = 3x + 15$ _____
- 1.3 $\sqrt{2} = \sqrt{2}$ _____
- 1.4 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$ _____
- 1.5 ถ้า $x + x = 2x$ แล้ว $2x = x + x$ _____
- 1.6 $(8 + 4) + 1 = 1 + (8 + 4)$ _____
- 1.7 $(8 + 4) + 1 = 8 + (4 + 1)$ _____
- 1.8 ถ้า $x + y = 3$ และ $z = 3$ แล้ว $x + y = z$ _____
- 1.9 $-\frac{1}{3} \times (-3) = 1$ _____
- 1.10 ถ้า $x = y$ แล้ว $3x = 3y$ _____

2. จงเติมช่องว่างให้สมบูรณ์

ข้อที่	จำนวน	อินเวอร์ส	
		การบวก	การคูณ
1	10		
2	$-\frac{1}{4}$		
3	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		
4	$\sqrt{5}$		
5	$(\sqrt{3} - \sqrt{2})$		



3. จงใช้สมบัติการสลับที่หรือการเปลี่ยนกลุ่มของการบวกหาผลบวกในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1 $1+2+3+4+\dots+20$ = _____
 = _____
 = _____

3.2 $2+4+6+8+\dots+28$ = _____
 = _____
 = _____

3.3 $103\frac{1}{5}+116\frac{1}{5}$ = _____
 = _____
 = _____

4. จงใช้สมบัติของการแจกแจงหาค่าต่อไปนี้

4.1 $98 \times 10\frac{1}{7}$ = _____
 = _____
 = _____

4.2 27×99 = _____
 = _____
 = _____

5. จงเปลี่ยน 1234_5 ให้เป็นเลขฐาน 10 โดยใช้สมบัติการแจกแจง



เอกสารแนะแนวทางที่ 2.6

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาข้อความข้างล่างนี้ และตอบคำถามที่เว้นไว้

ระบบจำนวนภายใต้การกระทำ (Operation) (*)

เซตของจำนวนมีการกระทำพื้นฐานระหว่างจำนวน 2 จำนวน คือ +, -, ×, ÷ เราอาจนิยามการกระทำอื่นๆ ที่ซับซ้อนมากขึ้นได้ โดยไม่มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอน เช่น

ตัวอย่าง กำหนด $a, b \in \mathbb{R}$ เมื่อ \mathbb{R} เป็นเซตของจำนวนจริง และ $a * b = a + b + 2$

จาก $a * b = a + b + 2$

ถ้า $a = 2, b = 3$ จะได้ $2 * 3 = 2 + 3 + 2 = 7$

ถ้า $a = -5, b = 1$ จะได้ $(-5) * 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

ถ้า $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$ จะได้ $\frac{1}{2} * \left(-\frac{1}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง ให้สอดคล้องกับกฎเกณฑ์ที่กำหนดให้ เมื่อ \mathbb{R} เป็นเซตของจำนวนจริง และ $a, b \in \mathbb{R}$

1. $a * b = a + b - 2ab$
 $3 * 7 = 3 + 7 - 2(3)(7)$
2. $a \oplus b = \frac{a - b + 1}{2}$
 $5 \oplus 2 = \underline{\hspace{2cm}}$
3. $a \Delta b = a + ab$
 $4 \Delta 2 = \underline{\hspace{2cm}}$
4. $a * b = a + b + 10$
 $3 * 2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $(3 * 2) * 5 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $2 * 5 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $3 * (2 * 5) = \underline{\hspace{2cm}}$



เอกสารความรู้ที่ 2

การตรวจสอบสมบัติพื้นฐานของเซต A ภายใต้การกระทำ $*$

1. สมบัติปิด
ถ้า $a, b \in A$ แล้ว $a * b \in A$
แสดงว่า A มีสมบัติปิดภายใต้ $*$
2. สมบัติการสลับที่
ถ้า $a, b \in A$ แล้ว $a * b = b * a$
แสดงว่า A มีสมบัติการสลับที่ภายใต้ $*$
3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
ถ้า $a, b, c \in A$ แล้ว $(a * b) * c = a * (b * c)$
แสดงว่า A มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม ภายใต้ $*$
4. สมบัติการมีเอกลักษณ์
ถ้า $a \in A$ และมี $e \in A$ ซึ่ง $a * e = a = e * a$
เรียก e ว่าเอกลักษณ์ภายใต้การกระทำ $*$
แสดงว่า A มีเอกลักษณ์ ภายใต้ $*$
5. สมบัติการมีอินเวอร์ส
ถ้า $a \in A$ และมี $a^{-1} \in A$ ซึ่ง $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$
เรียก a^{-1} ว่าเป็นอินเวอร์สของ a ภายใต้การกระทำ $*$
แสดงว่า A มีอินเวอร์ส ภายใต้ $*$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $a * b = a + b + 4$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จงตรวจสอบว่าเซต \mathbb{R} มีสมบัติต่อไปนี้ภายใต้ $*$ หรือไม่

1. สมบัติปิด
2. สมบัติการสลับที่
3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้
4. สมบัติการมีเอกลักษณ์
5. สมบัติการมีอินเวอร์ส
6. จงหาอินเวอร์สของ 5 ภายใต้การกระทำ $*$



วิธีทำ

1. จาก $a * b = a + b + 4$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$
 เนื่องจาก $a, b \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $(a + b + 4) \in \mathbb{R}$
 $\therefore \mathbb{R}$ มีสมบัติปิดภายใต้ $*$

2. จาก $a * b = a + b + 4$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$
 $\therefore b * a = b + a + 4$
 $= a + b + 4$
 $\therefore a * b = b * a$
 $\therefore \mathbb{R}$ มีสมบัติการสลับที่ภายใต้ $*$

3. จาก $a * b = a + b + 4$
 พิจารณา $(a * b) * c = (a * b) + c + 4$
 $= (a + b + 4) + c + 4$
 $= a + b + c + 8$
 พิจารณา $a * (b * c) = a + (b * c) + 4$
 $= a + (b + c + 4) + 4$
 $= a + b + c + 8$
 $\therefore (a * b) * c = (b * c) * a$
 ดังนั้น เซต \mathbb{R} มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้ $*$

4. ให้ e เป็นเอกลักษณ์สำหรับ $*$, $a \in \mathbb{R}$
 จะได้ $a * e = a$ และ $e * a = a$
 $a + e + 4 = a$ และ $e + a + 4 = a$
 $e + 4 = 0$ และ $e + 4 = 0$
 $\therefore e = -4$ และ $e = -4$
 ดังนั้น เซต \mathbb{R} มี -4 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้ $*$

5. ให้ a^{-1} เป็นอินเวอร์สของ a สำหรับ $*$ เมื่อ $a, a^{-1} \in \mathbb{R}$
 จะได้ $a^{-1} * a = -4$ และ $a * a^{-1} = -4$
 $a^{-1} + a + 4 = -4$ และ $a + a^{-1} + 4 = -4$
 $a^{-1} = -8 - a$ และ $a^{-1} = -8 - a$
 ดังนั้น เซต \mathbb{R} มี $-8 - a$ เป็นอินเวอร์สของ a ภายใต้ $*$

6. \therefore อินเวอร์สของ a คือ $-a - 8$
 ดังนั้น อินเวอร์สของ 5 คือ $-5 - 8 = -13$

...ψψψψψψ...



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง การนำเสนอสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการพิสูจน์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

พิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับจำนวนจริงได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1.1 บอกสมบัติของจำนวนจริงทั้ง 11 ข้อได้

1.2 นำสมบัติของจำนวนจริงทั้ง 11 ข้อ มาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทได้

2. แนวความคิดหลัก

สมบัติพื้นฐานของระบบจำนวนจริง 11 ข้อ เพียงพอที่จะนำมาใช้พิสูจน์ทฤษฎีบท

3. เนื้อหาสาระ

สมบัติของจำนวนจริง 11 ข้อ

สมบัติของจำนวนจริงข้อที่ 12, 13 และ 14

ข้อที่ 12 ถ้า $a \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a \neq 0$ แล้วต้องเป็นประการใดประการหนึ่ง เท่านั้น คือก. $a \in \mathbb{R}^+$ หรือ ข. $-a \in \mathbb{R}^+$ ข้อที่ 13 ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $a + b \in \mathbb{R}^+$ ข้อที่ 14 ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $ab \in \mathbb{R}^+$

นอกจากนี้ ในระบบจำนวนจริงยังมีสมบัติที่สำคัญอีกประการหนึ่ง คือ สมบัติความบริบูรณ์ ซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดภายหลัง

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 นักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ 11 ข้อ โดยการถามตอบแล้วครูนำแผนภูมิสรุปสมบัติของจำนวนจริงให้นักเรียนดูอีกครั้ง

4.2 ครูแจ้งให้นักเรียนทราบว่านอกจากสมบัติของจำนวนจริง 11 ข้อตามที่กล่าวแล้ว ระบบจำนวนจริงยังมีระบบย่อย \mathbb{R}^+ ซึ่ง $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ และมีสมบัติเพิ่มเติมอีก 4 ประการ คือข้อที่ 12, 13, 14 และสมบัติความบริบูรณ์ เป็นข้อที่ 15 ซึ่งจะกล่าวละเอียดในภายหลัง

4.3 แบ่งนักเรียนออกเป็น 6 กลุ่ม ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 3 ให้ทุกคนศึกษา และให้ช่วยกันพิสูจน์ทฤษฎีบททุกกลุ่ม กลุ่มละ 1 บท โดยการจับฉลาก เมื่อทราบว่าได้บทไหนแล้วให้ปรึกษากันและช่วยกันทำ และมาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ ใช้เวลา 5-7 นาที บนกระดานดำจะมีทฤษฎีบทที่ 1-6 ให้นักเรียนทุกคนในห้องช่วยกันตรวจสอบความถูกต้องโดยครูเป็นผู้ถามให้นักเรียนช่วยกันตอบ

4.4 ให้นักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติจำนวนจริง ทั้ง 14 ข้อ โดยครูถามให้นักเรียนช่วยกันตอบและครูเขียนบนกระดานดำ



สมบัติของระบบจำนวนจริง

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

	การบวก	การคูณ
การปิด	1. $a+b \in \mathbb{R}$	6. $ab \in \mathbb{R}$
การสลับที่	2. $a+b = b+a$	7. $ab = ba$
การเปลี่ยนกลุ่ม	3. $(a+b)+c = a+(b+c)$	8. $(ab)c = a(bc)$
การมีเอกลักษณ์	4. มี 0 ซึ่ง $a+0 = a = 0+a$	9. มี 1 ซึ่ง $1 \cdot a = a = a \cdot 1$
การมีอินเวอร์ส	5. แต่ละ $a \in \mathbb{R}$ มี $(-a) \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a+(-a) = 0 = (-a)+a$	10. แต่ละ $a \in \mathbb{R}$ ที่ $a \neq 0$ จะมี $a^{-1} \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a(a^{-1}) = 1 = (a^{-1})(a)$
การแจกแจง	11. $a(b+c) = ab+ac$	

12. สมบัติไตรวิภาค ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อต่อไปนี ข้อใดข้อหนึ่งและเพียงข้อเดียว จะต้องเป็นจริง คือ 1. $a = 0$ หรือ 2. $a \in \mathbb{R}^+$ หรือ 3. $-a \in \mathbb{R}^+$

13. ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $a+b \in \mathbb{R}^+$

14. ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $ab \in \mathbb{R}^+$

5. แหล่งการเรียนรู้

เอกสารแนบแนวทางที่ 3

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตการทำงานกลุ่ม	1. นักเรียนร่วมมือกันทำงานดี
2. สังเกตความสนใจ	2. ทุกคนให้ความสนใจดี
3. สังเกตการตอบคำถาม	3. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องดีมาก
4. ทำเอกสารแนบแนวทางที่ 3	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 3

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาทฤษฎีบทต่อไปนี้ แล้วเติมเหตุผลเกี่ยวกับสมบัติของ จำนวนจริงหลังข้อความที่ พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1 (กฎการตัดออกสำหรับการบวก)

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $a+c = b+c$ แล้ว $a = b$
2. ถ้า $c+a = c+b$ แล้ว $a = b$

พิสูจน์ 1. จาก $a+c = b+c$

$$a+c+(-c) = b+c+(-c) \quad \text{การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน}$$

$$a+[c+(-c)] = b+[c+(-c)]$$

$$a+0 = b+0$$

$$a = b$$

2. จาก $c+a = c+b$

ทฤษฎีบท 2 (กฎการตัดออกสำหรับการคูณ)

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$
2. ถ้า $ca = cb$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$

พิสูจน์ 1. จาก $ac = bc$

$$(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} \quad \text{การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน}$$

$$a(c \cdot c^{-1}) = b(c \cdot c^{-1})$$

$$a \cdot 1 = b \cdot 1$$

$$a = b$$



2. จาก $ca = cb$

ทฤษฎีบท 3 เมื่อ $a \in \mathbb{R}$

1. $a \cdot 0 = 0$
2. $0 \cdot a = 0$

พิสูจน์

1. จาก $0 + 0 = 0$ เอกลักษณ์การบวก

$$a(0 + 0) = a \cdot 0$$

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

2. จาก $0 + 0 = 0$

$$(0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a$$

ทฤษฎีบท 4 ให้ $a \in \mathbb{R}$ $(-1)a = -a$

พิสูจน์

$$1 + (-1) = 0$$

$$(1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a$$

$$1 \cdot a + (-1) \cdot a = 0$$

$$a + (-1) \cdot a = a + (-a)$$

$$(-1) \cdot a = -a$$

ทฤษฎีบท 5 เมื่อ $a \in \mathbb{R}$

ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า $a = 0$ จะได้ $0 \cdot b = 0$

กรณีที่ 2 ถ้า $a \neq 0$ จะมี a^{-1}

จาก $ab = 0$

$$a^{-1}ab = a^{-1}0$$



ทฤษฎีบท 6 เมื่อ $a \in \mathbb{R}$

1. $a(-b) = -ab$
2. $(-a)b = -ab$
3. $(-a)(-b) = ab$

พิสูจน์

1. $a(-b) = a(-1)b$ จากทฤษฎีบท 4
 $= (-1)(ab)$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ
 $= -ab$ จากทฤษฎีบท 4
2. $(-a)b =$ _____
 $=$ _____
 $=$ _____
3. $(-a)(-b) =$ _____
 $=$ _____
 $=$ _____

↪ หน้านี้มีรางวัล ↩

วิธีทำต่อไปนี่ผิดตรงไหน

วิธีทำ	เนื่องจาก	$a^2 - a^2 =$	$(a + a)(a - a)$
	ดังนั้น	$a(a - a) =$	$(a + a)(a - a)$
โดยสมบัติการตัดออก		$a =$	$(a + a)$
	ดังนั้น	$1 \cdot a =$	$2 \cdot a$
โดยสมบัติการตัดออก		$1 =$	2

...TTTTT...



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง การลบและการหารจำนวนจริง

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

น่านิยามการลบและการหารจำนวนจริงไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกนิยามการลบจำนวนจริงได้
- 1.2 น่านิยามการลบจำนวนจริงไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทได้
- 1.3 บอกนิยามการหารจำนวนจริงได้
- 1.4 น่านิยามการหารจำนวนจริงไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทได้

2. แนวความคิดหลัก

การลบและการหารจำนวนจริง เป็นรูปแบบหนึ่งของการบวกและการคูณจำนวนจริง ซึ่งจะมีประโยชน์ต่อการนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบท การแก้สมการและอสมการต่อไป

3. เนื้อหาสาระ

การลบและการหารจำนวนจริง

บทนิยาม 1 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ $a - b = a + (-b)$

บทนิยาม 2 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

- 4.1 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 4.1 ให้นักเรียนศึกษาและตอบคำถาม ใช้เวลา 5-7 นาที
- 4.2 ครูเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 4.1 โดยการถามตอบ เพื่อให้ นักเรียนสรุปความหมายของการลบจำนวนจริงในรูปอินเวอร์สของการบวก และความหมายของการหารจำนวนจริงในรูปของการคูณด้วยอินเวอร์สการคูณของตัวหาร เมื่อตัวหารไม่เป็นศูนย์

4.3 แบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็น 5 กลุ่ม ให้ทุกกลุ่มศึกษาเอกสารแนะแนวทางที่ 4.2 ใช้ เวลา 15 นาที เพื่อช่วยกันพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ

4.4 สุ่มตัวแทนของแต่ละกลุ่ม แสดงการพิสูจน์บนกระดาน กลุ่มละ 1 คน โดยเลือก พิสูจน์ข้อไหนก็ได้ แต่ต้องไม่ซ้ำกัน แล้วให้ทุกคนในห้องช่วยกันดูความถูกต้อง ถ้านักเรียนส่วนใหญ่ไม่เข้าใจ หรือมีข้อใดที่ไม่มีกลุ่มใดทำได้ ครูจะอธิบายให้เข้าใจ และแสดงวิธีพิสูจน์ให้ดูจนกระทั่งเข้าใจ

4.5 ให้ทุกคนกลับไปทำทฤษฎีบท 3 เป็นการบ้านอีกครั้ง เป็นการย้ำความเข้าใจ

4.6 ครูสรุปนิยามการลบและการหาร โดยการถามตอบอีกครั้ง เพื่อให้เห็นประโยชน์ในการนำไปใช้

5. แหล่งการเรียนรู้

เอกสารแนะแนวทางที่ 4.1, 4.2

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องดีมาก
2. สังเกตการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนร่วมกิจกรรมดี
3. สังเกตจากความสนใจ	3. นักเรียนให้ความสนใจดี
4. ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 4.1 , 4.2	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 4.1

คำสั่ง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่าง เพื่อหาข้อสรุปเป็นนิยามการลบและการหารจำนวนจริง

1. อินเวอร์สการบวกของ 3 คือ _____
2. อินเวอร์สการบวกของ 5 คือ _____
3. อินเวอร์สการบวกของ a คือ _____
4. จงเติมจำนวนลงในวงเล็บ

4.1 $10 - 3 = 10 + (-3)$

4.2 $2\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + (\text{_____})$

4.4 $25 - 5 = 25 + (\text{_____})$

4.3 $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + (\text{_____})$

4.5 $a - b = a + (\text{_____})$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$

5. จากข้อ 4. จะเห็นได้ว่าจำนวนในวงเล็บด้านขวาเป็นอินเวอร์สการบวกของจำนวนที่เป็นตัวลบในด้านซ้าย

สรุปเป็นบทนิยามได้ว่า

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ $a - b$ คือผลบวกของ _____ กับ _____

6. อินเวอร์สการคูณของ 3 คือ _____
7. อินเวอร์สการคูณของ $-\sqrt{2}$ คือ _____

8. $\frac{5}{3} = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$

$\frac{10}{2} = 10 \cdot (\text{_____})$

$-\frac{7}{4} = -7 \cdot (\text{_____})$

$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot (\text{_____})$ เมื่อ $b \neq 0$

9. จากข้อ 8 จะเห็นได้ว่าจำนวนในวงเล็บด้านขวาเป็น _____ ของจำนวนที่เป็นตัว _____ ในด้านซ้าย

สรุปเป็นบทนิยามได้ว่า

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ $\frac{a}{b}$ คือผลคูณของ _____ กับ _____ ของ _____

หมายเหตุ จากบทนิยาม เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $b \neq 0$

$$a \div b = a \cdot b^{-1} \quad \text{และ} \quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{ดังนั้น} \quad \frac{1}{b} = b^{-1}$$

...*****...



$$5. \left(\frac{b}{c}\right)^{-1} = \frac{c}{b} \quad \text{เมื่อ } b, c \neq 0$$

$$6. \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b} \quad \text{เมื่อ } b, c \neq 0$$

$$7. \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc} \quad \text{เมื่อ } b, c, d \neq 0$$

พิสูจน์

$$1. \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{ab^{-1}}{c}$$

(นิยามการหาร)

$$= (ab^{-1})c^{-1}$$

(นิยามการหาร)

$$= a(b^{-1}c^{-1})$$

(การเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ)

$$= a(bc)^{-1}$$

$$= \frac{a}{bc}$$

(นิยามการหาร)

ให้นักเรียนพิสูจน์ข้อ 2-7 เป็นการบ้าน



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หาเศษจากการหารพหุนามโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกทฤษฎีบทเศษเหลือได้

1.2 ใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษจากการหารพหุนามด้วยพหุนามที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก

ในการหาเศษจากการหารพหุนามด้วยพหุนามที่กำหนดให้ จะหาได้รวดเร็วขึ้นถ้านำทฤษฎีบทเศษเหลือมาใช้ และผลที่ตามมาจะมีประโยชน์อย่างยิ่งในการแยกตัวประกอบ เพื่อแก้สมการพหุนาม

3. เนื้อหาสาระ

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

เมื่อ $P(x)$ คือ พหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $x-c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงแล้ว เศษจะเท่ากับ $P(c)$

หมายเหตุ พหุนามที่ x เป็นตัวแปรเดียว อาจแทนด้วย $P(x)$ หรือ $Q(x)$ หรือ $R(x)$

เช่น $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ทบทวนการหารพหุนามด้วยพหุนาม โดยครูกำหนดโจทย์ เช่น $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 5x - 2$ หารด้วย $x - 3$ ให้นักเรียนช่วยกันหาผลหาร และ เศษ ตามวิธีที่เคยเรียนมาแล้ว ซึ่งนักเรียนควรจะหาได้ว่า ผลหาร = $2x^3 - x^2 - 2x - 1$ และเศษ = -5

4.2 ให้นักเรียนจับคู่เพื่อช่วยกันศึกษาเอกสารแนะแนวทางที่ 5.1 ใช้เวลา 10 นาที เสร็จแล้วครู



เฉลยเอกสาร โดยการถามตอบ เพื่อสรุปขั้นตอนหรือวิธีการให้นักเรียนทราบว่าในการหาเศษจากการหารพหุนามด้วยพหุนามคิรี 1 เราจะใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือช่วยในการหา

4.3 แจกเอกสารแนะแนวทางที่ 5.2 ให้นักเรียนช่วยกันศึกษาอีก 15 นาที แล้วครูอธิบายย่ออีกครั้งสำหรับตัวทฤษฎีบทเศษเหลือและตัวอย่างในการนำทฤษฎีบทเศษเหลือไปใช้หาเศษ

4.4 ย้ำให้นักเรียนได้ตระหนักถึงความสำคัญของการหาเศษโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเวลาที่ใช้ในการหาจะเร็วกว่าวิธีการตั้งหาร เมื่อนักเรียนทุกคนเข้าใจตรงกันแล้วให้ทำแบบฝึกหัดที่ 2.6 ข้อ 1 หน้า 72 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ๑

5. แหล่งการเรียนรู้

5.1 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ของ สสวท.

5.2 เอกสารแนะแนวทางที่ 5.1 , 5.2

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากความสนใจ	2. นักเรียนสนใจและตั้งใจเรียน
3. ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 5.1 , 5.2	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 1,2 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม๑	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 5.1

คำสั่ง ให้นักเรียนศึกษาเอกสารและตอบคำถามต่อไปนี้อย่างต่อเนื่อง

1. พหุนาม $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$ หารด้วย $x + 2$ (โดยวิธีตั้งหาร)

จะได้ผลหาร = เศษ =

ถ้าให้ ตัวตั้ง = (ตัวหาร \times ผลหาร) + เศษ

จากโจทย์จะได้ $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3 = (x+2)(\dots\dots\dots) + \dots\dots\dots$

2. ถ้าให้ $P(x)$ แทนพหุนามที่เป็นตัวตั้ง
 $x-c$ แทนพหุนามที่เป็นตัวหาร
 $q(x)$ แทนพหุนามที่เป็นผลหาร
 $r(x)$ แทนเศษที่ได้จากการหาร โดยที่ $r(x) = 0$ หรือ $r(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรี

น้อยกว่า ดีกรีของ $x-c$ นั่นคือ มีดีกรีศูนย์ หรือ $r(x)$ เป็นตัวคงตัว ถ้าให้ $r(x) = R$ เมื่อ R เป็นตัวคงตัว

ดังนั้น $P(x) = (x-c)q(x) + R$

ถ้าให้ $x = c$ จะได้ $P(c) = (c-c)q(c) + R$
 $= R$

3. จากข้อ 1 $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$
 $x-c = x + 2$
 จะได้ $c = -2$

แทนค่า $x = -2$ ใน $P(x)$ จะได้ $P(-2) = 2(-2)^4 - 7(-2)^3 + (-2)^2 + 7(-2) - 3$
 $= \dots\dots\dots$

ค่าของ $P(-2) =$ เศษที่ได้จากการนำ $(x+2)$ ไปหาร $P(x)$ หรือไม่

4. กำหนด $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 2$ เมื่อนำ $(x-3)$ ไปหาร $P(x)$

จะได้ $P(3) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

ดังนั้น เศษที่ได้จากการหาร =



เอกสารแนะแนวทางที่ 5.2

คำสั่ง ให้นักเรียนศึกษาทฤษฎีบทเศษเหลือ และตัวอย่าง แล้วตอบคำถาม

ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)

เมื่อ $P(x)$ คือ พหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $x-c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงแล้ว เศษจะเท่ากับ $P(c)$

หมายเหตุ พหุนามที่ x เป็นตัวแปรเดียว อาจแทนด้วย $P(x)$ หรือ $Q(x)$ หรือ $R(x)$

$$\text{เช่น } P(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

ถ้า x เปลี่ยนเป็น a จะได้

$$P(a) = 3a^2 + 2a - 1$$

ถ้า x เปลี่ยนเป็น c จะได้

$$P(c) = 3c^2 + 2c - 1$$

ตัวอย่าง จงหาเศษ เมื่อ $2x^4 - 7x^3 + 3x - 5$ หารด้วย $x-3$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x - 5$

และ $x-c = x-3$

$$c = 3$$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ เมื่อหาร $P(x)$ ด้วย $x-c$

จะได้ เศษ = $P(c) = P(3)$

จาก $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x - 5$

$$P(3) = 2(3)^4 - 7(3)^3 + 3(3) - 5$$

$$= -23$$

$$\therefore \text{ เศษจากการหาร } = -23$$

จากการศึกษาทฤษฎีบทเศษเหลือ ให้นักเรียนเติมคำตอบในช่องว่าง

1. เมื่อหาร $2x^3 + 7x^2 + 3x$ ด้วย $x+3$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ $P(x) =$ _____

$x-c =$ _____

ดังนั้น $c =$ _____



ดังนั้นหาร $P(x)$ ด้วย $x+3$ เศษ = $P()$

ซึ่ง $P() =$ _____
 = _____

ดังนั้น เศษจากการหาร = _____

2. จงหาเศษจากการหาร $2x^3+3x^2-8x+3$ ด้วย $x-\frac{1}{2}$

3. จงหาเศษจากการหาร $2x^3+3x^2-8x+3$ ด้วย $2x-1$

4. เศษที่ได้จากข้อ 2 และ ข้อ 3 เท่ากันหรือไม่ _____

5. ในกรณีทั่วไป ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $(ax-b)$ จะได้เศษเท่ากับ _____

6. จงหาค่า k ที่ทำให้ $3x^4+2x^3+kx-5$ หารด้วย $x+1$ แล้วเหลือเศษเท่ากับ -3



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง การแก้สมการตัวแปรเดียว

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แก้สมการตัวแปรเดียวที่มีดีกรีสูงกว่าสองได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. นำทฤษฎีบทเศษเหลือมาใช้ได้
2. นำทฤษฎีบทตัวประกอบและทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะมาใช้ในการแยกตัวประกอบได้
3. แก้สมการตัวแปรเดียวดีกรีสูงกว่าสองได้

2. แนวความคิดหลัก

การแก้สมการตัวแปรเดียวที่มีดีกรีสูงกว่าสอง จำเป็นต้องอาศัยความรู้ในเรื่องทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ และ ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ เพื่อการแยกตัวประกอบของพหุนาม ซึ่งทฤษฎีบทเหล่านี้จะใช้ได้ดีและมีประสิทธิภาพมาก ทำให้ได้คำตอบ ของสมการตัวแปรเดียวถูกต้องและครบถ้วน

3. เนื้อหาสาระ

3.1 ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

เมื่อ $P(x)$ คือ พหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ พหุนาม $P(x)$ จะมี $x-c$ เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

3.2 ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ

เมื่อ $P(x)$ คือ พหุนามในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$

ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m จะเป็นตัวประกอบของ a_n และ k จะเป็นตัวประกอบของ a_0



4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ทบทวนการแยกตัวประกอบ และการแก้สมการตัวแปรเดียว โดยครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 6.1 ให้นักเรียนจับคู่แล้วช่วยกันคิด ใช้เวลา 10 นาที

4.2 ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ และอธิบายเพิ่มเติมข้อที่นักเรียนไม่เข้าใจ เช่น จงแก้สมการ $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$ นักเรียนส่วนใหญ่จะหาคำตอบไม่ได้ เพราะนักเรียนไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ โดยใช้ความรู้ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

4.3 ครูบอกนักเรียนว่า เราจะใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือที่ได้เรียนมาแล้ว และทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับตัวประกอบ เพื่อนำมาใช้ในการแยกตัวประกอบสำหรับโจทย์ลักษณะเดียวกับข้อ 2.5 แล้วครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนทฤษฎีบทเศษเหลือ โดยครูถามให้นักเรียนช่วยกันตอบ

4.4 ครูกำหนดโจทย์ให้นักเรียนหาเศษจากการหารพหุนาม โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือเช่น $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ หารด้วย $x - 2$ ซึ่งนักเรียนควรหาได้ว่า เศษ = 0

4.5 แบ่งกลุ่มนักเรียนกลุ่มละ 4-5 คน ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 6.2 ให้นักเรียนทุกคนช่วยกันศึกษาทฤษฎีบทตัวประกอบ และตอบคำถาม ใช้เวลา 15 นาที แล้วครูใช้วิธีการถามตอบเพื่อเฉลยคำตอบและอธิบายให้ทุกคนเข้าใจตรงกัน ถ้ากลุ่มใดมีปัญหาจะอธิบายเพิ่มเติม

4.6 ครูกำหนดโจทย์เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบอีก 1 ข้อ ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันคิดและส่งตัวแทนออกมาทำบนกระดานดำ แล้วให้เพื่อนๆ ในห้องช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

4.7 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 3 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ของ สสวท.

4.8 ครูเฉลยแบบฝึกหัด 2.3 เฉพาะข้อที่นักเรียนสงสัยหรือที่นักเรียนส่วนใหญ่ทำผิด ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่า สำหรับพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ เมื่อ $a_n \neq 1$ จะมีทฤษฎีบทมาช่วยในการแยกตัวประกอบอีก 1 ทฤษฎีบท

4.9 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 6.3 ให้ทุกคนช่วยกันศึกษา (ใช้กลุ่มในคาบที่ 1) ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะและตัวอย่างใช้เวลา 15 นาที ครูอธิบายทฤษฎีบทเพิ่มเติมเพื่อเป็นการเน้นและสำหรับกลุ่มที่ไม่ค่อยเข้าใจ หลังจากเข้าใจทฤษฎีบทดีแล้ว ให้ทำโจทย์ในเอกสารแนะแนวทาง

4.10 สุ่มกลุ่มให้ตัวแทนออกมาแสดงวิธีทำบนกระดาน โดยครูและเพื่อนๆ ช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

4.11 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 4 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ของ สสวท. ถ้าไม่เสร็จให้ทำเป็นการบ้าน

4.12 เปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัยเกี่ยวกับการแก้สมการตัวแปรเดียวเพิ่มเติม และนัดหมายถึงการทดสอบในคาบต่อไป

4.13 เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2.3 เฉพาะข้อที่นักเรียนสงสัย หรือนักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหา แล้วทดสอบเก็บคะแนนใช้เวลา 30 นาที



5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ของ สสวท.
- 5.2 เอกสารแนะแนวทาง 6.1 - 6.3

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากความสนใจ	2. นักเรียนสนใจและตั้งใจเรียน
3. ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 6.1 , 6.2 , 6.3	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด 2.3 ในหนังสือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 6.1

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้ความรู้ที่เคยเรียนในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1.1 $x^2 - 4 = \dots\dots\dots$

1.2 $2x^2 - 3x + 1 = \dots\dots\dots$

1.3 $x^3 - y^3 = \dots\dots\dots$

1.4 $x^3 + y^3 = \dots\dots\dots$

1.5 $8x^3 - 27y^3 = \dots\dots\dots$

1.6 $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

1.7 $3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

2.1 $x^2 - 4 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$

2.2 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$

2.3 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$

2.4 $3x^3 - 2x^2 - 27x - 18 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$

แสดงวิธีทำ.....

.....

.....

.....

2.5 $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$

แสดงวิธีทำ

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 6.2

คำสั่ง จงศึกษาทฤษฎีบทและตัวอย่าง แล้วตอบคำถาม

1. ทฤษฎีบทตัวประกอบ

เมื่อ $P(x)$ คือ พหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ พหุนาม $P(x)$ จะมี $x-c$ เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $x-2$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

จากทฤษฎีบทตัวประกอบ พหุนาม $P(x)$ จะมี $(x - c)$ เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$ ให้

$$x - c = x - 2$$

จะได้ $c = 2$

$$\text{ดังนั้น } P(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6 = 0$$

เมื่อ $P(2) = 0$ แสดงว่า $(x - 2)$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของพหุนาม $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ และเมื่อ

หาร $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ ด้วย $x - 2$ จะได้ผลหาร $= x^2 + 4x + 3$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= (x-2)(x^2 + 4x + 3) \\ &= (x-2)(x+1)(x+3) \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $-6 = (-2)(1)(3)$ ดังนั้น $-2, 1$ และ 3 เป็นตัวประกอบชุดหนึ่งของ -6

ข้อสังเกต ในกรณีทั่วไป ถ้า $x - c$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยสัมประสิทธิ์ของพหุนามนี้เป็นจำนวนเต็ม และ $a_n = 1$ แล้ว c จะเป็นตัวประกอบของ a_0

จากการศึกษาทฤษฎีบทและตัวอย่างข้างต้น เมื่อกำหนดพหุนาม $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$

1. จงแสดงว่า $(x-1)$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$
2. จงแยกตัวประกอบของ $P(x)$



เอกสารแนบแนวทางที่ 6.3

คำสั่ง จงศึกษาทฤษฎีบทและตัวอย่างด้วยความรอบคอบ แล้วตอบคำถาม

ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ

เมื่อ $P(x)$ คือ พหุนามในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก
 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$

ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม
ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว

m จะเป็นตัวประกอบของ a_n
 k จะเป็นตัวประกอบของ a_0

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$

เนื่องจากจำนวนเต็มที่หาร -3 ลงตัวคือ $\pm 1, \pm 3$ (ให้เป็น k) และจำนวนเต็มที่หาร 12 ลงตัวคือ
 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ (ให้เป็น m)

จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $P\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะเป็นจำนวนที่อยู่ในกลุ่มของจำนวน

ต่อไปนี้คือ $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{1}{6}$ และ $\pm \frac{1}{12}$

พิจารณา
$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 16\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3$$

$$= \frac{12}{8} + \frac{16}{4} - \frac{5}{2} - 3 = \frac{12}{8} + \frac{16}{4} - \frac{5}{2} - 3 = 0$$

นั่นคือ $x - \frac{1}{2}$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ นำ $x - \frac{1}{2}$ ไปหาร $P(x)$ จะได้ผลหารเป็น $12x^2 + 22x + 6$

นั่นคือ
$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^2 + 22x + 6)$$

$$= \left(\frac{2x - 1}{2}\right)2(6x^2 + 11x + 3)$$

$$\therefore 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 = (2x - 1)(3x + 1)(2x + 3)$$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาเซตคำตอบของสมการ $3x^3 + 17x^2 + 21x - 9 = 0$

วิธีทำ จาก $3x^3 + 17x^2 + 21x - 9 = 0$

ให้ $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 21x - 9$

โดยอาศัยทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะแยกตัวประกอบของ $P(x)$ จะได้

$$P(x) = (3x - 1)(x + 3)(x + 3)$$

แต่ $P(x) = 0$

ดังนั้น $(3x - 1)(x + 3)(x + 3) = 0$

จะได้ $3x - 1 = 0$ หรือ $x + 3 = 0$ หรือ $x + 3 = 0$

นั่นคือ $x = \frac{1}{3}$ หรือ -3

เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{ \frac{1}{3}, -3 \right\}$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์ $\sqrt{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $x = \sqrt{3}$

และเป็นคำตอบของสมการ $x^2 = 3$

และเป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 3 = 0$ (1)

จากทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ คำตอบของสมการ (1) ที่เป็นจำนวนตรรกยะอยู่ในเซต $\{1, -1, 3, -3\}$ แต่ $\sqrt{3} \notin \{1, -1, 3, -3\}$ ดังนั้น $\sqrt{3}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ แต่ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้น $\sqrt{3}$ จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ

จากการศึกษาทฤษฎีบทและตัวอย่าง จงทำโจทย์ต่อไปนี้

1. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้ (แสดงวิธีการแยกตัวประกอบด้วย)

1.1 $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



1.2 $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 8x + 24 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. ถ้ายอมรับว่า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า $2 + \sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง สมบัติการไม่เท่ากัน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกสมบัติการไม่เท่ากัน และนำไปใช้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกความหมายและใช้สัญลักษณ์การไม่เท่ากันแบบต่างๆ ได้
- 1.2 บอกสมบัติไตรวิภาคได้
- 1.3 บอกสมบัติของการไม่เท่ากันได้
- 1.4 นำสมบัติของการไม่เท่ากันไปใช้ได้

2. แนวความคิดหลัก

สมบัติของระบบจำนวนจริง 11 ประการแรกเป็นพื้นฐานในการให้ความหมายของการลบและการหารจำนวนจริง และแนวทางบางประการในการแก้สมการพหุนาม ส่วนสมบัติประการที่ 12, 13 และ 14 เป็นพื้นฐานในการให้ความหมาย “น้อยกว่า” และ “มากกว่า” และใช้เป็นแนวทางในการแก้สมการ

3. เนื้อหาสาระ สมบัติการไม่เท่ากัน

บทนิยาม 1 สมาชิกของ R^+ เรียกว่าจำนวนบวก และถ้า $-a \in R^+$ จะเรียก a ว่าจำนวนลบ

บทนิยาม 2 $a < b$ หมายความว่า $b - a \in R^+$
 $a > b$ หมายความว่า $a - b \in R^+$



บทนิยาม 3 $a \leq b$ หมายถึง a ไม่มากกว่า b หรือ a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b
 $a \geq b$ หมายถึง a ไม่น้อยกว่า b หรือ a มากกว่าหรือเท่ากับ b
 $a < b < c$ หมายถึง $a < b$ และ $b < c$
 $a \leq b \leq c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b \leq c$
 $a < b \leq c$ หมายถึง $a < b$ และ $b \leq c$
 $a \leq b < c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b < c$

หมายเหตุ $a \leq b$ อ่านว่า a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b
 $a \geq b$ อ่านว่า a มากกว่าหรือเท่ากับ b

สมบัติไตรวิภาค (Trichotomy property)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a = b$, $a < b$ และ $a > b$ จะเป็นจริงเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสมบัติของการไม่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 1 สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

ทฤษฎีบท 2 สมบัติการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

ทฤษฎีบท 3 จำนวนบวกและจำนวนลบเปรียบเทียบกับ 0

a เป็นจำนวนบวก ก็ต่อเมื่อ $a > 0$

a เป็นจำนวนลบ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$

ทฤษฎีบท 4 สมบัติของการคูณด้วยจำนวนเท่ากันที่ไม่เป็นศูนย์

กรณี 1 ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

กรณี 2 ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

ทฤษฎีบท 5 สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$

ทฤษฎีบท 6 สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

กรณี 1 ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$

กรณี 2 ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$

ทฤษฎีบท 7 ถ้า r และ s เป็นจำนวนจริง และ $r < s$ จะมีจำนวนตรรกยะ c ซึ่ง $r < c < s$



4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ครูทบทวนสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ โดยการถามให้นักเรียนตอบทีละคน ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่ามี 11 ประการ คือ สมบัติปิด (การบวก, การคูณ) การสลับที่ (การบวก, การคูณ) การเปลี่ยนกลุ่มได้ (การบวก, การคูณ) การมีเอกลักษณ์ (การบวก, การคูณ) การมีอินเวอร์ส (การบวก, การคูณ) และ การแจกแจง

ครูบอกนักเรียนว่า ยังมีสมบัติของจำนวนจริงเพิ่มเติมอีก 3 ประการ เนื่องจากเซตของจำนวนจริงบวก (R^+) เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง (R) และมีสมบัติ 3 ประการ ซึ่งจะเป็นสมบัติข้อที่ 12, 13 และ 14 และนักเรียนเคยเรียนมาแล้ว (ครูถาม และให้นักเรียนช่วยกันตอบสมบัติข้อ 12, 13 และ 14)

12. $0 \notin R^+$ ถ้า $a \in R$ และ $a \neq 0$ ดังนั้น

ก. $a \in R^+$ หรือ

ข. $-a \in R^+$ (a เป็นจำนวนลบ)

13. ถ้า $a, b \in R^+$ แล้ว $a + b \in R^+$

14. ถ้า $a, b \in R^+$ แล้ว $ab \in R^+$

4.2 ทบทวนสัญลักษณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการแสดงการไม่เท่ากัน โดยให้นักเรียนเติมสัญลักษณ์ $>$, $<$ หรือ $=$ ระหว่างจำนวนที่กำหนดให้ ครูเขียนบนกระดานดำ แล้วให้นักเรียนออกไปเติมลงในช่องว่าง

1. $5 \dots 3$ ($>$)

5. $(-7) \dots (-9)$ ($>$)

2. $-5 \dots 0$ ($<$)

6. $(3+4) \dots (5+2)$ ($=$)

3. $5 \dots 0$ ($>$)

7. $-10 \dots (-20+30)$ ($<$)

4. $-5 \dots 5$ ($<$)

8. $(-3-7) \dots (-4-5)$ ($<$)

4.3 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 7.1 ให้นักเรียนศึกษาและตอบคำถาม เพื่อสรุปเป็นนิยาม

4.4 ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 7.1 และสรุป ได้ดังนี้

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงสองจำนวนซึ่ง $a \neq b$ แล้ว $a-b$ เป็นจำนวนบวกก็ต่อเมื่อ $a > b$ หรือกล่าวได้ว่า $a-b \in R^+$ ก็ต่อเมื่อ $a > b$

หรือ $a-b > 0$ ก็ต่อเมื่อ $a > b$

$a-b$ เป็นจำนวนลบก็ต่อเมื่อ $a < b$ หรือกล่าวได้ว่า $a-b < 0$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$

4.5 ครูกำหนดจำนวนจริงให้นักเรียนเปรียบเทียบค่าเป็นคู่ๆ เช่น 3, 5, 2, $\sqrt{4}$ ซึ่งนักเรียนควรเปรียบเทียบได้ว่า $3 > 5$, $5 > 2$ และ $2 = \sqrt{4}$

ครูถามต่อไปว่า ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ เมื่อนำ a และ b มาเปรียบเทียบกันแล้วความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้ จะเป็นอย่างไรบ้าง ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่า

$a = b$ หรือ $a > b$ หรือ $a < b$

ทั้งสามประการจะเกิดขึ้นพร้อมกันได้หรือไม่

ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่า เกิดขึ้นได้เพียงอย่างเดียว จะเกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้ แล้วครูจึงบอกให้นักเรียนทราบว่าที่กล่าวมาข้างต้นเราจะเรียกว่า “สมบัติการเป็นอย่างหนึ่งในสาม” หรือ สมบัติไตรวิภาค (Trichotomy Property)



4.6 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.7 ข้อ 1-9 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ของ สสวท.

4.7 ครูอธิบายแบบฝึกหัด 2.7 ข้อที่นักเรียนสงสัยหรือส่วนใหญ่ทำผิด ซึ่งดูจากการตรวจแบบฝึกหัด

4.8 ครูแบ่งกลุ่มนักเรียน โดยให้จับคู่กัน แล้วแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 7.2 ให้ช่วยกันตอบคำถาม

4.9 ให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบเอกสารแนะแนวทาง 7.2 กลุ่มละ 1 ข้อ โดยครูและเพื่อนๆ ช่วยกัน ตรวจสอบความถูกต้อง

4.10 ครูบอกนักเรียนว่าทั้งหมดที่กล่าวมาแล้ว เรียกว่า สมบัติการไม่เท่ากัน

4.11 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป สมบัติการไม่เท่ากัน และนักเรียนจดบันทึก พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ได้ดังนี้

สมบัติของการไม่เท่ากัน

สมบัติการไม่เท่ากัน	ตัวอย่าง
1. สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$	$4 > 3$ และ $3 > 2$ แล้ว $4 > 2$
2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนเดียวกัน ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$	$3 > 2$ ดังนั้น $3 + 1 > 2 + 1$ คือ $4 > 3$
3. สมบัติการคูณด้วยจำนวนเดียวกัน 3.1 ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$ 3.2 ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$	$4 > 3$ และ $2 > 0$ ดังนั้น $4(2) > 3(2)$ หรือ $8 > 6$ $4 > 3$ และ $-2 < 0$ ดังนั้น $4(-2) < 3(-2)$ หรือ $-8 < -6$
4. สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$	$4 + 2 > 3 + 2$ แล้ว $4 > 3$
5. สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ 5.1 ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$ 5.2 ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$	$4(2) > 3(2)$ แล้ว $4 > 3$ โดย $2 > 0$ $4(-2) > 3(-2)$ แล้ว $4 < 3$ โดย $-2 < 0$

4.12 จากสมบัติการไม่เท่ากัน ครูบอกนักเรียนว่า เรา ยังมีนิยามเพิ่มเติมดังนี้

บทนิยาม

$a \leq b$ หมายถึง a ไม่มากกว่า b

$a \geq b$ หมายถึง a ไม่น้อยกว่า b

$a < b < c$ หมายถึง $a < b$ และ $b < c$

$a \leq b \leq c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b \leq c$

$a < b \leq c$ หมายถึง $a < b$ และ $b \leq c$

หมายเหตุ $a \leq b$ อ่านว่า a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b

$a \geq b$ อ่านว่า a มากกว่าหรือเท่ากับ b



- 4.13 ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดที่ 7
- 4.14 ครูเฉลยเอกสารฝึกหัดที่ 7
- 4.15 ให้นักเรียนศึกษาเอกสารความรู้ที่ 7 เพิ่มเติมโดยครูอธิบายเพียงเล็กน้อย แล้วให้นักเรียนไปศึกษามาเป็นการบ้าน

5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 เอกสารแนะแนวทางที่ 7.1 , 7.2
- 5.2 เอกสารฝึกหัดที่ 7 เอกสารความรู้ที่ 7 (เพิ่มเติม)
- 5.3 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนร่วมกิจกรรมดี
3. สังเกตจากความสนใจ	3. นักเรียนตั้งใจเรียนดี และให้ความสนใจสม่ำเสมอ
4. ทำโจทย์เอกสารแนะแนวทาง 7.1,7.2 และเอกสารฝึกหัดที่ 7	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %
5. ทำโจทย์ในหนังสือแบบเรียนแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 1-7	5. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 7.1

คำสั่ง จงหาผลลบ โดยเติมคำตอบลงในช่องว่าง

ข้อ	ตัวตั้ง	ตัวลบ	ผลลบ	จำนวนบวกหรือจำนวนลบ
1	5	2		
2	6	-3		
3	-5	-7		
4	4	9		
5	-2	8		
6	-8	-5		

- จากข้อ 1. $5-2=3$ นั่นคือ $5-2$ เป็นจำนวนเต็มบวก
 2. $6-(-3)=\dots\dots\dots$ นั่นคือ $6-(-3)$ เป็นจำนวนเต็มบวก
 3. $-5-(-7)=\dots\dots\dots$ นั่นคือ $-5-(-7)$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อสังเกต จากข้อ 1-3 ตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ผลลบเป็นจำนวนบวก

- ดังนั้น ถ้า $a > b$ แล้ว $a - b$ เป็นจำนวน $\dots\dots\dots$
 จากข้อ 4. $4-9=\dots\dots\dots$ นั่นคือ $4-9$ เป็นจำนวน $\dots\dots\dots$
 5. $-2-8=\dots\dots\dots$ นั่นคือ $-2-8$ เป็นจำนวน $\dots\dots\dots$
 6. $-8-(-5)=\dots\dots\dots$ นั่นคือ $-8-(-5)$ เป็นจำนวน $\dots\dots\dots$

ข้อสังเกต จากข้อ 4 - 6 ตัวตั้ง $\dots\dots\dots$ ตัวลบ ผลลบเป็นจำนวน $\dots\dots\dots$
 ดังนั้น ถ้า $a < b$ แล้ว $a - b$ เป็นจำนวน $\dots\dots\dots$

...๐๐๐๐๐๐...



เอกสารแนะแนวทางที่ 7.2

คำสั่ง จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้องสมบูรณ์

1. $5 > 3$ และ $3 > 2$ ดังนั้นสรุปได้ว่า $5 > 2$
2. $-2 > -5$ และ $-5 > -8$ ดังนั้น
3. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว
4. ถ้า $6 > 4$ เมื่อนำ 2 บวกทั้ง 2 ข้าง จะได้ $(6+2)$ $(4+2)$
5. $10 > 7$ นำ (-5) บวกทั้ง 2 ข้าง จะได้
6. ถ้า $a > b$ แล้ว นำ c บวกทั้ง 2 ข้าง จะได้
7. $5 > 3$ นำ 2 คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้ (5×2) (3×2)
8. $-4 > -6$ นำ (-2) คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้
9. ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ ดังนั้น ac bc
ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ ดังนั้น ac bc
10. ถ้า $5+2 > 3+2$ นำ (-2) บวกทั้ง 2 ข้าง จะได้
11. ถ้า $6+(-3) > 4+(-3)$ นำ 3 บวกทั้ง 2 ข้าง จะได้
12. ถ้า $a+c > b+c$ แล้ว
13. $8(2) > 5(2)$ นำ $\frac{1}{2}$ คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้
14. $8(-3) > 10(-3)$ นำ $-\frac{1}{3}$ คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้
15. ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้วจะได้
- ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้วจะได้



เอกสารฝึกหัดที่ 7

1. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ จงบอกว่าใช้สมบัติอะไรในการให้เหตุผล

1.1 $5 < 7$ และ $7 < 9$ ดังนั้น $5 < 9$

1.2 $a > b$ ดังนั้น $a+1 > b+1$

1.3 $-4 < 3$ ดังนั้น $2(-4) < 2(3)$

1.4 $-5 < -2$ ดังนั้น $(-5)(-3) > (-2)(-3)$

1.5 $-10 < 15$ ดังนั้น $(-10)\left(-\frac{1}{2}\right) > (12)\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. ข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จริงหรือเท็จ

2.1 $6 > 4$ ดังนั้น $6+(-1) > 4+(-1)$

2.2 $5 < 6$ ดังนั้น $5(-2) < 6(-2)$

2.3 $-4 < 8$ ดังนั้น $2 > -4$

2.4 $3 > 0$ และ $-5 < 0$ ดังนั้น $(3)(-5) < 0$

2.5 ถ้า $a > b$ แล้ว $a^2 > b^2$

2.6 ถ้า $a^2 > b^2$ แล้ว $a > b$

2.7 ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

2.8 ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

2.9 ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a+c < b+d$

2.10 ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $ac < bd$



เอกสารความรู้ที่ 7

คำชี้แจง จงศึกษาข้อความต่อไปนี้แล้ว ทำแบบฝึกหัด

นอกจากสมบัติการไม่เท่ากันตามที่กล่าวมาแล้ว ระบบจำนวนจริงยังมีสมบัติการไม่เท่ากันดังต่อไปนี้

1. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว
 - 1.1 $a+c < b+d$
 - 1.2 $a-d < b-c$
2. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$
3. ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $ac > bd$
4. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$
5. ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

ตัวอย่าง ถ้า $2 < x < 8$ และ $1 < y < 5$ จงหา $x+y$, $x-y$, xy และ $\frac{x}{y}$

1) หา $x+y$

$2 < x < 8$ มีความหมายเหมือน $2 < x$ และ $x < 8$

$1 < y < 5$ มีความหมายเหมือน $1 < y$ และ $y < 5$

$\therefore 3 < x+y$ และ $x+y < 13$

ดังนั้น $3 < x+y < 13$

2) หา $x-y$

$2 < x$ และ $x < 8$

$-1 > -y$ และ $-y > -5$

$-5 < -y$ และ $-y < -1$

$\therefore -3 < x-y$ และ $x-y < 7$

ดังนั้น $-3 < x-y < 7$

* ส่วน xy และ $\frac{x}{y}$ ให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ

เอกสารฝึกหัด

1. ถ้า $3 < x < 10$ และ $1 < y < 6$ จงหา

- | | | | |
|----------|------------|-------------|------------------|
| 1. $x-y$ | 2. x^2+y | 3. x^2y^2 | 4. $\frac{x}{y}$ |
|----------|------------|-------------|------------------|

2. ถ้า $4 < x < 6$ และ $2 < y < 5$ จงหา

- | | | | |
|--------------|------------|---------|------------------|
| 1. x^2+y^2 | 2. x^2-y | 3. xy | 4. $\frac{y}{x}$ |
|--------------|------------|---------|------------------|



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง ช่วง

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

เขียนสับเซตของบางสับเซตของจำนวนจริงในรูปของช่วงได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกความหมายของช่วง และใช้สัญลักษณ์ของช่วงแบบต่างๆ ได้
- 1.2 เขียนกราฟแทนช่วงที่กำหนดให้ได้
- 1.3 หาเงื่อนไขอินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์ และผลต่างระหว่างจำนวนจริงกับช่วงหรือระหว่างช่วงกับช่วงที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก

สัญลักษณ์แทนสับเซตบางสับเซตของจำนวนจริงที่สำคัญอีกอย่างหนึ่ง คือช่วง ซึ่งจะมีประโยชน์ในการนำไปใช้เขียนแทนเซตคำตอบของสมการอีกรูปแบบหนึ่ง

3. เนื้อหาสาระ

สัญลักษณ์แทนช่วงและการเขียนช่วงแทนสับเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง และ $a < b$

ช่วงเปิด (a,b) หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ แทนด้วยกราฟ



ช่วงปิด $[a,b]$ หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ แทนด้วยกราฟ



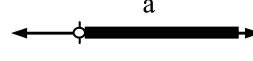
ช่วงครึ่งเปิด $(a,b]$ หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ แทนด้วยกราฟ



ช่วงครึ่งเปิด $[a,b)$ หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ แทนด้วยกราฟ



ช่วง (a, ∞) หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ แทนด้วยกราฟ



ช่วง $[a, \infty)$ หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ แทนด้วยกราฟ



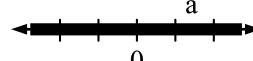
ช่วง $(-\infty, a)$ หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ แทนด้วยกราฟ



ช่วง $(-\infty, a]$ หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ แทนด้วยกราฟ



ช่วง $(-\infty, \infty)$ หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$ แทนด้วยกราฟ



4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ทบทวนการเขียนกราฟแทนจำนวนจริงบนเส้นจำนวน ซึ่งนักเรียนเคยเรียนมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยครูเขียนกราฟแล้วถามนักเรียนว่า แทนจำนวนจริงอะไร เช่น

กราฟ	นักเรียนควรตอบได้ว่า
	แทนจำนวนจริงที่มากกว่า -1 แต่ไม่เกิน 2
	แทนจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ -1 แต่น้อยกว่า 2
	แทนจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 2
	แทนจำนวนจริงระหว่าง -1 กับ 2
	แทนจำนวนจริงที่น้อยกว่า 2
	แทนจำนวนจริงที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 2

4.2 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 8 ให้นักเรียนช่วยกันศึกษา และตอบคำถามกลุ่มละ 2 คน ใช้เวลา 15 นาที

4.3 ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 8 แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของช่วง

4.4 ครูแจกเอกสารฝึกหัดที่ 8.1 ให้นักเรียนทุกคนทำ ใช้เวลา 10 นาที แล้วช่วยกันเฉลยคำตอบเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ และอธิบายเพิ่มเติม ถ้านักเรียนยังไม่เข้าใจ

4.5 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.5 ก ข้อ 1 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ

4.6 ทบทวนการดำเนินการของเซต โดยครูกำหนดเซตดังนี้

$$A = \{x \in I \mid -2 < x \leq 5\}$$

$$B = \{x \in I \mid 0 \leq x < 8\}$$

ให้นักเรียนช่วยกันหาเซตคำตอบของ $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, A' , B' ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ดังนี้

$$A \cup B = \{x \in I \mid -2 < x < 8\}$$

$$A \cap B = \{x \in I \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

$$A - B = \{x \in I \mid -2 < x < 0\}$$

$$B - A = \{x \in I \mid 5 < x < 8\}$$

$$A' = \{x \in I \mid x \leq -2\} \cup \{x \in I \mid x > 5\}$$

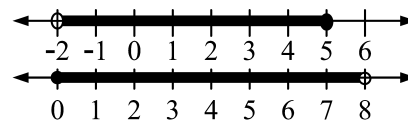
$$B' = \{x \in I \mid x < 0\} \cup \{x \in I \mid x \geq 8\}$$

4.7 ครูกำหนดโจทย์ $C = \{x \in R \mid -2 < x \leq 5\}$ และ $D = \{x \mid 0 \leq x < 8\}$ แล้วให้นักเรียนสังเกตความแตกต่างระหว่างเซต C กับ A และ D กับ B ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่า เอกภพสัมพัทธ์ของ A และ B เป็นเซตของจำนวนเต็ม แต่เอกภพสัมพัทธ์ของ C และ D เป็นเซตของจำนวนจริง

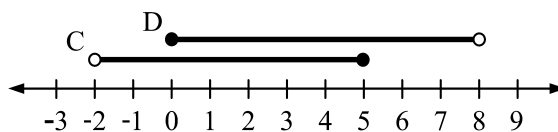
4.8 ครูสุ่มนักเรียนออกมา 2 คน ให้เขียนเซต C และ D ในรูปช่วง เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง พร้อมทั้งเขียนกราฟแทนช่วงดังกล่าว ซึ่งนักเรียนควรเขียนได้ ดังนี้

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 5\} = (-2, 5]$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 8\} = [0, 8)$$

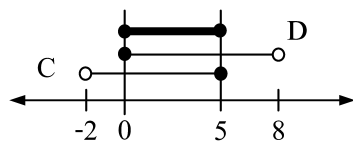


4.9 ครูแสดงวิธีหาเซต $C \cup D$ ให้นักเรียนดูบนกระดานดำ แล้วสุ่มให้นักเรียนอีก 5 คน ออกมาแสดงวิธีหาเซต $C \cap D$, $C - D$, $D - C$, C' และ D' บนกระดานพร้อมๆ กัน ซึ่งควรได้คำตอบ ดังต่อไปนี้



ครูหาเซต $C \cup D$ จะได้ $C \cup D = (-2, 5] \cup [0, 8)$
 $= (-2, 8)$

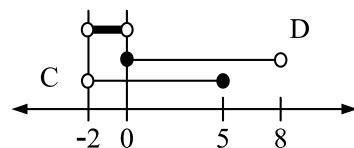
นักเรียนคนที่ 1 ให้หา $C \cap D$ จะได้



$$C \cap D = (-2, 5] \cap [0, 8)$$

 $= [0, 5]$

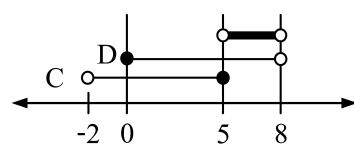
นักเรียนคนที่ 2 ให้หา $C - D$ จะได้



$$C - D = (-2, 5] - [0, 8)$$

 $= (-2, 0)$

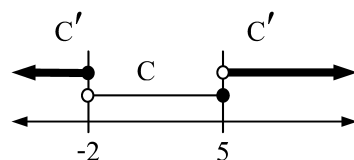
นักเรียนคนที่ 3 ให้หา $D - C$ จะได้



$$D - C = [0, 8) - (-2, 5]$$

 $= (5, 8)$

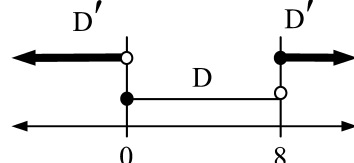
นักเรียนคนที่ 4 ให้หา C' จะได้



$$C' = (-2, 5]'$$

 $= (-\infty, -2] \cup (5, \infty)$

นักเรียนคนที่ 5 ให้หา D' จะได้



$$D' = [0, 8)'$$

 $= (-\infty, 0) \cup [8, \infty)$

4.10 ครูอธิบายเพิ่มเติมสำหรับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจ แล้วให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัด 8.2 และ



ทำแบบฝึกหัด 2.5 ก ข้อ 2,3 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ เป็นการบ้าน

5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 เอกสารแนะแนวทางที่ 8
- 5.2 เอกสารฝึกหัดที่ 8.1 , 8.2
- 5.3 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนร่วมกิจกรรมดี
3. สังเกตจากความสนใจ	3. นักเรียนตั้งใจเรียนดีและให้ความสนใจสม่ำเสมอ
4. ทำโจทย์เอกสารแนะแนวทาง 8 และเอกสารฝึกหัด 8.1 , 8.2	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %
5. ทำโจทย์ แบบฝึกหัด 2.5 ก ข้อ 2,3 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ	5. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 90 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 8

ช่วง เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนสับเซตของจำนวนจริง เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง และ $a < b$

(a,b) แทนช่วงเปิด หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a,b]$ แทนช่วงปิด หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a,b)$ แทนช่วงครึ่งเปิด หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a,b]$ แทนช่วงครึ่งเปิด หมายถึง $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$(-\infty,a), (-\infty,a], (a, \infty), [a, \infty)$ แทนช่วงอนันต์

คำสั่ง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้องสมบูรณ์

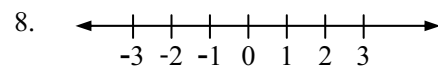
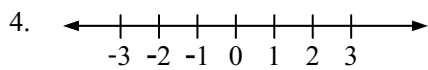
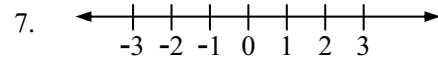
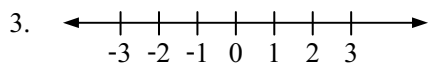
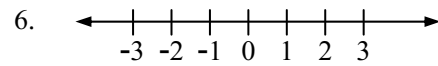
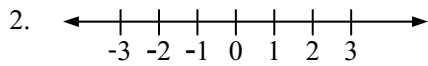
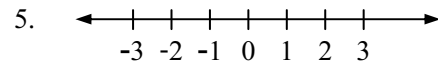
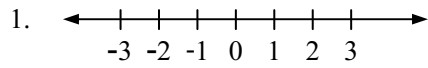
ข้อ	กราฟ	แทนด้วยข้อความ	แทนด้วยเซต	แทนด้วยช่วง
1		จำนวนจริงทุกจำนวนระหว่าง -1 และ 2	$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$	$(-1,2)$
2		จำนวนจริงทุกจำนวนตั้งแต่ -1 ถึง 2	$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$	$[-1,2]$
3	
4	
5		จำนวนจริงทุกจำนวนที่น้อยกว่า 2	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	$(-\infty,2)$
6	
7		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$	$(-1, \infty)$
8	
9	
10	
11	
12	



เอกสารฝึกหัด 8.1

1. จงเขียนแสดงช่วงที่กำหนดต่อไปนี้บนเส้นจำนวน

- | | | | |
|------------------|-------------------|------------------|------------------|
| 1. $(-1,3)$ | 2. $[-1,3]$ | 3. $(-2,1]$ | 4. $[-3,2]$ |
| 5. $(-2,\infty)$ | 6. $[-2, \infty)$ | 7. $(-\infty,2)$ | 8. $(-\infty,2]$ |



2. จงเขียนช่วงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเซต

ช่วง	คำตอบในรูปเซต
$(-3,3)$
$(-1,5]$
$[-5,0]$
$(-\infty,5]$
$[2, \infty)$
$(-\infty,0)$
$[-5,2)$
$(-\infty,2]$

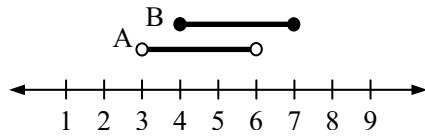
3. จงเขียนเซตต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของช่วง

เซต	คำตอบในรูปช่วง
$\{x \mid 3 < x \leq 5\}$
$\{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$
$\{x \mid -2 < x < 3\}$
$\{x \mid -3 \leq x < 5\}$
$\{x \mid x > 2\}$
$\{x \mid x \geq -6\}$
$\{x \mid x < -3\}$
$\{x \mid x \leq 4\}$



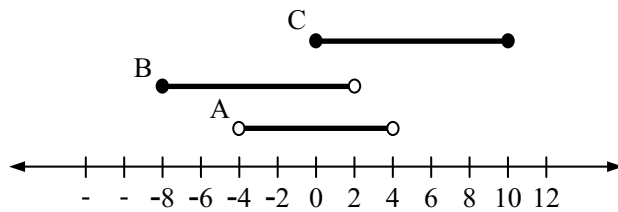
เอกสารฝึกหัดที่ 8.2

1. ให้ $A=(3,6)$ และ $B=[4,7]$ จงหา



- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $A \cup B = \dots\dots\dots$ | 2. $A \cap B = \dots\dots\dots$ |
| 3. $A' = \dots\dots\dots$ | 4. $B' = \dots\dots\dots$ |
| 5. $A - B = \dots\dots\dots$ | 6. $B - A = \dots\dots\dots$ |

2. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 4\}$
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x < 2\}$
 $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$



3. จงหาเซตต่อไปนี้ (ตอบในรูปช่วง)

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. $A \cup B = \dots\dots\dots$ | 2. $A \cap B = \dots\dots\dots$ |
| 3. $(A \cup B) \cap C = \dots\dots\dots$ | 4. $A \cap B' = \dots\dots\dots$ |
| 5. $A' \cap B = \dots\dots\dots$ | 6. $C' \cup B = \dots\dots\dots$ |

4. จงหาเซตคำตอบจากช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $[2,6] \cup [1,4] = [1,6]$ | 6. $(3,5) - (2,5) = \dots\dots\dots$ |
| 2. $(1,3) \cup \{1,3\} = \dots\dots\dots$ | 7. $[2,5] - (1,3) = \dots\dots\dots$ |
| 3. $[3,7] \cap (1,4) = \dots\dots\dots$ | 8. $[2,5) = \dots\dots\dots$ |
| 4. $(3,\infty) \cap [7,12) = \dots\dots\dots$ | 9. $(-\infty,4)' = \dots\dots\dots$ |
| 5. $(1,4) \cap (4,6) = \dots\dots\dots$ | 10. $[6,\infty)' = \dots\dots\dots$ |



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง การแก้อสมการ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แก้อสมการตัวแปรเดียวได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1.1 นำความรู้เรื่องช่วงมาใช้ได้

1.2 นำสมบัติการไม่เท่ากันของจำนวนจริงมาใช้ในการแก้อสมการตัวแปรเดียวได้

1.3 แก้อสมการตัวแปรเดียวได้

2. แนวความคิดหลัก

อสมการใน x เป็นประโยคที่มีตัวแปร x และกล่าวถึงการไม่เท่ากัน เช่น $2x < 8$, $2x \neq 8$, $3x+1 \geq 5$

อสมการจะเป็นจริงหรือเท็จขึ้นอยู่กับจำนวนจริงที่นำมาแทนที่ตัวแปรในอสมการเซตคำตอบของอสมการใน x เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง โดยที่จำนวนเหล่านั้นเมื่อนำมาแทน x แล้วทำให้อสมการเป็นจริง การแก้อสมการคือการหาเซตคำตอบของอสมการ

3. เนื้อหาสาระ การแก้อสมการตัวแปรเดียว

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้อสมการ $5 \leq 7-2x \leq 11$

วิธีทำ จาก $5 \leq 7-2x \leq 11$

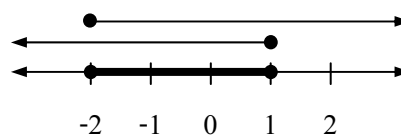
จะได้ $5 \leq 7-2x$ และ $7-2x \leq 11$

บวกด้วย -7 ทั้ง 2 ข้าง ; $-2 \leq -2x$ และ $-2x \leq 4$

คูณด้วย $-\frac{1}{2}$ ทั้ง 2 ข้าง ; $1 \geq x$ และ $x \geq -2$

นั่นคือ $x \leq 1$ และ $x \geq -2$

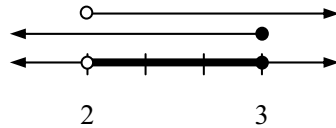
ซึ่งแสดงวิธีหาคำตอบด้วยกราฟได้ดังนี้



จะได้เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ หรือ $[-2, 1]$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $9-2x < 4x-3 \leq x+6$

วิธีทำ จาก $9-2x < 4x-3 \leq x+6$
 จะได้ $9-2x < 4x-3$ และ $4x-3 \leq x+6$
 $12 < 6x$ และ $3x \leq 9$
 $2 < x$ และ $x \leq 3$



นั่นคือ $2 < x \leq 3$
 เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$ หรือ $(2,3]$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^2 - 4x + 3 > 0$

วิธีทำ จากอสมการ $x^2 - 4x + 3 > 0$
 จะได้ $(x-1)(x-3) > 0$
 กรณีที่ 1 ถ้า $(x-1) > 0$ และ $(x-3) > 0$
 จะได้ $x > 1$ และ $x > 3$
 นั่นคือ $x > 3$

กรณีที่ 2 ถ้า $(x-1) < 0$ และ $(x-3) < 0$
 จะได้ $x < 1$ และ $x < 3$
 นั่นคือ $x < 1$ นั่นเอง

เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ หรือ } x < 1\} = (3, \infty) \cup (-\infty, 1)$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $x^2 - 2x \leq 3$

วิธีทำ จาก อสมการ $x^2 - 2x \leq 3$
 $(x-3)(x+1) \leq 0$
 กรณีที่ 1 ถ้า $(x-3) \geq 0$ และ $(x+1) \leq 0$
 จะได้ $x \geq 3$ และ $x \leq -1$

ซึ่งไม่มีค่า x ใดที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 และน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1

กรณีที่ 2 ถ้า $(x-3) \leq 0$ และ $(x+1) \geq 0$
 จะได้ $x \leq 3$ และ $x \geq -1$
 นั่นคือ $-1 \leq x \leq 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$



4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ครูเฉลยเอกสารฝึกหัดที่ 8.2 และแบบฝึกหัด 2.5 เฉพาะข้อที่นักเรียนสงสัย หรือข้อที่นักเรียนส่วนใหญ่ทำผิดซึ่งพบจากการตรวจแบบฝึกหัด

ครูทบทวนสมบัติของการไม่เท่ากัน โดยการตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ โดยเน้นสมบัติการคูณด้วยจำนวนเดียวกัน และการตัดออกสำหรับการคูณ เมื่อจำนวนที่นำมาคูณหรือตัดออกน้อยกว่า 0 ซึ่งจะทำให้เครื่องหมายของอสมการเปลี่ยนเป็นตรงกันข้าม กล่าวคือ จาก $>$ เป็น $<$ หรือจาก $<$ เป็น $>$ เช่น

ก. ถ้า $5 > 2$ แล้ว $(-2) \cdot 5 < (-2) \cdot 2$

ข. ถ้า $-10x > 30$ แล้ว $\left(-\frac{1}{10}\right)(-10x) < \left(-\frac{1}{10}\right)(30)$
หรือ $x < -3$

4.2 ครูแจกเอกสารฝึกหัดที่ 9 ให้นักเรียนทุกคนทำเพื่อเป็นการทบทวนการแก้สมการดีกรี 1 ซึ่งนักเรียนเคยเรียนมาแล้วใน ชั้น ม.3 ใช้เวลาประมาณ 10 นาที แล้วครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ

4.3 ครูยกตัวอย่างและแสดงวิธีทำโดยตั้งคำถามให้นักเรียนตอบทุกขั้นตอนดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $5 \leq 7-2x \leq 11$

วิธีทำ โดยอาศัยความรู้ที่ว่าถ้า $a < x < b$ จะได้ $a < x$ และ $x < b$

จาก $5 \leq 7-2x \leq 11$

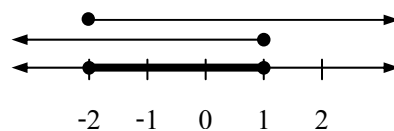
จะได้ $5 \leq 7-2x$ และ $7-2x \leq 11$

บวกด้วย -7 ทั้ง 2 ข้าง ; $-2 \leq -2x$ และ $-2x \leq 4$

คูณด้วย $-\frac{1}{2}$ ทั้ง 2 ข้าง $1 \geq x$ และ $x \geq -2$

นั่นคือ $x \leq 1$ และ $x \geq -2$

ซึ่งแสดงวิธีหาคำตอบโดยกราฟได้ดังนี้



จะได้เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$ หรือ $[-2, 1]$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเซตคำตอบของสมการ $9-2x < 4x-3 \leq x+6$

จาก $9-2x < 4x-3 \leq x+6$

จะได้ $9-2x < 4x-3$ และ $4x-3 \leq x+6$

$12 < 6x$ และ $3x \leq 9$

$2 < x$ และ $x \leq 3$



นั่นคือ $2 < x \leq 3$

เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x | 2 < x \leq 3\}$ หรือ $(2, 3]$

4.4 ครูเขียนโจทย์บนกระดาน 1 ข้อ ให้นักเรียนทำ ใครทำได้ให้ออกมาแสดงวิธีทำบนกระดาน ครูและเพื่อนๆ ช่วยกันตรวจ (ตัวอย่างโจทย์ เช่น จงหาเซตคำตอบของสมการ $3x - 5 < x + 1 < x + 7 < 5x + 11$)

4.5 ครูอธิบายสิ่งที่นักเรียนสงสัยจนกระทั่งเข้าใจดีแล้ว ให้ทำแบบฝึกหัด 2.5 ข ข้อ 1-4 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ฯ เป็นการบ้าน

4.6 ครูทบทวนเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ในรูป $ax^2 + bx + c$ และในรูปผลต่างกำลังสอง กำลังสองสมบูรณ์ โดยให้นักเรียนช่วยกันแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้ (วงเล็บข้างหลังควรเป็นคำตอบที่นักเรียนแยกได้)

1. $x^2 - 3x - 10 = \dots\dots\dots (x-5)(x+2)$
2. $x^2 + 5x + 4 = \dots\dots\dots (x+1)(x+4)$
3. $2x^2 - 3x + 1 = \dots\dots\dots (2x-1)(x-1)$
4. $3x^2 + 5x - 2 = \dots\dots\dots (3x-1)(x+2)$
5. $x^2 - 16 = \dots\dots\dots (x+4)(x-4)$
6. $4x^2 - 25 = \dots\dots\dots (2x+5)(2x-5)$
7. $x^2 + 4x + 4 = \dots\dots\dots (x+2)^2$
8. $x^2 - 6x + 7 = \dots\dots\dots (x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$

4.7 ครูให้ตัวอย่างที่ 3 และ 4 เป็นอสมการในรูปกำลังสอง แสดงวิธีทำโดยใช้การถามตอบ ให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นทุกขั้นตอนในการทำ ถ้ามีนักเรียนคนใดไม่เข้าใจ จะอธิบายซ้ำอีกครั้ง

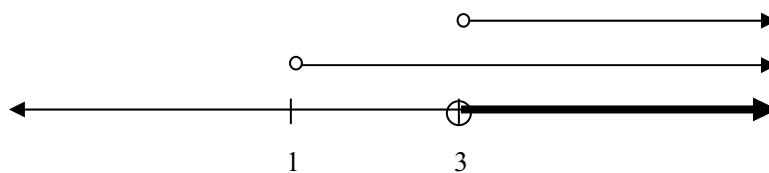
ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $x^2 - 4x + 3 > 0$

วิธีทำ จากอสมการ $x^2 - 4x + 3 > 0$
 จะได้ $(x-1)(x-3) > 0$

ผลคูณของจำนวนในวงเล็บทั้งสองมากกว่า 0 ซึ่งหมายถึง เป็นจำนวนบวก แสดงว่า เป็นจำนวนบวกทั้งคู่ หรือลบทั้งคู่ จึงพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ถ้า $(x-1) > 0$ และ $(x-3) > 0$ (เป็นบวกทั้งคู่)
 จะได้ $x > 1$ และ $x > 3$ ในขณะเดียวกัน

นั่นคือ $x > 3$ หรือเขียนเป็นช่วงคำตอบได้เป็น $(1, \infty) \cap (3, \infty) = (3, \infty)$ เขียนแสดงด้วยกราฟบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

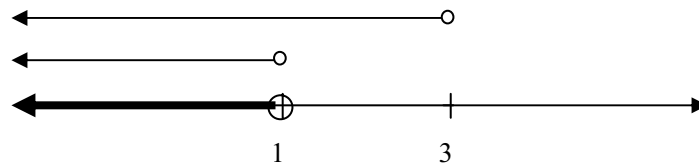


กรณีที่ 2 ถ้า $(x-1) < 0$ และ $(x-3) < 0$ (เป็นลบทั้งคู่)

จะได้ $x < 1$ และ $x < 3$

ค่า x ที่น้อยกว่า 1 และน้อยกว่า 3 ในขณะเดียวกัน คือ $x < 1$ นั่นเอง

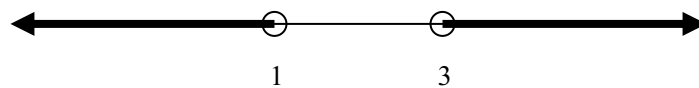
หรือเขียนเป็นช่วงคำตอบได้ $(-\infty, 1) \cap (-\infty, 3) = (-\infty, 1)$ ซึ่งเขียนแสดงด้วยกราฟบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือยูเนียนของเซตคำตอบของ กรณีที่ 1 กับเซตคำตอบของ กรณีที่ 2 นั่นเอง คือ $(3, \infty) \cup (-\infty, 1)$

หรือเซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ หรือ } x > 3\}$

เขียนแสดงด้วยกราฟบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $x^2 - 2x \leq 3$

จาก อสมการ $x^2 - 2x \leq 3$

จะได้ $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

$(x-3)(x+1) \leq 0$ ซึ่งแยกเป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 ถ้า $(x-3)(x+1) = 0$ จะได้ $x = 3$ หรือ -1

กรณีที่ 2 ถ้า $(x-3)(x+1) < 0$

ผลคูณของจำนวนทั้งสองในวงเล็บน้อยกว่า 0 หมายถึงเป็นลบ แสดงว่าวงเล็บหนึ่งเป็นจำนวนบวก อีกวงเล็บหนึ่งเป็นจำนวนลบ แยกได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 2.1 ถ้า $(x-3) > 0$ และ $(x+1) < 0$

จะได้ $x > 3$ และ $x < -1$

ซึ่งไม่มีจำนวนจริงใดๆที่มากกว่า 3 และน้อยกว่า -1 ในขณะเดียวกัน

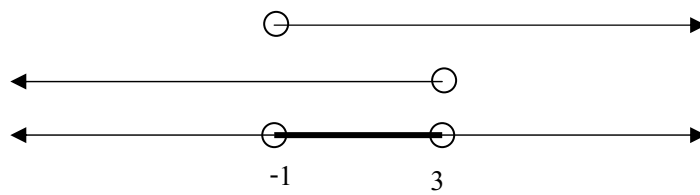
กรณีที่ 2.2 ถ้า $(x-3) < 0$ และ $(x+1) > 0$

จะได้ $x < 3$ และ $x > -1$

ค่า x ซึ่ง น้อยกว่า 3 และมากกว่า -1 ในขณะเดียวกันคือ $-1 < x < 3$

เขียนแสดงโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้





จากกรณี 2.1 และ 2.2 จะได้คำตอบของกรณีที่ 2 คือ $-1 < x < 3$

ดังนั้นค่าของ x ที่ทำให้สมการเป็นจริงคือ $-1 \leq x \leq 3$ (ซึ่งเกิดจากยูเนียนของคำตอบ กรณีที่ 1 และ 2)

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ $x^2 - 2x \leq 3$ คือ $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$ หรือ $[-1, 3]$

4.8 ครูย้ำกับนักเรียนอีกครั้งว่า ในการแก้สมการ ถ้าในโจทย์สมการเป็นเครื่องหมาย \geq หรือ \leq ให้นักเรียนพิจารณา กรณี “=” ก่อนเสมอ แล้วจึงพิจารณากรณี $>$ (มากกว่า) หรือ $<$ (น้อยกว่า) เมื่อนักเรียนทุกคนเข้าใจตรงกันแล้ว ให้ทำแบบฝึกหัด 2.5 ข ข้อ 5-14 ในหนังสือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ของสสวท.

5. แหล่งการเรียนรู้

5.1 เอกสารฝึกหัดที่ 9

5.2 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. ทำเอกสารฝึกหัดที่ 9 3. ทำโจทย์ แบบฝึกหัด 2.5 ข ข้อ 5 - 14 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก 2. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 % 3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....



เอกสารฝึกหัดที่ 9

จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $x-2 < 3$

2. $2x+3 \leq 7$

3. $2x+4 \leq 11$

4. $3-2x \leq 7$

5. $3x+5 \geq 8$

6. $7-8x \geq 6$

7. $-10 \leq 2x+4 \leq 6$

8. $9-2x < 4x-3 \leq x+6$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

เรื่อง การแก้อสมการ (ต่อ)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แก้อสมการที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1.1 แก้อสมการโดยพิจารณาเป็นกรณีได้

1.2 แก้อสมการโดยพิจารณาบนเส้นจำนวนได้

2. แนวความคิดหลัก

การแก้อสมการที่มีดีกรีสองหรือสูงกว่าสอง ในบางครั้งการพิจารณาเป็นกรณีจะไม่สะดวกในการหาคำตอบ จึงใช้วิธีการพิจารณาบนเส้นจำนวนแล้วสร้างตารางจะง่ายและรวดเร็วกว่า ซึ่งจะมีประโยชน์ในการนำไปใช้ในคณิตศาสตร์ขั้นสูงขึ้นไป

3. เนื้อหาสาระ

ตัวอย่างที่ 5 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(3 - x)(x - 1) < 0$

จาก $(3 - x)(x - 1) < 0$

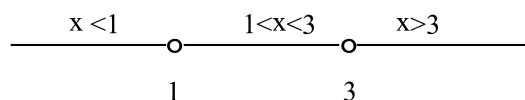
จัดสมการให้อยู่ในรูป $-(x - 3)(x - 1) < 0$

$(x - 3)(x - 1) > 0$

ซึ่งหมายถึง $(x-3)$ คูณกับ $(x-1)$ มีค่าเป็นบวก

พิจารณาค่า x ที่ทำให้ $(x-3)(x-1) = 0$ คือ $x = 3$ หรือ 1

นำค่า $x = 3, 1$ พิจารณาบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



แล้วนำมาสร้างเป็นตาราง เพื่อพิจารณาเครื่องหมายของพหุนาม ดังนี้



สร้างตาราง

	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$x-1$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
$(x-1)(x-3)$	+	-	+

จะเห็นได้ว่า ช่วงที่ผลคูณของ $(x-1)$ และ $(x-3)$ เป็น +

หรือ $(x-1)(x-3) > 0$ คือ $x < 1$ หรือ $x > 3$

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid x < 1 \text{ หรือ } x > 3\} = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

หมายเหตุ ถ้า $(x-1)(x-3) \leq 0$

จะเห็นได้ว่า ช่วงที่ผลคูณของ $(x-1)$ และ $(x-3)$ เป็น ลบหรือศูนย์คือ $1 < x < 3$ หรือ x มีค่าเป็น 1 หรือ 3

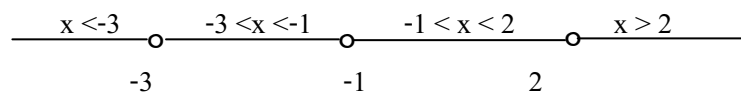
ดังนั้นเซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$ หรือ $[1, 3]$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาเซตคำตอบของสมการ $(x+1)(x-2)(x+3) < 0$

จากโจทย์ ถ้า $(x+1)(x-2)(x+3) = 0$

จะได้ $x = -1, 2, -3$

พิจารณาบนเส้นจำนวน



สร้างตาราง

	$x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$x+3$	-	+	+	+
$x+1$	-	-	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$(x+3)(x+1)(x-2)$	-	+	-	+

จากตาราง ช่วงที่ผลคูณของทั้ง 3 วงเล็บเป็นลบ คือ $x < -3$ หรือ $-1 < x < 2$

นั่นคือ $(x+1)(x-2)(x+3) < 0$ เมื่อ $x < -3$ หรือ $-1 < x < 2$

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid x < -3 \text{ หรือ } -1 < x < 2\}$

หรือ $(-\infty, -3) \cup (-1, 2)$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 อธิบายแบบฝึกหัด 2.5 ข ข้อ 5 – 14 โดยเฉพาะข้อที่นักเรียนส่วนใหญ่ทำไม่ได้ (ซึ่งพบเห็นจากการตรวจแบบฝึกหัด) และข้อที่นักเรียนสงสัย เพื่อเป็นการทบทวนการแก้สมการโดยพิจารณาเป็นกรณี

4.2 ครูบอกนักเรียนว่า ในการหาคำตอบโดยแยกเป็นกรณีที่ได้กล่าวมาแล้ว ถ้าพหุนามที่โจทย์กำหนดให้ในอสมการมีดีกรีสูงกว่า 2 การพิจารณาจะมีหลายกรณี ซึ่งจะเสียเวลามากในการแก้สมการ ดังนั้นเราจะใช้วิธีพิจารณาบนเส้นจำนวนจะสะดวกกว่า ซึ่งจะได้ตั้งแต่ดีกรีสองเป็นต้นไป

4.3 ครูยกตัวอย่างที่ 5 และ 6 แล้วใช้วิธีการถาม ให้นักเรียนตอบทุกขั้นตอน เมื่อมีนักเรียนบางคนยังไม่เข้าใจส่วนไหน ครูจะอธิบายขั้นตอนอย่างละเอียดอีกครั้ง แล้วครูยกตัวอย่างโจทย์อีก 1 ข้อสุ่มให้นักเรียนช่วยกันออกมาทำบนกระดาน แล้วครูและเพื่อนๆช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

4.4 ครูชี้แนะให้นักเรียนสังเกตว่า ในการพิจารณาบนเส้นจำนวนและนำไปสร้างตารางทุกครั้ง สัมประสิทธิ์ของ x ต้องเป็นบวกเสมอ และในการเขียนแต่ละบรรทัดของตาราง ต้องเรียงลำดับจากวงเล็บที่ทำให้ได้ค่าวิกฤตน้อยที่สุดลงมาเสมอ จะทำให้การพิจารณาเครื่องหมายสะดวกและไม่ผิดพลาด

4.5 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.5 ข ข้อที่เหลือ ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

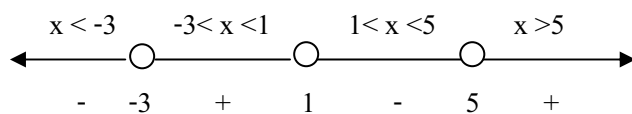
4.6 ครูเฉลยแบบฝึกหัด 2.5 เฉพาะข้อที่นักเรียนสงสัย และให้นักเรียนสังเกตตาราง จากตัวอย่าง 5 และ 6 และจากแบบฝึกหัดที่นักเรียนทำ นักเรียนควรจะสังเกตเห็นว่าเครื่องหมาย ในบรรทัดสุดท้ายของตารางขวามือสุดจะเป็น + เสมอ และถัดมาทางซ้ายจะเป็น - แล้วเป็น + สลับกันทุกข้อ

4.7 ครูบอกนักเรียนว่า ในกรณีทั่วไป ถ้า $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$ ซึ่ง $a < b < c$ จะได้ค่า $x = a$ หรือ b หรือ c บนเส้นจำนวนดังนี้

ถ้า $(x - a)(x - b)(x - c) > 0$ คำตอบคือยูเนียนของช่วงที่เป็น +

ถ้า $(x - a)(x - b)(x - c) < 0$ คำตอบคือยูเนียนของช่วงที่เป็น -

เช่น $(x - 1)(x + 3)(x - 5) > 0$ พิจารณาที่ $x = 1, -3, 5$ พิจารณาบนเส้นจำนวน



คำตอบของอสมการคือ $-3 < x < 1$ หรือ $x > 5$

เซตคำตอบของอสมการคือ $(-3, 1) \cup (5, \infty)$



4.8 ครูให้ตัวอย่างเพิ่มเติมที่เป็นเศษส่วนของพหุนาม โดยแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 4 คนให้นักเรียนช่วยกันศึกษาจากเอกสารแนะแนวทางที่ 10

4.9 ครูเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 10 โดยการถามให้นักเรียนช่วยกันตอบ

4.10 แจกเอกสารความรู้ที่ 10 ให้นักเรียนทุกคนในกลุ่มช่วยศึกษา ถ้าใครมีปัญหาซักถามครูจะอธิบายยกตัวอย่างเพิ่มเติมแล้วให้ช่วยกันตอบ

4.11 ครูใช้วิธีการถามตอบเพื่อให้นักเรียนสรุปให้ได้ว่า ในการแก้สมการ ต้องทำตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ทำให้ข้างขวาของสมการเป็นศูนย์เสมอ
2. เขียนให้อยู่ในรูปตัวประกอบของพหุนามหรือผลคูณของพหุนามดีกรีหนึ่ง
3. พิจารณานบนเส้นจำนวน
4. คำตอบของสมการตอบในรูปเซตหรือช่วง

4.12 ชี้แจงการทดสอบย่อยเก็บคะแนนเรื่องการแก้สมการในคาบต่อไป

5. แหล่งการเรียนรู้

5.1 เอกสารแนะแนวทางที่ 10

5.2 เอกสารความรู้ที่ 10

5.3 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง เป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนร่วมกิจกรรมดี
3. สังเกตจากความสนใจ	3. นักเรียนให้ความสนใจดี และตั้งใจเรียน
4. ทำโจทย์เอกสารแนะแนวทางที่ 10	4. นักเรียนทำถูกต้อง 95 %
5. ทำแบบฝึกหัด 2.5 ข ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1	5. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....



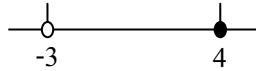
เอกสารแนะแนวทางที่ 10

คำสั่ง ให้นักเรียนอ่านทำความเข้าใจ แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1. จงแก้สมการ $\frac{x-4}{x+3} \geq 0$

ถ้า $\frac{x-4}{x+3} = 0$ จะได้ $x = 4$ และ $x \neq \dots\dots\dots$

ใช้ $x = 4$



สร้างตาราง

	$x < -3$	$-3 < x < 4$	$x > 4$
$x + 3$			
$x - 4$			
$\frac{x - 4}{x + 3}$			

จากตาราง $\frac{x-4}{x+3} > 0$ เมื่อ $\dots\dots\dots$ หรือ $\dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{x-4}{x+3} \geq 0$ เมื่อ $\dots\dots\dots$ หรือ $\dots\dots\dots$

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการคือ $\dots\dots\dots$

2. จงแก้สมการ $\frac{(x+1)(x-2)}{(x-4)} \leq 0$

ถ้า $\frac{(x+1)(x-2)}{(x-4)} = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$ หรือ $\dots\dots\dots$

แต่ $x \neq \dots\dots\dots$

ใช้ค่า $x = \dots\dots\dots$

สร้างตาราง

.....



เอกสารความรู้ที่ 10

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

วิธีทำ จาก $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$$\text{จะได้ } (x+1)^2 \geq 0$$

$(x+1)^2 \geq 0$ เสมอไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดๆ ก็ตาม

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ \mathbb{R}

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $x^2 + 2x + 3 > 0$

วิธีทำ จาก $x^2 + 2x + 3 > 0$

$$(x^2 + 2x + 1) + 2 > 0$$

$$(x+1)^2 + 2 > 0$$

$(x+1)^2 \geq 0$ เสมอไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดๆ ก็ตาม

ดังนั้น $(x+1)^2 + 2 \geq 0$ สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{R}$

เซตคำตอบของสมการ คือ $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $x^2 + 2x + 3 < 0$

วิธีทำ $x^2 + 2x + 3 < 0$

$$(x^2 + 2x + 1) + 2 < 0$$

$$(x+1)^2 + 2 < 0$$

$(x+1)^2 \geq 0$ เสมอไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดๆ ก็ตาม

ดังนั้น $(x+1)^2 + 2 < 0$ จึงไม่มีค่า x ที่ทำให้สมการเป็นจริง

เซตคำตอบของสมการ คือ \emptyset

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $x^2 - 4x + 4 > 0$

วิธีทำ $x^2 - 4x + 4 > 0$

$$(x-2)^2 > 0$$

$(x-2)^2 > 0$ เสมอไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดๆ ก็ตาม

แต่ $(x-2)^2 > 0$ เมื่อ $x \neq 2$ ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\mathbb{R} - \{2\}$



ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

วิธีทำ
$$x^2 - 4x + 4 \leq 0$$

$$(x - 2)^2 \leq 0$$

เนื่องจาก $(x - 2)^2 \geq 0$ เสมอไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดๆ ก็ตาม
 แต่ $(x - 2)^2 < 0$ คำตอบคือ \emptyset , $(x - 2)^2 = 0$ เมื่อ $x = 2$
 ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{2\}$

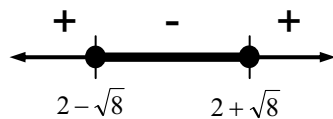
ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $x^2 - 4x - 4 \leq 0$

วิธีทำ
$$x^2 - 4x - 4 \leq 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 8 \leq 0$$

$$(x - 2)^2 - (\sqrt{8})^2 \leq 0$$

$$(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8}) \leq 0$$



ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{x \mid 2 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 2 + 2\sqrt{2}\}$

ข้อต่อไปให้นักเรียนทำเอง

จงแก้สมการ $\frac{(x-1)^3(x+3)^2}{(x-4)^5} \geq 0$

(ให้นักเรียนทำเอง)

.....

.....

.....

จงแก้สมการ $(x - 2)(3 - x) < 0$

(ให้นักเรียนทำเอง)

.....

.....

.....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

เรื่อง ค่าสัมบูรณ์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แก้สมการตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกความหมายและสมบัติของค่าสัมบูรณ์ได้
- 1.2 แก้สมการตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ได้

2. แนวความคิดหลัก

ค่าสัมบูรณ์ในเชิงเรขาคณิต เป็นระยะห่างระหว่างจุดแทน 0 กับจุดแทน a เมื่อ a เป็นจำนวนจริง บนเส้นจำนวน ในระบบจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a จะแทนด้วยสัญลักษณ์ |a|

$$\text{โดยที่ } |a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } a = 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

ความรู้และความเข้าใจเรื่องค่าสัมบูรณ์ จะเป็นประโยชน์ในการแก้สมการและอสมการที่เกี่ยวข้องกับค่าสัมบูรณ์และเรื่องอื่นๆ ต่อไป

3. เนื้อหาสาระ

3.1 นิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a แทนด้วย |a|

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

3.2 ทฤษฎีบท เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

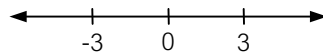
- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. $ x = -x $ | 4. $ x - y = y - x $ |
| 2. $ xy = x y $ | 5. $ x ^2 = x^2$ |
| 3. $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }, y \neq 0$ | 6. $ x + y \leq x + y $ |



4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ทดสอบเก็บคะแนนเรื่องการแก้สมการ 20 นาที

4.2 ครูทบทวนการเขียนเส้นจำนวนและค่าสัมบูรณ์ที่เคยเรียนมาแล้ว ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ครูเขียนเส้นจำนวนดังรูป



จากเส้นจำนวน ครูถามนักเรียนว่า ระยะทางจาก 3 ถึง 0 กับระยะทางจาก -3 ถึง 0 เท่ากันหรือไม่ (เท่ากัน เพราะอยู่ห่างจากจุด 0 เป็นระยะ 3 หน่วยเท่ากัน)

ครูบอกนักเรียนว่าระยะทางจากจุด 0 ถึงจุด 3 บนเส้นจำนวนเรียกว่าค่าสัมบูรณ์ของ 3 เขียนแทนด้วย $|3|$

ครูบอกนักเรียนว่าระยะทางจากจุด 0 ถึง จุด -3 บนเส้นจำนวนเรียกว่าค่าสัมบูรณ์ของ -3 เขียนแทนด้วย $|-3|$

ครูถามนักเรียนว่า $|3|$ กับ $|-3|$ เท่ากันหรือไม่เพราะเหตุใด (เท่ากัน เพราะอยู่ห่างจากจุด 0 เป็นระยะ 3 หน่วยเท่ากัน)

4.3 ครูตั้งคำถามเกี่ยวกับ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนแต่ละจำนวน โดยสุ่มนักเรียนให้ตอบทีละคน พร้อมทั้งใช้สัญลักษณ์แทนค่าสัมบูรณ์ให้ถูกต้อง เช่น

จุดอะไรที่อยู่ห่างจากจุด 0 เป็นระยะ 8 หน่วย นักเรียนควรตอบได้ว่า 8 และ -8 สรุปได้ว่าค่าสัมบูรณ์ของ 8 และ -8 คือ 8 เขียนแทนด้วย $|8|=8$ หรือ $|-8|=8$

4.4 ครูตั้งคำถามโดยกำหนดค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง แล้วให้นักเรียนบอกความหมายและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงนั้นๆ โดยยกตัวอย่างนำ เช่น

$|2|$ เป็นระยะทางจาก 0 ถึงจุดแทนจำนวน 2 ซึ่งเท่ากับ 2 หน่วย ดังนั้น $|2|=2$
 $|-1|$ เป็นระยะทางจาก 0 ถึง..... ดังนั้น $|-1|=.....$
 $|-2|$ ดังนั้น $|-2|=.....$
 $|0|$ ดังนั้น $|0|=.....$

ถ้า a เป็นจำนวนบวก $|a|=a$

ถ้า a เป็นศูนย์ $|0|=0$

ถ้า a เป็นจำนวนลบ $|a|=-a$ เช่น $a=-3$ จะได้ $|a|=|-3|=-(-3)=3$

$a=-5$ จะได้ $|a|=|-5|=-(-5)=5$

4.5 ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเป็นนิยามของค่าสัมบูรณ์ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ นักเรียนควรสรุปได้ว่า



$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนบวก} \\ 0 & \text{เมื่อ } a = 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนลบ} \end{cases}$$

4.6 ให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางที่ 11.1 เพื่อสรุปสมบัติบางประการของค่าสัมบูรณ์ ซึ่งนักเรียนควรสรุปได้ดังนี้

$$4.6.1 \quad |x| = |-x|$$

$$4.6.2 \quad |xy| = |x||y|$$

$$4.6.3 \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$$

$$4.6.4 \quad |x - y| = |y - x|$$

$$4.6.5 \quad |x|^2 = x^2$$

$$4.6.6 \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$4.6.7 \quad |x - y| \geq |x| - |y|$$

4.7 ให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางที่ 11.2 เพื่อสรุปเป็นบทนิยาม ซึ่งนักเรียนควรสรุปได้ดังนี้

บทนิยาม เมื่อ x เป็นจำนวนจริง และ $a > 0$, $|x| = a$ หมายถึง $x = a$ หรือ $x = -a$

4.8 หลังจากสรุปนิยามและทุกคนเข้าใจตรงกันแล้ว ครูให้ตัวอย่างเพิ่มเติมให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.6 ข้อ 1-3 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และให้ทำเอกสารฝึกหัด 11.1 เป็นการทำงานบ้าน

4.9 ครูเฉลยเอกสารฝึกหัดที่ 11.1 และอธิบายข้อที่นักเรียนสงสัย พร้อมกับย้ำว่าในการแก้สมการต้องตรวจคำตอบทุกครั้ง

4.10 ครูทบทวนสมบัติของค่าสัมบูรณ์เกี่ยวกับ $|x|^2 = x^2$ และ $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ซึ่งจะนำไปใช้ในการแก้สมการค่าสัมบูรณ์

4.11 ครูยกตัวอย่างโจทย์ แล้วให้นักเรียนช่วยกันทำ โดยครูถามให้นักเรียนตอบ เพื่อให้นักเรียนสามารถสรุปวิธีทำได้



ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $|2-x| = |x+3|$

วิธีทำ จาก $|2-x| = |x+3|$

$$\begin{aligned} \text{ยกกำลัง 2;} \quad & |2-x|^2 = |x+3|^2 \\ & 4 - 4x + x^2 = x^2 + 6x + 9 \\ & -10x = 5 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

เซตคำตอบคือ $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $\frac{|x+2|}{|x-1|} = 2$

วิธีทำ จาก $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{|x+2|}{|x-1|} = 2$$

$$|x+2| = 2|x-1|$$

$$|x+2|^2 = |2x-2|^2$$

$$(x+2)^2 = (2x-2)^2$$

$$(x+2)^2 - (2x-2)^2 = 0$$

$$[(x+2) + (2x-2)][(x+2) - (2x-2)] = 0$$

$$3x(4-x) = 0$$

$$\text{นั่นคือ} \quad x(4-x) = 0$$

$$\text{จะได้ } x = 0 \text{ หรือ } x = 4$$

เซตคำตอบคือ $\{0, 4\}$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $|3x+2| = 1-2x$

วิธีทำ จาก $|3x+2| = 1-2x$

$$\text{จะได้ } 3x+2 = 1-2x \text{ หรือ } 3x+2 = -(1-2x)$$

$$5x = -1 \text{ หรือ } x = -3$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

จากการตรวจคำตอบจะได้

$$x = -\frac{1}{5} \text{ และ } x = -3$$

∴ เซตคำตอบ คือ $\left\{-\frac{1}{5}, -3\right\}$

4.12 ให้นักเรียนทำโจทย์เอกสารฝึกหัดที่ 11.2 เสร็จแล้วช่วยกันเฉลยคำตอบ และอธิบายข้อสงสัย และยกตัวอย่างเพิ่มเติมสำหรับนักเรียนที่มีปัญหาหรือทำไม่ถูก

4.13 ครูทบทวนนิยามของค่าสัมบูรณ์และสมบัติที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์ที่เกี่ยวกับสมการกล่าวคือ $|x| = a$ ก็ต่อเมื่อ $x = a$ หรือ $x = -a$ แล้วทดสอบเกี่ยวกับสมการค่าสัมบูรณ์ 1 ข้อ (ให้แสดงวิธีทำ)

5. แหล่งการเรียนรู้

5.1 เอกสารแนะแนวทางที่ 11.1, 11.2

5.2 เอกสารฝึกหัดที่ 11.1, 11.2

5.3 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท.

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 11.1, 11.2	2. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 90 %
3. ทำเอกสารฝึกหัดที่ 11.1, 11.2	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด 2.6 ในหนังสือเรียน สาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %
5. ทดสอบ แสดงวิธีทำ	5. นักเรียนแสดงวิธีทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....



เอกสารแนบแนวทางที่ 11.1

คำสั่ง จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. $|2| = |-2|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ เท่ากัน เพราะต่างเท่ากับ 2

2. $|5| = |-5|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ

3. $|x| = |-x|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ

4. $|2(5)| = |2||5|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ

5. $|2(-5)| = |2||-5|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ

6. $|(-2)(-5)| = |-2||-5|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ

7. $|xy| = |x||y|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ

8. $\left|\frac{20}{4}\right| = \frac{|20|}{|4|}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ

9. $\left|\frac{-20}{4}\right| = \frac{|-20|}{|4|}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ



10. $\left| \frac{-20}{-4} \right| = \frac{|-20|}{|-4|}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

11. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

12. $|9 - 4| = |4 - 9|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

13. $|9 - (-4)| = |(-4) - 9|$. หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

14. $|(-9) - 4| = |4 - (-9)|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

15. $|(-9) - (-4)| = |(-4) - (-9)|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

16. $|x - y| = |y - x|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

17. $|5|^2 = (5)^2$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

18. $|-5|^2 = (-5)^2$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ

19. $|x|^2 = (x)^2$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ



20. $|2 + 5| \leq |2| + |5|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ
21. $|-2 + 5| \leq |-2| + |5|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ
22. $|5 + (-2)| \leq |5| + |-2|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ
23. $|(-5) + (-2)| \leq |-5| + |-2|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ
24. $|x + y| \leq |x| + |y|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ
25. $|5 - 3| \geq |5| - |3|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ
26. $|3 - 5| \geq |3| - |5|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ
27. $|-5 - (-3)| \geq |-5| - |-3|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ
28. $|x - y| \geq |x| - |y|$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
ตอบ



เอกสารแนะแนวทางที่ 11.2

คำสั่ง ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างแล้วเติมคำตอบลงในช่องว่าง

- $|2|$ หมายถึง ระยะทางจากจุดแทน 0 ถึงจุดแทน 2 บนเส้นจำนวน
- $|-2|$ หมายถึง _____
- $|x|$ หมายถึง _____
- $|x| = 2$ หมายถึง ระยะทางจากจุดแทน 0 ถึงจุดแทน x บนเส้นจำนวน มีค่าเท่ากับ 2 หน่วย
ดังนั้น $x =$ _____ หรือ $x =$ _____
- $|x| = 3$ หมายถึง _____
ดังนั้น $x =$ _____ หรือ $x =$ _____
- $|x| = a$ เมื่อ $a > 0$ หมายถึง _____
ดังนั้น $x =$ _____ หรือ $x =$ _____
- $|x + 3| = 1$ จะได้ $x + 3 =$ _____ หรือ $x + 3 =$ _____
ดังนั้นคือ $x =$ _____ หรือ $x =$ _____
- $|3 - 2x| = 5$ จะได้ $3 - 2x =$ _____ หรือ $3 - 2x =$ _____
ดังนั้นคือ $x =$ _____ หรือ $x =$ _____
- $|x + 10| = 0$ จะได้

- ถ้า $|3x - 5| - 10 = 0$ จะได้



เอกสารฝึกหัดที่ 11.1

ชื่อ ชั้น เลขที่

จงนำบทนิยามและสมบัติของค่าสัมบูรณ์มาใช้ในการแก้สมการต่อไปนี้

1. $|x + 3| = -5$

2. $|3 - 2x| = 3 - 2x$

3. $|3 - 2x| = 2x - 3$

4. $|x| = x - 1$

5. $|x| = x + 1$

6. $|x - 2| = x + 3$

7. $|x - 4| = 8 - 3x$

8. $|2x + 1| = x - 3$



เอกสารฝึกหัดที่ 11.2

ชื่อ ชั้น เลขที่

คำสั่ง จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $|x+2| = |x-1|$

2. $|3x-4| = |2x+1|$

3. $\left| \frac{x+3}{x-2} \right| = 1$

4. $\left| \frac{3x-2}{x-1} \right| = 2$

5. $4|x+2|^2 + 3|x+2| - 1 = 0$

6. $|x-2| + 2|x-1| = |x+4|$

7. $|x^2 + 4x + 4| = 2x + 4$

8. $|x+3| + |x-5| = 2$

9. $|x+1| + |x+2| + |x-1| = 5$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ (ต่อ)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แก้สมการตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1.1 บอกทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ได้

1.2 แก้สมการในรูปค่าสัมบูรณ์ตัวแปรเดียวอย่างง่ายได้

2. แนวความคิดหลัก

ทฤษฎีบท เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก

$$|x| < a \text{ หมายถึง } -a < x < a$$

$$|x| \leq a \text{ หมายถึง } -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \text{ หมายถึง } x < -a \text{ หรือ } x > a$$

$$|x| \geq a \text{ หมายถึง } x \leq -a \text{ หรือ } x \geq a$$

3. เนื้อหาสาระ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ x เมื่อกำหนด $|2x + 1| < 5$

วิธีทำ $|2x + 1| < 5$ มีความหมายเหมือนกับ $-5 < 2x + 1 < 5$

$$\text{นั่นคือ } -5 - 1 < 2x + 1 - 1 < 5 - 1$$

$$-6 < 2x < 4$$

$$\text{ดังนั้น } -3 < x < 2$$

เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid -3 < x < 2\} = (-3, 2)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ x เมื่อกำหนด $|4x - 2| > 10$

วิธีทำ $|4x - 2| > 10$ มีความหมายเหมือนกับ

$$4x - 2 < -10 \text{ หรือ } 4x - 2 > 10$$

$$\text{นั่นคือ } 4x - 2 + 2 < -10 + 2 \text{ หรือ } 4x - 2 + 2 > 10 + 2$$

$$4x < -8 \text{ หรือ } 4x > 12$$

$$\text{ดังนั้น } x < -2 \text{ หรือ } x > 3$$

เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid x < -2 \text{ หรือ } x > 3\} = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$



ตัวอย่างที่ 3 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

$$|2x - 3| \leq 9 \quad \text{และ} \quad |2x - 3| \leq -9$$

วิธีทำ จาก $|2x - 3| \leq 9$

จะได้ $-9 \leq 2x - 3 \leq 9$

$$-9 + 3 \leq 2x - 3 + 3 \leq 9 + 3$$

$$-6 \leq 2x \leq 12$$

$$-3 \leq x \leq 6$$

เซตคำตอบของอสมการคือ $[-3, 6]$

ส่วน $|2x - 3| \leq -9$ ให้นักเรียนลองหาคำตอบเอง

ตัวอย่างที่ 4 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $|x + 3| > -2x - 9$

2. $\frac{|2x - 5|}{|3x + 1|} \leq 1$

1. จาก $|x + 3| > -2x - 9$

จะได้ $x + 3 < -(-2x - 9)$ หรือ $x + 3 > -2x - 9$

$$x + 3 < 2x + 9 \quad \text{หรือ} \quad 3x > -12$$

$$-6 < x \quad \text{หรือ} \quad x > -4$$

นั่นคือ $x > -6$

เซตคำตอบของอสมการคือ $(-6, \infty)$

2. จาก $\frac{|2x - 5|}{|3x + 1|} \leq 1$

จะได้ $\frac{|2x - 5|}{|3x + 1|} \leq 1$

$$|2x - 5| \leq |3x + 1|$$

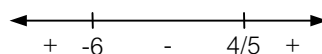
$$|2x - 5|^2 \leq |3x + 1|^2$$

$$(2x - 5)^2 - (3x + 1)^2 \leq 0$$

$$(2x - 5 + 3x + 1)(2x - 5 - 3x - 1) \leq 0$$

$$(5x - 4)(-x - 6) \leq 0$$

$$(5x - 4)(x + 6) \geq 0$$



เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{ x \mid x \leq -6 \text{ หรือ } x \geq \frac{4}{5} \right\}$ หรือ $(-\infty, -6] \cup \left[\frac{4}{5}, \infty\right)$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ครูทบทวนนิยามของค่าสัมบูรณ์เพื่อให้นักเรียนหาข้อสรุปเป็นทฤษฎีโดยการถามตอบดังต่อไปนี้ (ในวงเล็บควรเป็นคำตอบของนักเรียน)

$|x| = 2$ หมายความว่าอย่างไร (ระยะทางจากจุดแทน 0 ถึงจุดแทน $x = 2$ หน่วย)

ดังนั้น $x = \dots\dots\dots$ หรือ $x = \dots\dots\dots$ ($x = 2$ หรือ $x = -2$)

$|x| < 2$ หมายความว่าอย่างไร (ระยะทางจากจุดแทน 0 ถึงจุดแทน x น้อยกว่า 2 หน่วย) แสดงตำแหน่งของ x บนเส้นจำนวนได้อย่างไร (_____)

สรุปค่าของ x ได้อย่างไร ($-2 < x < 2$)

$|x| > 2$ หมายความว่าอย่างไร (ระยะทางจากจุดแทน 0 ถึงจุดแทน x มากกว่า 2 หน่วย)

แสดงตำแหน่งของ x บนเส้นจำนวนได้อย่างไร (_____)

สรุปค่าของ x ได้อย่างไร ($x < -2$ หรือ $x > 2$)

4.2 จากขั้นนำในกรณีทั่วไปครูใช้วิธีการถามตอบเพื่อให้นักเรียนช่วยกันสรุปให้ได้ว่า

- $|x| < a$ หมายถึง $-a < x < a$
- $|x| \leq a$ หมายถึง $-a \leq x \leq a$
- $|x| > a$ หมายถึง $x < -a$ หรือ $x > a$
- $|x| \geq a$ หมายถึง $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

4.3 ครูให้ตัวอย่างที่ 1-3 และอธิบายโดยการถามตอบจนกระทั่งนักเรียนเข้าใจดีแล้วให้ทำแบบฝึกหัด 2.9 ข้อ 4 (ข้อย่อย 1 – 8)

4.4 ครูเฉลยแบบฝึกหัดที่ 2.9 เฉพาะข้อที่นักเรียนสงสัยพร้อมกับทบทวนทฤษฎีบทเพื่อให้อตัวอย่างเพิ่มเติม

4.5 ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างที่ 4 บนกระดานดำ ให้นักเรียนคิด ถ้านักเรียนคนใดทำได้ให้อาสาออกมาทำบนกระดานดำ ครูและเพื่อนๆ ช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง ครูอธิบายอีกครั้งสำหรับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจ

4.6 แบ่งกลุ่มนักเรียนกลุ่มละ 4 คนช่วยกันทำเอกสารฝึกหัดที่ 12 ใช้เวลา 15 นาที ครูเฉลยคำตอบที่ถูกต้อง ถ้ากลุ่มไหนยังไม่เข้าใจจะอธิบายอีกครั้งจนกระทั่งหมดข้อสงสัย

4.7 ทดสอบเก็บคะแนนโดยแสดงวิธีทำคนละ 1 ข้อ โดยเลือกจากแบบฝึกหัดที่ 2.7 ข้อ 1, ข้อ 13-18 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4



5. แหล่งการเรียนรู้

5.1 เอกสารฝึกหัดที่ 12

5.2 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากความสนใจ	2. นักเรียนสนใจและตั้งใจเรียน
3. ทำเอกสารฝึกหัดที่ 12	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด 2.7 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %
5. ทดสอบ แสดงวิธีทำ	5. นักเรียนแสดงวิธีทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมการเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....



เอกสารฝึกหัดที่ 12

ชื่อ ชั้น เลขที่

จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $|x + 2| > -5$

2. $|x - 2| < -5$

3. $|3 - 4x| \leq 0$

4. $|2x - 3| < 4x$

5. $|5x - 4| \leq 2 + 3x$

6. $|12x - 7| \leq 5x + 2$

7. $|3 - 5x| < |2 - 3x|$

8. $|x - 1| \leq |x - 2|$

9. $\left| \frac{x - 4}{x + 1} \right| < 2$

10. $\left| \frac{2x + 1}{x - 1} \right| \geq 3$

11. $|x + 1| + |x - 1| < 1$

12. $\frac{|x| + 1}{|x|} < 1$

13. $\frac{|x|}{|x| - 5} < 1$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

เรื่อง **ลัทธิของความบริบูรณ์** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา **คณิตศาสตร์** เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกสมบัติความบริบูรณ์ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

บอกนิยามของขอบเขตบนและระบุดขอบเขตบนของสับเซตของ R ที่กำหนดให้ได้

หาขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซตที่มีขอบเขตบนได้

บอกนิยามของขอบเขตล่างและระบุดขอบเขตล่างของสับเซตของ R ที่กำหนดให้ได้

หาขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของเซตที่มีขอบเขตล่างได้

2. แนวความคิดหลัก

ลัทธิของความบริบูรณ์เป็นสมบัติประการสุดท้ายของระบบจำนวนจริง ซึ่งระบบจำนวนอื่นไม่มี และมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ลัทธิการมีค่าขอบเขตบนน้อยสุด ลัทธิของความบริบูรณ์จะใช้เป็นส่วนหนึ่งของรากฐานคณิตศาสตร์ชั้นสูงบางสาขา

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม 1 ถ้า S เป็นสับเซตของ R S จะมีขอบเขตบนก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง a ซึ่ง $x \leq a$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัวใน S เรียกจำนวนจริง a นี้ว่าขอบเขตบน (**upper bound**) ของ S

ลัทธิของความบริบูรณ์

ถ้า $S \subset R$, $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตบนแล้ว S จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

บทนิยาม 2 ถ้า S เป็นสับเซตของ R จำนวนจริง a จะเป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด (Least upper bound) หรือ supremum ของ S ก็ต่อเมื่อ

1. a เป็นขอบเขตบนของ S
- และ 2. ถ้า b เป็นขอบเขตบนค่าน้อยที่สุดของ S จะได้ว่า $b \leq a$ เขียนแทนขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S ด้วย $\sup S$ (หรือ lub S)



เช่น ถ้า $S = (1,4)$ จะได้ $\sup S = 4$

บทนิยาม 3 ถ้า S เป็นสับเซตของ \mathbb{R} S จะมีขอบเขตล่าง ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง a ซึ่ง $a \leq x$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัวใน S เรียกจำนวนจริง a ว่า ขอบเขตล่าง (lower bound) ของ S

บทนิยาม 4 ถ้า S เป็นสับเซต \mathbb{R} จำนวนจริง a จะเป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุด (greatest lower bound หรือ infimum) ของ S ก็ต่อเมื่อ

1. a เป็นขอบเขตล่างของ S
- และ 2. ถ้า b เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ S จะได้ว่า $a \leq b$

เขียนแทนขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ S ด้วย $\inf S$ (หรือ $\text{glb } S$) เช่น

ถ้า $S = (6,9)$ จะได้ $\inf S = 6$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ทบทวนสมบัติของจำนวนจริงที่เรียนผ่านมาแล้ว โดยครูถามให้นักเรียนตอบทีละคน

4.2 ให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางที่ 13 ใช้เวลา 10 นาที

4.3 ครูเฉลยคำตอบเอกสารแนะแนวทางที่ 13 และอธิบายให้นักเรียนทราบว่า ข้อใดที่บอกได้ว่า มีจำนวนจริงใดที่ไม่น้อยกว่าจำนวนใดๆ ในเซตนั้น เราเรียกเซตนั้นว่าเป็นเซตที่มีขอบเขตบน

4.4 ครูอธิบาย บทนิยาม 1- 2 สัจพจน์ของความบริบูรณ์ พร้อมทั้งยกตัวอย่าง อธิบายโดยใช้วิธีการถามตอบดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง ให้นักเรียนช่วยกันหาขอบเขตบน ในกรณีที่มีขอบเขตบน จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุดหรือไม่ (ในวงเล็บเป็นคำตอบ)

1) $(2, 5]$ (มีขอบเขตบนเป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 5 และขอบเขตบนค่าน้อยสุดคือ 5)

2) $(-\infty, -5)$ (มีขอบเขตบนเป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ -5 และขอบเขตบนค่าน้อยสุดคือ -5)

3) $[-10, \infty)$ (ไม่มีค่าขอบเขตบน)

4) \emptyset (มีค่าขอบเขตบนเป็นจำนวนจริงทุกจำนวน แต่ไม่มี ขอบเขตบนค่าน้อยสุด)

5) $\left\{ x \mid x = 2 - \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{I}, n \geq 0 \right\}$

$\left(2 - \frac{1}{2^n} < 2 \right)$ ทุกๆจำนวนเต็ม $n \geq 0$ ดังนั้นเซตนี้มีขอบเขตบน และค่าขอบเขตบนน้อยสุด คือ 2)



6) $\{1,2,3,4\} \cup \{-5, \pi\}$

(สมาชิกทุกตัวของ $\{1,2,3,4\} \cup \{-5, \pi\}$ มีค่าขอบเขตบนและค่าขอบเขตบนน้อยสุดคือ 4)

4.5 จากตัวอย่างในข้อ 4 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป เพื่อเป็นการย้ำว่า สับเซตใดๆ ที่ไม่ใช่เซตว่างของ R ถ้ามีขอบเขตบนแล้ว สับเซตนั้นมีขอบเขตบนค่าน้อยสุดใน R

4.6 ครูกล่าวถึง บทนิยาม 3-4 พร้อมทั้งยกตัวอย่างอธิบายโดยใช้การถามตอบ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาขอบเขตล่าง และขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ S (ถ้ามี)

1. $S = (2,7)$ (2 และจำนวนจริงทุกจำนวนที่น้อยกว่า 2 เป็นขอบเขตล่างของ S และขอบเขตล่างค่ามากที่สุด คือ 2)

2. $S = \{-2, 7, -5, 8, 9\}$ (-5 และจำนวนจริงทุกจำนวนที่น้อยกว่า -5 เป็นขอบเขตล่างของ S และขอบเขตล่างค่ามากที่สุด คือ -5)

3. $S = (-\infty, 8)$ (S ไม่มีขอบเขตล่าง)

4.7 ครูอธิบายให้นักเรียนทราบว่า สัจพจน์การมีค่าขอบเขตบนน้อยสุด เป็นสมบัติประการที่ 15 ของระบบจำนวนจริง แล้วถามให้นักเรียนเกี่ยวกับสมบัติของจำนวนจริง 14 ข้อก่อนหน้านี้มีอะไรบ้าง ให้นักเรียนช่วยกันตอบ และบอกนักเรียนว่า สมบัติของระบบจำนวนจริงทั้ง 15 ข้อนี้ เรียกว่า สัจพจน์ของระบบจำนวนจริง ซึ่งจะขาดข้อใดข้อหนึ่งไม่ได้ เพราะถือเป็นโครงสร้างของระบบจำนวนจริง และจะนำไปใช้มากในคณิตศาสตร์ชั้นสูง

4.8 ครูบอกให้นักเรียนทราบว่าที่เรียนมาทั้งหมดตั้งแต่คาบแรกจนกระทั่งมาถึงคาบนี้ เป็นการศึกษาโครงสร้างของระบบจำนวนจริง กล่าวโดยสรุป ระบบจำนวนจริงเป็นระบบประกอบด้วยเซต R และ +, . แทนด้วย $(R, +, \cdot)$ และมีโครงสร้าง คือสมบัติทั้ง 15 ข้อที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วนั่นเองแล้ว ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดที่ 13 เป็นการบ้าน

4.9 ครูเฉลยเอกสารฝึกหัดเฉพาะข้อที่นักเรียนสงสัย ทบทวน หาคข้อสงสัยแล้ว ทดสอบเรื่อง ช่วงและการแก้อสมการใช้เวลา 30 นาที

5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
- 5.2 เอกสารแนะแนวทางที่ 13
- 5.3 เอกสารฝึกหัดที่ 13
- 5.4 แบบทดสอบ เรื่อง ช่วงและการแก้อสมการ



6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 13	2. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %
3. ทำเอกสารฝึกหัดที่ 13	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85 %
4. ทำแบบทดสอบ	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 13

คำชี้แจง จงพิจารณาว่ามีจำนวนที่ไม่น้อยกว่าทุกๆ จำนวนที่อยู่ในเซตนี้หรือไม่ ถ้ามีคือจำนวนใด

1. $\{1, 2, 3, \dots, 8, 9\} \infty$

ตอบ

2. $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

ตอบ

3. $\{x \mid -3 \leq x < 7\}$

ตอบ

4. $\{x \mid 1 \leq x \leq 10\}$

ตอบ

5. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$

ตอบ

6. $[-5, 12]$

ตอบ

7. $(3, \infty)$

ตอบ

8. $(-\infty, 4)$

ตอบ



เอกสารฝึกหัดที่ 13

ชื่อ ชั้น เลขที่

คำสั่ง จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของเซตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $(-\infty, 2)$

2. $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

3. $(-3, 5]$

4. $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$

5. $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

6. $\{x \in R \mid |x + 3| < 5\}$

7. $\{x \in Q \mid x^2 - 4 < 0\}$ เมื่อ $u = R$

8. $\{x \in Q \mid x^2 - 2 \leq 0\}$ เมื่อ $u = R$

9. $\{x \in Q \mid x^2 - 2 < 0\}$ เมื่อ $u = Q$

10. $\{x \mid |x - 3| > 5\}$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14

เรื่อง การหารลงตัว

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกความหมายและใช้สัญลักษณ์การหารลงตัวได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกความหมายและใช้สัญลักษณ์การหารลงตัวได้
- 1.2 บอกสมบัติของการหารลงตัวได้
- 1.3 บอกความหมายของจำนวนเฉพาะได้

2. แนวความคิดหลัก

สมบัติที่สำคัญของระบบจำนวนเต็มประการหนึ่ง ได้แก่ สมบัติการหารลงตัว การศึกษาสมบัติการหารลงตัวจะทำให้เข้าใจระบบจำนวนเต็มได้อย่างลึกซึ้ง และเป็นพื้นฐานในการศึกษาระบบจำนวนเต็มในชั้นสูงต่อไป

3. เนื้อหาสาระ

- 3.1 สมบัติการหารลงตัว
- 3.2 การจำแนกจำนวนเต็ม โดยสมบัติการหารลงตัว

บทนิยาม ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม และ $n \neq 0$ n หาร m ลงตัวก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $m = nc$

เรียก n ว่าตัวหาร (Divisor) หรือตัวประกอบ (factor) ตัวหนึ่งของ m

เรียก m ว่าเป็นพหุคูณ (Multiple) ของ n

ใช้สัญลักษณ์ $n \mid m$ แทน “ n หาร m ลงตัว”

$n \nmid m$ แทน “ n หาร m ไม่ลงตัว”



3.1 สมบัติการหารลงตัว

ทฤษฎีบท 1 ให้ a , b และ c เป็นจำนวนเต็ม

โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a|b$ แล้ว $a \leq b$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a|b$ และ $a|c$

แล้ว $a|(bx + cy)$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ผลจากทฤษฎีบท 3 ที่สำคัญประการหนึ่งคือ ถ้า $a|b$ และ $a|c$ จะได้ $a|(b+c)$

และ $a|(bx - c)$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มใดๆ เรียกนิพจน์ในรูป $bx + cy$ ว่า

ผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ b และ c

3.2 การจำแนกจำนวนเต็มโดยสมบัติการหารลงตัว

จำนวนเฉพาะ (prime numbers)

บทนิยาม จำนวนเต็ม $p \neq 0$ จะเป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $p \neq 1, p \neq -1$ และถ้าจำนวนเต็ม x หาร p ลงตัว จะได้ $x \in \{1, -1, p, -p\}$

จำนวนอื่นๆ ที่ไม่ใช่ $0, 1, -1$ และจำนวนเฉพาะ เรียกว่าจำนวนประกอบ (composite numbers)

ทฤษฎีบท 4 (หลักการมีตัวประกอบชุดเดียว)

ทุกจำนวนเต็ม n ที่มากกว่า 1 จะสามารถแยกตัวประกอบเฉพาะดังต่อไปนี้ ได้รูปเดียว

$$n = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot p_3^{c_3} \dots \cdot p_k^{c_k}$$

ซึ่ง $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_k$ และทุกตัวเป็นจำนวนเฉพาะบวก และ c ทุกตัวเป็นจำนวน

เต็มบวก

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ครูทบทวนโดยยกตัวอย่าง เซตของจำนวนเต็ม $I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ และถามนักเรียนว่ามีสมบัติปิดของการบวก ลบ คูณ หาร หรือไม่ ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่า มีสมบัติปิด ของการบวก การลบและการคูณ แต่ไม่มีสมบัติปิดของการหาร และให้ยกตัวอย่างเพื่อประกอบเหตุผล

เช่น 4 หารด้วย 2 ได้ผลหารเป็นจำนวนเต็ม

4 หารด้วย 3 ผลหารไม่เป็นจำนวนเต็ม



ครูบอกนักเรียนว่า ในกรณีที่ m, n และ c เป็นจำนวนเต็มบางตัว และ $n \neq 0$ ถ้า m

หารด้วย n ได้ผลหารเป็น c หรือ $\frac{m}{n} = c$ จะกล่าวว่า n หาร m ลงตัว แต่เนื่องจากเซตของจำนวนเต็ม

ไม่มีสมบัติปิดของการหาร จึงนิยามการหารลงตัวโดยใช้ $m = nc$

4.2 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 14 ให้นักเรียนจับคู่กันศึกษา และตอบคำถามโดยการเติมคำตอบในบางส่วนที่เว้นไว้ และถามนักเรียนว่า ถ้า n หาร m ไม่ลงตัว ควรจะสรุปอย่างไร ซึ่งนักเรียนควรสรุปได้ว่า

“ n หาร m ไม่ลงตัว ก็ต่อเมื่อไม่มีจำนวนเต็ม c ใดๆ ที่ทำให้ $m = nc$ ”

4.3 ให้นักเรียนศึกษาสมบัติการหารลงตัวจากเอกสารแนะแนวทางที่ 14 แล้วครูและนักเรียนช่วยกันพิสูจน์ โดยการถามให้นักเรียนช่วยกันตอบดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 เมื่อ $a, b \in I$ โดยที่ $a, b \neq 0$

ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

พิสูจน์ สมมติ $a|b$ และ $b|c$ จะมีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$

และ มีจำนวนเต็ม y ที่ $c = by$

ดังนั้น $\qquad \qquad \qquad = (ax)y$

$\qquad \qquad \qquad = a(xy)$

เนื่องจาก xy เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $a|c$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a|b$ จะได้ $a \leq b$

พิสูจน์ สมมติ $a|b$

จะมีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $b = ax$

เนื่องจาก a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ x เป็นจำนวนเต็มบวก

ฉะนั้น $x \geq 1$

$$ax \geq a \quad (a \in I^+)$$

ดังนั้น $b \geq a$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า $a, b, c \in I$ และ $a \neq 0$ โดยที่ $a|b$ และ $a|c$

แล้ว $a|(bx + cy)$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็มใดๆ

พิสูจน์ สมมติ $a|b$ และ $a|c$

จะมี $m \in I$ ที่ทำให้ $b = am$ (1)

และมี $n \in I$ ที่ทำให้ $c = an$ (2)

ดังนั้น (1) $\times x$ จะได้ $bx = amx$ (3)



$$\begin{aligned} &\text{และ } (2) \times y \text{ จะได้ } cy = any \quad \dots\dots(4) \\ (3)+(4) \text{ จะได้ } &bx + cy = amx + any \\ &= a(mx + ny) \\ \text{เนื่องจาก } &(mx + ny) \in I \text{ ดังนั้น } a \mid (bx + cy) \end{aligned}$$

4.4 ใช้คำถามให้นักเรียนช่วยกันสรุปผลที่ได้จากทฤษฎีบทในขั้นที่ 3 อีกครั้ง เมื่อทุกคนเข้าใจดีแล้ว ให้ทำเอกสารฝึกหัดที่ 14 และแบบฝึกหัดที่ 3.1 ก จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ เป็นการบ้าน

4.5 ครูเฉลยเอกสารฝึกหัดที่ 14 และแบบฝึกหัด 3.1 เฉพาะข้อที่นักเรียนสงสัย เมื่อหมดข้อสงสัยแล้วครูยกตัวอย่างเซต $\{2,3,5,7,11,13,17,\dots\}$ แล้วถามนักเรียนว่าเซตนี้เขียนบอกเงื่อนไขได้อย่างไร ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่า เขียนได้เป็น $\{x \in I^+ \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$ แล้วครูยกตัวอย่างเซต $\{-2,-3,-5,-7,-11,-13,-17,\dots\}$ ให้นักเรียนเขียนแบบบอกเงื่อนไข ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่าเขียนแบบบอกเงื่อนไขได้เป็น $\{x \in I \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นลบ}\}$

4.6 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเป็นนิยามของจำนวนเฉพาะได้ ดังต่อไปนี้

นิยาม จำนวนเต็ม $p \neq 0$ จะเป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $p \neq 1, p \neq -1$ และถ้าจำนวนเต็ม x หาร p ลงตัว จะได้ $x \in \{1, -1, p, -p\}$

4.7 ครูยกตัวอย่างจำนวนต่อไปนี้ คือ 221, 211, 323, 811 ให้นักเรียนจับคู่ช่วยกันพิจารณาว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ เพราะเหตุใด ให้เวลาคิด 10 นาที ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่า 221 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะ $13 \mid 221$ หรือ $221 = 13 \times 17$

211 เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะไม่มีจำนวนใดหาร 211 ลงตัว นอกจาก 1 และ 211

323 เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะไม่มีจำนวนใดหาร 323 ลงตัว นอกจาก 1 และ 323

811 เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะไม่มีจำนวนใดหาร 811 ลงตัว นอกจาก 1 และ 811

4.8 ครูบอกนักเรียนว่าจำนวนอื่นๆ ที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะและไม่ใช่ $0, 1,$ และ -1 จะเรียกว่า **จำนวนประกอบ** และจำนวนประกอบที่เป็นบวก สามารถแยกตัวประกอบเฉพาะอย่างมีระบบได้ ครูยกตัวอย่างจำนวนประกอบ แล้วใช้วิธีการถามให้นักเรียนตอบ ครูเขียนบนกระดานดำเนินขั้นตอนดังนี้

$$\begin{aligned} 252 &= 2(126) \\ &= 2(2 \times 63) \\ &= 2 \times 2(3 \times 21) \\ &= 2 \times 2 \times 3(3 \times 7) \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 7 \end{aligned}$$

จะได้ $2^2 \times 3^2 \times 7$ เป็นรูปสุดท้าย ซึ่งเรียงตัวประกอบเฉพาะจากน้อยไปมาก และมีได้เพียงรูปเดียว



จากข้างต้น สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4 ทฤษฎีบทหลักมูลทางเลขคณิต (The Fundamental Theorem of Arithmetic)
ทุกจำนวนเต็มบวก n ที่มากกว่า 1 จะสามารถแยกตัวประกอบเฉพาะดังต่อไปนี้ ได้รูปเดียวคือ

$$n = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot p_3^{c_3} \dots \cdot p_k^{c_k}$$

ซึ่ง $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_k$ และ p ทุกตัวเป็นจำนวนเฉพาะบวก และ c ทุกตัวเป็นจำนวนเต็มบวก

4.9 สุ่มให้นักเรียน 2 คน ออกมาเขียนจำนวนที่ครูกำหนดให้ในรูปตัวประกอบเฉพาะตามทฤษฎีบท 4 ดังนี้

1. 720 นักเรียนควรเขียนได้เป็น $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

2. 4725 นักเรียนควรเขียนได้เป็น $4725 = 3^3 \times 5^2 \times 7$

4.10 เปิดโอกาสให้นักเรียนที่สงสัยซักถาม แล้วให้ทำแบบฝึกหัด 3.1 ข เป็นการบ้าน

5. แหล่งการเรียนรู้

5.1 เอกสารแนะแนวทางที่ 14

5.2 เอกสารฝึกหัดที่ 14

5.3 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 1 ชั้น ม.4

6. การวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากความสนใจ	2. นักเรียนสนใจและตั้งใจเรียน
3. ทำโจทย์เอกสารฝึกหัดที่ 14	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด 3.1 ก ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....



เอกสารแนะแนวทางที่ 14

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษานิยามและทฤษฎีต่างๆ ข้างล่างนี้ แล้วเติมคำตอบที่เว้นไว้

นิยาม ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม และ $n \neq 0$ n หาร m ลงตัวก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $m = nc$

เรียก n ว่าตัวหาร (Divisor) หรือตัวประกอบ (factor) ตัวหนึ่งของ m

เรียก m ว่าพหุคูณ (Multiple) ของ n

ใช้สัญลักษณ์ $n \mid m$ แทน n หาร m ลงตัว

$n \nmid m$ แทน n หาร m ไม่ลงตัว

$3 \mid 12$ (อ่านว่า 3 หาร 12 ลงตัว) เพราะว่ามีจำนวนเต็ม 4 ซึ่งทำให้ $12 = 3(4)$

$-3 \mid 12$ เพราะว่ามีจำนวนเต็ม -4 ซึ่งทำให้ $12 = -3(-4)$

$5 \mid (-15)$ เพราะว่าจะ _____

$-4 \mid (-16)$ เพราะว่าจะ _____

$6 \mid 0$ เพราะว่าจะ _____

$5 \nmid 3$ เพราะว่าจะ _____

$2 \nmid (-5)$ เพราะว่าจะ _____

สมบัติการหารลงตัว

ทฤษฎีบท 1 เมื่อ $a, b \in I$ และ $a, b \neq 0$ ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ จะได้ $a \mid c$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a \mid b$ จะได้ $a \leq b$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า $a, b, c \in I$ และ $a \neq 0$ โดยที่ $a \mid b$ และ $a \mid c$ จะได้ $a \mid (bx + cy)$ เมื่อ $x, y \in I$

ผลจากทฤษฎีบท 3

ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ จะได้

1. $a \mid (b + c)$
2. $a \mid (bx + c), x \in I$
3. $a \mid (bx - c), x \in I$

จะเรียกนิพจน์ในรูป $bx + cy$ ว่าผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ b และ c



เอกสารฝึกหัดที่ 14

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำสั่ง ข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

-1. ถ้า $a|1$ แล้ว $a = 1$
-2. ถ้า $a|(b+c)$ แล้ว $a|b$ หรือ $a|c$
-3. ถ้า $a|b$ แล้ว $a|b^2$
-4. ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(b+c)$
-5. จำนวนต่อไปนี้ 179, 209, 327 เป็นจำนวนเฉพาะทุกจำนวน
-6. ถ้า a หาร b ลงตัว และ b หาร c ไม่ลงตัว แล้ว a หาร c ไม่ลงตัว
-7. ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx-cy)$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนใดๆ
-8. ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx+cy)$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนเต็มใดๆ
-9. ถ้า $a|c$ และ $b|c$ แล้ว $ab|c$
-10. ถ้า $ab|c$ แล้ว $a|c$ และ $b|c$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15

เรื่อง สมบัติของจำนวนเต็ม (ต่อ)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหารไปใช้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกใจความและความหมายของทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหารได้
- 1.2 บอกนิยามของจำนวนคู่และจำนวนคี่ และนำไปใช้ได้

2. แนวความคิดหลัก

สมบัติที่สำคัญของระบบจำนวนเต็มอีกประการหนึ่ง ได้แก่ ขั้นตอนวิธีการหาร การศึกษาทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหาร จะนำไปสู่การนิยาม จำนวนคู่ จำนวนคี่ ตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อย และจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิชาพีชคณิตนามธรรมต่อไป

3. เนื้อหาสาระ

ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

ทฤษฎีบท 5 ขั้นตอนวิธีการหาร

ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r ชุดเดียว ซึ่ง

$$m = nq + r \quad \text{โดยที่} \quad 0 \leq r < |n|$$

เรียก q ว่า ผลหาร(quotient) เช่น $24 = 4(6) + 0$, $-20 = 6(-4) + 4$

และ r ว่า เศษเหลือ (remainder)

บทนิยาม

จำนวนเต็ม a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อสามารถเขียน $a = 2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

จำนวนเต็ม a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อสามารถเขียน $a = 2n+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม



จากนิยาม 0 เป็นจำนวนคู่เพราะ $0 = 2(0)$

ทฤษฎีบท 6 ให้ b เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จำนวนเต็มบวก n ใดๆ สามารถเขียนในรูปการกระจายฐาน b ได้เป็น

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + a_{k-2} b^{k-2} + \dots + a_1 b + a_0$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มและ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและไม่น้อยกว่า b และ $a_k \neq 0$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ครูกำหนดจำนวน แล้วให้นักเรียนหาผลหาร และเศษจากการหาร ดังนี้ (ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ดังที่แสดงไว้ในวงเล็บ)

1. 20 หารด้วย 5 (ผลหาร = 4 , เศษ = 0)
2. 27 หารด้วย 4 (ผลหาร = 6 , เศษ = 3)
3. -24 หารด้วย 5 (ผลหาร = -4 , เศษ = -4)
4. 74 หารด้วย -3 (ผลหาร = -24 , เศษ = 2)

จากผลหารที่ได้ในขั้นนี้ ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่า

$$\text{ตัวตั้ง} = (\text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร}) + \text{เศษ}$$

จากข้อ 1 เขียนได้เป็น $20 = 5(4)$

จากข้อ 2 เขียนได้เป็น $27 = 4(6) + 3$

จากข้อ 3 เขียนได้เป็น $-24 = 5(-4) + (-4)$

จากข้อ 4 เขียนได้เป็น $74 = -3(-24) + 2$

ครูถามนักเรียนว่า จากข้อ 3 ถ้าต้องการให้เศษเป็นจำนวนบวก จะเขียนได้อย่างไร
นักเรียนควรตอบได้ว่า $-24 = 5(-5) + 1$

4.2 ผลจากข้อที่ 1 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเป็นทฤษฎีบท เกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการหาร ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5 ขั้นตอนวิธีการหาร

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม $n \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r ชุดเดียว ซึ่ง

$$m = nq + r \text{ โดยที่ } 0 \leq r < |n|$$

เรียก q ว่าผลหาร และ r ว่าเศษ

4.3 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 1, 2 จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

4.4 ครูกล่าวถึงจำนวนคู่และจำนวนคี่โดยการถามความหมาย ให้นักเรียนช่วยกันตอบ ซึ่งนักเรียนอาจจะตอบว่าจำนวนคู่หมายถึงจำนวนที่ 2 หารลงตัว และจำนวนคี่หมายถึงจำนวนที่ 2 หารไม่ลงตัว



ตัว ครูชี้แนะให้นักเรียนเห็นว่า จากทฤษฎีบท 5 ในข้อที่ 5.2 สามารถนำไปใช้ในการนิยามจำนวนคู่จำนวนคี่ เมื่อ 2 เป็นตัวหารได้ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม

จำนวนเต็ม a จะเป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อสามารถเขียน $a = 2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
จำนวนเต็ม a จะเป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อสามารถเขียน $a = 2n+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

4.5 ครูยกตัวอย่างโจทย์การพิสูจน์ 1 ข้อ โดยการถามให้นักเรียนช่วยกันตอบ ครูเขียนบนกระดานดำ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงแสดงว่า ถ้า x เป็นจำนวนคี่แล้ว $4|(x^2-1)$

วิธีทำ ให้ $x = 2n+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
จะได้ $x^2 = (2n+1)^2$
 $= 4n^2+4n+1$
 $x^2-1 = 4n^2+4n$ (บวกด้วย -1 ทั้งสองข้าง)
 $= 4(n^2+n)$

เพราะว่า n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น (n^2+n) เป็นจำนวนเต็ม
จากสมบัติของจำนวนเต็ม จะได้ $4|(x^2-1)$

4.6 ครูยกตัวอย่างการนำขั้นตอนวิธีการไปใช้ประโยชน์ โดยการเขียนโจทย์บนกระดานดำและใช้วิธีการอธิบาย ถามตอบ

ตัวอย่าง จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 417 และ 390 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน

วิธีทำ ให้ $x \in I^+$ x หาร 417 และ 390 มีเศษเหลือ เท่ากับ r
ดังนั้น $417 = kx + r$; $k \in I \dots \dots \dots (1)$
 $390 = mx + r$; $m \in I \dots \dots \dots (2)$

$(1) - (2)$ $27 = (k-m)x$
เนื่องจาก $(k-m) \in I$ ดังนั้น $x | 27$
เพราะฉะนั้น ค่า x ที่เป็นไปได้คือ 1,3,9,27

จากการตรวจสอบ 1 และ 3 หาร 417 และ 390 ลงตัว (เศษเท่ากับ 0)
9 หาร 417 และ 390 ต่างมีเศษเหลือเท่ากับ 3
27 หาร 417 และ 390 ต่างมีเศษเหลือเท่ากับ 12

ดังนั้นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 417 และ 390 มีเศษเหลือเท่ากันคือ 1,3,9 และ 27

หลังจากทุกคนหมดข้อสงสัยแล้วให้ทำแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 2 เป็นการบ้าน

4.7 ครูยกตัวอย่างจำนวน 368 ,45802 และให้นักเรียนเขียนในรูปการกระจายฐานสิบนักเรียนควรเขียนได้ว่า

$368 = (3 \times 10^2) + (6 \times 10) + 8$
 $45802 = (4 \times 10^4) + (5 \times 10^3) + (8 \times 10^2) + (0 \times 10) + 2$



4.8 ครูอธิบายว่าโดยทั่วไป เราสามารถเขียนจำนวนเต็มบวกในรูปการกระจายของฐานต่างๆ ได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6 ให้ b เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จำนวนเต็มบวก n ใดๆ สามารถเขียนในรูปการกระจายฐาน b ได้เป็น

$$b = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + a_{k-2} b^{k-2} + \dots + a_1 b + a_0$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มและ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและไม่น้อยกว่า b และ $a_k \neq 0$

4.9 ครูและนักเรียนร่วมกันพิสูจน์โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาร เมื่อ หาร n ด้วย b ได้ผลหาร q_0 และเหลือเศษ a_0 เขียนได้ดังรูป

$$n = bq_0 + a_0 \quad 0 \leq a_0 < b \quad (1)$$

หาร q_0 ด้วย b จะได้

$$q_0 = bq_1 + a_1 \quad 0 \leq a_1 < b \quad (2)$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งผลหารเป็น 0

$$q_1 = bq_2 + a_2 \quad 0 \leq a_2 < b$$

$$q_2 = bq_3 + a_3 \quad 0 \leq a_3 < b$$

.

$$q_{k-1} = bq_k + a_k \quad 0 \leq a_k < b \quad (3)$$

เพราะว่า $n > q_0 > q_1 > q_2 > \dots \geq 0$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มไม่เป็นลบที่มีค่าลดลง ดังนั้นขั้นตอนการหารข้างต้นต้องสิ้นสุดโดยที่ผลหารตัวสุดท้ายเป็นศูนย์ ดังสมการที่ (1)

$$\begin{aligned} n &= bq_0 + a_0 \\ &= b(bq_1 + a_1) + a_0 \\ &= b^2q_1 + a_1b + a_0 \end{aligned}$$

แทนไปเรื่อยๆ

$$\begin{aligned} n &= b^2(bq_2 + a_2) + a_1b + a_0 \\ &= b^3q_2 + b^2a_2 + a_1b + a_0 \end{aligned}$$

แต่จาก (3) $q_{k-1} = a_k$

ดังนั้น $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + a_{k-2} b^{k-2} + \dots + a_1 b + a_0$

ตัวอย่าง จงเขียน 96 ในรูปการกระจายฐาน 5

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 96 &= (5 \times 19) + 1 \\ &= (5 \times (5 \times 3) + 4) + 1 \\ &= (5^2 \times 3) + 5 \times 4 + 1 \\ 96 &= (3 \times 5^2) + (4 \times 5) + 1 = (341)_5 \end{aligned}$$



ตัวอย่าง จงเขียน 25 ในรูปฐาน 2

วิธีทำ

$$25 = 2(12) + 1$$

$$12 = 2(6) + 0$$

$$6 = 2(3) + 1$$

$$3 = 2(1) + 1$$

$$1 = 2(0) + 1$$

ดังนั้น $25 = (11001)_2$

4.10 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 3 จากหนังสือแบบเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม หน้า 103 และให้นักเรียนทุกคนสมมติเลข 3 หลักและเปลี่ยนเป็นฐาน 4 และ ฐาน 6

5. แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท.

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากความสนใจ	2. นักเรียนสนใจและตั้งใจเรียน
3. ทำโจทย์เอกสารฝึกหัด 23.1, 23.2	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด 2.11 ในหนังสือแบบเรียนฯ	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %
5. ทำแบบทดสอบเรื่องสมบัติของจำนวนเต็ม	5. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16

เรื่อง ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกความหมาย ใช้สัญลักษณ์ ของห.ร.ม. และนำความรู้เรื่อง ห.ร.ม. ไปใช้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1.1 บอกความหมายและใช้สัญลักษณ์ของ ห.ร.ม. ได้

1.2 หา ห.ร.ม. โดยใช้ขั้นตอนวิธีของยุคลิดได้

1.3 นำความรู้เรื่อง ห.ร.ม. ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาได้

2. แนวความคิดหลัก

2.1 จำนวนเต็มบวก d จะเรียกว่าเป็นตัวหารร่วมมาก(ห.ร.ม.) ของจำนวนเต็ม a และ b ซึ่งอย่างน้อย 1 ตัวที่ไม่เป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อ1. $d \mid a$ และ $d \mid b$ 2. สำหรับจำนวนเต็ม c ทุกตัว ถ้า $c \mid a$ และ $c \mid b$ แล้ว $c \mid d$ แทน ห.ร.ม. ของ a และ b ด้วย (a, b) 2.2 ขั้นตอนวิธีหา ห.ร.ม. ของจำนวนเต็ม a และ b ของยุคลิดเขียน a, b ให้อยู่ในรูป $a = q_1 b + r_1$; $0 \leq r_1 \leq |b|$ เขียน b ให้อยู่ในรูป $b = q_2 r_1 + r_2$; $0 \leq r_2 \leq r_1$ เขียน r_1 ให้อยู่ในรูป $r_1 = q_3 r_2 + r_3$; $0 \leq r_3 \leq r_2$ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้ $r_{n+1} = 0$ จะได้ ห.ร.ม. ของ a และ $b = r_n$ 2.3 ถ้า $a, b \in I$ ซึ่งต่างไม่เท่ากับศูนย์ และ $d = (a, b)$ แล้ว จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $d = ax + by$ 2.4 จำนวนเต็ม a และ b จะเรียกว่าเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (relatively prime) ก็ต่อเมื่อ $(a, b) = 1$ 

3. เนื้อหาสาระ

3.1 ตัวหารร่วม

บทนิยาม กำหนด a และ b เป็นจำนวนเต็ม เรียกจำนวนเต็ม c ที่สามารถหารทั้ง a และ b ลงตัวว่าเป็นตัวหารร่วมของ a และ b

3.2 ตัวหารร่วมมาก

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ a และ b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จำนวนเต็มบวก d ที่มีค่ามากที่สุด ซึ่ง $d|a$ และ $d|b$ เรียกว่าเป็นตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ a และ b ใช้สัญลักษณ์ (a, b) แทน ห.ร.ม. ของ a และ b

3.3 การหาตัวหารร่วมมากโดยใช้ขั้นตอนวิธีของยุคลิด

ทฤษฎีบท 7 ขั้นตอนวิธีของยุคลิด (Euclidean Algorithm)

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $b < a$

โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหารไปเรื่อยๆ จะได้ว่า

$$a = bq_1 + r_1 \quad ; \quad 0 < r_1 < b$$

$$b = r_1q_2 + r_2 \quad ; \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad ; \quad 0 < r_3 < r_2$$

.

.

.

$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k \quad ; \quad 0 < r_k < r_{k-1}$$

$$r_{k-1} = r_kq_{k+1} + 0$$

ดังนั้น r_k ซึ่งเป็นเศษตัวสุดท้ายที่ไม่ใช่ศูนย์ จะเป็น ห.ร.ม. ของ a และ b

3.4 จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

บทนิยาม จำนวนเต็ม a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ $(a, b) = 1$

ทฤษฎีบทที่ 8 a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม x และ y ที่ทำให้ $ax + by = 1$

ทฤษฎีบทที่ 9 กำหนดจำนวนเต็ม a, b และจำนวนเฉพาะ p ถ้า $p|ab$ จะได้ $p|a$ และ $p|b$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับความหมายของตัวหารร่วม และตัวหารร่วมมาก โดยให้นักเรียนหา ห.ร.ม. ของจำนวนที่กำหนด เช่น

- ห.ร.ม. ของ 24 และ 36 (ห.ร.ม. คือ 12)
- ห.ร.ม. ของ 80 และ 56 (ห.ร.ม. คือ 8)
- ห.ร.ม. ของ 0 และ 15 (ห.ร.ม. คือ 15)
- ห.ร.ม. ของ 0 และ 0 (หา ห.ร.ม. ไม่ได้)

โดยการถามตอบ ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเป็นนิยามของ ห.ร.ม. ได้ดังนี้

บทนิยาม ให้ a_1, a_2, \dots, a_n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน
จำนวนเต็มบวก D ที่มีค่ามากที่สุด ซึ่ง $D | a_1, D | a_2, \dots, D | a_n$ เรียกว่าเป็น
ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ a_1, a_2, \dots, a_n
ใช้สัญลักษณ์ (a_1, a_2, \dots, a_n) แทน ห.ร.ม. ของ a_1, a_2, \dots, a_n

- ดังนั้น $(24, 36) = 12$
- $(80, 56) = 8$
- $(0, 15) = 15$
- $(0, 0)$ หาไม่ได้

4.2 ครูบอกนักเรียนว่า ในการหา ห.ร.ม. ของจำนวนที่มีค่ามาก ๆ เราสามารถหาได้โดยใช้ขั้นตอนการหาร ซึ่งมีชื่อเฉพาะว่า ขั้นตอนวิธียุคลิด แล้วครูยกตัวอย่างวิธีหา ห.ร.ม. ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหา ห.ร.ม. ของ 280 และ 72

วิธีทำ ให้ 72 เป็นตัวหาร ดังนี้

$$280 = 72(3) + 64$$

$$72 = 64(1) + 8$$

$$64 = 8(8) + 0$$

ตัวหารตัวสุดท้าย ที่ทำให้ เศษ = 0 จะเป็น ห.ร.ม.

ดังนั้น $(280, 72) = 8$

ข้อสังเกต $(72, 64) = 8$
 $(64, 8) = 8$

ดังนั้น ถ้า $m = nq + r$ จะได้ $(m, n) = (n, r)$ เสมอ

4.3 ครูเสนอวิธีในการหา ห.ร.ม. ของจำนวนที่มีค่ามาก ๆ ตามขั้นตอนวิธียุคลิด ซึ่งสามารถเขียนเป็นรูปตารางได้ดังนี้



3	280	72	1
	216	64	
8	64	8	← ห.ร.ม.
	64		
	0		

และจากการหา ห.ร.ม. ของ 280 และ 72 ตามขั้นตอนวิธียุคลิด สามารถเขียน ห.ร.ม. ในรูปผลรวมเชิงเส้น กล่าวคือ เขียน 8 ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ 280 และ 72 ได้ดังนี้

$$280 = 72(3) + 64 \quad \dots(1)$$

$$72 = 64(1) + 8 \quad \dots(2)$$

จาก (2) $8 = 72 - 64(1)$

$$8 = 72 - (280 - 72(3))(1)$$

$$8 = 72 - 280 + 72(3)$$

$$8 = 72(4) + 280(-1)$$

นั่นคือ $(280, 72) = 8 = 72(4) + 280(-1)$

4.4 ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดที่ 16 ข้อ 1 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ ส่วนข้อ 2,3 ทำเป็นการบ้าน พร้อมด้วยแบบฝึกหัด 3.3 ก ข้อ 1 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ

4.5 เผลยแบบฝึกหัดการบ้านข้อที่นักเรียนสงสัย แล้วครูกล่าวถึงการหา ห.ร.ม. ของจำนวนหลายจำนวน ดังนี้

บทนิยาม ให้ a_1, a_2, \dots, a_n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จำนวนเต็มบวก D ที่มีค่ามากที่สุด ซึ่ง $D | a_1, D | a_2, \dots, D | a_n$ เรียกว่าเป็น **ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.)** ของ a_1, a_2, \dots, a_n
ใช้สัญลักษณ์ (a_1, a_2, \dots, a_n) แทน ห.ร.ม. ของ a_1, a_2, \dots, a_n

จากบทนิยามสามารถตรวจสอบได้ว่า $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, \dots, (a_{n-1}, a_n))$

ให้นักเรียนศึกษา ตัวอย่างโจทย์ปัญหาจากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ หน้า 107 แล้วให้ทำแบบฝึกหัด 3.3 ก ข้อ 2-8 จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ ถ้าไม่เสร็จให้ทำต่อเป็นการบ้าน

4.6 ครูเฉลยแบบฝึกหัด 3.3 ก บางข้อที่นักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหา เมื่อหมดข้อสงสัย ครูกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับ ห.ร.ม. โดยให้นักเรียนยกตัวอย่าง จำนวนที่มี ห.ร.ม. เป็น 1 เช่น

(นักเรียนอาจจะตอบว่า $(5, 8) = 1$

$(10, 11) = 1$

ฯลฯ)



ครูจะบอกว่า เราจะเรียก จำนวนที่มี ห.ร.ม. เป็น 1 ว่า จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ซึ่งสรุปเป็นนิยามได้
ดังนี้

บทนิยาม จำนวนเต็ม a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ $(a, b) = 1$

ทฤษฎีบท 8 a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม x
และ y ที่ทำให้ $ax + by = 1$

ทฤษฎีบท 9 กำหนดจำนวนเต็ม a, b และจำนวนเฉพาะ p
ถ้า $p | ab$ จะได้ $p | a$ และ $p | b$

ให้นักเรียนศึกษาการพิสูจน์จากหนังสือเรียนฯ หน้า 116 ครูอธิบายเพิ่มเติม โดย
ยกตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $(a, a+1) = 1$

วิธีทำ ให้ $d = (a, a+1)$ เมื่อ $a, k \in I$

ดังนั้น $d | a$ และ $d | (a+1)$

และจะได้ $d | ((a+1) - a)$

นั่นคือ $d | 1$

เมื่อ d เป็น ห.ร.ม. d ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุด

ดังนั้น $d = 1$

นั่นคือ $(a, a+1) = 1$

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า $a | mn$ และ $(a, m) = 1$ จะได้ $a | n$

วิธีทำ ให้ $a | mn$

ดังนั้น มี $x \in I$ ซึ่ง $mn = ax$

และเนื่องจาก $(a, m) = 1$

ดังนั้น $1 = ap + mq$ เมื่อ $p, q \in I$

จะได้ $n = nap + nmq$

$= nap + axq$

$= a(np + xq)$

เนื่องจาก $(np + xq) \in I$ ดังนั้น $a | n$

4.7 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.3 ข ข้อ 2, 3, 4, 6 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ



5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 เอกสารฝึกหัดที่ 16
- 5.2 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากความสนใจ	2. นักเรียนสนใจและตั้งใจเรียน
3. ทำโจทย์เอกสารฝึกหัดที่ 16	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %
5. ทำโจทย์แบบฝึกหัด 3.3 ก และ ข ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมฯ	4. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....



เอกสารฝึกหัดที่ 16

1. กำหนด $d = (30, 42)$ จงเขียน d ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ 30 และ 42

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนด $d = (221, 51)$ จงเขียน d ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ 221 และ 51

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนด $d = (147, 56)$ จงเขียน d ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ 147 และ 56

.....

.....

.....

.....

.....

4. จงหาจำนวนเต็ม x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ $(144, 308) = 144x + 308y$

.....

.....

.....

.....

.....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 17

เรื่อง ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกความหมาย ใช้สัญลักษณ์ของค.ร.น. และนำความรู้เรื่อง ค.ร.น. ไปใช้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมาย และ หา ค.ร.น. ได้
- 1.2 บอกความสัมพันธ์ระหว่าง ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ได้
- 1.3 นำความรู้เรื่อง ค.ร.น. ไปใช้ได้

2. แนวความคิดหลัก

จำนวนเต็มบวก c ที่มีค่าน้อยที่สุดจะเป็นตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของจำนวนเต็ม a และ b ก็ต่อเมื่อ $a|c$ และ $b|c$ ใช้สัญลักษณ์ $[a, b]$ แทน ค.ร.น. ของ a และ b

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์
จำนวนเต็มบวก c ที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง $a|c$ และ $b|c$ เรียกว่า
ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของ a และ b
ใช้สัญลักษณ์ $[a, b]$ แทน ค.ร.น. ของ a และ b

บทนิยาม ให้ a_1, a_2, \dots, a_n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์
จำนวนเต็มบวก C ที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง $a_1|C, a_2|C, \dots, a_n|C$ เรียกว่า
ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของ a_1, a_2, \dots, a_n
ใช้สัญลักษณ์ $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ แทน ค.ร.น. ของ a_1, a_2, \dots, a_n

ทฤษฎีบท 10 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $ab = (a, b)[a, b]$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

- 4.1 ครูทบทวนการหา ค.ร.น. โดยกำหนดจำนวนสองจำนวน และให้นักเรียนช่วยกันหา ค.ร.น. เช่น ให้หา ค.ร.น. ของ 36 และ 24 (ซึ่งนักเรียนอาจจะหาโดยวิธีแยกตัวประกอบหรือหาพหุคูณร่วม)
- 4.2 ครูให้นิยาม ค.ร.น.



บทนิยาม ให้ a_1, a_2, \dots, a_n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จำนวนเต็มบวก C ที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง $a_1 | C, a_2 | C, \dots, a_n | C$ เรียกว่า **ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)** ของ a_1, a_2, \dots, a_n

ใช้สัญลักษณ์ $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ แทน ค.ร.น. ของ a_1, a_2, \dots, a_n

4.3 นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3.4 ข้อ 1 เสร็จแล้วให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 4-5 ในหนังสือแบบเรียน ครูอธิบายเพิ่มเติม

4.4 ให้นักเรียนยกตัวอย่างจำนวนเต็มบวกมาคนละสองจำนวน และให้นักเรียนหา ค.ร.น. และ ห.ร.ม. และให้นักเรียนตรวจสอบว่า ค.ร.น. \times ห.ร.ม. = ผลคูณของเลขสองจำนวนที่นักเรียนหามาหรือไม่

4.5 ครูให้ทฤษฎี : ถ้า a, b เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว
 $ab = (a, b) [a, b]$ (ให้นักเรียนไปพิสูจน์เป็นการบ้าน)

4.6 ครูให้ตัวอย่าง ถ้าจำนวน x และ 30 มี ห.ร.ม. เป็น 6 และ ค.ร.น. เป็น 125 จงหาว่า x เป็นจำนวนใด

วิธีทำ $(x, 30) [x, 30] = x \times 30$
 $6 (125) = 30x$
 $25 = x$

4.7 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3.4 หน้า 113 ข้อ 2, 3, 4, 5 ในหนังสือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ฯ

5. แหล่งการเรียนรู้

หนังสือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนมาก
2. สังเกตจากความสนใจ	2. นักเรียนสนใจและตั้งใจเรียน
3. ทำโจทย์เอกสารฝึกหัด 3.4 หน้า 113	3. นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 80 %

7. บันทึกหลังสอน

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....



แบบฝึกหัดระคน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

- ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง และ $x \Delta y = 3x^2y$ ค่าของ $(z \Delta x) \Delta y$ คือข้อใด
 - $9 z^3x^2y$
 - $3 x^2yz$
 - $27 x^2yz^4$
 - $9 x^4y^2z$
- ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง
 - ถ้า $x > y$ แล้ว $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$
 - ผลต่างของจำนวนอตรรกะกับจำนวนอตรรกะ ย่อมเป็นจำนวนอตรรกะ
 - ถ้า $x < 0$ แล้ว $\sqrt{x^2} = -x$
 - อินเวอร์สสำหรับการคูณของ $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ คือ $\sqrt{3} - \sqrt{5}$
- ให้ $|x - y| < 5$ และ $|x - z| < 4$ ต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง
 - $|x^2 - xz - xy + yz| < 20$
 - $\left| \frac{x - y}{x - z} \right| < \frac{5}{4}$
 - $|y - z| < 1$
 - $|2x - y - z| < 19$
- ข้อความใดต่อไปนี้ไม่จริง
 - ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว จะไม่สามารถหา x ซึ่งมีค่าน้อยที่สุดโดยที่ $|x| < 9$
 - ถ้า a เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์แล้ว จะมีจำนวนเต็ม p และ q ซึ่ง $p \neq a, q \neq 0$ และ $\frac{p}{q} = a$
 - ถ้า a เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว จะเขียน a ได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ
 - ถ้า a เป็นจำนวนจริงแล้ว $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ $n = 2, 4, 6, \dots$
- ให้ $A = \{x \mid x = 3^n, n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}\}$ ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง
 - เซต A มีคุณสมบัติปิดของการบวก
 - เซต A มีคุณสมบัติปิดของการคูณ
 - 0 เป็นเอกลักษณ์การบวกในเซต A
 - 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณในเซต A
- กำหนดให้ $xy \geq 0$ โดยที่ x, y เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
 - $x + y \geq 0$
 - $|x| + y \geq 0$
 - $|x + y| < |x| + |y|$
 - $|x + y| = |x| + |y|$



7. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง
- $ab > 0$ ก็ต่อเมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$ เท่านั้น
 - ถ้า $b < a$ แล้ว $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
 - ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว $\sqrt{|a|}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
 - ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^2 > a$
8. ข้อความต่อไปนี้ ข้อใดผิด
- ถ้า $a > 0, b > 0$ และ $a \neq b$ แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2$ เสมอ
 - ถ้า $a > 0, b > 0$ และ $a \neq b$ แล้ว $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ เสมอ
 - ถ้า $a^2 + b^2 = 1$ และ $c^2 + d^2 = 1$ แล้ว $ac + bd \leq 1$ เสมอ
 - ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $ax + b = 0$ ไม่จำเป็นต้องมีเพียงคำตอบเดียว
9. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิจารณาข้อความใดต่อไปนี้
- ถ้า $xy = 0$ แล้ว $\frac{x}{y}$ ไม่มีความหมาย
 - ถ้า $xy = 0$ แล้ว $\frac{y}{x}$ ไม่มีความหมาย
 - $xy = a$ ก็ต่อเมื่อ $x = \frac{a}{y}$
- ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง
- ข้อ ก. และ ข. เท่านั้นที่ถูกต้อง
 - ข้อ ก. และ ค. เท่านั้นที่ถูกต้อง
 - ข้อ ข. และ ค. เท่านั้นที่ถูกต้อง
 - ข้อ ก., ข. และ ค. ผิดหมด
10. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง
- ถ้า a และ b เป็นจำนวนตรรกยะ และ c เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $a + bc$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
 - ถ้า $a, b \in R$ และ $a > b$ แล้ว $a(b - a) > (b - a)b$
 - ถ้า $a, b, c \in R$ และ $a < b < 0 < c$ แล้ว $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$
 - ถ้า $a, b, c, d \in R$ และ $0 < a < b$ และ $c < d < 0$ แล้ว $(a - d^2) < (b - c^2)$
11. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$ เท่ากับข้อใด
- $(-\infty, -1)$
 - $(-\infty, -3)$
 - $(\frac{1}{3}, 3)$
 - $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, 3)$



12. ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของ $|2+3x|=2+3|x|$ และ B เป็นเซตคำตอบของ $|2+3x|=2+3x$ แล้ว A เป็นสับเซตแท้ของ B
- ข. $A = (\frac{1}{3}, 3)$ และ B เป็นเซตคำตอบของ $\frac{x-3}{3x+1} \leq 0$
- แล้ว $A \cap B = A$
- ต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง
1. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
 2. ถูกเฉพาะข้อ ก.
 3. ถูกเฉพาะข้อ ข.
 4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ
13. ให้ A เป็นเซตคำตอบของ $\frac{x+2}{2} + x \leq 4$ และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $x < |x-7|$
- จงหา $A \cap B = A$
1. $(-\infty, 2)$
 2. $(-\infty, \frac{7}{2})$
 3. \emptyset
 4. $(-\infty, -2)$
14. ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าเรียงติดกันจากน้อยไปหามาก ถ้า y เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ $\sqrt[3]{x+y+z}$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว y มีค่าเท่าใด (Ent. คณิต 1 ต.ค. 2543)
1. 1
 2. 3
 3. 7
 4. 9
15. ให้ $S = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ และนิยาม $a * b =$ เศษเหลือจากการหารผลคูณ ab ด้วย 6 ทุก $a, b \in S$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. $x * 1 = x$ ทุก $x \in S$ ข. $\{4 * x \mid x \in S\} = \{0, 2, 4\}$
- ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (Ent. คณิต 1 มี.ค. 2543)
1. ก. ถูก และ ข. ถูก
 2. ก. ถูก แต่ ข. ผิด
 3. ก. ผิด แต่ ข. ถูก
 4. ก. ผิด และ ข. ผิด
16. กำหนดให้ $x+1$ และ $x-1$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x) = 3x^3 + x^2 - ax + b$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว เศษเหลือที่ได้จากการหาร $p(x)$ ด้วย $x-a-b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 มี.ค. 2544)
1. 15
 2. 17
 3. 19
 4. 21

17. กำหนดให้ $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $x - 1$ และ $x + 3$ ต่างหาร $p(x)$ แล้วเหลือเศษ 5 ดังนั้น $a + 2b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 มี.ค. 2544)
1. -11 2. -1 3. 1 4. 9
18. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $p(x) = ax^2 + bx + c$ ถ้า $(p(x))^5 - x$ มี $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ เป็นตัวประกอบ แล้ว $7a + 3b + 2c$ คือ จำนวนในข้อใด (Ent. คณิต 1 ต.ค. 2544)
1. $2 + 3^{\frac{1}{5}} - 2^{\frac{1}{5}}$ 2. $2 - 3^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{5}}$ 3. $-2 + 3^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{5}}$ 4. $2 + 3^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{5}}$
19. กำหนดให้ $p(x) = x^2 + bx + c$ โดยที่ $b, c \in I$ ถ้า $p(x)$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $f(x)$ และ $g(x)$ โดยที่ $f(x) = x^4 + 6x^2 + 25$, $g(x) = 3x^4 + 2x^2 + 28x + 5$ แล้ว $p(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ปี 2542)
1. 0 2. 1 3. 2 4. 4
20. ให้ $A = \{x \mid |x - 2| < 4\}$ และ $B = \{x \mid 15x^2 - 8x + 1 > 0\}$ แล้ว $A \cap B$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 ตุลาคม 2542)
1. $(-2, 3) \cup (5, 6)$ 2. $(0, 3) \cup (5, 6)$
3. $(0, 3) \cup (3, 5) \cup (5, 6)$ 4. $(-2, 0) \cup (0, 3) \cup (5, 6)$
21. เซตใดต่อไปนี้ เป็นเซตอนันต์ (Ent. คณิต กข. เมษายน 2541)
1. $\{x \mid |x| = x - 5\}$ 2. $\{x \mid |x| = x + 5\}$
3. $\{x \mid x^2 - 2|x| - 3 = 0\}$ 4. $\{x \mid \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{x-1}{x+1}\}$
22. กำหนดให้ $A = \{x \mid \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2\}$ ถ้า $A \cap [-5, 5] = [a, b]$ แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 2 มี.ค. 2545)
1. -6 2. -3 3. 3 4. 6
23. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $||4x - 1| + 3| = 10$ ข้อใดต่อไปนี้ ถูกต้อง (Ent. คณิต 2 มี.ค. 2544)
1. $A \subset \left[-1, \frac{7}{2}\right]$ 2. $A \subset [-2, 2]$
3. $A \subset \left[-3, \frac{3}{2}\right]$ 4. $A \subset [-4, 0]$



24. เซตคำตอบของ $\left| \frac{x-1}{x-2} \right| > 2$ คือ เซตหรือช่วงในข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต กข เมษายน 2541)
1. \emptyset
 2. $(2,3)$
 3. $(-1,2) \cup (2,7)$
 4. $\left(\frac{5}{3}, 2\right) \cup (2,3)$
25. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{3-x^2}{x+2} \geq 0$ และ $|2-x^2| \leq 2$ ตามลำดับ
เซตในข้อใดเป็นสับเซตของ B-A (Ent. คณิต 1 ตุลาคม 2541)
1. $\{-1.6, 1.6\}$
 2. $\{-1.7, 1.7\}$
 3. $\{-1.8, 1.8\}$
 4. $\{1.8, 17\}$
26. กำหนดให้ $A = \{x \mid |x-4| > 5\}$
 $B = \{x \mid \sqrt{x+3} - \sqrt{x} \leq 1\}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (Ent. คณิต 1 ตุลาคม 2543)
1. $A \cup B = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
 2. $(A \cap B)' = (9, \infty)$
 3. $B - A = [1, 9)$
 4. $A - B = (-\infty, -1)$
27. กำหนด A เป็นเซตคำตอบของสมการ $12 + x - x^2 < 0$
B เป็นเซตคำตอบของสมการ $|3 - |x|| < 1$
เซต $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 มีนาคม 2545)
1. $(-5, -3)$
 2. $(-3, -1)$
 3. $(1, 3)$
 4. $(3, 5)$
28. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ
 $\left| \frac{1-x}{2} \right| \leq 1$ $(A - B)'$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต กข 2540)
1. $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$
 2. $(-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$
 3. $(-\infty, -2] \cup (-1, \infty)$
 4. $(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$
29. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเต็ม
ถ้า $A = \{x \mid |x-3| < 2\}$
 $B = \{x \mid (1+x)(3-x) \leq 0\}$
แล้ว $A \cap B'$ คือข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 2 มีนาคม 2544)
1. $\{2\}$
 2. $\{2, 3\}$
 3. $\{3, 4\}$
 4. $\{4\}$

30. กำหนดให้ $A = \{x \mid |x-1| \leq 2 \text{ และ } \frac{1}{|x+1|} > \frac{1}{2}\}$ และ $B = \{x \mid x^2 + 2x < 0\}$ $A \cap B$ คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 มีนาคม 2544)
1. $(-1,0)$ 2. $[-1,0)$ 3. $(0,1)$ 4. $(0,1]$
31. ให้ $A = \{x \mid |x-4| \leq 2x\}$ และ $B = [-10,10]$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (Ent. คณิต 2 ต.ค. 2544)
1. $A \cup B = (-10, \infty)$ 2. $A \cap B = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$
3. $A - B = (10, \infty)$ 4. $B - A = \left(\frac{4}{3}, 10\right)$
32. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $(1 + \sqrt{3})\sqrt{|x-1|} \leq \sqrt{2} + \sqrt{6}$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{x-2}{x-1} \leq 1$ ถ้า $A - B = [a - b]$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 2 ต.ค. 2545)
1. 2 2. 3 3. 4 4. 5
33. ให้ A เป็นเซตของคำตอบสมการ $\frac{1}{|x+1|} - \frac{1}{|x-3|} \leq 0$ ถ้า $B = [-20,20]$ แล้ว $B - A$ เท่ากับเซตใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 2 มี.ค. 2545)
1. $[-20,1)$ 2. $(-1,20]$ 3. $[-20,1) \cup \{3\}$ 4. $(1,20) \cup \{-1\}$
34. กำหนด a, b, c เป็นจำนวนเต็ม พิจารณา
(1) ถ้า $(a+b) \mid c$ แล้ว $a \mid c$ หรือ $b \mid c$ (2) ถ้า $a \mid (b+c)$ แล้ว $a \mid b$ หรือ $a \mid c$
ข้อใดกล่าวถูกต้อง
1. ข้อ (1) ถูก และข้อ (2) ถูก 2. ข้อ (1) ถูก และข้อ (2) ผิด
3. ข้อ (1) ผิด และข้อ (2) ถูก 4. ข้อ (1) ผิด และข้อ (2) ผิด
35. โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลทางเลขคณิต (The Fundamental Theorem of Arithmetic) จะได้ว่า $2,541 = a \times b \times c^d$ และ $8,125 = p \times q^r$ ผลบวกของ a, b, c, d, p, q, r เท่ากับเท่าใด
1. 36 2. 40 3. 45 4. 48
36. ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 323, 227 และ 155 แล้วมีเศษเหลือ r เท่ากัน ดังนั้น เมื่อหาร x ด้วย r จะมีเศษเหลือเท่ากับเท่าใด
1. 1 2. 2 3. 3 4. 4



37. จำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 100 ที่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ กับ 15 มีทั้งหมดกี่จำนวน (Ent. คณิตศาสตร์ กข ปี 2537)
1. 48 2. 47 3. 46 4. 45
38. ในการนำขั้นตอนวิธีการหารไปใช้ในการเขียนจำนวน 118 ในรูปตัวเลขฐาน 4
จะได้ $118 = (4 \times a) + b$
 $a = (4 \times c) + d$
 $c = (4 \times e) + f$
 $e = (4 \times 0) + e$
ดังนั้น bdef เท่ากับเท่าใด
1. 6 2. 8 3. 12 4. 16
39. กำหนด $A = \{x \in \mathbb{I}^+ \mid (3x+2, 5x+3) = 2\}$
 $B = \{x \in \mathbb{I}^+ \mid x \text{ เป็นพหุคูณของ } 24, 100 \leq x \leq 300 \text{ และ } 5 \mid x\}$
ดังนั้น $B - A$ เป็นสับเซตของเซตใด
1. $\{100, 120, 140, 160\}$ 2. $\{200, 240, 280, 320\}$
3. $\{240, 480, 720, 960\}$ 4. $\{120, 240, 360, 480\}$
40. กำหนด $A = \{x \in \mathbb{I}^+ \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร } 215 \text{ และ } 267 \text{ แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน}\}$ จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับเท่าใด
1. 6 2. 7 3. 8 4. 9
41. จำนวนเต็ม x และ y สอดคล้องกับสมการ $(116, 248) = 116x + 248y$ ถ้า $x * y = xy - (y - x)$
แล้ว $x * y$ เท่ากับเท่าใด
1. -137 2. -113 3. -97 4. -83
42. สำหรับจำนวนเต็ม a, b ใดๆ ให้ (a, b) เท่ากับ ห.ร.ม. ของ a และ b ให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 400\}$
จำนวนสมาชิกของเซต $\{x \in A \mid (x, 40) = 5\}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ 1 ตุลาคม 2542)
1. 30 2. 40 3. 60 4. 80
43. กำหนดให้ $S = \{n \in \mathbb{I}^+ \mid n \leq 1000, \text{ห.ร.ม. ของ } n \text{ และ } 100 \text{ เท่ากับ } 1\}$ จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับเท่าใด (Ent. คณิตศาสตร์ 1 มีนาคม 2545)
1. 600 2. 500 3. 400 4. 300

44. ถ้า $A = \{p \mid p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ } p \mid (980 - p)^3\}$ แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน A มีค่าเท่าใด (Ent. คณิตศาสตร์ 1 มีนาคม 2542)
1. 14 2. 17 3. 21 4. 19
45. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ } 0 \text{ และ } -100 \leq x \leq 100\}$ ให้ $A = \{x \mid \text{ห.ร.ม. ของ } x \text{ กับ } 21 \text{ เป็น } 3\}$ จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 29 2. 34 3. 58 4. 68
46. กำหนด a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก
พิจารณา $a = bc + r, 0 < r < b$
 $b = r(2) + r_1, 0 < r_1 < r$
 $r = r_1(3) + r_2, 0 < r_2 < r_1$
ถ้า $r_1 = 5$ และ $r_2 = 0$ ข้อใดกล่าวถูกต้อง
1. $(a, b) = 1$ 2. $(a, b) = 2$ 3. $(a, b) = 3$ 4. $(a, b) = 5$
47. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a < b$, 5 หาร a ลงตัว และ 3 หาร b ลงตัว ถ้า a, b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และ ค.ร.น. ของ a, b เท่ากับ 65 แล้ว a หาร b เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิตศาสตร์ กข เมษายน 2541)
1. 1 2. 2 3. 3 4. 4
48. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง ห.ร.ม.ของ n และ 42 เท่ากับ 6
ถ้า $42 = nq_0 + r_0, 0 < r_0 < n$
 $n = 2r_0 + r_1, 0 < r_1 < r_0$
และ $r_0 = 2r_1$
โดยที่ q_0, r_0, r_1 เป็นจำนวนเต็ม แล้วค.ร.น.ของ n และ 42 มีค่าเท่ากับเท่าไร (Ent. คณิตศาสตร์ กข เมษายน 2541)
1. 180 2. 190 3. 200 4. 210
49. กำหนด a, b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $(a, b) = 1$ แล้ว $(a+b, a-b)$ เท่ากับเท่าไร
1. 1 2. 2
3. 3 4. มีคำตอบมากกว่า 1 ข้อ



ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ดร.อำรุง จันทวานิช	เลขาธิการสภาการศึกษา
ดร.สิริพร บุญญานันต์	รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำเภา หิรัญบุรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขภิรมย์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	ที่ปรึกษาด้านระบบการศึกษา สกศ.
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้เรียบเรียง : นางจรรยา พันธุ์เกลิงอมร โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา

ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อารีสา รัตนเพ็ชร	หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร	
อาจารย์เอชส์วัฒน์ คำมณี	
อาจารย์สุธิตา มณีชัย	
คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้	
● โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย	จังหวัดสงขลา
● โรงเรียนมหาวชิราวุธ	จังหวัดสงขลา
● โรงเรียนบูรณะรำลึก	จังหวัดตรัง
● โรงเรียนจุฬารัตนราชวิทยาลัย	จังหวัดสตูล
● โรงเรียนสุราษฎร์ธานี	จังหวัดสุราษฎร์ธานี
● โรงเรียนพุนพิณพิทยาคม	จังหวัดสุราษฎร์ธานี
● โรงเรียนเตรียมอุดมภาคใต้	จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้พิจารณารายงาน : นายสมชาย ศรีวรารกุล โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา	หัวหน้าโครงการ
นายวิษ ตาแก้ว	ประจำโครงการ
นางสาวกึ่งกาญจน์ เมฆา	ประจำโครงการ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ	ประจำโครงการ

บรรณาธิการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา
นางสาวกึ่งกาญจน์ เมฆา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกึ่งกาญจน์ เมฆา



เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช่หนังสือเล่มนี้แล้ว
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุขุขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : <http://www.onec.go.th>
<http://www.thaigifted.org>





บันทึก

Lined writing area with horizontal dashed lines for text entry.

Q

$$\{x \mid x = a \text{ เมื่อ } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus c) &= (a \oplus b) \oplus c \\ (b \oplus a) \oplus c &= (b \oplus c) \oplus a \\ a \oplus (b \oplus a) &= (a \oplus b) \oplus a \\ (a \oplus a) \oplus b &= a \oplus (a \oplus b) \end{aligned}$$



$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

