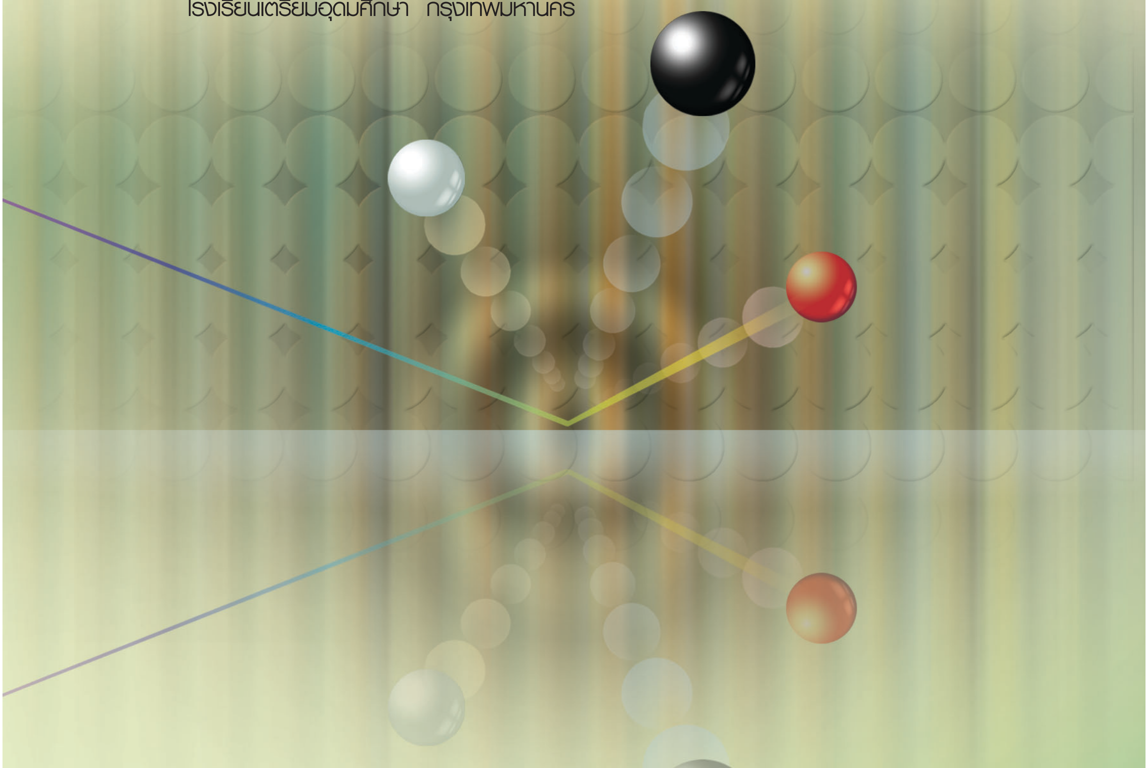
การคิดสร้างสรรค์เชิงคณิตศาสตร์

บันทึกประสบการณ์

โครงงานคณิตศาสตร์ดีเด่น

การกระดอนของวัตถุ ในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร



สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
กระทรวงศึกษาธิการ

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
ส 691 บ บันทึกประสบการณ์โครงงานคณิตศาสตร์ดีเด่น
“การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก”
สุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร และคณะ กรุงเทพฯ : 2551
144 หน้า
ISBN 978-974-559-290-2
1. โครงงานคณิตศาสตร์ดีเด่น – บันทึกประสบการณ์
2. สุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร 3. ชื่อเรื่อง

บันทึกประสบการณ์โครงงานคณิตศาสตร์ดีเด่น

“การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก”

สิ่งพิมพ์ สกศ. อันดับที่ 46 /2551
พิมพ์ครั้งที่ 1 พฤษภาคม 2551
จำนวน 1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่ สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร 0-2243-1129, 0-2668-7329
Web site: http://www.onec.go.th
และ http://www.thaigifted.org
ผู้พิมพ์ บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด
580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1
ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน
กรุงเทพฯ 10230
โทรศัพท์ 0-2943-8373-4
โทรสาร 0-2510-7753

คำนำ

การจัดกระบวนการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนได้พัฒนาเต็มตามศักยภาพของแต่ละบุคคล นับว่าเป็นหัวใจของการปฏิรูปการศึกษา โดยเฉพาะผู้เรียนที่มีความสามารถเหนือกว่าปกติทั่วไป ดังพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม(ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 วรรค 4 ที่ระบุว่า “การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น” ด้วยเหตุนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้ดำเนินการวิจัยนำร่องเพื่อพัฒนารูปแบบและหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในลักษณะเรียนร่วม ระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานด้านต่างๆ อาทิ ภาษาไทย ภาษาอังกฤษ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ฯลฯ ทั้งในส่วนกลางและภูมิภาค ซึ่งโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาเป็นหนึ่งในสามสิบสี่โรงเรียนนำร่องของสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาที่ตระหนักและเห็นความสำคัญในการพัฒนานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษในทุกด้าน โดยได้มีการจัดทำหลักสูตร การปรับกระบวนการเรียนรู้ให้เหมาะสมสอดคล้องกับธรรมชาติของผู้เรียนกลุ่มนี้อย่างจริงจังต่อเนื่อง มีการส่งเสริมกิจกรรมที่เน้นนักเรียนให้ฝึกปฏิบัติจริง ฝึกกระบวนการคิดอย่างมีระบบมีความมุ่งมั่นในการคิดค้นจากแหล่งเรียนรู้ ตลอดจนได้รับการบ่มเพาะจากผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ที่มีความสามารถสูง เป็นต้น จนเกิดผลสำเร็จสามารถพัฒนาศักยภาพของผู้เรียนให้สูงขึ้นได้อย่างเป็นรูปธรรมชัดเจน

รายงานเล่มนี้เป็นบันทึกประสบการณ์โครงงานคณิตศาสตร์ดีเด่น เรื่อง “การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก” ที่ประสบความสำเร็จได้รับรางวัลชนะเลิศจากการประกวดในโครงงานคณิตศาสตร์ จัดโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ร่วมกับ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ซึ่งเป็นผลงานของครูและนักเรียนโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาที่สมควรได้รับการบันทึก ยกย่อง และเผยแพร่เป็นตัวอย่างที่สะท้อนถึงกระบวนการเรียนการสอนหรือรูปแบบของการจัดการศึกษาที่เหมาะสมสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ รวมถึงประสบการณ์การทำโครงงานคณิตศาสตร์ในมุมมองของทั้งครูและนักเรียนที่น่าสนใจและให้ประโยชน์ได้อย่างดียิ่งต่อการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของประเทศไทย

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอแสดงความชื่นชมและขอขอบคุณ นางสาวสุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร ผู้เขียนบันทึกประสบการณ์ฉบับนี้ นายบัณฑิตย์ ฝอยทอง นายไมตรี ศรีทองแท้ ครูที่ปรึกษาโครงงาน ร่วมกับนายภูมิพงศ์ วัฒนะประกรณ์กุล นายธนวิต แซ่ซือ นายสุขุม สัตตรัตนามัย นักเรียนในโครงการพัฒนานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านวิทยาศาสตร์ รุ่นที่ 1 ผู้อำนวยการโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาและคณะครูหมวดคณิตศาสตร์ หน่วยงานมหาวิทยาลัย สมาคมผู้ปกครองนักเรียน ตลอดจนผู้เกี่ยวข้องทุกท่านที่ให้ความร่วมมือและช่วยเหลือจนทำให้โครงงาน เรื่อง “การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก” ประสบความสำเร็จในที่สุด และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าบันทึกประสบการณ์การพัฒนาโครงงานคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะช่วยจุดประกายและเป็นประโยชน์สำหรับเยาวชนและครูผู้สอน ตลอดจนท่านผู้สนใจด้านคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

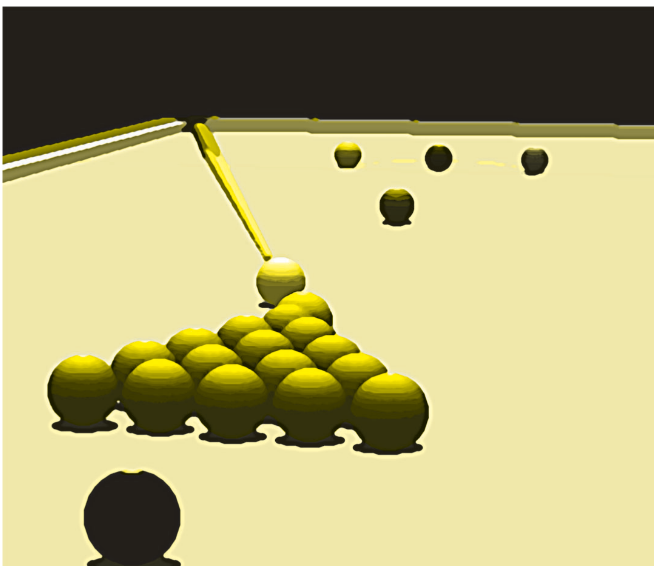
อำรุง จ

(นายอำรุง จันทวานิช)
เลขาธิการสภาการศึกษา

สารบัญ

ความจริงในวิถีชีวิต กับความคิดเชิงคณิตศาสตร์

เมื่อกลุ่มวัยรุ่นทั้ง 3 คน ยอด เทม และขุม ได้ไปเล่นสนุกเกอร์ร่วมกับเพื่อนๆ ขณะที่กำลังเล่นกันอย่างสนุกสนานนั้น เมื่อเพื่อนคนหนึ่งแทงลูกสนุกเกอร์สีขาวให้ชนลูกสีอื่นๆ ลงหลุมบนโต๊ะสนุกเกอร์ ยอดซึ่งเป็นคนช่างสังเกตและสงสัยก็มองอย่างสงสัย และเริ่มคิดตามแง่มุมของนักคณิตศาสตร์ว่า การแทงสนุกเกอร์ไม่ใช่แทงมั่วไปมั่วมา ยอดเริ่มคิดว่าควรจะแทงลูกสนุกเกอร์สีขาวอย่างไรลูกสนุกเกอร์สีขาวจึงจะชนลูกสนุกเกอร์สีอื่นๆ ลงหลุมตามลำดับที่ต้องการได้จนหมด ในขณะที่เทมแทงลูกสนุกเกอร์สีขาวโดยที่ไม่ได้คิดอะไรมาก ปรากฏว่าลูกสนุกเกอร์สีขาวกระดอนชนขอบโต๊ะกระทบไปมาแต่ไม่ชนลูกสนุกเกอร์สีอื่นๆเลย จนกระทั่งลูกสนุกเกอร์สีขาวเคลื่อนที่มาหยุดอยู่กลางโต๊ะ



หลังจากนั้น ยอด ขุม และเทม จึงได้นำเรื่องการแทงลูกสนุกเกอร์มาพูดคุยกัน และได้คิดถึงเรื่องการกระทบของลูกสนุกเกอร์ จากนั้น ทั้ง 3 คน จึงนำเรื่องดังกล่าวไปปรึกษากับคุณครูที่ปรึกษา

1 ใน 3 คนพูดว่า..

คุณครูครับ พวกผม 3 คนสงสัยเรื่องการกระทบของลูกสนุกเกอร์มาขอคำปรึกษาครับ

ครู ดีมาก นักเรียนเป็นคนช่างสังเกต เป็นคุณสมบัติข้อแรกของนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ พวกเธอลองช่วยกันตั้งสมมุติฐานเรื่องนี้ดูซิว่าจะทำอย่างไร [ครูได้ให้นักเรียนทั้ง 3 คน ระดมสมอง(Brain Strom)]

ขุม ตั้งสมมุติฐานคืออะไรครับ

ครู สมมุติฐาน คือ การสร้างข้อความคาดการณ์

เทม เอ่ ถ้าลูกสนุกเกอร์เคลื่อนที่ต่อไป ก็จะเกิดการชน การชนทำให้เกิดพลังงาน

ขุม อ๋อ เกิดพลังงานจลน์ พลังงานที่อยู่ในวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่

ยอด ไม่เอา เราตัดพลังงานจลน์ออกไปเลย

เทม งั้นพลังงานศักดิ์ล่ะ พลังงานที่อยู่ในวัตถุที่อยู่นิ่ง ๆล่ะ

ยอด ตัด ตัดพลังงานออกไปเลย เขามาคิดว่าการชนไม่มีการสูญเสียพลังงาน แล้วลูกสนุกเกอร์สีขาวจะเคลื่อนที่ไปในทางทิศใดได้บ้าง จะเคลื่อนที่ลงหลุมไหม

ทุกคนช่วยกันคิด ครูทิ้งปัญหาให้ทุกคนไปศึกษาค้นคว้า

ยอด เอ้ คิดออกแล้วเกมส์ Jazz ball ไงล่ะ

เทม เล่นไงครับผมไม่เคยเล่น

ยอด เป็นเกมส์ที่ผู้เล่นกั้นลูกบอลที่มีความเร็วคงที่และเด้งกระทบ

	ขอบไปมาในกรอบโดยจะต้องกั้นให้อยู่ในเนื้อที่ ที่น้อยลงมากที่สุดเท่าที่ทำได้
เทม	แล้วไงอีก
ขุม	การกั้นแต่ละครั้งต้องใช้เวลาและไม่ให้ลูกบอลมากระทบขณะที่กำลังกั้นเขตอยู่ ถ้าเราคิดได้ว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ระยะทางเท่าใดก่อนจะมาถึงบริเวณที่ดำเนินการกั้นอยู่
ยอด	แล้วเราก็จะรู้ว่านานเท่าใดวัตถุเคลื่อนที่มาถึง แล้วจะกั้นเสร็จก่อนที่วัตถุจะเคลื่อนที่มาถึงหรือไม่
ครู	ในชีวิตประจำวัน มีอะไรบ้างที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรอบสี่เหลี่ยมมุมฉาก
เทม	มีครับ เตาไมโครเวฟไงครับ
ขุม	ไม่เห็นมีอะไรเคลื่อนที่เลย
ยอด	มันมีการสะท้อนคลื่นไมโครเวฟในเตาเพื่อทำให้อาหารสุกทั่วถึง
ครู	อย่างอื่นยังมีไหม
ยอด	มีครับคุณครู เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์
ขุม	ไม่เห็นมีอะไรเคลื่อนที่เลย
ยอด	เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์เป็นการควบคุมจำนวนนิวตรอนซึ่งเป็นตัวกระตุ้นปฏิกิริยานิวเคลียร์ ถ้ามีมากเกินไปจะทำให้ปฏิกรณ์นิวเคลียร์กลายเป็นระเบิดนิวเคลียร์ได้
เทม	ตามที่เรียนมาถ้าเราทราบปริมาณนิวตรอนที่เคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งต่าง ๆ ก็จะทำให้สามารถควบคุมจำนวนนิวตรอนในปฏิกิริยานิวเคลียร์ได้อย่างเหมาะสม
ครู	3 เกลอไปคิดกันต่อนะ แล้วสรุปสมมุติฐานมาให้ได้ เพราะเป็นหลักข้อ 2 ของนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์

ในการตั้งสมมุติฐานนั้น คุณครูได้แนะนำให้ทั้งสามลองทำโจทย์ข้อหนึ่งซึ่งถามถึงจำนวนครั้งในการกระดอนของลูกบอลที่ถูกยิงในมุม 45° ภายในกรอบสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้ แนวคิดของโจทย์คือใช้เรื่องเกี่ยวกับ หรม. ปรากฏว่าเมื่อยอด เทมและขุม ทำโจทย์เสร็จก็เกิดความคิดขึ้นว่า แนวคิดในการทำโจทย์นั้นน่าจะใช้ได้กับการยิงลูกบอลในกรอบขนาดอื่นๆ ด้วย ดังนั้นทั้งสามจึงเริ่มขยายแนวคิดไปสู่รูปทั่วไป คือ กำหนดค่าความยาวของกรอบที่ใช้ในรูปตัวคงที่ใดๆ แล้วลองประยุกต์แนวคิดดั้งเดิม

การพิจารณาในขั้นแรกแม้ว่าทั้ง 3 คน จะขยายความคิดเกี่ยวกับความยาวของกรอบได้ แต่มุมที่ใช้ยิงก็ยังคงเป็น 45° เพราะเป็นมุมที่ง่ายในการจำลองภายในการกระดอน ครูจึงแนะให้อีกว่าทิศทางในการยิงนั้นถ้าเราวัดเป็นองศาจากขอบด้านล่างอาจจะทำให้สับสนได้เนื่องจากค่าของตรีโกณมิติส่วนใหญ่ไม่ใช่จำนวนเต็ม แล้วจึงนำกลับสู่โจทย์ข้อนั้นอีกครั้งเพื่อให้ดูแนวคิดว่าแท้ที่จริงแล้วการที่กำหนดมุม 45° มานั้นเพื่อบอกอะไรเรา ยอดคิดอยู่ครู่หนึ่งก็เสนอได้ว่าเป็นเพียงการบอกขนาดการเคลื่อนที่ไปตามแนวนอนและแนวตั้งว่าเท่ากันเท่านั้น เทมต่อทันทีว่า ถ้าเช่นนั้น หากเรากำหนดได้ว่ายิงลูกบอลไปตามแนวนอนและแนวตั้งในขนาดอื่นได้เราก็สามารถใช้แนวคิดเดิมได้ ขุมแทรกขึ้นมาอย่างดีใจว่า นี่มันเรื่องเวกเตอร์ที่เคยเรียนนี่เอง ครูมองทั้งสามแล้วยิ้ม

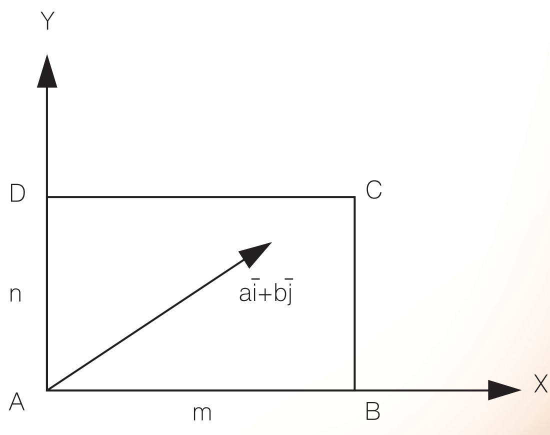
ทั้งสามหนุ่มเดินกลับไปห้องเรียนด้วยแนวคิดใหม่เต็มสมอง พวกเขาเริ่มกำหนดตัวแปรที่จะบอกทิศทางในการยิง จุดที่เริ่มยิง ซึ่งทุกคนแทบจะพูดพร้อมกันว่ามันต้องเป็นจุด (0, 0) เพราะเป็นจุดเริ่มต้นที่ง่ายที่สุดในการคำนวณ หลังจากนั้นก็ได้ทดลองต่อไปด้วยกระบวนการคิดที่ใช้เวกเตอร์เข้ามาช่วย ขุมนำสมบัติของเวกเตอร์มาอ่านให้เพื่อนๆ ฟัง ทั้งในการหาขนาด การบวกลบเวกเตอร์ และก็ได้พบว่าแนวคิดนี้เริ่มเกี่ยวกับฟิสิกส์นิดๆ แล้ว

ผ่านไป 3 วัน สมมุติฐานเกี่ยวกับการกระดอนสองมิติเริ่มเป็นรูปร่างมากขึ้น ทั้ง 3 หนุ่มจึงวิ่งไปหาครูอย่างดีใจ พร้อมส่งสมมุติฐาน ครูลองอ่านคราว ๆ แล้วอมยิ้มแต่ยังไม่ได้ให้เสนอแนวคิดที่นำมา กลับแนะว่าในสองมิตินั้นเป็นเพียงภาพจำลองที่เราคิดขึ้นมา ครูอยากรู้จริง ๆ ว่าถ้าในโลกแห่งความเป็นจริง ซึ่งเป็นสามมิติแล้ว หลักการของพวกเธอจะยังคงเป็นจริงอยู่หรือไม่ คำถามของครูทำเอาทั้ง3 หนุ่มคิ้วขมวดเดินกลับห้อง แต่ไม่มีอะไรยากเกินความพยายามเมื่อพบว่าอีก 4 วันให้หลังพวกเขาก็กลับไปเสนอสมมุติฐานได้

ยอด คุณครูครับ ผมตั้งสมมุติฐานได้แล้วครับ

ครู นำเสนอมาเลย

ยอด **สมมุติฐานที่ 1 การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 2 มิติ**
เมื่อยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด $m \times n$ และ ยิงวัตถุในทิศเดียวกับ $a\bar{i} + b\bar{j}$ โดยที่ $m,n \in \square$ $a,b \in \square^{+}$ ดังรูป



จะได้ว่า

- ถ้า $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ วัตถุจะไม่หลุดออกจากกรอบ
- ถ้า $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ โดยไม่เสียนัยจะให้ $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

จะได้ว่าระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ $\frac{mn}{(an,bm)}\sqrt{a^2+b^2}$ หน่วย จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบทั้งหมดเท่ากับ $\frac{bm}{(an,bm)} + \frac{an}{(an,bm)} - 2$ ครั้ง และเราจะทราบว่าวัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบมุมไหน

เทม เราลองยกตัวอย่าง กันดูดีไหม

ให้ยิงวัตถุเข้าในกรอบขนาด 4×3 และยิงวัตถุในทิศเดียวกับ $2\bar{i} + \bar{j}$

จะได้ว่าระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ $\frac{mn}{(an,bm)}\sqrt{a^2+b^2}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4\times 3}{(2\times 3, 1\times 4)}\sqrt{1^2+2^2} \\
&= \frac{12}{(6,4)}\sqrt{1^2+2^2} \\
&= \frac{12\sqrt{5}}{2} \\
&= 6\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

ยอด ลองอีกสักตัวอย่างหนึ่งดีกว่า

ให้ยิงวัตถุเข้าในกรอบขนาด 4×3 และยิงวัตถุในทิศเดียวกับ $\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j$

จะได้ว่าระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ $\frac{mn}{(an,bm)}\sqrt{a^2+b^2}$

$$= \frac{4\times 3\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}}{(\frac{1}{3}\times 3, \frac{2}{3}\times 4)}$$

$$= \frac{12\sqrt{\frac{5}{9}}}{(1,\frac{8}{3})}$$

$$= \frac{12\sqrt{\frac{5}{9}}}{(\frac{1}{3})}$$

$$= 12\sqrt{5}$$

สมมุติฐานที่ 2 การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 3 มิติ

การยิงวัตถุในกรอบขนาด $l \times m \times n$ เมื่อ $l, m, n \in \square$

ในทิศ $a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ โดย $a, b, c \in \square^{+} \cup \{0\}$

กรณีที่ 1 $abc = 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในระนาบ 2 มิติ ซึ่งได้ผลสรุปแล้วในข้างต้น

กรณีที่ 2 $a, b, c \in \square^{+}$ และ $\frac{a}{b} \notin \square \vee \frac{b}{c} \notin \square$ จะได้ว่าวัตถุไม่เคลื่อนที่หลุดออกจากกรอบสามมิติ

กรณีที่ 3 $a, b, c \in \square^{+}$ และ $\frac{a}{b} \in \square \wedge \frac{b}{c} \in \square$ โดยไม่เสียนัย

จะเลือก $a, b, c \in \square$ ได้ และได้ว่า

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบ

เท่ากับ $\dfrac{lmn\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{(amn, bnl, clm)}$

จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบเท่ากับ

$$\frac{1}{(amn, bnl, clm)}\big(amn + bnl + clm - (amn, bnl) - (bnl, clm) - (amn, clm)\big)$$ ครั้ง

ครู ถ้านักเรียนไม่เห็นปัญหาจะตั้งสมมุติฐานไม่ได้ และถ้านักเรียนตั้งสมมุติฐานผิดก็จะแก้ปัญหาไม่ได้เช่นกัน

ยอด ครับคุณครู

ครู คราวนี้เรามาช่วยกันตรวจสอบสมมุติฐาน

ยอด ทำอย่างไรครับคุณครู

ครู ก็พิสูจน์ข้อความที่คาดการณ์ตามสมมุติฐาน (ให้นักเรียนทั้ง 3 คน ไปศึกษาค้นคว้าข้อมูลตามสมมุติฐาน)

ในช่วงเวลา ๒ สัปดาห์ เพื่อการค้นหาวิธีการในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นั้น คุณครูได้แนะนำให้แต่ละคนทดลองยิงวัตถุมาคนละแบบเพื่อให้นักเรียนสามารถสร้างจินตภาพ และสร้างตัวแบบตามตัวแปรที่กำหนดไว้ได้ ถึงแม้ว่าการทดลองนี้ไม่ใช่วิธีการพิสูจน์ที่ครอบคลุม แต่ก็เป็นพื้นฐานที่ใช้ในการยืนยันว่าข้อความคาดการณ์ที่ตั้งไว้น่าจะมีความเป็นไปได้มากขึ้น

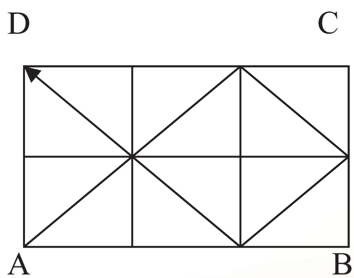
ขั้นตอนของการสร้างตัวแบบนั้น ยอด เทม และขุม ใช้ตัวเลขน้อย ๆ เพื่อที่จะได้เขียนภาพแสดงการกระดอนได้ง่าย ๆ ทั้งสามศึกษาระยะทางที่ใช้ในการกระดอนก่อนที่วัตถุจะวิ่งออกนอกกรอบ และศึกษาจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบ โดยอาศัยข้อเท็จจริงต่าง ๆ เช่น มุมตกเท่ากับมุมสะท้อน การสะท้อนรูป ทฤษฎีบทพิราโกรัส เป็นต้น

เมื่อทั้งสามคนทดลองยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาดต่าง ๆ ที่กำหนดไว้แล้วจึงไปพบครูที่ปรึกษา

นักเรียนทั้ง 3 คนได้เข้าพบคุณครูเพื่อรายงานผลให้คุณครูได้รับทราบผลต่อไปนี้

ครู ให้นักเรียนทั้ง 3 คน นำเสนอ " การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 2 มิติ " คนละ 1 หัวข้อ

เทม ***กรณีที่ 1*** ทดลองยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด 3×2 ในทิศ $\vec{i} + \vec{j}$



จะได้ว่าวัตถุกระทบกรอบ 3 ครั้ง และออกทางมุม D

ครู เทมคิดได้อย่างไรครับ

เทม ครูครับ จากข้อกำหนดตามสมมุติฐานจะได้ $m = 3$, $n = 2$, $a = 1$, $b = 1$

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ

$$\frac{mn}{(an,bm)}\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{หน่วย}$$

$$= \frac{3\times 2}{(1\times 2, 1\times 3)}\sqrt{1^2+1^2}$$

$$= \frac{6}{(2,3)}\sqrt{1^2+1^2}$$

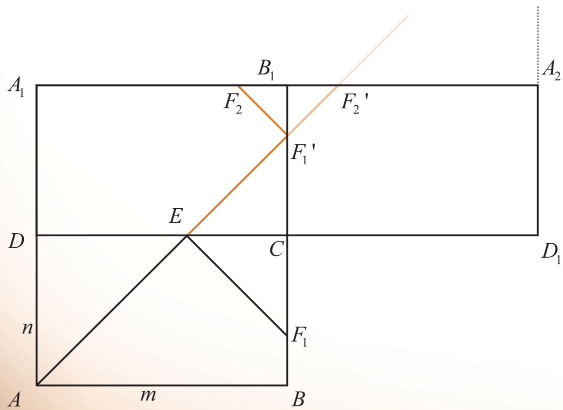
$$= \frac{6\sqrt{2}}{1}$$

$$= 6\sqrt{2}$$

สรุปคำตอบ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนออกจากกรอบเท่ากับ $6\sqrt{2}$ หน่วย

ครู แล้วถ้ายิงวัตถุออกจากจุด A วัตถุจะกระทบกรอบทั้งหมดกี่ครั้ง

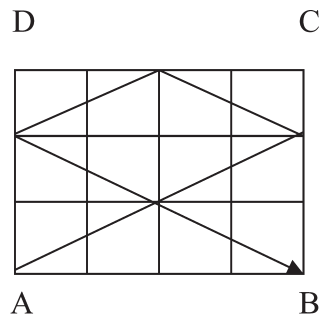
เทม ถ้ายิงวัตถุออกจากจุด A วัตถุจะกระทบกรอบดังรูป



การพิจารณาแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เปลี่ยนทิศทางนั้นมีความยุ่งยากซับซ้อน จึงใช้ประโยชน์จากการที่วัตถุมีมุมตกกระทบและมุมสะท้อนเท่ากัน สะท้อนแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุออกไปเป็นเส้นตรง

ครู ให้ขุมนำเสนอข้อต่อไป

ขุม ***กรณีที่ 2*** ทดลองยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด 4×3 ในทิศ $2\bar{i} + \bar{j}$



จะได้ว่าวัตถุกระทบกรอบ 3 ครั้ง และออกทางมุม B

ขุม ครูครับ จากข้อกำหนดตามสมมุติฐานจะได้ $m = 4$, $n = 3$, $a = 2$, $b = 1$

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ

$\dfrac{mn}{(an, bm)}\sqrt{a^2 + b^2}$ หน่วย

$$= \frac{4 \times 3}{(2 \times 3, 1 \times 4)}\sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$= \frac{12}{(6,4)}\sqrt{2^2 + 1^2}$$

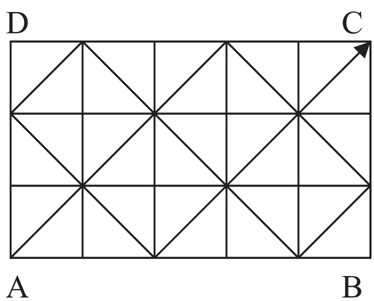
$$= \frac{12\sqrt{5}}{12}$$

$$= 6\sqrt{5}$$

สรุปคำตอบ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนออกจากกรอบเท่ากับ $6\sqrt{5}$ หน่วย

ครู ข้อต่อไปให้ยอดนำเสนอ

ยอด ***กรณีที่ 3*** ยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด 5×3 ในทิศ $\bar{i} + \bar{j}$



จะได้ว่าวัตถุกระทบกรอบ 6 ครั้ง และออกทางมุม C

ยอด ครูครับ จากข้อกำหนดตามสมมุติฐานจะได้ $m = 5$, $n = 3$, $a = 1$, $b = 1$

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ

$\dfrac{mn}{(an, bm)}\sqrt{a^2 + b^2}$ หน่วย

$$= \frac{5 \times 3}{(1 \times 3, 1 \times 5)}\sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$= \frac{15}{(3,5)}\sqrt{1^2 + 1^2}$$

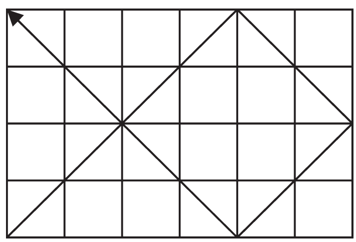
$$= \frac{15\sqrt{2}}{1}$$

$$= 15\sqrt{2}$$

สรุปคำตอบ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนออกจากกรอบเท่ากับ $15\sqrt{2}$ หน่วย

ครู สำหรับอีกข้อให้เทมนำเสนอ

เทม ***กรณีที่ 4*** ยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด 6×4 ในทิศ $\bar{i} + \bar{j}$



จะได้ว่าวัตถุกระทบกรอบ 3 ครั้ง และออกทางมุม D

เทม จากข้อกำหนดตามสมมุติฐานจะได้ m = 6 , n = 4 , a = 1 , b = 1

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ

$\frac{mn}{(an, bm)}\sqrt{a^2 + b^2}$ หน่วย

$$= \frac{6 \times 4}{(1 \times 4, 1 \times 6)}\sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$= \frac{24}{(4,6)}\sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$= \frac{24\sqrt{2}}{2}$$

$$= 12\sqrt{2}$$

สรุปคำตอบ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนออกจาก กรอบเท่ากับ $12\sqrt{2}$ หน่วย

ครู ให้ขุมสรุปผลการเคลื่อนที่ของวัตถุใน 2 มิติ และหาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ก่อนเข้ามุม

ขุม เราสามารถสรุปได้ว่า

- ถ้า $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ วัตถุจะไม่หลุดออกจากกรอบ
- ถ้า $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ โดยไม่เสียนัยจะให้ $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

จะได้ว่าระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ $\frac{mn}{(an,bm)}\sqrt{a^2+b^2}$ หน่วย จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบทั้งหมดเท่ากับ $\frac{bm}{(an,bm)}+\frac{an}{(an,bm)}-2$ ครั้ง

ครู ให้นักเรียนทั้ง 3 คนไปคิดทดลองเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุใน 3 มิติ โดยให้นักเรียนทดลองยิงวัตถุในกรอบขนาด 5 x 4 x 3 ในทิศ

$\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$

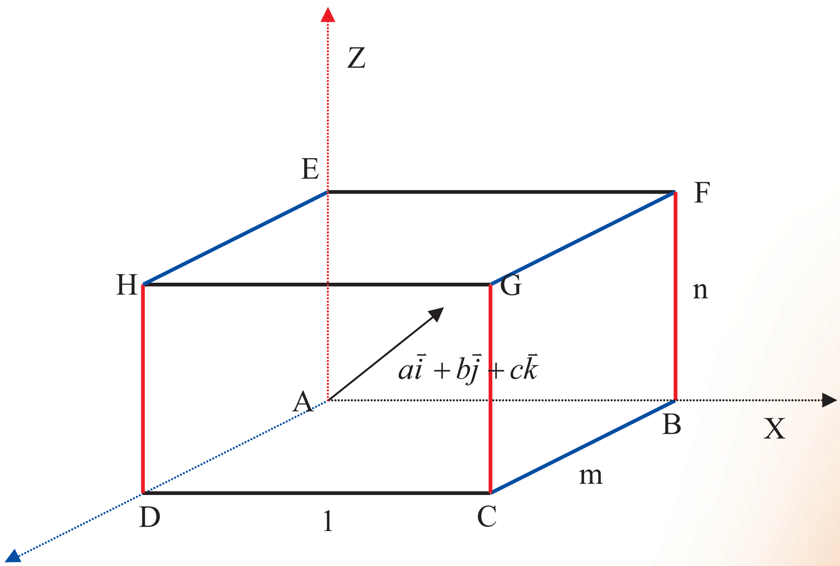
ในช่วงเวลา ๑ เดือน จากคำแนะนำของครูที่ให้ทดลองยิงวัตถุในกรอบขนาด 5 x 4 x 3 ในทิศ $\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ นั้นจินตนาการได้ยากกว่าการทดลองใน 2 มิติ ถึงแม้ว่าข้อเท็จจริงที่ใช้ในการสร้างต้นแบบจะยังคงเหมือนเดิมก็ตาม แต่ด้วยขนาดและทิศทางที่ครูกำหนดมาให้นั้นเป็นเลขน้อยและลงตัว ยอด เทม และขุม จึงตัดสินใจวาดภาพด้วยคอมพิวเตอร์เพื่อให้เห็นลักษณะการกระดอนได้อย่างชัดเจนและสวยงามยิ่งขึ้น

หลักการที่ใช้ก็คือการสร้างจุดต่างๆ ในระบบแกน 3 มิติ และคำนวณจุดตกกระทบแต่ละครั้งตามกระบวนวิธีของ

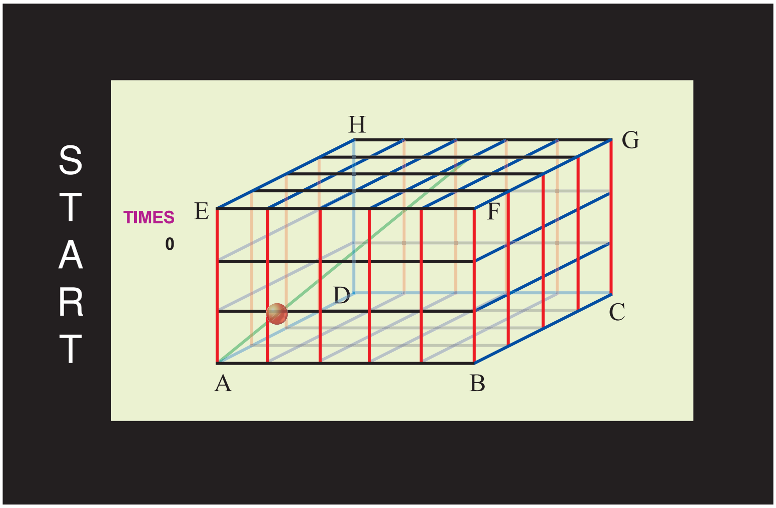
เวกเตอร์ ซึ่งได้ผลการทดลองที่สวยงามดังที่ได้อภิปราย ต่อไปนี้

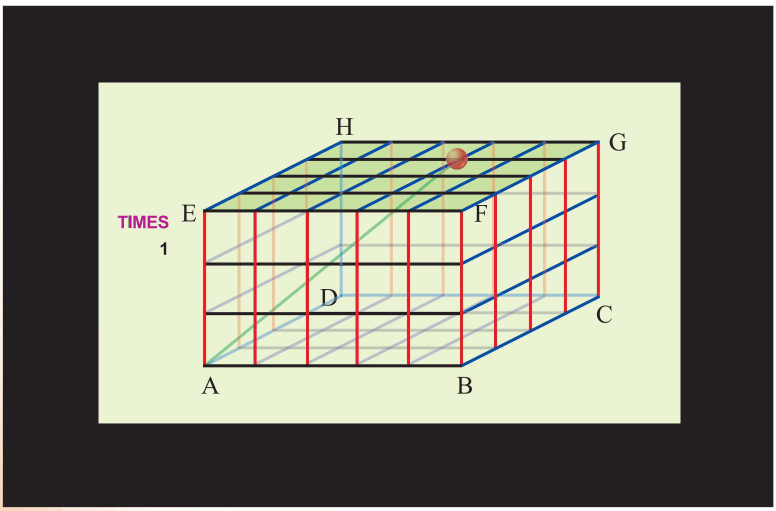
นักเรียนทั้ง 3 คนได้เข้าพบคุณครูเพื่อรายงานผลให้คุณครูได้รับทราบผล โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนอภิปรายดังนี้

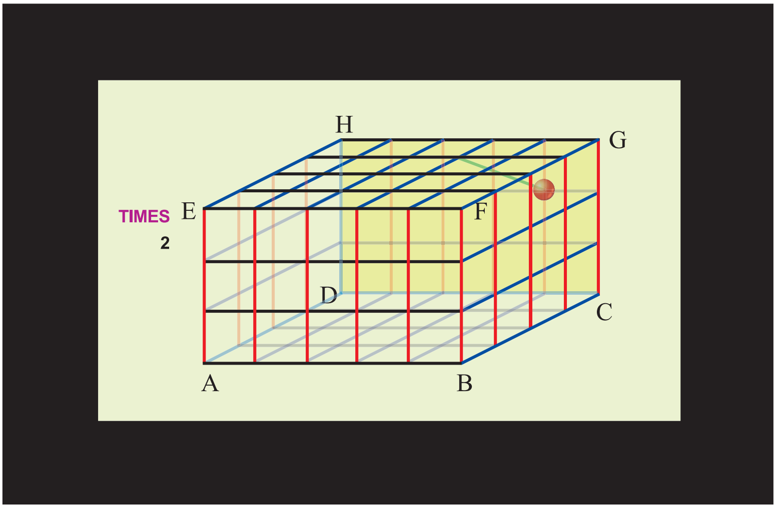
ยอด จากการตั้งสมมุติฐาน " การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 3 มิติ " โดยการทดลองโยนวัตถุเข้าไปในกล่องขนาด 5 x 4 x 3 ในทิศ $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$

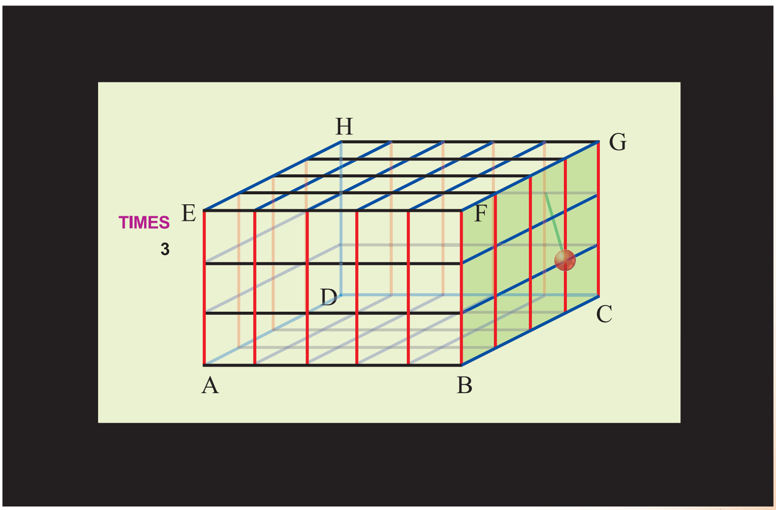


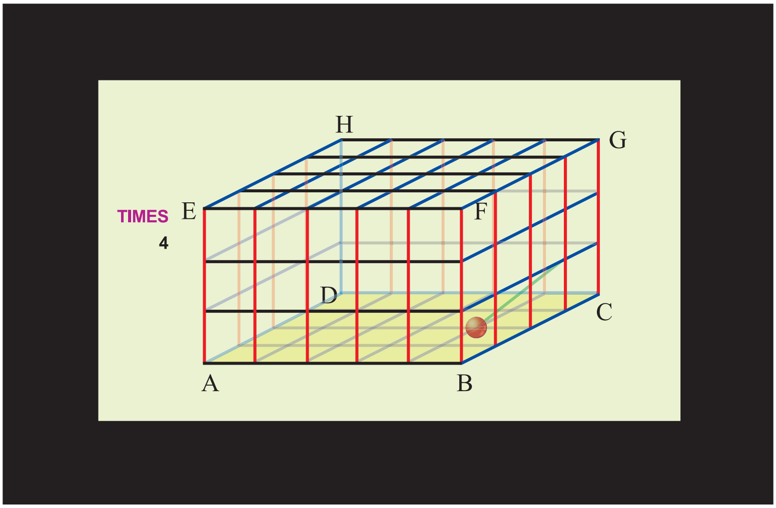
โดยเริ่มต้นที่จุด A ในทิศ $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ วัตถุจะกระดอนไปยังทิศทางต่าง ๆ ของฝากล่องทั้ง 6 ด้าน วัตถุกระดอนไปกระดอนมา จะนับจำนวนได้ว่าวัตถุกระทบกล่องทั้งหมด 35 ครั้ง และครั้งสุดท้ายวัตถุจะกระดอนออกทางมุม D ดังรูปภาพต่อไปนี้

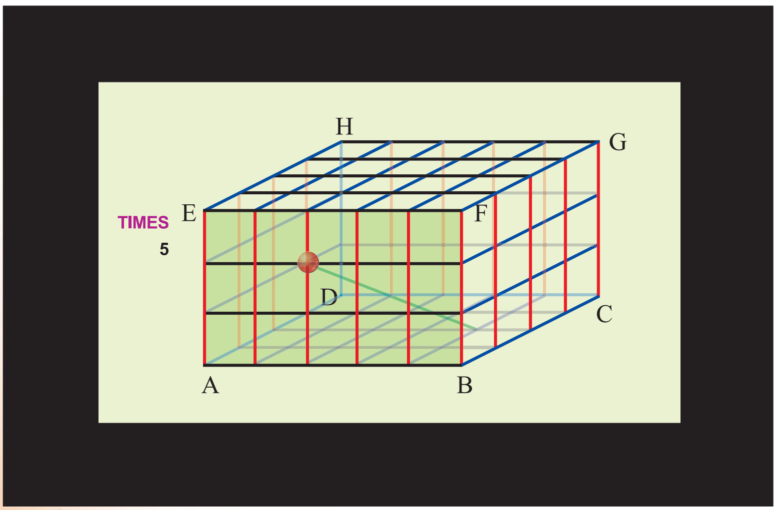

START
TIMES
0
H
G
E
F
D
C
A
B

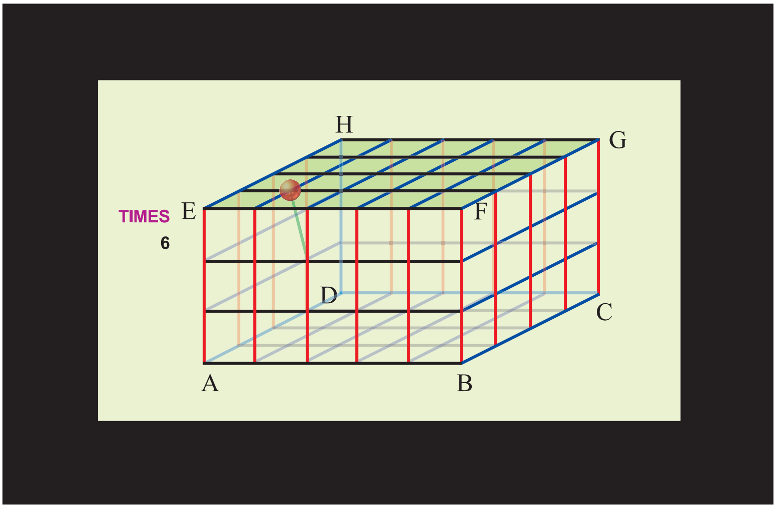

TIMES
1
H
G
E
F
D
C
A
B

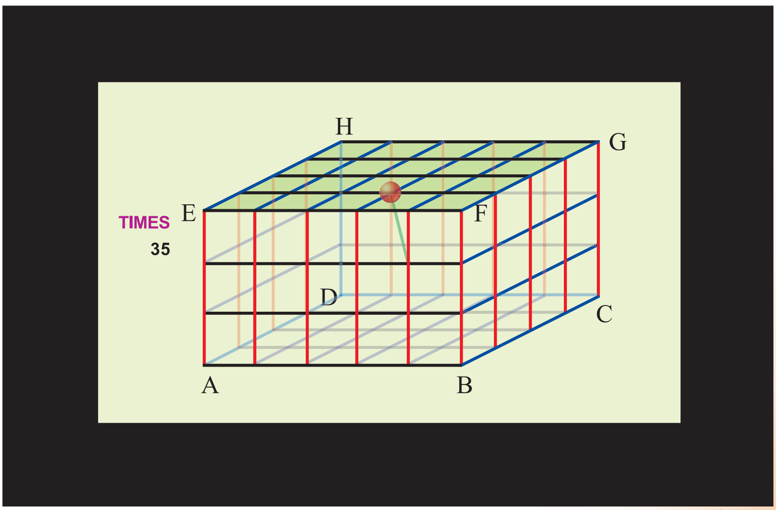

TIMES
2
H
G
E
F
D
C
A
B

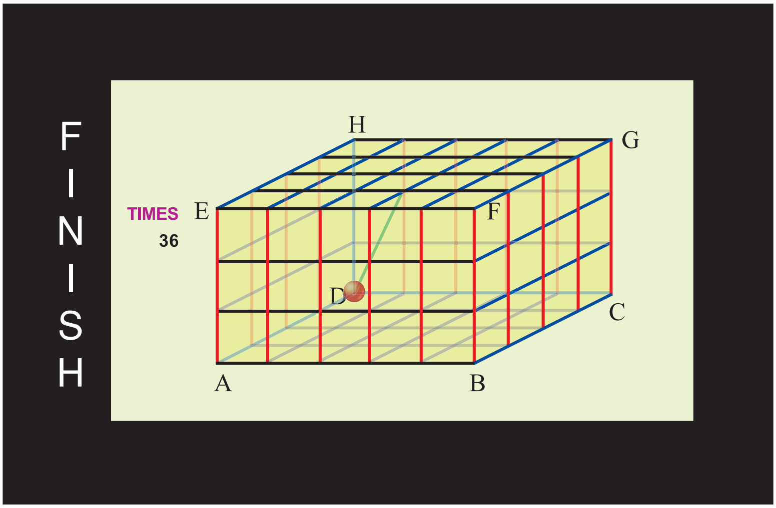

TIMES
3
H
G
E
F
D
C
A
B


H
G
TIMES
4
E
F
D
C
A
B


H
G
TIMES
5
E
F
D
C
A
B


H
G
TIMES
6
E
F
D
C
A
B


H
G
TIMES
35
E
F
D
C
A
B



หลังจากครูและนักเรียนอภิปรายร่วมกันเรื่อง “ การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 3 มิติ “ ซึ่งเมื่อโยนวัตถุเข้าไปในกล่องที่มีขนาด กว้าง m หน่วย , ยาว n หน่วย , สูง l หน่วย โดยโยนวัตถุออกจากจุด A ในทิศ $a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ สามารถสรุปเป็นสูตรได้ดังนี้

$a,b,c \in \mathbb{R}^{+}$ และ $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$

โดยไม่เสียนัยจะเลือก $a,b,c \in \mathbb{N}$ ได้ และได้ว่า

- จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านที่ขนานระนาบ XY คือ

$$\frac{clm}{(amn,bnl,clm)}$$ ครั้ง

- จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านที่ขนานระนาบ YZ คือ

$$\frac{amn}{(amn,bnl,clm)}$$ ครั้ง

- จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านที่ขนานระนาบ ZX คือ

$$\frac{bnl}{(amn,bnl,clm)}$$ ครั้ง

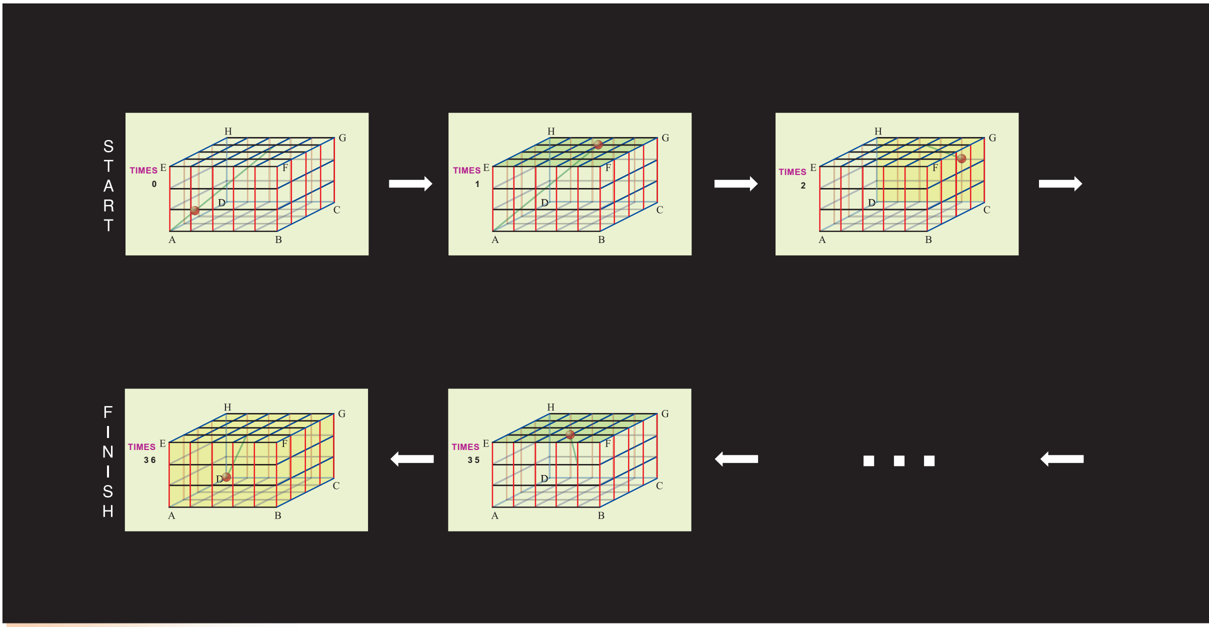
จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบเท่ากับ

$$\frac{1}{(amn,bnl,clm)}\big(amn+bnl+clm-(amn,bnl)-(bnl,clm)-(amn,clm)\big)$$ ครั้ง

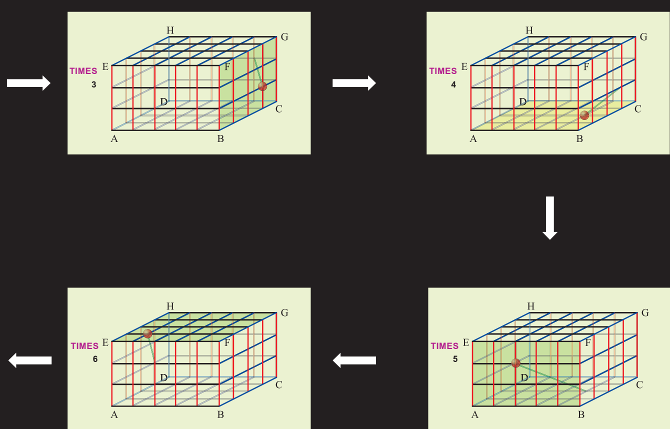
ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ

$$\frac{lmn\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{(amn,bnl,clm)}$$

ภาพแสดงโครงงาน
“การกระดอนของวัตถุ
ในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก”



Example : 3D



ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้

1. ตัวหารร่วมมาก
2. ทฤษฎีสำหรับจำนวนเต็ม 2 จำนวน
3. ทฤษฎีสำหรับจำนวนเต็ม n จำนวนใดๆ
4. ตัวคูณร่วมน้อย
5. หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก
6. ทฤษฎีบทประกอบที่ 1
7. ทฤษฎีบทประกอบที่ 2
8. ทฤษฎีบทประกอบที่ 3

รายละเอียดทฤษฎีที่ใช้

● *ตัวหารร่วมมาก*

บทนิยาม จำนวนเต็ม $d \neq 0$ จะเป็นตัวหารร่วมของจำนวนเต็ม a และ b ก็ต่อเมื่อ $d|a$ และ $d|b$

หมายเหตุ

1. $1|a$ และ $1|b$ ดังนั้นเซตของตัวหารร่วมของ a และ b ไม่เป็นเซตว่าง
2. ถ้า $a=b=0$ จะได้ว่าจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ทุกตัวเป็นตัวหารร่วม
3. ถ้า $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่าเซตของตัวหารร่วมของ a และ b เป็นเซตจำกัด และจะมีสมาชิกที่มีค่ามากสุด

4. ถ้า d เป็นตัวหารร่วมของจำนวนเต็ม a และ b แล้ว $-d$ จะเป็นตัวหารร่วมด้วย

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกันทั้งคู่ จำนวนเต็มบวก d จะเป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b ซึ่งเขียนแทนด้วย (a,b) หรือ gcd*(a,b) ก็ต่อเมื่อ

ก. $d|a$ และ $d|b$

ข. ทุกๆ จำนวนเต็มบวก c ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้วจะได้ว่า $c \leq d$

นั่นคือ จำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่หารทั้ง a และ b ลงตัวคือ (a,b)

● *ทฤษฎีบทสำหรับ จำนวนเต็ม 2 จำนวน*

1. สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ เราจะได้ว่า $(a+cb,b)=(a,b)$
2. สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งคู่ใดๆ จะมีจำนวนเต็ม x และ y ที่ทำให้ $(a,b)=ax+by$
3. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มและ $d=(a,b)$ จะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก c ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c|d$

บทนิยาม ถ้า $(a,b)=1$ เราจะกล่าวว่า a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

1. สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $(a,b)=1$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม x และ y ที่ทำให้ $1=ax+by$
2. สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ ถ้า $d=(a,b)$ แล้ว จะได้ว่า $1=(a/d,b/d)$ นั่นคือ a/d และ b/d เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

---

* (great common divisor)

3. สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ ถ้า $(a,c)=(b,c)=1$ แล้ว $(ab,c)=1$
4. สำหรับจำนวนเต็ม $a,b_1,b_2,\ldots,b_n$ ใดๆ ถ้า $(a,b_i)=1$ เมื่อ $i=1,2,...,n$ แล้ว $(a,b_1,b_2,\ldots,b_n)=1$
5. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน จะได้ว่าทุกๆจำนวนเต็ม c ถ้า $a|c$ และ $b|c$ แล้ว $ab|c$
6. สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ ถ้า $ab|c$ และ $(a,b)=1$ แล้ว $a|c$

บทนิยาม ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกันทั้งหมด จำนวนเต็มบวก d จะเป็นตัวหารร่วมของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ก็ต่อเมื่อ $d|a_1,d|a_2,\ldots,d|a_n$ และ d เป็นตัวหารร่วมมากของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $d|a_1,d|a_2,\ldots,d|a_n$ นั่นคือ d เป็นตัวหารร่วมของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$

ข. ทุกๆจำนวนเต็มบวก c ถ้า $c|a_1,c|a_2,\ldots,c|a_n$ แล้วจะได้ว่า $c \le d$

นั่นคือ จำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่หาร $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ทุกตัวลงตัว คือ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$

● *ทฤษฎีบทสำหรับจำนวนเต็ม n จำนวนใด ๆ*

1. สำหรับจำนวนเต็ม $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ใดๆ

   ก. $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = ((a_1,a_2),a_3,\ldots,a_n)$

   ข. $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = ((a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}),a_n)$
2. ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

จะได้ว่า $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ = จำนวนเต็มบวกค่าน้อยที่สุดที่อยู่ในรูป $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ เมื่อ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ เป็นจำนวนเต็ม

3. ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ $d=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ จะได้ว่าสำหรับทุก ๆจำนวนเต็มบวก c ถ้า $c|a_1 \wedge c|a_2 \wedge \ldots \wedge c|a_n$ แล้ว $c|d$

บทนิยาม ถ้า $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 1$ เราจะกล่าวว่า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และถ้าทุก i, j ที่ $i \neq j$, $(a_i,a_j) = 1$ เราจะกล่าวว่า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่

4. สำหรับจำนวนเต็ม $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ใดๆ $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 1$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ที่ทำให้ $1=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$
5. สำหรับจำนวนเต็ม $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ใดๆ ถ้า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่แล้ว $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

● *ตัวคูณร่วมน้อย*

บทนิยาม กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จำนวนเต็มบวก m เป็น ตัวคูณร่วมของ a และ b ก็ต่อเมื่อ $a|m$ และ $b|m$

หมายเหตุ

1. ทุก ๆ จำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ a และ b, ab เป็นตัวคูณร่วม ของ a และ b
2. ถ้าจำนวนเต็มบวก m เป็นตัวคูณร่วมของ a และ b และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $m|k$ แล้ว k เป็นตัวคูณร่วมของ a และ b ด้วย

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จำนวนเต็มบวก m เป็น ตัวคูณร่วมน้อย ของ a และ b ซึ่งเขียนแทนด้วย $[a,b]$ หรือ $lcm(a,b)$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $a \mid m$ และ $b \mid m$

ข. ทุกๆ จำนวนเต็มบวก c ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid c$ แล้ว จะได้ว่า $m \le c$ นั่นคือ จำนวนเต็มบวกค่าน้อยสุดที่ a และ b หารลงตัวคือ $[a,b]$

ข้อสังเกต

1. $[a,b] = [b,a]$
2. $[a,b] = [\,|a|, |b|\,]$
3. ถ้า $a \mid b$ แล้ว จะได้ว่า $[a,b] = |b|$

ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ใดๆ

ก. $(a,b)[a,b] = ab$

ข. a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ จะได้ว่า $[a,b] = ab$

บทนิยาม ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ จำนวนเต็มบวก m จะเป็นตัวคูณร่วมน้อย ของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งเขียนแทนด้วย $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $a_1 \mid m$, $a_2 \mid m$,..., $a_n \mid m$

ข. สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก c ถ้า $a_1 \mid c$, $a_2 \mid c$,..., $a_n \mid c$ แล้ว $m \le c$

นั่นคือ จำนวนเต็มบวกค่าน้อยที่สุดที่ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ หารลงตัว คือ $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$

ทฤษฎีบท

1. สำหรับจำนวนเต็ม $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ที่ไม่เป็นศูนย์ ใดๆ ถ้า c เป็นตัวคูณร่วมของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ แล้ว $[a_1,a_2,\ldots,a_n] \mid c$
2. สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ จะได้ว่า

   ก. $[a_1,a_2,\ldots,a_n] = [[a_1,a_2],a_3,\ldots,a_n]$

ข. $[a_1,a_2,\ldots,a_n] = [[a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}], a_n]$

3. สำหรับ ทุกๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq c$ ไม่ว่า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่แล้ว $[a_1,a_2,\ldots,a_n] = a_1,a_2,\ldots,a_n$

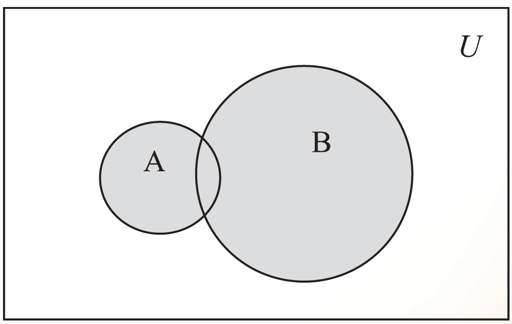
● *หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก*

การนับจำนวนของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นของปัญหาที่ซับซ้อนอาจทำให้นับบางกรณีซ้ำ หรืออาจนับบางกรณีขาดหายไป ซึ่งทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ผิดพลาดไปจากความเป็นจริง ดังนั้นเราจึงต้องอาศัยเรื่องเซตเพื่อช่วยแก้ปัญหาการนับดังกล่าว

ทฤษฎีบท ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

พิสูจน์ เนื่องจาก A และ B เป็นเซตจำกัด ดังนั้น $A \cup B$ และ $A \cap B$ เป็นเซตจำกัด



จากแผนภาพของเวนน์พบว่า

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

เนื่องจาก $A \cap (B - A) = \varnothing$ ดังนั้น

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A) \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_(1)$$

แต่ $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ และ $(B - A) \cap (A \cap B) = \varnothing$ ดังนั้น

$$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

สำหรับการหาสูตรจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B \cup C$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตจำกัดสามารถทำได้โดยใช้หลักการเช่นเดียวกับการหาจำนวนสมาชิกของเซต 2 เซตดังนี้

$$\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n((A \cup B) \cup C) \\
&= n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) \\
&= n(A \cup B) + n(C) - n((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\
&= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

● *ทฤษฎีบทประกอบที่ 1*

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม x, y, z จะได้ว่า

$$\left[\frac{x}{(x,y)}, \frac{x}{(x,z)}\right] = \frac{x}{(x,y,z)}$$

พิสูจน์

$$\left[\frac{x}{(x,y)},\frac{x}{(x,z)}\right] = \frac{\dfrac{x^2}{(x,y)(x,z)}}{\left(\dfrac{x}{(x,y)},\dfrac{x}{(x,z)}\right)} = \frac{x^2}{(x,y)(x,z)\left(\dfrac{x}{(x,y)},\dfrac{x}{(x,z)}\right)}$$

$$= \frac{x^2}{\big((x,z)x,(x,y)x\big)} = \frac{x^2}{x\big((x,z),(x,y)\big)}$$

$$= \frac{x}{(x,y,z)}$$

● *ทฤษฎีบทประกอบที่ 2*

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม x,y,z จะได้ว่า $[x,y,z]=\dfrac{xyz}{(xy,yz,zx)}$

พิสูจน์

$$[x,y,z] = [[x,y],z] = \frac{[x,y]z}{([x,y],z)}$$

$$= \frac{\dfrac{xy}{(x,y)}z}{(\dfrac{xy}{(x,y)},z)} = \frac{xyz}{(x,y)\left(\dfrac{xy}{(x,y)},z\right)}$$

$$= \frac{xyz}{\big(xy,z(x,y)\big)} = \frac{xyz}{(xy,yz,zx)}$$

● ***ทฤษฎีบทประกอบที่ 3***

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม x,y,z จะได้ว่า $\dfrac{(xy,yz)}{(xy,yz,zx)}=\dfrac{[x,y,z]}{[x,z]}$

พิสูจน์

จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2 จะได้ว่า

$$(xy,yz,zx)[x,y,z] \quad = xyz \quad = y[x,z](x,z) = [x,z](xy,yz)$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{(xy,yz)}{(xy,yz,zx)}=\dfrac{[x,y,z]}{[x,z]}$

เนื้อหาที่ต้องทำความเข้าใจเพิ่ม

1. การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 2 มิติ
2. การหาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ก่อนเข้ามุม
3. การหาจำนวนครั้งที่กระดอน
4. การหามุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบ
5. การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 3 มิติ
6. การหาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ก่อนเข้ามุม
7. การหาจำนวนครั้งที่กระดอน
8. การหามุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบ

ปัจจุบันมีความซับซ้อนทางเทคโนโลยีมากขึ้นทุกๆ ส่วนของการเปลี่ยนแปลงหรือการปฏิบัติงาน จึงต้อง

เกี่ยวข้องกับการคำนวณอย่างหลีกเลี่ยงไม่พ้น การปูพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ถูกหลักเกณฑ์ ตั้งแต่ก่อนอนุบาลจนถึงระดับประถมศึกษาจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง เพื่อที่จะพัฒนาให้เด็กเรียนรู้อย่างถูกวิธี โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกลุ่มเด็กที่มีแววคณิตศาสตร์สูง

แหล่งข้อมูล

แหล่งข้อมูลที่น่าสนใจที่ให้ความรู้นักเรียนกระจ่างขึ้นในหัวข้อต่างๆ นักเรียนจะได้แหล่งข้อมูลจากหลายๆ ด้าน แหล่งข้อมูลที่หาได้จาก

1. หนังสือในห้องสมุด
2. ปรึกษากับครูที่ปรึกษาโครงงาน
3. Search จาก Internet
4. คิดเกมทางคณิตศาสตร์
5. วิเคราะห์ สังเคราะห์
6. ปรึกษาจาก Mentoring จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (การทำงานภายใต้คำแนะนำในสำนักของผู้เชี่ยวชาญ)
7. ปรึกษารุ่นพี่ๆ ที่มีประสบการณ์ในการทำโครงงานคณิตศาสตร์และส่งเข้าประกวดในปีก่อนๆ

ผู้จัดทำโครงงาน

1. นายภูมิพงศ์ วัฒนะประกรณ์กุล
ชื่อเล่น ยอด

ยอด เป็นคนยิ้มแย้ม ไม่เครียด มีอารมณ์ดีมาก ชอบหัวเราะอย่างมีความสุข ขี้เล่น แต่เป็นคนช่างสงสัย มีความคิดหลักแหลม เป็นนักวางแผน เมื่อทางโรงเรียนส่งไปแข่งขันวิชาการคณิตศาสตร์กับโรงเรียนอื่นซึ่งจัดโดยโรงเรียนสิรินธรราชวิทยาลัย จ.ราชบุรี ทั้งที่ยอดยังไม่ได้เรียนหรือศึกษาวิชาสถิติ แต่ยอดก็สามารถชนะเลิศการแข่งขันได้ ยอดมีแววเป็นนักคณิตศาสตร์ เป็นคนมีความคิด ช่างฝัน มุ่งมั่นไม่ยอมแพ้ ชอบพัฒนาความคิดเรื่อยๆ โดยการศึกษาค้นคว้า มีความเชื่อมั่นในตัวเองสูง พัฒนาความเชื่อมั่นในการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ เป็นผู้มีความโดดเด่นทางคณิตศาสตร์ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ เป็นผู้นำกิจกรรมต่างๆ ของโรงเรียน ขยัน มุ่งมั่น ตั้งใจ พยายาม อดทน สนใจงานวิจัย ยอดมีความสามารถพิเศษที่หาได้ยากจากบุคคลทั่วไป ตัวอย่างเช่น เมื่อยอดเห็นอะไรสักอย่างจะบอกได้เลยว่ามันทำงานด้วยหลักการหรือกลไกอะไร

ฉันชอบโครงงานนี้ เพราะฉันได้เรียนรู้มากมาย
ทำให้ฉันสนใจคณิตศาสตร์มากกว่าเดิม
ฉันมีเพื่อนร่วมงานที่ดี ทุกคนร่วมกันทำงานโครงงาน
ช่วยให้เราได้รู้จักการทำงานและยอมรับผู้อื่น

นายภูมิพงศ์ วัฒนะประกรณ์กุล

- ปัจจุบันได้รับทุนเล่าเรียนหลวง ศึกษาต่อ ณ ประเทศสหรัฐอเมริกา
- นักเรียนเหรียญทอง โอลิมปิกคณิตศาสตร์ระหว่างประเทศ ปีการศึกษา 2549
- นักเรียนเหรียญทองแดง โอลิมปิกคณิตศาสตร์ระหว่างประเทศ ปีการศึกษา 2548

2. นายธนวิต แซ่ซือ
ชื่อเล่น เทม

เทม เป็นคนอารมณ์ดี ยิ้มแย้มแจ่มใส ใจเย็นสุดๆ คิดเร็ว ฉลาดหลักแหลม เป็นนักวางแผน เมื่อเจอโจทย์คณิตศาสตร์ที่ยากๆ เทมสามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้อย่างรวดเร็ว มีลำดับขั้นตอนและถูกต้อง มีแววเป็นนักคณิตศาสตร์ เป็นคนชอบวางแผน ทำอะไรจะวางแผนก่อนลงมือทำและได้นำมาวางแผนร่วมกันผู้อื่น เข้าใจและรู้วิธีการทำงานเป็นทีมโดยใช้กระบวนการกลุ่มที่มีการตั้งจุดประสงค์ วางแผน รับผิดชอบและประเมินผลร่วมกัน

- ปัจจุบันได้รับทุนพัฒนาและส่งเสริมความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) ศึกษาต่อ ณ ประเทศสหรัฐอเมริกา

- นักเรียนเหรียญเงิน โอลิมปิกคณิตศาสตร์ระหว่างประเทศ ปีการศึกษา 2549

3. นายสุขุม สัตตรัตนามัย
ชื่อเล่น ขุม

ขุม เป็นคนช่างสงสัย เป็นนักวางแผน มีความคิดเป็นผู้ใหญ่และสุขุมสมชื่อ มีความพยายามสูง ชอบตั้งสมมุติฐาน ทดลอง สืบสวน และรวบรวมข้อมูลเพื่อหาข้อสรุปและพิสูจน์ได้ ชอบคิด วางแผนและสามารถทำจนเป็นผลสำเร็จ ขุมเป็นตัวแทนนักเรียนของโรงเรียนสาขาคอมพิวเตอร์มีความถนัดและสนใจเป็นพิเศษเรื่อง เครื่องคำนวณเชิงกราฟ (Graphic Calculator) , Sketchpad และขุมยังเป็นพี่เลี้ยงติวคอมพิวเตอร์โอลิมปิกวิชาการให้กับรุ่นน้องของโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน

- ปัจจุบันศึกษาต่อคณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากคุณสมบัติส่วนตัวของทั้ง 3 คน ที่มีแนวคิดบางอย่างที่คล้ายกันทำให้สามารถร่วมทีมการทำโครงงานคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพทีมหนึ่ง กอปรกับทั้ง 3 คน เกิดความสนใจในเรื่องเดียวกัน คือ การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทั้ง 3 คนจึงร่วมกันวางแผนและแบ่งงานกันไปศึกษา รวบรวมข้อมูล เพื่อนำข้อมูลที่ได้มาศึกษาวิเคราะห์ร่วมกัน ว่าเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้หรือไม่ มีปัญหาอะไร และจะแก้ปัญหาอย่างไร เพื่อให้ได้ข้อสรุป

ความคิดเห็นของนักคณิตศาสตร์ในอนาคต

มนุษย์ทุกคนมีเวลาวันละ 24 ชั่วโมงเท่ากัน นักวิทยาศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่ไม่ว่าจะเป็น Newton, Edison หรือ Einstein ก็มีเวลาวันละ 24 ชั่วโมงเท่านั้น แต่ทำไมเขาสามารถสร้างสรรค์ผลงานได้เป็นจำนวนมาก ความสำคัญอยู่ที่การแบ่งเวลา น้องควรแบ่งเวลาให้เหมาะสม สร้างความสมดุลระหว่างการเรียนและกิจกรรม แล้วน้องจะพบว่าน้องได้เรียนรู้จากการทำกิจกรรมมากกว่าที่คาดหวังไว้ สิ่งสำคัญอีกอย่างหนึ่งคือ ก่อนจะทำสิ่งใดก็ตามให้คิดให้ดีก่อน และทำให้ดีที่สุดเพื่อจะได้ไม่ต้องมาเสียใจภายหลัง บอกตัวเองว่าถ้าตอนนั้นทำให้ดีกว่านี้ก็คงจะดี เพราะถ้าคิดและทำดีที่สุดอย่างเต็มความสามารถแล้วผลที่ได้ไม่สมดังหวังก็ไม่มีอะไรน่าเสียใจ เพราะเราทำให้ดีกว่านี้ไม่ได้อีกแล้ว เราทำเต็มที่แล้ว น้องควรจะระลึกไว้เสมอว่า “ถ้าหากย้อนเวลากลับไปได้” ไม่มีในโลกแห่งความเป็นจริง

นายภูมิพงศ์ วัฒนะประกรณ์กุล
นายธนวิต แซ่ซือ
นายสุขุม สัตตรัตนามัย

คณะครูที่ปรึกษาโครงงาน

นางสาวสุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร

นายบัณฑิตย์ ฝอยทอง

นายไมตรี ศรีทองแท้

การมีส่วนร่วมของผู้ปกครอง

คุณพ่อคุณแม่ทุกท่านมีความปรารถนาและมีความตั้งใจที่จะมีลูกเพื่อสืบสกุล เพราะลูกคือความหวัง เป็นเป้าหมายในชีวิต และควรให้ความใกล้ชิด ความอบอุ่นและความเสมอภาคกับลูกทุกคนเพื่อการอยู่ร่วมกันเป็นครอบครัวที่สมบูรณ์แบบ และเลี้ยงดูลูก ๆ ให้สามารถช่วยเหลือตัวเอง มีความรู้ มีศีลธรรม จริยธรรมเป็นคนดีของสังคมและอยู่ร่วมในสังคมได้ เพราะในสังคมปัจจุบันนี้เราจะต้องใช้ความรู้หลาย ๆ ด้านมาผสมผสานกันให้มากขึ้น ยุคนี้เป็นยุคของสังคมแห่งการเรียนรู้และการเรียนรู้นอกตำรายังมีอีกมากมาย ไม่ว่าจะอยู่ในรูปของหนังสือ โทรทัศน์ สื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์ หรือแม้แต่ Internet ซึ่งเป็นแหล่งความรู้อันยิ่งใหญ่ แต่ก็แฝงไปด้วยสิ่งที่ไม่ดีมากมายด้วยเช่นกัน สิ่งสำคัญต้องสอนให้ลูกต้องรู้จักแสวงหา รู้จักเลือก และรู้จักนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ให้เป็นประโยชน์ให้มากที่สุด และนอกจากนี้พ่อและแม่ควรชักชวนลูก ๆ ให้ออกกำลังกายเพื่อสุขภาพที่ดี โดยเฉพาะกีฬาจะฝึกฝนให้เขามีสมาธิและมีความอดทนมุ่งมั่น มีน้ำใจเป็นนักกีฬา รู้จักนอบน้อมถ่อมตน รู้จักการอยู่ร่วมกันในสังคม รู้จักรับผิดชอบต่อตนเอง สังคมและประเทศชาติในอนาคต

บันทึกประสบการณ์ โครงงานคณิตศาสตร์ดีเด่น

เรื่อง
การกระดอนของวัตถุ ในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

1. บทนำ

โครงงาน เรื่อง "การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก" จัดเป็นโครงงานที่มีคุณค่าที่เกิดมาจากการศึกษาค้นคว้าของกลุ่มนักเรียนผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนกลุ่มนี้ ได้นำศักยภาพที่มีอยู่มาใช้อย่างเต็มความสามารถ นักเรียนทั้ง 3 คนได้พบปัญหามาจากสิ่งใกล้ตัวแล้วเกิดความสนใจ และใช้ความพยายามอย่างสูง และใช้เวลาประมาณ 1 ปีเต็ม ๆ ที่เขาทั้ง 3 ได้ช่วยกันคิดค้นหาคำตอบ นักเรียนมีโอกาสได้ทำโครงงานอย่างเต็มรูปแบบ เป็นการนำเสนอผลงานได้อีกรูปแบบหนึ่ง โดยมีจุดมุ่งหมายในการทำโครงงานดังนี้

- เพื่อส่งเสริมให้ผู้ทำโครงงานได้นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง
- เพื่อส่งเสริมให้ผู้ทำโครงงานได้พัฒนาทักษะกระบวนการและความสามารถทางคณิตศาสตร์
- เพื่อส่งเสริมให้ผู้ทำโครงงานได้ศึกษาค้นคว้า หรือทำวิจัยทางคณิตศาสตร์ และเพิ่มพูนความถนัดและความสนใจ

- เพื่อส่งเสริมให้ผู้ทำโครงงานได้มีทักษะการสื่อสารที่นำมาใช้ในการเผยแพร่ผลงานของตนเอง
- เพื่อส่งเสริมให้ผู้ทำโครงงานมีความรับผิดชอบและทำงานร่วมกับผู้อื่นได้
- เพื่อส่งเสริมให้ผู้ทำโครงงานตระหนักถึงคุณค่าและประโยชน์ของคณิตศาสตร์ และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

โครงงานที่นักเรียนทำนี้เป็นโครงงานคณิตศาสตร์ประเภทสร้างทฤษฎีหรือสร้างคำอธิบายเป็นการเสนอแนวคิดหรือวิธีการใหม่โดยมีทฤษฎีทางคณิตศาสตร์สนับสนุน หรือการนำเสนอแนวคิดเดิมในรูปแบบใหม่ หรือใช้ทฤษฎีอื่นๆ ที่แตกต่างจากเดิมในการอธิบายหรือพิสูจน์แนวคิดหรือวิธีการที่นำเสนอ การกำหนดหัวข้อโครงงานนักเรียนในทีมงานกำหนดขึ้นเองโดยนักเรียนอาศัยความรู้เดิมเป็นพื้นฐานและใช้ความรู้ที่สูงกว่าเดิมมาเสริมความคิดโครงงานนี้ ซึ่งออกจะเป็นวิชาการเน้นไปในทางนำทฤษฎีจำนวนมาใช้ แต่ถ้าท่านผู้อ่านตั้งใจศึกษาจะพบว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่เรื่องยากเกินกว่าที่เราจะทำ อยู่ที่ความตั้งใจและเลือกทีมงานที่มีแนวคิดที่เป็นแนวเดียวกัน เขาก็จะทำงานอย่างสนุกสนานโดยใช้ธรรมะคืออิทธิบาท 4 (ฉันทะ วิริยะ จิตตะ วิมังสา) มาช่วยงานก็จะสำเร็จลุล่วงด้วยดี มูลเหตุจูงใจให้เลือกทำโครงงานนี้เนื่องจากเป็นปัญหาที่ทีมงานทั้ง 3 คน สนใจและอยากศึกษาค้นคว้า

การฉายแววออกมาของเด็กนั้นคือตัวตนที่เขาปรารถนาอยากเป็นในอนาคต แต่เราจะทราบได้อย่างไรว่าเด็กมีแววด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายด้าน ผู้ที่มีความสำคัญในการค้นพบและพัฒนาความสามารถพิเศษของเด็ก คือ พ่อแม่ ผู้ปกครอง ซึ่งหากมีความเข้าใจและรู้จักสังเกตแววของเด็กตั้งแต่วัยเยาว์จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการส่งเสริมสนับสนุนเด็กต่อไป และเมื่อทราบว่าเด็กมีความสามารถพิเศษด้านใดด้าน

หนึ่ง อาทิเช่น คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาไทย ภาษาอังกฤษ ฯลฯ เราก็ควรให้การกระตุ้นเด็กให้ถูกทาง เด็กอาจมีพรสวรรค์ด้านนั้นๆ แฝงอยู่ และรอการสนับสนุน ซึ่งข้อสังเกตเด็กที่มีแววคณิตศาสตร์ ควรมีคุณสมบัติตามหัวข้อต่อไปนี้อย่างน้อย 80% หรือมากกว่า 23 ข้อ จากทั้งหมด 31 ข้อ (จากหนังสือ “คู่มือค้นหาแววความสามารถพิเศษ”) ดังต่อไปนี้

1. ชอบอ่านประวัติและผลงานของนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียง
2. สนใจศึกษาเรื่องราวที่เกี่ยวข้องกับตัวเลข เช่น ปฏิทิน เวลา แผนภูมิ เป็นต้น
3. รักและหลงใหลในตัวเลข เช่น เลือกข้าวของเครื่องใช้ที่มีตัวเลขเป็นส่วนประกอบ เป็นต้น
4. ชอบและคบหาพูดคุยกับคนที่มีความสนใจทางคณิตศาสตร์ (อาจเป็นคนวัยเดียวกันหรือต่างวัยก็ได้)
5. ชอบเล่นตัวต่อยากๆ หรือของเล่นที่เกี่ยวกับการสร้างรูปทรง
6. หมกมุ่น ครุ่นคิดและฝึกฝนโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง
7. เบื่อโจทย์เลขหรือบทเรียนที่ไม่ท้าทาย ซ้ำซากหรือง่ายเกินไป
8. มีวิธีแปลกใหม่ในการแก้ปัญหาโจทย์ทางคณิตศาสตร์เอง ไม่ชอบทำตามวิธีคนอื่นที่เคยทำมา
9. ลัดขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง
10. คิดโจทย์ปัญหาได้อย่างพลิกแพลง ซับซ้อนและมองเห็นแง่มุมที่คนอื่นคิดไม่ถึง
11. เป็นคนมีจินตนาการดี สามารถมองเห็นสิ่งต่างๆ ได้หลายมิติ
12. เป็นคนช่างคิด มีวิธีคิดที่ดี มีไหวพริบ
13. เข้าใจความหมายของจำนวนและตัวเลขอย่างรวดเร็ว
14. มีเหตุผลเป็นหลักในการตัดสินใจ

15. ชอบตั้งคำถามที่เป็นเหตุต่อกัน เช่น ถ้า... แล้ว... ดังนั้น... เพราะว่า... ถ้าไม่... แล้ว...
16. ชอบวิเคราะห์ วิพากษ์ วิจารณ์เรื่องต่างๆ อย่างมีเหตุผล
17. สนใจเรื่องนามธรรมที่เกี่ยวกับเวลา อากาศ และมิติของเวลา
18. มองเห็นความสัมพันธ์เชื่อมโยงโครงสร้างและความสมดุลของสิ่งต่างๆ
19. เรียนรู้เกี่ยวกับจำนวน ตัวเลข และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างรวดเร็ว
20. ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์
21. ชอบชั่ง ตวง วัด นับ
22. ชอบจัดลำดับหมวดหมู่ สิ่งของ หรือวาดรูปในลักษณะที่เรียงจากขนาดใหญ่ไปหาเล็ก หรือเล็กไปหาใหญ่
23. ได้คะเนนทดสอบทางคณิตศาสตร์สูง
24. สรุปความคิดในเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างรวดเร็ว
25. เชื่อมโยงประเด็นปัญหากับเรื่องอื่นๆ ได้อย่างสมเหตุสมผล
26. จดจำความสัมพันธ์ต่างๆ ของปัญหาและหลักการของคำตอบที่ผ่านมาได้ดี
27. เชื่อมั่นในคำตอบหรือหลักเกณฑ์การคิดทางคณิตศาสตร์ของตนเอง
28. มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเดียวกันได้หลายรูปแบบ
29. ชอบโจทย์คณิตศาสตร์ที่ยาก
30. มองเห็นความสัมพันธ์เชื่อมโยงของโครงสร้างและความสมดุลของสิ่งต่างๆ
31. มีแนวโน้มที่จะมองอะไรๆ โยงมาเกี่ยวพันกับคณิตศาสตร์ได้หมด

ซึ่งจากการสำรวจพบว่าเด็กโครงการพัฒนาความสามารถพิเศษรุ่นที่ 1 ได้คะแนนเกิน 80% เกือบทุกคน

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งมีลักษณะเป็นนามธรรม เนื้อหาบางเรื่องสอนให้เข้าใจยาก บางเรื่องน่าเบื่อสำหรับเด็กบางคน พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 มาตรา 22 การจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถและพัฒนาตนเองได้ และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาเต็มตามศักยภาพ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ซึ่งความเป็นเลิศเด็กกลุ่มนี้ไม่อาจเกิดขึ้นได้ โดยปราศจากความช่วยเหลือที่เหมาะสม ผู้มีความสามารถพิเศษต้องการปัจจัยที่ส่งเสริมการเรียนรู้ซึ่งรวมถึงวัสดุอุปกรณ์ทางการศึกษา การจัดสภาพการณ์ที่ท้าทาย การกระตุ้นให้บรรลุเป้าหมายสูงสุด จากพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ มาตรา 24 การจัดกระบวนการเรียนรู้ให้สถานศึกษาและหน่วยงานที่เกี่ยวข้องดำเนินการ

การจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง ฝึกการปฏิบัติให้ทำได้ คิดเป็น ทำเป็น รักการอ่าน และเกิดการใฝ่รู้อย่างต่อเนื่อง ด้วยเหตุผลดังกล่าว สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาได้ดำเนินงานโครงการวิจัยและพัฒนาการจัดการศึกษาสำหรับเด็กและเยาวชนมีความสามารถพิเศษ ตั้งแต่ พ.ศ. 2543 และมีการวิจัยเชิงปฏิบัติการนำร่อง เรื่องการพัฒนารูปแบบและหลักสูตรการศึกษาเพื่อพัฒนาผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ประกอบกับวิสัยทัศน์ของโรงเรียนคือ มุ่งมั่นพัฒนาผู้เรียนให้มีความเป็นเลิศทางวิชาการระดับมาตรฐานสากล รักการเรียนรู้ มีความคิดสร้างสรรค์ มีความเป็นผู้นำ มีคุณธรรม มีความรับผิดชอบต่อสังคม และดำรงชีวิตอย่างมีความสุขบนพื้นฐานของความเป็นไทย

2. การจัดการเรียนการสอนสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

เด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษ หมายถึง เด็กที่แสดงออกซึ่งความสามารถอันโดดเด่นด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายด้าน ในด้านสติปัญญา ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ การใช้ภาษา การเป็นผู้นำ การสร้างงานทางทัศนศิลป์และศิลปะการแสดง ความสามารถด้านดนตรี ความสามารถทางด้านกีฬา และความสามารถทางวิชาการในสาขาใดสาขาหนึ่ง หรือหลายสาขา อย่างเป็นที่ประจักษ์ เมื่อเปรียบเทียบกับเด็กอื่นที่มีอายุระดับเดียวกัน สภาพแวดล้อมหรือประสบการณ์เดียวกัน

วิสัยทัศน์ของเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษ

เด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษต้องได้รับการพัฒนาความสามารถพิเศษของตนเองอย่างเต็มที่ให้เป็นผู้นำที่มีความคิดริเริ่มและสร้างสรรค์ สามารถนำประเทศไทยไปสู่ความมั่นคงและมั่งคั่งอย่างต่อเนื่องและถาวร โดยได้รับการสนับสนุนและเสริมพลังจากครอบครัวและสังคม และมีโอกาสได้นำความสามารถนี้ไปปรับใช้ในครอบครัว สังคม ประเทศชาติ และสังคมโลกอย่างมีความสุขและอย่างมีคุณธรรม

นอกจากรางวัลที่ได้รับจากผลงานที่ส่งเข้าประกวดแล้ว ผลพลอยได้จากการทำโครงงานยังมีอีกมากมาย ดังนี้

- โครงงานนี้มีคุณค่าต่อการเรียนรู้ของนักเรียน
- โครงงานนี้เป็นเรื่องที่นักเรียนสนใจ
- โครงงานนี้ทำให้นักเรียนมีโอกาสได้เรียนรู้จากประสบการณ์โดยตรง
- โครงงานนี้เปิดโอกาสให้นักเรียนร่วมมือกันในการทำโครงการ

- โครงงานนี้เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สร้างสิ่งต่าง ๆ และมีโอกาสเล่นสมมุติ
- โครงงานนี้ได้พัฒนาการครบถ้วนทุกด้านตามจุดมุ่งหมายของหลักสูตร
- โครงงานนี้ทำให้นักเรียนสามารถนำความรู้และทักษะที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการทำกิจกรรมอื่น ๆ
- โครงงานนี้ทำให้ผู้ปกครองมีโอกาสเข้ามามีส่วนร่วมในโครงการ
- โครงงานนี้เป็นเรื่องที่ไม่กว้างเกินไป จนทำให้ไม่สามารถศึกษาลึกลงไปในรายละเอียดได้

การจัดหลักสูตรสำหรับนักเรียนผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ นักเรียนที่เข้าโครงการพัฒนาศักยภาพทางด้านคณิตศาสตร์ทุกคนต้องเรียนหลักสูตรดังนี้

1) หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program)
2) หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program)
3) หลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program)

โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการวิจัยและจัดการเรียนการสอนในโรงเรียนสำหรับนักเรียนผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ เริ่มตั้งแต่ปีการศึกษา 2546 มีจำนวน 9 โรงเรียน ได้แก่

1. โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย
2. โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
3. โรงเรียนนวมินทราชินูทิศ บดินทรเดชา 3
4. โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนี)
5. โรงเรียนเบญจมเทพอุทิศ จังหวัดเพชรบุรี
6. โรงเรียนสตรีวัดมหาพฤฒารามในพระบรมราชินูปถัมภ์

7. โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย
8. โรงเรียนสามัคคีวิทยาคม
9. โรงเรียนสตรีวิทยา

การประชุมครูกลุ่มโรงเรียนที่จัดโครงการพัฒนาความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ณ โรงเรียนสตรีวิทยา จัดโดย สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา

หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นหลักสูตรเหมือนหลักสูตรปกติซึ่งเรียน 6 ภาคเรียน ลดระยะเวลาเรียนเหลือ 5 ภาคเรียน โรงเรียนในโครงการทั้ง 9 โรงเรียนใช้หลักสูตรนี้เหมือนกันทุกโรงเรียน

หลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) จัดทำหลักสูตรโดยกลุ่มโรงเรียนทั้ง 9 โรงเรียน สอนโดย รศ.ศักดา บุญโต เรียนสัปดาห์ละ 2 คาบ ในภาคเรียนที่ 1 และภาคเรียนที่ 2

หลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program)จัดทำหลักสูตร โดยคณะอาจารย์จากคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยเป็นโครงการร่วมกันระหว่าง 3 สถาบันคือ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โรงเรียนสาธิตศรีนครินทรวิโรตปทุมวัน และโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา โดยเรียน Calculus I ในภาคเรียนที่ 5 และ Calculus II ในภาคเรียนที่ 6 ซึ่งเป็นหลักสูตรปี 1 ของคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับข้อสอบวัดผลหลักสูตรนี้ อาจารย์จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยเป็นผู้ออกข้อสอบ เรียกหลักสูตรนี้ว่า AP Program คือ Advanced Placement Program และเมื่อนักเรียนสอบผ่านหลักสูตรนี้แล้ว นักเรียนสามารถยื่นคำร้องขอสอบเทียบระดับคะแนนกับทางจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และถ้าระดับคะแนนเป็นที่พอใจของนักเรียนแล้ว นักเรียนก็สามารถโอนหน่วยกิตเข้าสู่คณะที่เรียนในจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยได้ ถ้าคะแนนไม่ดีก็ลงทะเบียนขอเรียนใหม่ได้ ขณะนี้ทางจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยกำลังดำเนินการขอโอนหน่วยกิตไปยังคณะต่างๆ ในมหาวิทยาลัยอื่นๆ ด้วย

ผลสัมฤทธ์ทางการเรียนของนักเรียน
โครงการพัฒนาความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์รุ่น 1

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนผู้มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์ รุ่น 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ผลสัมฤทธิ์	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	X-max	X–min
1.คณิตศาสตร์สาระพื้นฐาน	94.98	3.81	100	83
2.คณิตศาสตร์สาระเพิ่มเติม	90.96	6.61	99	70
3.เพิ่มพูนประสบการณ์	89.97	-	100	89

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนผู้มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์ รุ่น 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ผลสัมฤทธิ์	ค่าเฉลี่ย	X-max	X–min
1.คณิตศาสตร์สาระพื้นฐาน	98.38	100	94
2.คณิตศาสตร์สาระเพิ่มเติม	84.50	99	67
3.เพิ่มพูนประสบการณ์	93.72	100	81

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนผู้มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์ รุ่น 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ผลสัมฤทธิ์	ค่าเฉลี่ย	X - max	X – min
1.คณิตศาสตร์สาระพื้นฐาน	93.93	99	84
2.คณิตศาสตร์สาระเพิ่มเติม	82.28	96	68
3.เพิ่มพูนประสบการณ์	84.25	95	75

ผลการเรียน

คณิตศาสตร์สาระพื้นฐาน ภาคเรียนที่ 1

ระดับชั้น	จำนวนนักเรียน	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	0	ร
ม.4	45	45	--	-	-	-	--	-	-	-
ม.5	45	45	-	-	-	-	-	-	-	-
ม.6	45	45	-	-	-	-	-	-	-	-

คณิตศาสตร์สาระเพิ่มเติม ภาคเรียนที่ 1

ระดับชั้น	จำนวนนักเรียน	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	0	ร
ม.4	45	42	2	1	-	-	--	-	-	-
ม.5	45	25	9	6	5	-	-	-	-	-
ม.6	45	30	11	2	2	-	-	-	-	-

คณิตศาสตร์สาระพื้นฐาน ภาคเรียนที่ 2

ระดับชั้น	จำนวนนักเรียน	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	0	ร
ม.4	45	45	--	-	-	-	--	-	-	-
ม.5	45	45	-	-	-	-	-	-	-	-
ม.6	45	45	-	-	-	-	-	-	-	-

คณิตศาสตร์สาระเพิ่มเติม ภาคเรียนที่ 2

ระดับชั้น	จำนวนนักเรียน	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	0	ร
ม.4	45	41	3	1	-	-	--	-	-	-
ม.5	45	32	10	1	2	-	-	-	-	-
ม.6	45	40	2	2	1	-	-	-	-	-

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สาระพื้นฐาน

นักเรียนกลุ่มโครงการความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ดีมาก นักเรียนสามารถทำคะแนนอยู่ในระดับ 4.0 ได้ 100% ทุกคนทุกภาคเรียน แสดงว่านักเรียนมีความสามารถและมั่นคงในวิชาคณิตศาสตร์ตลอดระยะเวลาที่เรียนมา 3 ปี

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สาระเพิ่มเติม

ม.4	ได้รับคะแนน 4.0	=	$\frac{83}{90}$	=	92.2 %
	ได้รับคะแนน 3.5	=	$\frac{5}{90}$	=	5.6 %
	ได้รับคะแนน 3.0	=	$\frac{2}{90}$	=	2.2 %
ม.5	ได้รับคะแนน 4.0	=	$\frac{57}{90}$	=	63.3 %
	ได้รับคะแนน 3.5	=	$\frac{19}{90}$	=	21.1 %
	ได้รับคะแนน 3.0	=	$\frac{7}{90}$	=	7.8 %
	ได้รับคะแนน 2.5	=	$\frac{7}{90}$	=	7.8 %
ม.6	ได้รับคะแนน 4.0	=	$\frac{70}{90}$	=	77.8 %
	ได้รับคะแนน 3.5	=	$\frac{13}{90}$	=	14.4 %
	ได้รับคะแนน 3.0	=	$\frac{4}{90}$	=	4.5 %
	ได้รับคะแนน 2.5	=	$\frac{3}{90}$	=	3.3 %

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สาระเพิ่มเติมเฉลี่ย ม.4 , ม.5 และ ม.6 นักเรียนในโครงการสอบได้ระดับคะแนนดังนี้

ได้รับคะแนน 4.0	=	78 %
ได้รับคะแนน 3.5	=	13 %
ได้รับคะแนน 3.0	=	4 %
ได้รับคะแนน 2.5	=	5 %

นักเรียนกลุ่มนี้ก็ยังมีคะแนนโดดเด่นในสาขาวิชาคณิตศาสตร์เป็นส่วนมากมีอีก 5% ที่คะแนนยังอยู่ในระดับปานกลาง

สถิติการศึกษาต่อระดับอุดมศึกษาของนักเรียนโครงการความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์

1. ทุนศึกษาต่อต่างประเทศ

1.1 ทุนเล่าเรียนหลวง	5 คน
1.2 ทุนกระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี	2 คน
1.3 ทุนรัฐบาลญี่ปุ่น	2 คน
1.4 ทุน พสวท.	2 คน
1.5 ทุน APU(ประเทศญี่ปุ่น)	1 คน

2. ทุนศึกษาต่อในประเทศ 1 คน

จำนวนผู้เข้าศึกษาต่อระดับอุดมศึกษา (Admission กลาง) แยกตามคณะและสถาบัน

คณะ/สถาบัน	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่	มหาวิทยาลัยมหิดล	มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ	วิทยาลัยแพทยศาสตร์กรุงเทพมหานครและวชิรพยาบาล	วิทยาลัยแพทยศาสตร์พระมงกุฎเกล้า	รวม
ทันตแพทยศาสตร์	1		1					2
พาณิชยศาสตร์และการบัญชี	2	1						3
แพทยศาสตร์	10			3	1	1	1	16
วิศวกรรมศาสตร์	10							10
เศรษฐศาสตร์	1	1						2
รวม	24	2	1	3	1	1	1	33

3. ความสำคัญและความจำเป็นของการให้นักเรียนทำโครงงานประกอบการเรียนการสอน

นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์จะสนใจวิชาคณิตศาสตร์เป็นพิเศษจะชอบเรียนและค้นคว้าตลอดจนสืบค้นข้อมูลต่าง ๆ จากทางอินเทอร์เน็ต เด็กเหล่านี้มีศักยภาพเต็มเปี่ยมพร้อมที่จะศึกษาค้นคว้าข้อสงสัย สมมุติฐานต่าง ๆ เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ การจัดเวทีให้เด็กเหล่านี้ได้มีโอกาสแสดงศักยภาพของตนถือว่าเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องจัดให้แก่นักเรียนและนักเรียนจะทำอย่างมีความสุขและบรรลุวัตถุประสงค์ โครงงานคณิตศาสตร์เป็นงานที่จะกระตุ้นนักเรียนได้ใช้ศักยภาพที่มีอยู่เพื่อคิดหา ค้นคว้าหาข้อสรุป อาจเป็นทฤษฎีหรือสรุปทิ้งท้ายให้เยาวชนรุ่งหลัง ๆ นำไปคิดและพิสูจน์ต่อไปได้อีก การจัดเวทีให้นักเรียนได้แสดงความสามารถที่มีอยู่ยังมีได้อีกหลายรูปแบบ เช่น โครงการค่ายพัฒนาศักยภาพนักเรียนด้านคณิตศาสตร์ โครงการค่ายคณิตศาสตร์เพื่อนำเสนอผลงานด้านคณิตศาสตร์ โครงการจัดการแข่งขันคณิตศาสตร์เพื่อสืบหาผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับช่วงชั้นที่ 1 - 2 โดยจัดการแข่งขันให้แก่นักเรียนในกรุงเทพฯ และปริมณฑล ประมาณ 60 - 70 โรงเรียน กลุ่มเด็กความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ หากเปรียบเทียบความสามารถในตัวเด็ก ถ้ามีศักยภาพในการทำงานด้านที่ตนชอบ 100 ส่วน เด็กกลุ่มนี้จะทุ่มเทกับงานที่ตนชอบเกิน 100 ส่วนที่มีอยู่ เด็กจะชอบงานที่ตนเองรักและมีกลุ่มเพื่อนที่รักงานประเภทเดียวกันทำงานด้วยกัน เด็กจะมีความสุขในการทำงาน ครูมีหน้าที่ให้โอกาสเด็กและส่งเสริมให้เด็กได้ทำในสิ่งที่ตนรักจนกว่างานจะสำเร็จและบรรลุเป้าหมาย เพื่อเป็นการเรียนคณิตศาสตร์ให้มีรสชาด เพราะวิชาคณิตศาสตร์เป็นนามธรรมเข้าใจยาก การจัด

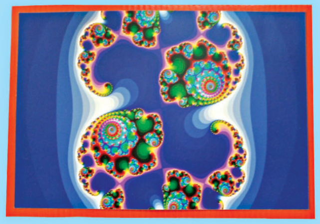
กิจกรรมให้นักเรียนเข้าร่วมโครงงานเป็นการฝึกการคิด วิเคราะห์ สังเคราะห์ นักเรียนได้ใช้และพัฒนาฝึกทักษะในการค้นคว้า ครูที่ปรึกษาโครงงานจะให้นักเรียนเลือกทำงานกลุ่มหรือทำงานเดี่ยวก็ได้ จำนวนสมาชิกในทีมให้เป็นทีมละ 3 คน ถ้าหัวเรื่องที่ทำยุ่งยากมากก็ขอสมาชิกมาเพิ่มขึ้นได้ แต่ที่ให้คงไว้ 3 คน ก็เพื่อให้นักเรียนเตรียมตัวที่จะนำผลงานเข้าประกวด

โครงงานที่นักเรียนทำได้แก่

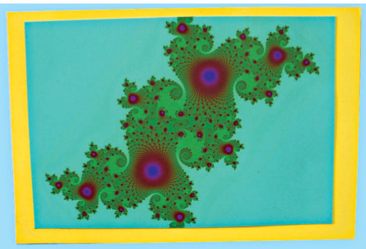
1. กล่องดำ
2. อัตราส่วนทอง
3. Fibonacci
4. Tessellation
5. Fractal
6. การคลี่กราฟ

ฯลฯ

เมื่อนักเรียนเสนอโครงงานแล้ว ที่ปรึกษาจะตรวจเช็ค ถ้าเห็นว่าเป็นโครงงานโดดเด่นไม่เหมือนใคร หรูหรา มีการนำเสนอในห้องเรียน มีการทำใบโฆษณาอธิบาย ให้ความรู้เกี่ยวกับโครงงานของกลุ่มตน บางกลุ่มมีการนำเสนอด้วย Power Point มีการประเมินเพื่อเก็บคะแนน และเสนอแนะคัดเลือกกลุ่มที่สมควรจัดส่งไปประกวดกับสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์



จูเลียเซต



จูเลียเซต

รอยแตกของสารเคลือบบนแผ่น DVDที่ถูกนำเข้าไมโครเวฟ

ภาพจากโครงงาน Fractal ผลงานโครงการพัฒนาความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์

4. รายละเอียดของการทำโครงงาน

4.1 ก่อนเริ่มต้น การทำโครงงาน

การเริ่มต้นทำโครงงานมิได้เริ่มจากการตั้งชื่อโครงงานขึ้นมาก่อนแล้วทำงานตามชื่อเรื่องแต่โครงงานต้องเกิดจากความสงสัยอยากรู้อยากเห็นของผู้ทำโครงงานว่ามีความรู้เรื่องนี้หรือยัง ซึ่งอาจเป็นการต่อยอดของงานวิจัยเดิมที่มีบางประเด็นที่สรุปไม่ได้แน่ชัดหรือยังมีข้อโต้แย้ง โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนจัดทำโครงงานดังนี้

- ครูจะให้นักเรียนโครงการพัฒนาความสามารถพิเศษเสนอโครงงาน แล้วนำไปตรวจดูว่าเหมาะสมหรือไม่ โดยโครงงานที่ศึกษานั้น แต่ละโครงงานจะต้องโดดเด่นไม่เหมือนใครและไม่มีใครเหมือน

- การนำเสนอโครงงาน จะนำเสนอในห้องเรียน เมื่อได้รับคัดเลือกแล้วจะนำเสนอเวลาออกค่ายพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ บางกลุ่มจัดทำ Power Point มานำเสนอ ให้โรงเรียนในกลุ่มโรงเรียนที่จัดโครงการพัฒนานักเรียนผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ และมีการประกวดโครงงานจากโรงเรียนต่างๆ ที่จัดทำโครงการนี้รวม 9 โรงเรียน ดังกล่าวแล้วข้างต้น

การตั้งจุดประสงค์

ผู้ทำโครงงานต้องเข้าใจโครงงานที่จะทำ มีกระบวนการทำงาน มีการวางแผน การทดลองค้นคว้าหาความรู้จากตำรา Search จาก Internet บางครั้งอาจพบอุปสรรคบ้างก็อย่าท้อถอย เช่น ผลการทดลองไม่เป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ บางครั้งมีข้อโต้แย้งจากสมาชิกในกลุ่ม การโต้แย้งทำให้เห็นแนวทางใหม่ๆ ต้องนำข้อโต้แย้งมาวิเคราะห์แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข ถ้าฟันฝ่าอุปสรรคเหล่านี้ไปได้โครงงานก็จะสำเร็จไปได้ด้วยดี

ก่อนทำโครงงานของนักเรียนกลุ่มนี้ได้จัดทำงานอื่นๆ มาแล้ว 2 โครงงาน คือ

- การคลี่กราฟสามมิติ
- หนักเท่าไร

เนื่องจากการได้ทำโครงงาน 2 โครงงานแรก ทำให้ได้เรียนรู้การทำโครงงานมากขึ้นและเป็นการจุดประกายสู่การทำโครงงาน เรื่อง การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จากประสบการณ์ที่ผ่านมาทำให้การทำงานราบรื่นเสร็จสมบูรณ์พร้อมที่จะส่งเข้าประกวด โดยยึดหลักการทำโครงงานตามลำดับ 7 ขั้นตอนดังนี้

1.ร่วมกันคิด ร่วมกันทำ หลายๆ ความคิด งานจะเสร็จเร็วกว่ามาก อย่าพยายามทำคนเดียวเพราะโครงงานทำเป็นทีมได้ ไม่ใช่การสอบโอลิมปิก

2.ความคิดที่แตกต่างเป็นธรรมชาติของงานหลายคนคิด จงพยายามทำความเข้าใจและยอมรับความคิดเห็นของผู้อื่น ถ้าตกลงกันไม่ได้ ก็หยุดพักสงบสติอารมณ์ก่อนเวลายังมี ไม่ต้องเร่งรีบให้มากก็ได้

3.หมั่นให้กำลังใจตนเองและผองเพื่อนร่วมอุดมการณ์ เช่น โครงงานคณิตศาสตร์ไม่มีการทดลอง ใช้เพียงแค่กระดาษกับปากกาก็ทำงานได้มากกว่าครึ่งน่าจะง่ายกว่าโครงงานวิทยาศาสตร์

4.“จินตนาการสำคัญกว่าความรู้” ความคิดสร้างสรรค์สำคัญที่สุดในการทำงาน

5. มั่นใจว่างานที่เราทำดีที่สุด

6. การนำเสนอมีความสำคัญมากเท่าๆ กับการทำโครงงาน

7. การขอความช่วยเหลือจากท่านอื่นๆ จะช่วยพัฒนางานของเรา

4.2 หลักเกณฑ์ในการนำเสนอผลงาน

1.) วิธีการนำเสนอต้องน่าสนใจ ต้องมีการเตรียมพร้อมในการนำเสนอให้เร้าใจ

2.) ผู้ทำโครงงานต้องคิดว่าโครงงานของตนน่าสนใจ มิฉะนั้นคนดูก็จะไม่สนใจ

3.) เลือกสิ่งที่นำเสนอให้เหมาะสมกับกลุ่มผู้ฟัง โดยบอกให้ทราบว่าโครงงานของเราทำอะไรอย่างไร เพื่ออะไร

4.) ไม่ควรคิดว่าผู้ฟังรู้อยู่แล้ว แต่ให้ทดลองนำเสนอให้เพื่อนๆ และครูที่ปรึกษาฟังจะได้ดัดแปลงแก้ไขทันเวลา

5.) มั่นใจว่างานของเราดีที่สุด

6.) การนำเสนอมีความสำคัญไม่น้อยกว่าการทำโครงงาน

7.) การขอความช่วยเหลือเพื่อเป็นผลดีต่อการพัฒนางานของเรา

4.3 การเผยแพร่งาน

- นำเสนอผลงานในงานเตรียมอุดมนิทรรศน์ ซึ่งจัดขึ้นภายในบริเวณโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
- การนำเสนอผลงานเป็นภาษาไทยนำเสนอ ณ โรงแรมแอมบาสซาเดอร์ ในการประชุมครูทั่วประเทศ
- การนำเสนอผลงานเป็นภาษาอังกฤษได้นำโครงงานนี้นำเสนอในงาน The 1st Thailand International Science Fair 2005 ณ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ จังหวัดนครปฐมให้แก่นักเรียนจากนานาชาติ ฯลฯ
- ได้รับเชิญจากสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาไปนำเสนอผลงานในงานประชุมวิชาการการวิจัยทางการศึกษา ณ โรงแรมแอมบาสซาเดอร์ กรุงเทพฯ

- ได้รับเชิญจากสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาเขต 1 ไปนำเสนอผลงานในงานบูรณาการการศึกษาโลกกว้าง ณ โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี
- ได้รับเชิญจากรายการ This Morning สัมภาษณ์ถ่ายทำสารคดีและภาพประกอบรายการเพื่อออกสถานีโทรทัศน์ประกอบรายการเรื่อง "การจัดการศึกษาสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ" เพื่อออกอากาศ

4.4 รางวัลที่ได้รับ

ได้รับรางวัลชนะเลิศระดับประเทศในการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ประจำปี 2548 จัดโดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์และสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

4.5 บทบาทครูที่ปรึกษา

ขั้นที่ 1 ครูให้ความรู้
ขั้นที่ 2 การเริ่มงานของนักเรียนกลุ่มนี้

ในขั้นแรกครูจัดให้นักเรียนโครงการความสามารถพิเศษจัดกลุ่ม 3-5 คน ให้คิดโครงงานกลุ่มละ 1 ชิ้น ส่งเพื่อเป็นคะแนนเก็บและเป็นคะแนนสอบย่อยครั้งที่ 2 จากโครงงานที่ได้รับรางวัลนี้ ในตอนแรกครูที่ปรึกษาได้แนะให้นักเรียนศึกษาการกระดอนในสองมิติโดยใช้กรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม โดยให้นักเรียนศึกษาความสัมพันธ์ของด้านกว้าง ด้านยาวกับจำนวนครั้งในการกระดอน ซึ่งเมื่อใช้กระบวนการอุปนัยทางด้านคณิตศาสตร์พบว่าจำนวนครั้งในการกระดอนมีความสัมพันธ์ตัวคูณร่วมน้อย (ครน.) ของ

ด้านกว้างกับด้านยาว จึงแนะนำให้นักเรียนหาทางพิสูจน์ และให้ขยายไปถึงการกระดอนในสามมิติโดยพิจารณาตัว ครน. ของความกว้าง ความยาว และความสูง ที่เป็นจำนวนเต็มแล้วหาบทพิสูจน์ตามชิ้นงานที่กล่าวมาข้างต้น

5. จุดประกายแนวคิดที่ทำให้เกิดโครงงาน

ขั้นตอนการคิด

1) เห็นหัวข้อ
2) เริ่มจาก 2 มิติ
3) เพิ่มไปเป็น n มิติ

ที่พิสูจน์แล้วเป็น 2 มิติ โดยค้นคว้าจาก หนังสือคณิตศาสตร์โอลิมปิก จากประเทศจีน การพิสูจน์ 3 มิติ หาสูตรออกมาได้ และการส่งเข้าประกวดจะส่งเพียง 2 มิติ และ 3 มิติ และจากโครงงานนี้ สำหรับผู้อ่านที่สนใจอาจนำไปคิดต่อเพื่อให้ได้ทฤษฎีสำหรับ n มิติ

ครูอาจตั้งคำถามให้นักเรียนเพื่อจุดประกายแนวคิดเป็นการบ้าน โดยมีหัวข้อต่าง ๆ ดังนี้

1. งานชิ้นนี้ชอบที่สุดเพราะอะไร
2. เป็นงานที่ท้าทายที่สุดเพราะอะไร
3. อะไรบอกว่างานชิ้นนี้เป็นชิ้นที่ดีที่สุด
4. สิ่งที่มีคุณค่าที่สุดในงานชิ้นนี้คือ
5. เป้าหมายของการเขียนเรื่องนี้บรรลุวัตถุประสงค์แล้วหรือไม่
6. ได้ข้อคิดอะไรบ้างจากงานชิ้นนี้
7. ชอบผลงานคณิตนี้ตรงไหน

8. ใช้เวลานานเท่าไร
9. จุดเด่นจุดด้อยของงาน
10. ผลงานนี้มีความหมายต่อนักเรียนอย่างไร
11. ปัญหาอะไรที่เกิดขึ้นในระหว่างการทำงานชิ้นนี้
12. ได้แนวคิดในการทำงานโครงงานนี้มาจากไหน
13. ใช้วิธีอะไรในการแก้ปัญหาการทำงานชิ้นนี้
14. ถ้าสามารถทำงานชิ้นนี้อีกครั้งจะปรับปรุงอะไร
15. ถ้าคะแนนเต็ม 10 จะได้คะแนนชิ้นนี้เท่าใด
16. รู้สึกอย่างไรกับคำวิพากย์วิจารณ์ของเพื่อนที่มีต่อผลงานของตน
17. สมาชิกในกลุ่มเห็นด้วยไหมกับคำวิพากย์วิจารณ์ของกลุ่มอื่น ๆ
18. เมื่อสั่งให้ครูประเมินนักเรียนต้องการให้ครูดูที่จุดใด
19. ทำไมผลงานชิ้นนี้จึงเป็นผลงานชิ้นที่ดีที่สุด
20. ทำไมนักเรียนจึงเลือกงานชิ้นนี้
21. นักเรียนได้เรียนรู้อะไรบ้างจากการทำงานชิ้นนี้
22. ผลงานชิ้นนี้ทำให้นักเรียนคิดอะไรต่อไปได้อีกบ้าง

นักเรียนปรึกษาหารือแล้วตอบกลับมาดังนี้

"If we hit the ball so hard that it will never stop moving, will the ball eventually get into the hole?" asked my friend when we played pool. "Isn't this interesting? We should do a project about this!" I exclaimed. The day after, we clearly stated the problem and tried to solve it. This problem was different from the problems in the International Mathematical Olympiad since we did not know whether the problem had a solution or not. Each of us had different ways to approach this problem, but none of us got it right. I was fascinated with the ideas we came up with even though most of them did not work. Furthermore, working together brought us many more ideas than working alone and I enjoy the other opinions as well as mine. My desire to solve this problem and the encouragement from my friends had kept me working continually for a year; nevertheless, we still could solve only parts of the problem. At the end of the year, our teacher encouraged us to submit our unfinished project to the national competition because we could prove some good theories. Although what we loved most about this project was a process of finding the answer, we entered it in a competition and won the first prize.

"ถ้าเรายิงลูกสนุกเกอร์แรง มันจะไม่หยุดนิ่ง มันจะลงหลุมไหม? ถามเพื่อนๆ ดูว่าอย่างนี้น่าสนใจไหม เราจึงตัดสินใจทำโครงงานนี้ ฉันบ่นหลังจากที่ฉันได้ทำความเข้าใจและพยายามแก้ปัญหานี้ ปัญหานี้ต่างจากปัญหาในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ตั้งแต่เราไม่รู้ว่าปัญหามีวิธีหาคำตอบหรือไม่ เราทั้ง 3 มีวิธีเข้าถึงปัญหาแตกต่างกัน แต่ไม่มีใครแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ข้อข้องใจและข้อคิดนี้กลับมาเป็นปัญหาใหม่ ต่างคนต่างคิดจึงแก้ปัญหาไม่ได้ เมื่อเรามาร่วมกันทำงานเป็นทีมจึงทำให้เกิดความคิดต่างๆจากการทำงานเป็นทีมมากกว่าทำงานคนเดียว เราสนุกกับการคิดร่วมกัน ฉันตัดสินใจแก้ปัญหาและเพิ่มแรงเสริมจากเพื่อนๆ ช่วยให้เรามีแรงทำงานชิ้นนี้และใช้เวลา 1 ปีเต็ม เราก็ยังแก้ปัญหาได้บางส่วนเท่านั้น ในที่สุดครูของฉัน

ก็กระตุ้นให้ทำงานชิ้นนี้ต่อ และส่งเข้าประกวดที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ เพราะว่าเราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบางทฤษฎีได้ เรารักโครงงานนี้มากเพราะมันนำเราไปสู่คำตอบ เราจึงตัดสินใจส่งเข้าประกวดและได้รับรางวัลชนะเลิศ

โดย นายภูมิพงศ์ วัฒนะประกรณ์กุล
นายธนวิต แซ่ซือ
นายสุขุม สัตตรัตนามัย

6. ขอบเขตปัญหาที่ศึกษา

ในการทำโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ได้กำหนดขอบเขตปัญหาที่ศึกษาดังนี้

ให้วัตถุเคลื่อนที่ไปเรื่อย ๆ ภายในกรอบที่มีความยาวด้านกำหนดไว้เป็นจำนวนนับโดยไม่มีการสูญเสียพลังงาน มีมุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน และวัตถุจะหลุดออกจากกรอบเมื่อเคลื่อนที่เข้าไปในมุมใดมุมหนึ่งของกรอบ

ใน *สองมิติ* จะทำการศึกษาดังนี้

1. หาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบ
2. หาจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบก่อนหลุดออกจากกรอบ
3. หามุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบ

ใน *สามมิติ* จะทำการศึกษาดังนี้

1. หาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบ

2. หาจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบก่อนหลุดออกจากกรอบ
3. หามุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบ

7. ขั้นตอนการทำโครงงานคณิตศาสตร์

ขั้นตอนการทำโครงงานแบบที่ 1

กำหนดปัญหา / เลือกเรื่องที่จะทำการศึกษา

↓

ศึกษาเรื่องราวหรือเอกสารที่เกี่ยวข้อง

↓

การจัดโครงร่าง การทำโครงงาน

↓

ตรวจพิจารณา

↓

แสดงผลงาน

ขั้นตอนการทำโครงงานแบบที่ 2

แผนภูมิขั้นตอนการทำโครงงาน

↓

กำหนดปัญหา/เลือกเรื่องที่จะทำการศึกษา

↓

ศึกษาเรื่องราวหรือเอกสารที่เกี่ยวข้อง

↓

ตั้งสมมุติฐานและจัดทำโครงร่างการทำโครงงาน

↓

ตรวจพิจารณา

↓

ปฏิบัติงานตามโครงร่างและค้นคว้าหาคำตอบ

↓

ติดตามผล/ประเมินการทำงาน

↓

จัดทำรายงานผลของโครงงาน

↓

ทดลองนำเสนอและตรวจพิจารณา

↓

แสดงผลงาน

8. การเขียนเค้าโครงงาน

โครงงานนี้เขียนเค้าโครงงานดังต่อไปนี้

1. บทคัดย่อ
2. ที่มาและความสำคัญ
3. วัตถุประสงค์
4. ผลที่คาดว่าจะได้รับ
5. ขอบเขตของปัญหาที่ศึกษา
6. วิธีการดำเนินงาน
7. ผลการดำเนินงาน

9. ปฏิทินการปฏิบัติงานโครงงาน

โครงงานนี้ใช้เวลาประมาณ 1 ปี ตามรายละเอียดดังนี้

เดือน ต.ค. 47	สนใจและอยากศึกษา
เดือน พ.ย. 47	วางแผน
เดือน ธ.ค. 47 - เดือน ม.ค. 48	ศึกษาค้นคว้า
เดือน ก.พ. 48 - เดือน เม.ย. 48	ทดลองและพิสูจน์
เดือน พ.ค. 48 - เดือน มิ.ย. 48	จัดทำรายงาน
เดือน ก.ค. 48	พิมพ์รายงาน
เดือน ส.ค. 48	ตรวจสอบ
เดือน ก.ย. 48	ตรวจสอบ
เดือน ต.ค. 48	ทดสอบและตรวจทานขั้นสุดท้าย
เดือน ม.ค. 49	เตรียมตัวส่งเข้าประกวด
เดือน ก.พ. 49	ส่งเข้าประกวด

10. วัตถุประสงค์ของโครงงาน

วัตถุประสงค์ของการจัดทำโครงงาน เพื่อให้

1) นักเรียนเขียนโครงงานเป็น
2) นักเรียนมีโอกาสเรียนรู้คณิตศาสตร์ในรูปแบบที่เหมาะสม
3) นักเรียนมีโอกาสได้พัฒนาความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
4) นักเรียนมีความรับผิดชอบต่อส่วนรวม
5) ปลูกฝังคุณธรรมจริยธรรม
6) นักเรียนรู้จักนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน
7) นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

หลักการของกิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์

หลักการจัดกิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ควรมีลักษณะดังนี้

1. เป็นเรื่องเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ที่นำไปใช้ประโยชน์ได้

2. เป็นการเสาะแสวงหาความรู้ด้วยตัวเอง เพื่อฝึกการคิดเป็น ทำเป็น และแก้ปัญหาเป็นด้วยวิธีทางวิทยาศาสตร์

3. ให้เสรีภาพแก่ผู้ทำโครงงานในเรื่องที่จะทำ โดยคำนึงถึงเงินทุนที่มีอยู่ด้วย

ในการทำโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ได้กำหนดวัตถุประสงค์ดังนี้

1. เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกยิงเข้าไปในกรอบสี่เหลี่ยมมุมฉากใดๆ โดยทำมุมใดๆ กับแกน X และแกน Y

2. เพื่อหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านของกรอบสี่เหลี่ยมมุมฉากและทิศทาง ที่ยิงวัตถุ กับระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบ

3. เพื่อหาจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบก่อนหลุดออกจากกรอบ

4. เพื่อหาว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ออกจากกรอบที่มุมใด

5. เพื่อพัฒนาสมการสู่ 3 มิติ

11. ผลผลิตที่ได้

ผลการตัดสินโครงงานคณิตศาสตร์ซึ่งจัดโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ร่วมกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี โดยรางวัลชนะเลิศรางวัลที่ 1 นักเรียนได้รับทุนการศึกษา 10,000.- บาท พร้อมเกียรติบัตร

นอกจากได้รับรางวัลชนะเลิศจากสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์แล้ว ทางโรงเรียนยังได้นำเสนอผลงานนี้ในงาน 1st Thailand International Science Fair 2005 ณ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ จังหวัดนครปฐม ซึ่งเป็นการประชุมวิชาการระดับนานาชาติ การนำเสนอต้องนำเสนอเป็นภาษาอังกฤษจึงต้องมีการเตรียมตัวล่วงหน้าอย่างดี ในงานนี้โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ได้กราบทูลเชิญสมเด็จพระเทพรัตนราชสุดา สยามบรมราชกุมารี เสด็จเป็นองค์ประธานเปิดงานและทอดพระเนตรงานนิทรรศการครั้งนี้ด้วย ยังความปลื้มปิติแก่ทีมนักเรียนกลุ่มนี้และครูที่ปรึกษาเป็นอย่างมาก

12. รูปเล่มของโครงงาน

ก่อนทำรูปเล่มโครงงานนักเรียนควรทำความเข้าใจข้อมูลในหัวข้อต่อไปนี้

- ***โครงงานคณิตศาสตร์หมายถึงอะไร***

กิจกรรมนอกหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ศึกษาเรื่องใดเรื่องหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ตามความถนัดและความสนใจ ด้วยวิธีทางวิทยาศาสตร์ อาจทำเป็นรายบุคคลหรือกลุ่มก็ได้ เป็นการฝึกปฏิบัติงานที่นักเรียนหาข้อสงสัย ตั้งสมมุติฐาน ทดลองและสืบสวน แล้วรวบรวมหาข้อสรุป แล้วจัดทำรายงาน และแสดงผลงานเพื่อเผยแพร่ความรู้ จากการทำโครงงานได้รับคำแนะนำดูแลจากอาจารย์ที่ปรึกษา และ/หรือผู้ทรงคุณวุฒิ อาจจัดทำในเวลาเรียนหรือนอกเวลาเรียนก็ได้

- ***จะเริ่มทำโครงงานคณิตศาสตร์อย่างไร***

โครงงานที่ดีที่สุดจะต้องเกิดจากความสนใจของนักเรียน นักเรียนควรจะเลือกเอง แต่ในระยะเริ่มต้นทำโครงงาน ถ้านักเรียนไม่สามารถเลือกหัวข้อมาทำโครงงานได้ แล้วครูจะทำอย่างไร... บทบาทซึ่งสำคัญที่สุดของครูคณิตศาสตร์ คือจะต้องกระตุ้นและสร้างแรงบันดาลใจที่จะทำให้นักเรียนต้องการทำโครงงานนั้น ครูจะต้องมีความคิดที่กว้างขวาง เพื่อจะหาแนวทาง ครูจะต้องเตรียมพร้อมที่จะช่วยนักเรียนเลือกโครงงานในระยะเริ่มต้น ครูจึงต้องมีความรู้และศึกษาว่าจะทำโครงงานอย่างไร

โครงงานควรอยู่ในความสนใจและความสามารถของนักเรียน โดยอาศัยความรู้ หลักการแนวคิดหรือทฤษฎีทางคณิตศาสตร์

ไปเชื่อมโยงกับประเด็นที่จะศึกษาและค้นคว้าให้ชัดเจน ลึกซึ้งยิ่งขึ้น ครูควรทำตนเป็นผู้แนะแนวทางเท่านั้น ในช่วงเริ่มทำโครงงานครั้งแรกครูอาจจะให้นักเรียนทุกกลุ่มทำโครงงานในรูปแบบเดียวกันโดยชี้แนะให้ทำเค้าโครงของโครงงานซึ่งประกอบด้วย ชื่อของโครงงาน จุดประสงค์ เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง การดำเนินงาน การสรุปผลงาน การเขียนรายงาน การนำเสนอผลงาน ข้อเสนอแนะ เอกสารอ้างอิง ในระยะเริ่มแรกครูจะดูอย่างใกล้ชิดและดูการพัฒนาของนักเรียนให้คำปรึกษาเป็นช่วง ๆ ในระยะเริ่มต้นโครงงานที่ทำควรใช้ระยะเวลาสั้น ๆ เมื่อนักเรียนเข้าใจแล้ว ถ้าจะทำต่อไปก็ให้คิดเองโดยอิสระ ให้เลือกเรื่องที่จะทำเองและดำเนินการเองอย่างอิสระ ครูอยู่ห่าง ๆ คอยเสนอแนะเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย สิ่งที่ลืมเสียมิได้คือการทำโครงงานใช้วิธีการทางวิทยาศาสตร์ ที่จะฝึกปฏิบัติในข้อสงสัยด้วยการตั้งสังเกตสมมุติฐาน ทดลอง รวบรวมข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล พิสูจน์แล้วสรุปเป็นทฤษฎี เมื่อทำเสร็จแล้วก็เผยแพร่ต่อไป

หลังจากเขียนเค้าโครงของโครงงานเสร็จ แล้วจึงเขียนโครงงานฉบับสมบูรณ์ ซึ่งคล้ายกับฉบับเค้าโครงของโครงงาน แต่เพิ่มความเป็นมา ก่อนเขียนจุดประสงค์และในขั้นการดำเนินงาน ต้องเขียนอย่างละเอียด

- ***หลักการจัดกิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์*** ควรมีลักษณะดังนี้

1. เป็นเรื่องเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ที่นำไปใช้ ประโยชน์ได้

2. เป็นการเสาะแสวงหาความรู้ด้วยตัวเอง เพื่อฝึกการคิดเป็นทำเป็นและแก้ปัญหาเป็นด้วยวิธีทางวิทยาศาสตร์

3. ให้เสรีภาพแก่ผู้ทำโครงงานในเรื่องที่จะทำ โดยคำนึง

ถึงเงินทุนที่มีอยู่ด้วย

- ***โครงงานคณิตศาสตร์*** อาจทำได้หลายรูปแบบ ดังนี้

1. *โครงงานคณิตศาสตร์ประเภททดลอง (Experimental Research Project)* โครงงานนี้เป็นการศึกษาหาคำตอบของปัญหาโดยการออกแบบการทดลอง และดำเนินการทดลองเพื่อตรวจสอบสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ขั้นตอนการทำงานประกอบไปด้วยการกำหนดปัญหา การตั้งสมมุติฐาน การออกแบบการทดลอง ซึ่งจะต้องมีการควบคุมตัวแปรต่าง ๆ การแปลผลและการสรุปผลการทดลอง

2. *โครงงานคณิตศาสตร์ประเภทสำรวจ (Survey Research Project)* โครงงานประเภทนี้เป็นการศึกษาและรวบรวมข้อมูลจากสิ่งแวดล้อม ธรรมชาติ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาหาความรู้จากธรรมชาติ โดยการสำรวจและรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ นำข้อมูลมาจัดและนำเสนอในรูปแบบต่าง ๆ ตามความเหมาะสม

3. *โครงงานคณิตศาสตร์ประเภทพัฒนาหรือประดิษฐ์ (Development Research Project)* โครงงานประเภทนี้เป็นการพัฒนาหรือประดิษฐ์เครื่องมือ หรืออุปกรณ์ต่าง ๆ โดยการประยุกต์ทฤษฎีหรือหลักการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ จะเป็นการปรับปรุงอุปกรณ์เครื่องมือที่มีอยู่แล้วให้มีประสิทธิภาพดีกว่าเดิม หรือเป็นการประดิษฐ์สิ่งใหม่ที่ไม่เคยมีมาก่อน รวมทั้งเป็นการเสนอหรือปรับแบบจำลองทางความคิดเพื่อแก้ปัญหาปัญหาหนึ่ง

4. *โครงงานคณิตศาสตร์ประเภทการสร้างทฤษฎีหรือการอธิบาย (Theortied Research Project)* โครงงานประเภทนี้เป็นโครงงานที่ผู้ทำจะต้องเสนอความคิดใหม่ ๆ ในการอธิบายเรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างมีเหตุผล มีหลักการทางคณิตศาสตร์หรือทฤษฎีสนับสนุน หรือเป็นการอธิบายปรากฏการณ์ในแนวใหม่ เสนอในรูปคำอธิบาย สูตร สมการ

โดยมีทฤษฎีข้อมูลอื่นสนับสนุน การทำโครงงานประเภทนี้ผู้ทำจะต้องมีพื้นความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี จึงจะสามารถสร้างคำอธิบายหรือทฤษฎีได้

- ***ขั้นตอนการทำโครงงานคณิตศาสตร์*** มีดังนี้

1. การกำหนดจุดประสงค์ ก่อนทำโครงงานต้องกำหนดจุดประสงค์ก่อนว่าต้องการอะไรจากโครงงานนั้น

2. การเลือกหัวข้อหรือปัญหาที่จะศึกษา ควรให้นักเรียนเป็นผู้คิดและเลือกด้วยตนเองโดย คำนึงถึง ระดับความรู้ อุปกรณ์ งบประมาณ ระยะเวลา อาจารย์ที่ปรึกษา ความปลอดภัย และเอกสารอ้างอิง

3. การวางแผนในการทำโครงงาน คือการกำหนดขอบเขตของงาน ว่าจะให้กว้างหรือแคบเพียงใด จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องเขียนเค้าโครงของงานก่อน เพื่อวางแผนการทำงาน

3.1 ชื่อโครงงาน

3.2 ชื่อผู้ทำโครงงาน

3.3 ชื่อที่ปรึกษาโครงงาน

3.4 ที่มาและความสำคัญของโครงงาน อธิบายว่าทำไมจึงเลือกโครงงานนี้

3.5 จุดมุ่งหมายของโครงงาน

3.6 สมมุติฐานทางการศึกษาค้นคว้า (ถ้ามี) สมมุติฐานเป็นคำตอบที่คาดการณ์ไว้ล่วงหน้า

3.7 วิธีดำเนินงาน

3.7.1 วัสดุอุปกรณ์ที่ต้องใช้

3.7.2 แนวการศึกษาค้นคว้า

3.8 แผนการปฏิบัติงาน อธิบายเกี่ยวกับระยะเวลาทำงาน

ตั้งแต่เริ่มจนจบโครงงานในแต่ละขั้นตอน

3.9 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

3.10 เอกสารอ้างอิง

4. การลงมือทำโครงงาน เมื่อโครงสร้างและเค้าโครงงานผ่านการเห็นชอบของอาจารย์ที่ปรึกษา หรือผู้เชี่ยวชาญแล้ว นักเรียนก็เริ่มลงมือทำตามแผนงาน ในแต่ละช่วงต้องมีการประเมินการทำงานเป็นระยะๆ เพื่อช่วยกันปรับปรุงแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นระหว่างปฏิบัติงานด้วย

5. การเขียนรายงาน เป็นการเสนอผลงานของการศึกษาค้นคว้าเป็นเอกสาร เพื่อให้ผู้อื่นทราบปัญหาที่ศึกษา วิธีดำเนินการศึกษา ข้อมูลที่ได้ ประโยชน์ที่ได้จากโครงงานที่ทำ ควรเขียนในรูปแบบฟอร์ม

6. การแสดงผลงาน เป็นการเสนอผลงานต่างๆ ที่ได้ศึกษาค้นคว้ามา เพื่อให้คนอื่นได้รับรู้และเข้าถึงโครงงาน ซึ่งอาจเป็นตาราง แผนภูมิแท่ง กราฟวงกลม กราฟ สร้างแบบจำลอง ควรเลือกนำเสนอให้เหมาะสมกับโครงงานนั้นๆ

- ***การประเมินโครงงานคณิตศาสตร์***

มีวิธีประเมินในหัวข้อต่างๆดังนี้

1. ความสำคัญของการจัดทำโครงงาน
2. เนื้อหาของโครงงาน
3. การนำเสนอโครงงาน

13. การส่งผลงานเข้าประกวด และการเตรียมตัวนำเสนอผลงาน

เมื่อโครงงานที่จัดทำเรียบร้อยแล้ว มีการจัดพิมพ์รายงานเป็นรูปเล่มและส่งผลงานเข้าประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ซึ่งจัดโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ร่วมกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ซึ่งเมื่อผลงานผ่านการคัดเลือกรอบแรก และได้รับคัดเลือกเป็น 1 ใน 5 แล้วจะต้องเข้าแข่งขันรอบสุดท้าย โดยต้องเตรียม Present ผลงานที่นำเสนอต่อท่านคณะกรรมการ 5 ท่าน เตรียมนำเสนอผลงานให้เพื่อนๆ และอาจารย์ที่ปรึกษาฟัง เพื่อที่อาจารย์และเพื่อนๆ จะได้ร่วมวิจารณ์ ให้คำแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องก่อนวันนำเสนอจริง

14. รางวัลที่ได้รับ

รางวัลที่ได้รับจากการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์จัดโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ร่วมกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ผลการส่งโครงงานเรื่อง การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ปรากฏว่าได้รับคัดเลือกให้เป็น 1 ใน 5 ทีมสุดท้ายแล้วนำผลงานนำเสนอคณะกรรมการอีกครั้งหนึ่งพร้อมรายงานโครงงานฉบับเต็ม ผลการตัดสินรอบสุดท้ายได้รับรางวัลชนะเลิศร่วมกับโรงเรียนศรีสวัสดิ์วิทยาคมจังหวัดน่าน

15. การเผยแพร่นำเสนอผลงาน

เมื่อได้รับรางวัลชนะเลิศแล้วต้องมีการเดินสายโชว์ผลงานตามสถานที่ต่างๆ ที่ทางสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากระทรวงศึกษาธิการได้เชิญมา อาทิเช่น

- งานแสดงผลงานนักเรียนผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ณ โรงแรมแอมบาสเดอร์
- งาน 1st Thailand International Science Fair 2005 ณ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ จังหวัดนครปฐม
- สอวน. คณิตศาสตร์
- จัดทำบันทึกประสบการณ์การพัฒนาโครงงานคณิตศาสตร์ไปสู่ความเป็นเลิศของเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์

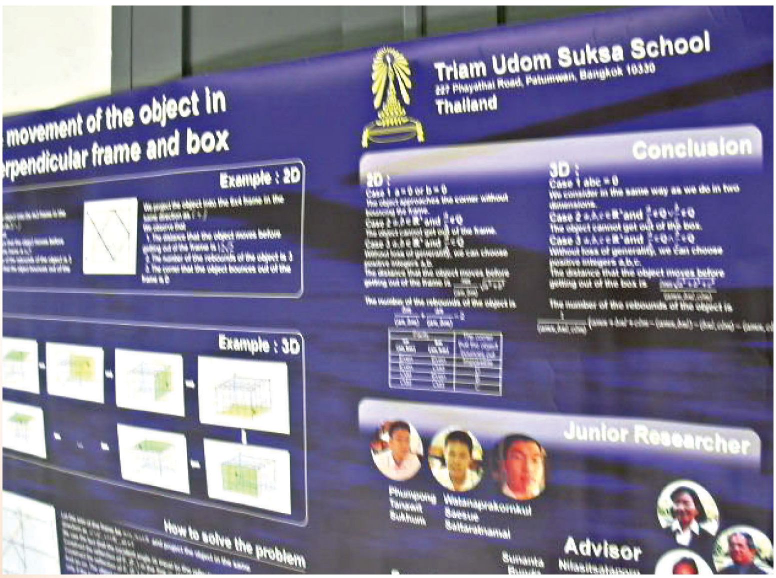
ฯลฯ

รางวัลที่ได้รับนอกจากจะเป็นทุนการศึกษา 10,000.- บาท พร้อมเกียรติบัตร แล้วเด็กนักเรียนยังได้รับรางวัลจากการใช้ทักษะในการทำงานร่วมกับเพื่อนๆ ในชั้นเรียนเป็นการฝึกการร่วมกันทำงานเป็นกลุ่ม ฝึกความอดทนและเป็นการพัฒนาความคิดสร้างสรรค์

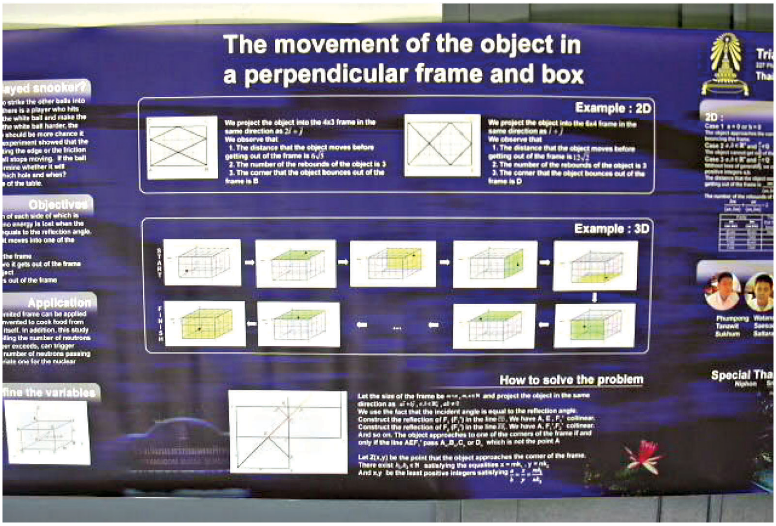
ทีมงานนำเสนอผลงานในงาน The First Thailand International Science Fair ณ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์

ผลงานโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง

“การกระดอนของวัตถุในกรอบและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก” ที่นำเสนอผลงานในงาน The First Thailand International Science Fair ณ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์



รูปที่ 1


The movement of the object in
a perpendicular frame and box
Example : 2D
Example : 3D
Objectives
Application
How to solve the problem

รูปที่ 2


Triam Udom Suksa School
Thailand
Example : 2D
Example : 3D
Conclusion
Junior Researcher
Advisor
Special Thanks
How to solve the problem

รูปที่ 3

16. สรุปประเด็นสำคัญและการเสนอทรรศนะ

ในการจัดกลุ่มนักเรียนที่มีความชอบในวิชาเดียวกัน เด็กจะเรียนด้วยกันอย่างมีความสุข ความคิดในแนวทางเดียวกัน มีการแข่งขันกันในการเรียนคณิตศาสตร์ มีการคิดแตกฉานหลากหลายวิธี และจุดประกายความคิดทางคณิตศาสตร์ให้แตกฉานมากยิ่งขึ้น ในแต่ละปีจะมีการจัดค่ายคณิตศาสตร์ปีละ 1 ครั้ง ค่ายนำเสนอผลงานทางคณิตศาสตร์ปีละ 1 ครั้ง ในการจัดค่ายคณิตศาสตร์นั้นนักเรียนจะต้องนำเสนอผลงานในรูปแบบต่างๆ อาจเป็นโครงงาน, บอร์ดนิทรรศการ และผลงาน กลุ่มละ 1 ชิ้น โครงงานหรือผลงานที่ได้รับคัดเลือกต้องนำมาจัดแสดง (Present) ในการเข้าค่ายระหว่างโรงเรียนด้วยกัน

ข้อสังเกตเกี่ยวกับโครงงานที่น่าสนใจ

โครงงานที่จะเสนอต้องโดดเด่น ไม่เหมือนใครและไม่มีใครเหมือน

- *จุดเด่นของโครงงาน*
- *เน้นเรื่องหัวข้อรายงาน*
- *ใช้ความรู้เรื่องอะไรบ้าง*
- *หัวข้อโครงงานนี้คิดได้อย่างไร*
- *เทคนิคการนำเสนอ, การแสดง*
- *ความพยายามและความมุ่งมั่น*
- *กระบวนการค้นคว้าและค้นพบ*
- *กระบวนการเรียนรู้ เริ่มต้น ค้นหา ตั้งคำถาม และพยายามค้นหาคำตอบ*
- *การสืบค้นข้อมูลเอกสาร*
- *โครงงานยังไม่สมบูรณ์ต้องเพิ่มเติมอะไรบ้าง*

- *การไม่มองข้ามทัศนะความคิดเห็นของผู้อื่น การไม่ยึดถือความคิดเห็นของตนเองอย่างเดียว แต่เป็นความคิดเห็นหลากหลายที่นำไปสู่การหาคำตอบที่ชัดเจน*
- *แสดงการทำงานเป็นทีมอย่างไร แต่ละคนทำงานอะไรบ้าง*
- *เทคนิคการนำเสนอ*
- *แนวคิดที่กว้างไกล เจาะลึก*

การศึกษาหาความรู้เพิ่มขึ้นบางเรื่องเราสนใจและเกิดข้อสงสัยมาก ยิ่งคิดก็ยิ่งน่าสนใจ การจัดทำโครงงานเป็นการทำงานอย่างเป็นระบบ และจะได้แก้ไขสิ่งที่เราอยากรู้และคิดออกมาเป็นทฤษฎี หากความสงสัยใคร่รู้หมดสิ้นไปจากจิตมนุษย์ ความรู้ใหม่ๆ ก็จะไม่เกิดขึ้น จึงอยากเชิญชวนเด็กๆ ให้หันมาสนใจสิ่งแวดล้อมรอบๆ ตัวเรา จากนั้นรวมกลุ่มกับเพื่อนๆ และวางแผนจัดทำโครงงานต่างๆ ขึ้นมาศึกษาต่อไป

ในการเรียนรู้ของเด็กไทยที่เก่งมาก สุดยอดจริงๆ ยอดเยี่ยมไม่ธรรมดา โรงเรียนน่าจะสนับสนุนเด็กไทยเหล่านั้นถ้าสามารถทำได้และโอกาสอำนวย เด็กไทยที่สุดยอดมากๆ จะได้มีความมุ่งมั่น มีแรงบันดาลใจและจะเป็นอนาคตของประเทศชาติ ครูควรใช้โอกาสทองเหล่านี้จุดประกายแห่งการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องให้แก่เด็ก แบ่งปัน และถ่ายทอดประสบการณ์ดีๆ ให้แก่เด็กๆ จะได้ก้าวหน้าในการทำโครงการต่างๆ เพื่อจะได้เป็นต้นกล้าที่มั่นคงแข็งแรงของประเทศชาติต่อไป

บรรณานุกรม

- วารสารเตรียมอุดมศึกษา ปีที่ 16 ฉบับที่ 30 เดือนสิงหาคม 2549
- วารสารเตรียมอุดมศึกษา ปีที่ 16 ฉบับที่ 31 เดือนสิงหาคม 2549
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. **ทฤษฎีจำนวน.** กรุงเทพฯ : สำนักพัฒนาธุรกิจ, 2544.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. **คอมบินาทอริก.** กรุงเทพฯ : สำนักพัฒนาธุรกิจ, 2544.
- รายงานสรุปสภาพปัจจุบันและยุทธศาสตร์การจัดการศึกษาสำหรับเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษของประเทศไทย พิมพ์ครั้งที่ 1 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ (พ.ศ.2545)
- คู่มือโครงงานคณิตศาสตร์ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์.
- คู่มือค้นหาแววความสามารถพิเศษ ของ ผศ. ดร. อุษณีย์ อนุรุทธ์วงศ์
- อัจฉรา หาญชูวงศ์. **ทฤษฎีจำนวน.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
- http://www.triamudom.ac.th
- http://www.ipst.ac.th/news/august31news1.html
- http://www.kanid.com/tutorial3.html
- http://www.kanid.com/tutorial8.html

ภาคผนวก

ตัวอย่างโครงงาน

การกระดอนของวัตถุในกรอบ และทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

โดย

นายภูมิพงศ์ วัฒนะประกรณ์กุล

นายธนวิต แซ่ซือ

นายสุขุม สัตตรัตนามัย

อาจารย์ที่ปรึกษา

นางสาวสุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร

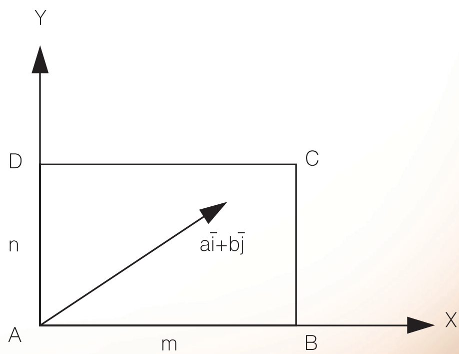
นายบัณฑิตย์ ฝอยทอง

นายไมตรี ศรีทองแท้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

บทคัดย่อ

โครงงานนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรอบ 2 มิติและ 3 มิติ ซึ่งวัตถุมีการกระทบขอบและสะท้อนไปมา และวัตถุจะหลุดออกจากกรอบเมื่อเคลื่อนที่เข้าที่มุมใดมุมหนึ่งของกรอบสี่เหลี่ยม ในขั้นแรกคณะผู้จัดทำโครงงานจะศึกษาการยิงวัตถุในสองมิติ โดยสิ่งที่สังเกตคือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนที่จะออกจากกรอบ จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบ และมุมที่วัตถุหลุดออกจากกรอบ และเพื่อให้ง่ายต่อการศึกษาเราจะถือว่าวัตถุมีขนาดเล็กมากและการชนทุกครั้งเป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ ไม่มีการสูญเสียพลังงาน มุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน และกำหนดให้ด้านของกรอบยาวเป็นจำนวนนับ ผู้จัดทำโครงงานพบว่าระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบมีความสัมพันธ์กับตัวหารร่วมมากของความยาวด้านและทิศที่เริ่มยิงวัตถุต่อจากนั้นคณะผู้จัดทำโครงงานจึงพยายามหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนครั้งที่ชนกับตัวหารร่วมมากของความยาวด้านและทิศที่เริ่มยิงวัตถุ และในที่สุดก็สามารถสร้างความสัมพันธ์ได้จากหลักการทางคณิตศาสตร์ คือ เมื่อยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด $m \times n$ และ ยิงวัตถุในทิศเดียวกับ $a\bar{i} + b\bar{j}$ โดยที่ $m,n \in \square$ $a,b \in \square^{+}$ ดังรูป



จะได้ว่า

- ถ้า $\dfrac{a}{b} \notin □$ วัตถุจะไม่หลุดออกจากกรอบ
- ถ้า $\dfrac{a}{b} \in □$ โดยไม่เสียนัยจะให้ $a \in □, b \in □$

จะได้ว่าระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ $\dfrac{mn}{(an,bm)}\sqrt{a^2+b^2}$ หน่วย จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบทั้งหมดเท่ากับ $\dfrac{bm}{(an,bm)}+\dfrac{an}{(an,bm)}-2$ ครั้ง

และ มุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบเป็นดังนี้

จำนวนครั้งที่ชน	$\dfrac{an}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคู่	$\dfrac{an}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคี่
$\dfrac{bm}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคู่	ไม่สามารถเกิดกรณีนี้	B
$\dfrac{bm}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคี่	D	C

ต่อมา ผู้จัดทำโครงงานพิจารณาการเคลื่อนที่ในกรอบสามมิติ โดยตั้งสมมุติฐานว่าหลักการที่ใช้ศึกษาการเคลื่อนที่ในสามมิติควรจะมีความเกี่ยวเนื่องกับหลักการที่ใช้ในกรอบสองมิติ กล่าวคือ สามารถใช้วิธีการในการศึกษาการเคลื่อนที่ในสองมิติกับการศึกษาสามมิติได้ จึงปรับปรุงหลักการจากกรอบสองมิติมาเป็นสามมิติ โดยมีพื้นฐานมาจากความสัมพันธ์เดิม ซึ่งได้ว่า

- ถ้า $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z} \vee \frac{b}{c} \notin \mathbb{Z}$ วัตถุจะไม่หลุดออกจากกรอบ
- ถ้า $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{b}{c} \in \mathbb{Z}$ โดยไม่เสียนัยให้ $a,b,c \in \mathbb{Z}^{+}$

จะได้ว่าระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบ

เท่ากับ $lmn\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \frac{1}{(amn,bnl,clm)}$ หน่วย

จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบเท่ากับ

$\frac{1}{(amn,bnl,clm)}\big(amn+bnl+clm-(amn,bnl)-(bnl,clm)-(amn,clm)\big)$ ครั้ง

เมื่อกำหนดให้กรอบที่ยิงมีขนาด $l \times m \times n$ และยิงวัตถุใน ทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ โดยที่ $a,b,c,l,m,n \in \mathbb{Z}$

โครงงานนี้อาจขยายผลไปศึกษาในเรื่องการชนจุดใดๆ ในกรอบที่เราศึกษา หรือการให้วัตถุเริ่มเคลื่อนที่ที่จุดอื่นๆ ซึ่งสามารถนำไปเกี่ยวข้องกับสาขาวิชาอื่นได้ เช่น การผลิตเตาไมโครเวฟ การสร้างโรงไฟฟ้านิวเคลียร์ หรือการสร้างเซ็นเซอร์แสง ซึ่งจะทำให้ได้รับประโยชน์ยิ่งขึ้น

สารบัญ

ที่มาและความสำคัญ

การศึกษาโครงงานนี้เริ่มขึ้นด้วยความบังเอิญจากเหตุการณ์หนึ่ง ตอนนั้นข้าพเจ้าและเพื่อนๆกำลังเล่นเกมสนุ๊กเกอร์อยู่ ในการเล่นเกมนี้ จะต้องแทงลูกสนุ๊กเกอร์สีขาวให้ชนลูกสีอื่นๆลงหลุมตามลำดับที่กำหนด ซึ่งหลุมนั้นจะอยู่ที่จุดมุมต่างๆของโต๊ะ ขณะที่เล่นไปได้ระยะเวลาหนึ่ง มีผู้เล่นคนหนึ่งแทงลูกสีขาวพลาด ทำให้ลูกสีขาววิ่งไปชนขอบโต๊ะกระทบไปมา แต่ไม่ชนลูกสีอื่นเลย จนกระทั่งลูกสีขาวเคลื่อนที่มาหยุดอยู่ ณ ตำแหน่งหนึ่งบนโต๊ะ ข้าพเจ้าก็เกิดความสงสัยขึ้นมาว่า ถ้าหากลูกสนุกเกอร์สามารถเคลื่อนที่ต่อไปโดยที่การชนขอบครั้งใดๆ ไม่มีการสูญเสียพลังงาน ลูกสนุกเกอร์ สีขาวนี้จะเคลื่อนที่ลงหลุมในที่สุดหรือไม่จึงเกิดเป็นจุดเริ่มต้นของโครงงานนี้

หลังจากที่ได้ความคิดที่จะศึกษาอะไรแล้วนั้น ข้าพเจ้าก็ได้นึกถึงเกมต่างๆ ซึ่งได้เคยเห็นหรือได้ทดลองเล่นมาแล้ว พบว่าบางเกมมีส่วนที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ในลักษณะเดียวกันนี้ เช่น เกม Jazz Ball ซึ่งเป็นเกมที่ให้ผู้เล่นกั้นลูกบอลซึ่งมีความเร็วคงที่และเด้งกระทบขอบไปมาในกรอบโดยจะต้องกั้นให้อยู่ในเนื้อที่ที่น้อยลงมากที่สุดเท่าที่จะทำได้ แต่ในการกั้นแต่ละครั้งต้องใช้เวลาและห้ามไม่ให้ลูกบอลมากระทบขณะที่กำลังกั้นเขตอยู่ ดังนั้นถ้าเราคำนวณได้ว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ระยะทางเท่าใดก่อนจะมาถึงบริเวณที่ดำเนินการกั้นอยู่ ก็จะสามารถทราบได้ว่านานเท่าใดวัตถุจะเคลื่อนที่มาถึงและจะกั้นเสร็จก่อนที่วัตถุจะเคลื่อนที่มาถึงหรือไม่

นอกจากนี้ เมื่อมองไปถึงสิ่งต่างๆที่อยู่รอบๆตัว ข้าพเจ้าก็พบว่ามีบางสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรอบสี่เหลี่ยมมุมฉาก ไม่ว่าจะเป็น เตาไมโครเวฟ ซึ่งมีการสะท้อนคลื่นไมโครเวฟในเตา เพื่อทำให้อาหารสุกทั่วถึง หรือจะเป็นเตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ ซึ่งในการ

ควบคุมจำนวนนิวตรอนซึ่งเป็นตัวกระตุ้นปฏิกิริยานิวเคลียร์ ถ้ามีมากเกินไปจะทำให้เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์กลายเป็นระเบิดนิวเคลียร์ได้ ถ้าเราทราบปริมาณนิวตรอนที่เคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งต่างๆ ก็จะทำให้สามารถควบคุมจำนวนนิวตรอนในปฏิกิริยานิวเคลียร์ได้อย่างเหมาะสม เป็นต้น

ดังที่กล่าวมานี้ ทางคณะผู้จัดทำจึงได้เห็นความสำคัญของการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรอบที่วัตถุมีการกระทบและสะท้อนไปมาในกรอบได้ และจะนำประโยชน์ที่ได้รับจากการศึกษานี้ไปประยุกต์ให้เกิดประโยชน์ต่อไป

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกยิงเข้าไปในกรอบสี่เหลี่ยมมุมฉากใดๆ โดยทำมุมใดๆ กับแกน X และแกน Y
2. เพื่อหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านของกรอบสี่เหลี่ยมมุมฉากและทิศทางที่ยิงวัตถุ กับระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบ
3. เพื่อหาจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบก่อนหลุดออกจากกรอบ
4. เพื่อหาว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ออกจากกรอบที่มุมใด
5. เพื่อพัฒนาสมการสู่ 3 มิติ

ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1. มีความเข้าใจเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรอบสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กำหนด

2. ได้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านของกรอบสี่เหลี่ยมมุมฉากและทิศทางที่ยิงวัตถุ กับระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบ

3. ได้รูปทั่วไปของจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบก่อนหลุดออกจากกรอบ

4. ทราบว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ออกจากกรอบที่มุมใด

ขอบเขตปัญหาที่ศึกษา

ให้วัตถุเคลื่อนที่ไปเรื่อยๆ ภายในกรอบที่มีความยาวด้านกำหนดไว้เป็นจำนวนนับโดยไม่มีการสูญเสียพลังงาน มีมุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน และวัตถุจะหลุดออกจากกรอบเมื่อเคลื่อนที่เข้าไปในมุมใดมุมหนึ่งของกรอบ

ในสองมิติ จะทำการศึกษาดังนี้

1. หาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบ
2. หาจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบก่อนหลุดออกจากกรอบ
3. หามุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบ

ในสามมิติ จะทำการศึกษาดังนี้

4. หาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบ
5. หาจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบก่อนหลุดออกจากกรอบ
6. หามุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบ

วิธีดำเนินงาน

1. สังเกตและหาหัวเรื่องที่สนใจ
2. ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบใน 2 มิติ
3. ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบใน 3 มิติ
4. จัดพิมพ์โครงงาน เนื้อหาที่ได้ศึกษามา

5. ส่งให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจความถูกต้อง ตลอดจนการใช้ภาษา
6. เตรียมการนำเสนอโครงงาน
7. ศึกษาความรู้คณิตศาสตร์แขนงอื่นให้กว้างขวางขึ้น เพื่อพัฒนาความรู้

ผลการดำเนินงาน

เนื่องจากโครงงานนี้เป็นโครงงานคณิตศาสตร์ที่มุ่งเน้นการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆ จึงนำเสนอในรูปแบบของการอธิบายหลักการและที่มาของสมการแสดงความสัมพันธ์พร้อมทั้งภาพจำลองประกอบ ดังได้แสดงไว้ในส่วนต่อไปนี้

ตัวหารร่วมมาก

บทนิยาม จำนวนเต็ม $d \neq 0$ จะเป็นตัวหารร่วมของจำนวนเต็ม a และ b ก็ต่อเมื่อ $d|a$ และ $d|b$

หมายเหตุ

1. $1|a$ และ $1|b$ ดังนั้นเซตของตัวหารร่วมของ a และ b ไม่เป็นเซตว่าง

2. ถ้า $a=b=0$ จะได้ว่าจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ทุกตัวเป็นตัวหารร่วม

3. ถ้า $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่าเซตของตัวหารร่วมของ a และ b เป็นเซตจำกัด และจะมีสมาชิกที่มีค่ามากสุด

4. ถ้า d เป็นตัวหารร่วมของจำนวนเต็ม a และ b แล้ว $-d$ จะเป็นตัวหารร่วมด้วย

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกันทั้งคู่ จำนวนเต็มบวก d จะเป็น ตัวหารร่วมมากของ a และ b ซึ่งเขียนแทนด้วย (a,b) หรือ gcd(a,b) ก็ต่อเมื่อ

ก. $d|a$ และ $d|b$

ข. ทุกๆ จำนวนเต็มบวก c ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้วจะได้ว่า $c \leq d$

นั่นคือ จำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่หารทั้ง a และ b ลงตัวคือ (a,b)

ทฤษฎีบทสำหรับ จำนวนเต็ม 2 จำนวน

1. สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ เราจะได้ว่า $(a+cd,b) = (a,b)$

2. สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งคู่ใดๆ จะมีจำนวนเต็ม x และ y ที่ทำให้ $(a,b) = ax+by$

3. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มและ $d = (a,b)$ จะได้ว่าสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก c ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c|d$

บทนิยาม ถ้า $(a,b) =1$ เราจะกล่าวว่า a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

1. สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $(a,b) =1$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม x และ y ที่ทำให้ $1 = ax+by$

2. สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ ถ้า $d = (a,b)$ แล้ว จะได้ว่า $1 = (a/d,b/d)$ นั่นคือ a/d และ b/d เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

3. สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ ถ้า $(a,c) = (b,c) =1$ แล้ว $(ab,c) =1$

4. สำหรับจำนวนเต็ม $a,b_1,b_2,\ldots,b_n$ ใดๆ ถ้า $(a,b_i)=1$ เมื่อ $i=1,2,\ldots,n$ แล้ว $(a,b_1,b_2,\ldots,b_n)=1$

5. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน จะได้ว่าทุกๆจำนวนเต็ม c ถ้า $a|c$ และ $b|c$ แล้ว $ab|c$

6. สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ ถ้า $ab|c$ และ $(a,b)=1$ แล้ว $a|c$

บทนิยาม ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกันทั้งหมด จำนวนเต็มบวก d จะเป็นตัวหารร่วมของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ก็ต่อเมื่อ $d|a_1,d|a_2,\ldots,d|a_n$ และ d เป็นตัวหารร่วมมากของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $d|a_1,d|a_2,\ldots,d|a_n$ นั่นคือ d เป็นตัวหารร่วมของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$

ข. ทุกๆ จำนวนเต็มบวก c ถ้า $c|a_1,c|a_2,\ldots,c|a_n$ แล้วจะได้ว่า $c \le d$

นั่นคือ จำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่หาร $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ทุกตัวลงตัวคือ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$

ทฤษฎีบทสำหรับจำนวนเต็ม n จำนวนใด ๆ

1. สำหรับจำนวนเต็ม $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ใดๆ

ก. $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = ((a_1,a_2),a_3,\ldots,a_n)$

ข. $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = ((a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}),a_n)$

2. ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะได้ว่า $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ = จำนวนเต็มบวกค่าน้อยที่สุดที่ อยู่ในรูป $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ เมื่อ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ เป็นจำนวนเต็ม

3. ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ $d=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ จะได้ว่าสำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก c ถ้า $c|a_1 \wedge c|a_2 \wedge \ldots \wedge c|a_n$ แล้ว $c|d$

บทนิยาม ถ้า $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 1$ เราจะกล่าวว่า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และถ้าทุก i , j ที่ $i \neq j$, $(a_i,a_j) = 1$ เราจะกล่าวว่า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่

4. สำหรับจำนวนเต็ม $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ใดๆ $(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 1$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ที่ทำให้ $1=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$

5. สำหรับจำนวนเต็ม $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ใดๆ ถ้า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่แล้ว $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ตัวคูณร่วมน้อย

บทนิยาม กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จำนวนเต็มบวก m เป็น ตัวคูณร่วมของ a และ b ก็ต่อเมื่อ $a \mid m$ และ $b \mid m$

หมายเหตุ

1. ทุกๆจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ a และ b, ab เป็นตัวคูณร่วม ของ a และ b

2. ถ้าจำนวนเต็มบวก m เป็นตัวคูณร่วมของ a และ b และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $m \mid k$ แล้ว k เป็นตัวคูณร่วมของ a และ b ด้วย

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จำนวนเต็มบวก m เป็น ตัวคูณร่วมน้อย ของ a และ b ซึ่งเขียนแทนด้วย [a,b] หรือ *lcm(a ,b)* ก็ต่อเมื่อ

ก. $a \mid m$ และ $b \mid m$

ข. ทุกๆ จำนวนเต็มบวก c ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid c$ แล้ว จะได้ว่า $m \leq c$ นั่นคือ จำนวนเต็มบวกค่าน้อยสุดที่ a และ b หารลงตัวคือ [a,b]

ข้อสังเกต

1. $[a,b] = [b,a]$
2. $[a,b] = [\,|a|\,,\,|b|\,]$
3. ถ้า $a \mid b$ แล้ว จะได้ว่า $[a,b] = |b|$

ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ใดๆ

ก. $(a,b)[a,b] = ab$

ข. a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ จะได้ว่า $[a,b] = ab$

บทนิยาม ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ จำนวนเต็มบวก m จะเป็นตัวคูณร่วมน้อย ของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งเขียนแทนด้วย $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $a_1 \mid m\,,\; a_2 \mid m\,,\ldots,\; a_n \mid m$

ข. สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก c ถ้า $a_1 \mid c\,,\; a_2 \mid c\,,\ldots,\; a_n \mid c$ แล้ว $m \le c$

นั่นคือ จำนวนเต็มบวกค่าน้อยที่สุดที่ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ หารลงตัว คือ $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$

ทฤษฎีบท

1. สำหรับจำนวนเต็ม $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ที่ไม่เป็นศูนย์ ใดๆ ถ้า c เป็นตัวคูณร่วมของ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ แล้ว $[a_1,a_2,\ldots,a_n] \mid c$
2. สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ จะได้ว่า

   ก. $[a_1,a_2,\ldots,a_n] = [[a_1,a_2],a_3,\ldots,a_n]$

   ข. $[a_1,a_2,\ldots,a_n] = [[a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}]\,,\,a_n]$
3. สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก $n \geq c$ ไม่ว่า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่ แล้ว $[a_1,a_2,\ldots,a_n] = a_1,a_2,\ldots,a_n$

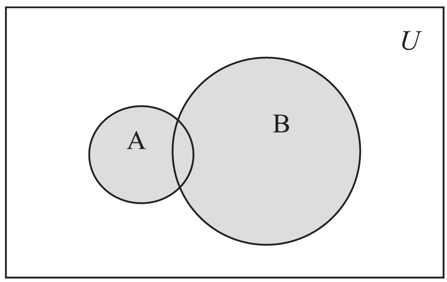
หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก

การนับจำนวนของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นของปัญหาที่ซับซ้อนอาจทำให้นับบางกรณีซ้ำ หรืออาจนับบางกรณีขาดหายไป ซึ่งทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ผิดพลาดไปจากความเป็นจริง ดังนั้นเราจึงต้องอาศัยเรื่องเซตเพื่อช่วยแก้ปัญหาการนับดังกล่าว

ทฤษฎีบท ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว

$n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

พิสูจน์ เนื่องจาก A และ B เป็นเซตจำกัด ดังนั้น $A \cup B$ และ $A \cap B$ เป็นเซตจำกัด



จากแผนภาพของเวนน์พบว่า

$A \cup B = A \cup (B - A)$

เนื่องจาก $A \cap (B - A) = \varnothing$ ดังนั้น

$n(A \cup B) = n(A)+n(B - A)$ ________(1)

แต่ $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ และ $(B - A) \cap (A \cap B) = \varnothing$ ดังนั้น

$n(B) = n(B - A)+n(A \cap B)$ ________(2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

สำหรับการหาสูตรจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B \cup C$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตจำกัดสามารถทำได้โดยใช้หลักการเช่นเดียวกับการหาจำนวนสมาชิกของเซต 2 เซตดังนี้

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n((A \cup B) \cup C) \\
&= n(A \cup B)+n(C)-n((A \cup B) \cap C) \\
&= n(A \cup B)+n(C)-n((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= n(A)+n(B)-n(A \cap B)+n(C)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C) \\
&= n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 1

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม x,y,z จะได้ว่า

$$\left[\frac{x}{(x,y)},\frac{x}{(x,z)}\right]=\frac{x}{(x,y,z)}$$

พิสูจน์

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{x}{(x,y)},\frac{x}{(x,z)}\right] &= \frac{\dfrac{x^2}{(x,y)(x,z)}}{\left(\dfrac{x}{(x,y)},\dfrac{x}{(x,z)}\right)} = \frac{x^2}{(x,y)(x,z)\left(\dfrac{x}{(x,y)},\dfrac{x}{(x,z)}\right)} \\
&= \frac{x^2}{\left((x,z)x,(x,y)x\right)} = \frac{x^2}{x\left((x,z),(x,y)\right)} \\
&= \frac{x}{(x,y,z)}
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม x,y,z จะได้ว่า $[x,y,z]=\dfrac{xyz}{(xy,yz,zx)}$

พิสูจน์

$$[x,y,z] = [[x,y],z] = \frac{[x,y]z}{([x,y],z)}$$

$$= \frac{\frac{xy}{(x,y)}z}{\left(\frac{xy}{(x,y)},z\right)} = \frac{xyz}{(x,y)\left(\frac{xy}{(x,y)},z\right)}$$

$$= \frac{xyz}{\left(xy,z(x,y)\right)} = \frac{xyz}{(xy,yz,zx)}$$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม x,y,z จะได้ว่า $\dfrac{(xy,yz)}{(xy,yz,zx)}=\dfrac{[x,y,z]}{[x,z]}$

พิสูจน์

จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2 จะได้ว่า

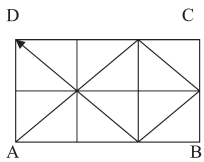
$$(xy,yz,zx)[x,y,z] = xyz = y[x,z](x,z) = [x,z](xy,yz)$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{(xy,yz)}{(xy,yz,zx)}=\dfrac{[x,y,z]}{[x,z]}$

การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 2 มิติ

ทดลองยิง

1. ยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด 3 x 2 ในทิศ $\bar{i} + \bar{j}$

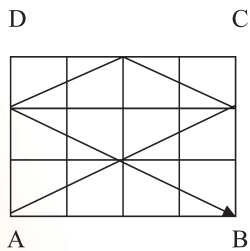


จะได้ว่าวัตถุกระทบกรอบ 3 ครั้ง และออกทางมุม D

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนออกจากกรอบ

เท่ากับ $6\sqrt{2}$ หน่วย

2. ยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด 4 x 3 ในทิศ $2\bar{i} + \bar{j}$

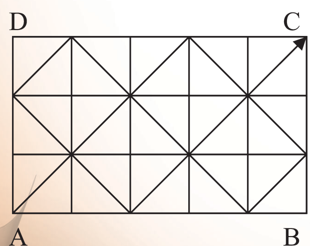


จะได้ว่าวัตถุกระทบกรอบ 3 ครั้ง และออกทางมุม B

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนออกจากกรอบ

เท่ากับ $6\sqrt{5}$ หน่วย

3. ยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด 5 x 3 ในทิศ $\bar{i} + \bar{j}$

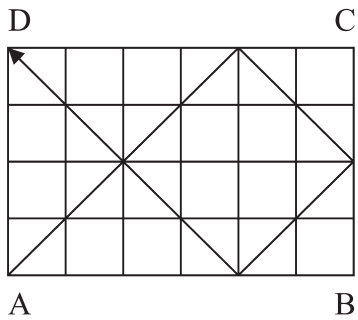


จะได้ว่าวัตถุกระทบกรอบ 6 ครั้ง

และออกทางมุม C ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนออกจากกรอบ

เท่ากับ $15\sqrt{2}$ หน่วย

4. ยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด 6 x 4 ในทิศ $\bar{i} + \bar{j}$

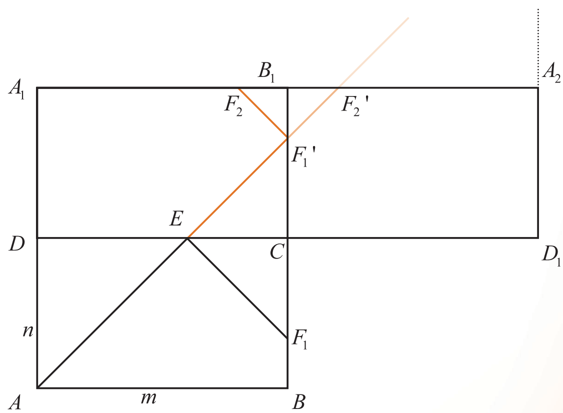


จะได้ว่าวัตถุกระทบกรอบ 3 ครั้ง และออกทางมุม D

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนออกจากกรอบ
เท่ากับ $12\sqrt{2}$ หน่วย

วิธีการแก้ปัญหา

ให้กรอบมีขนาด m x n เมื่อ $m, n \in \square$ และยิงวัตถุไปในทิศ $a\bar{i} + b\bar{j}$ โดยที่ $a, b \in \square^{+}$ (ในกรณีที่ a = 0 หรือ b = 0 วัตถุจะหลุดออกจากกรอบโดยไม่กระทบขอบเลย จึงไม่นำมาพิจารณา)

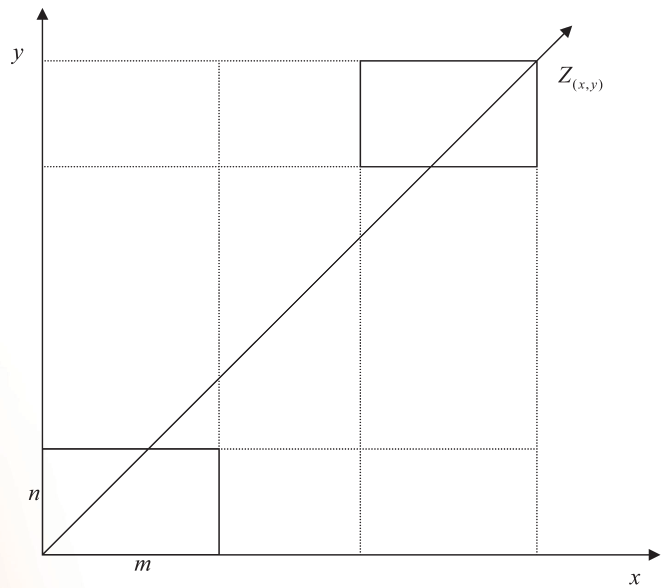


การพิจารณาแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เปลี่ยนทิศทางนั้นมีความยุ่งยากซับซ้อน จึงใช้ประโยชน์จากการที่วัตถุมีมุมตกกระทบและมุมสะท้อนเท่ากัน สะท้อนแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุออกไปเป็นเส้นตรงดังนี้

สะท้อน F_1 ผ่าน $\overline{CD}$ ไปที่จุด F_1' ต่อ $\overline{EF_1'}$ จะได้ว่า A, E, F_1' อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

สะท้อน F_2 ผ่าน $\overline{BB_1}$ ไปที่จุด F_2' ต่อ $\overline{F_1'F_2'}$ จะได้ว่า A, F_1', F_2' อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เมื่อทำซ้ำต่อไปเรื่อยๆ จะพบว่าวัตถุจะหลุดกรอบก็ต่อเมื่อเส้นตรงที่ต่อออกไปจาก AEF_1' ผ่านจุด A_n, B_n, C_n หรือ D_n ที่ไม่ใช่จุด A



ให้วัตถุเข้ามุมที่จุด Z (x,y)

สมมุติว่าเราสะท้อนกรอบออกไปในแนวแกน X และแกน Y เป็น k_1 และ k_2 ครั้งตามลำดับจะได้ว่าจำนวนเต็มบวก k_1, k_2 ทำให้ $x = mk_1$ และ $y = nk_2$ และทำให้ x,y เป็นจำนวนเต็มบวกน้อยที่สุดที่สอดคล้อง $\frac{b}{a} = \frac{y}{x} = \frac{nk_2}{mk_1}$

กรณีที่ 1 $\frac{b}{a}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

$\because \frac{b}{a} = \frac{nk_2}{mk_1}$ จะได้ $\frac{nk_2}{mk_1}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

นั่นคือ ไม่มี x,y ที่สอดคล้อง วัตถุจึงไม่หลุดออกจากกรอบ

กรณีที่ 2 $\frac{b}{a}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $a,b \in$ จะได้ว่า

$$bmk_1 = ank_2 \rightarrow \frac{bm}{(an,bm)}k_1 = \frac{an}{(an,bm)}k_2$$

และจาก $\left(\frac{bm}{(an,bm)},\frac{an}{(an,bm)}\right)=1$

ดังนั้น $\left.\frac{an}{(an,bm)}\right| k_1$ และ $\left.\frac{bm}{(an,bm)}\right| k_2$

จะได้ว่า $\frac{an}{(an,bm)} \leq k_1$ และ $\frac{bm}{(an,bm)} \leq k_2$

เลือก $k_1 = \frac{an}{(an,bm)}$ และ $k_2 = \frac{bm}{(an,bm)}$

จะได้ $\frac{y}{x} = \frac{nk_2}{mk_1} = \frac{\frac{mnb}{(an,bm)}}{\frac{mna}{(an,bm)}} = \frac{b}{a}$

ฉะนั้นค่า (x,y) ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้คือ $\left(\frac{mna}{(an,bm)},\frac{mnb}{(an,bm)}\right)$

เพราะฉะนั้นจุด $Z = \left(\frac{mna}{(an,bm)},\frac{mnb}{(an,bm)}\right)$ เป็นจุดที่วัตถุ

เข้ามุมและหลุดออกจากกรอบ

หาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ก่อนจะเข้ามุม

ระยะทางที่วัตถุต้องเคลื่อนที่ $=\sqrt{\left(\frac{mna}{(an,bm)}\right)^2+\left(\frac{mnb}{(an,bm)}\right)^2}$

$$=\frac{mn}{(an,bm)}\sqrt{a^2+b^2}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $a=b$ จะได้ว่าระยะทางที่วัตถุต้องเคลื่อนที่

$$=\frac{mn}{(an,am)}\sqrt{a^2+a^2}$$

$$=\frac{mn}{a(n,m)}a\sqrt{2} \qquad =[n,m]\sqrt{2}$$

หาจำนวนครั้งที่กระดอน

เราทราบว่า $Z=\left(\frac{mna}{(an,bm)},\frac{mnb}{(an,bm)}\right)$ และ

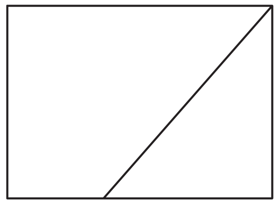
- จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านที่ขนานกับแกน X คือ

k_2 หรือ $\frac{bm}{(an,bm)}$ ครั้ง

- จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านที่ขนานกับแกน Y คือ

k_1 หรือ $\frac{an}{(an,bm)}$ ครั้ง

แต่เนื่องจากครั้งที่กระทบกรอบด้านข้าง 2 ด้านพร้อมๆ กัน ดังภาพ จะถูกนับเกินจึงต้องลบออก 2 ครั้ง (จะไม่นับรวมจุดที่วัตถุหลุดออกจากกรอบเป็นการกระทบ)



$\therefore$ จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบเท่ากับ

$\frac{bm}{(an,bm)}+\frac{an}{(an,bm)}-2$ ครั้ง

โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $a=b$ จะได้ว่า

$$\text{จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบ} \; = \frac{bm}{(an,bm)}+\frac{an}{(an,bm)}-2$$

$$= \frac{am}{(an,am)}+\frac{an}{(an,am)}-2$$

$$= \frac{m}{(n,m)}+\frac{n}{(n,m)}-2$$

$$= \frac{[n,m]}{n}+\frac{[n,m]}{m}-2$$

หามุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบ

ถ้า $\frac{bm}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคู่ จะออกทางมุม A หรือ B

ถ้า $\frac{bm}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคี่ จะออกทางมุม C หรือ D

ถ้า $\frac{an}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคู่ จะออกทางมุม A หรือ D

ถ้า $\frac{an}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคี่ จะออกทางมุม B หรือ C

สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

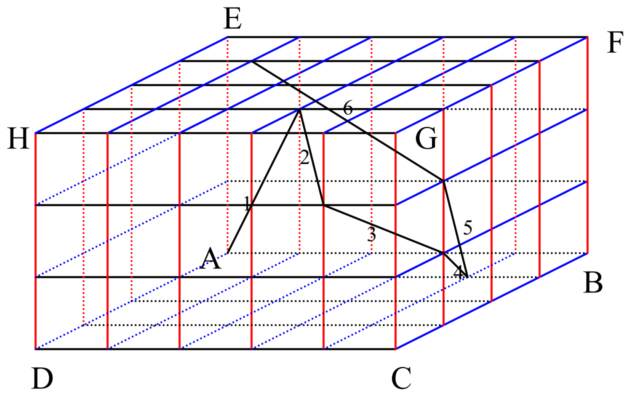
จำนวนครั้งที่ชน	$\frac{an}{(an,bm)}$ **เป็นจำนวนคู่**	$\frac{an}{(an,bm)}$ **เป็นจำนวนคี่**
$\frac{bm}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคู่	ไม่สามารถเกิดกรณีนี้	B
$\frac{bm}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคี่	D	C

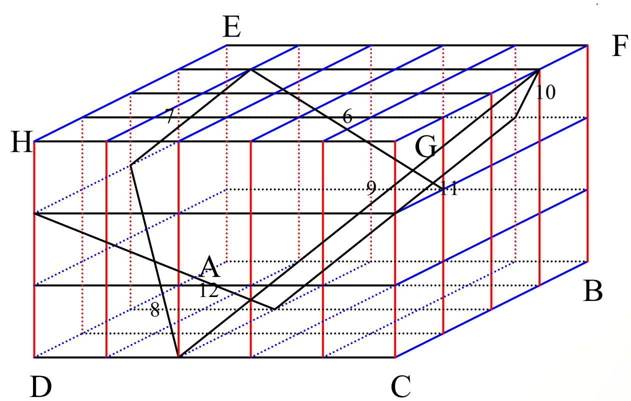
การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 3 มิติ

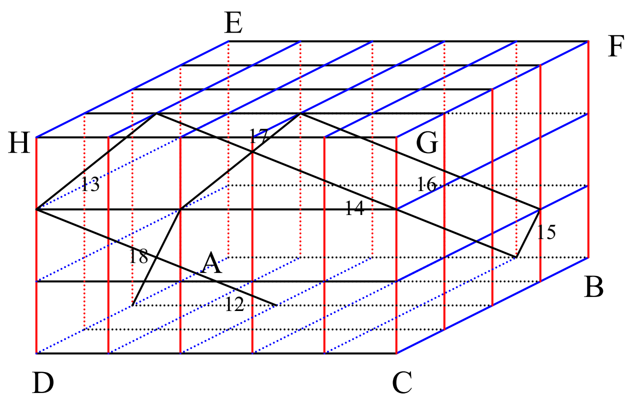
ทดลองยิง

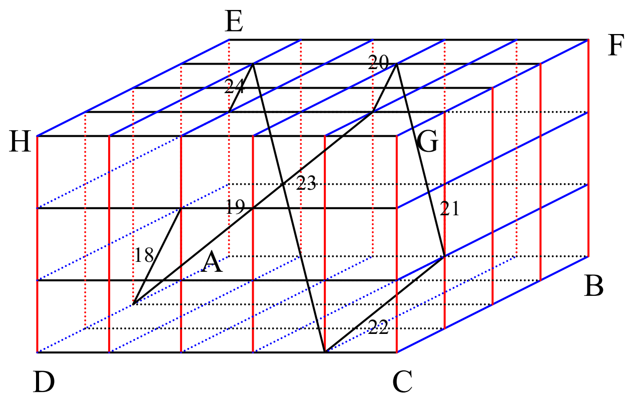
ยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด 5 x 4 x 3 ในทิศ $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$

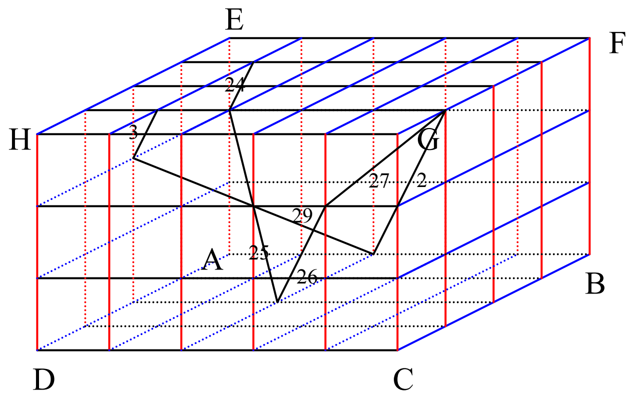
จะได้ว่าวัตถุกระทบกรอบ 35 ครั้ง
และออกทางมุม D

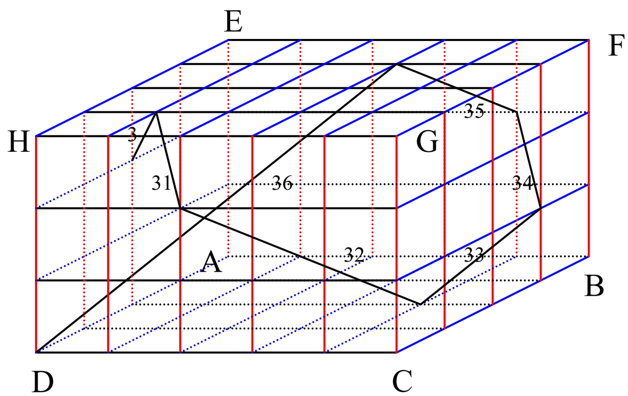





E
F
H
17
G
13
16
14
15
18
A
B
12
D
C

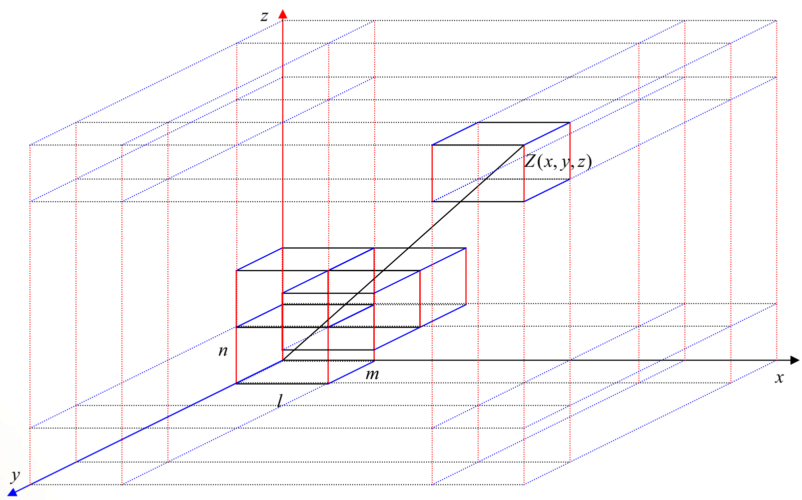

E
F
20
24
H
G
23
19
21
18
A
B
22
D
C


E
F
H
G
A
B
D
C
24
3
27
2
29
25
26


E
F
H
G
A
B
D
C
35
3
31
36
34
32
33

วิธีการแก้ปัญหา

ให้กรอบมีขนาด $l \times m \times n$ และยิงวัตถุในทิศ $a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ โดยที่ $l,m,n \in \mathbb{N}$ และ $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ (ในกรณีที่ a,b หรือ c เท่ากับ 0 จะพิจารณาในลักษณะเดียวกับ 2 มิติ)



ทำการสะท้อนในทำนองเดียวกันกับในระนาบ 2 มิติ

ให้วัตถุเข้ามุมที่จุด Z (x,y,z)

สมมุติว่าเราสะท้อนกรอบออกไปในแนวแกน X, Y และ Z เป็น k_1, k_2 และ k_3 ครั้งตามลำดับ

จะได้ว่าจำนวนเต็มบวก k_1, k_2 และ k_3 ทำให้ $x=lk_1$, $y=mk_2$, $z=nk_3$ และทำให้ x,y,z เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่สอดคล้อง $a : b : c = x : y : z = lk_1 : mk_2 : nk_3$

กรณีที่ 1 ถ้ามี $\frac{a}{b} \notin \square \vee \frac{b}{c} \notin \square$ จะได้ว่าวัตถุไม่เคลื่อนที่หลุดออกจากกรอบสามมิติ

กรณีที่ 2 $\frac{a}{b} \in \square \wedge \frac{b}{c} \in \square$ โดยไม่เสียนัยจะให้ $a,b,c \in \square$

จะได้ว่า $\frac{a}{b} = \frac{lk_1}{mk_2}$ และ $\frac{a}{c} = \frac{lk_1}{nk_3}$

เพราะฉะนั้น $amk_2 = blk_1 \to \frac{am}{(am,bl)}k_2 = \frac{bl}{(am,bl)}k_1$ และ

$ank_3 = clk_1 \to \frac{an}{(an,cl)}k_3 = \frac{cl}{(an,cl)}k_1$ ดังนั้น $\left.\frac{am}{(am,bl)}\right| k_1$ และ

$\left.\frac{an}{(an,cl)}\right| k_1$ นั่นคือ $\left.\left[\frac{am}{(am,bl)}, \frac{an}{(an,cl)}\right]\right| k_1$

จาก
$$\left[\frac{am}{(am,bl)}, \frac{an}{(an,cl)}\right] = \left[\frac{amn}{(amn,bnl)}, \frac{amn}{(amn,clm)}\right]$$
$$= \frac{amn}{(amn,bnl,clm)} \quad \text{,(ทฤษฎีบทประกอบที่ 1)}$$

จะได้ว่า $\left.\frac{amn}{(amn,bnl,clm)}\right| k_1$

นั่นคือ $$k_1 \geq \frac{amn}{(amn,bnl,clm)}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $$k_2 \geq \frac{bnl}{(amn,bnl,clm)}$$

และ $$k_3 \geq \frac{clm}{(amn,bnl,clm)}$$

เลือก $(k_1, k_2, k_3) = \left(\frac{amn}{(amn, bnl, clm)}, \frac{bnl}{(amn, bnl, clm)}, \frac{clm}{(amn, bnl, clm)} \right)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} x : y : z &= lk_1 : mk_2 : nk_3 \\ &= \frac{amnl}{(amn, bnl, clm)} : \frac{bnlm}{(amn, bnl, clm)} : \frac{clmn}{(amn, bnl, clm)} \\ &= a : b : c \end{aligned}$$

ฉะนั้นค่า (x, y, z) ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้คือ

$$\left(\frac{amnl}{(amn, bnl, clm)}, \frac{bnlm}{(amn, bnl, clm)}, \frac{clmn}{(amn, bnl, clm)} \right)$$

หรือ (aT, bT, cT) เมื่อ $T = \frac{lmn}{(amn, bnl, clm)}$

เพราะฉะนั้นจุด $Z = (aT, bT, cT)$

เมื่อ $T = \frac{lmn}{(amn, bnl, clm)}$ จะเป็นจุดที่วัตถุเข้ามุมและหลุดออกจากกรอบ

หาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ก่อนจะเข้ามุม

$$\text{ระยะทางที่วัตถุต้องเคลื่อนที่} = \sqrt{(aT)^2 + (bT)^2 + (cT)^2}$$
$$= T\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$= \frac{lmn\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{(amn, bnl, clm)}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $a = b = c$ จะได้ว่า

$$\text{ระยะทางที่วัตถุต้องเคลื่อนที่} = \frac{lmn}{(mn, nl, lm)}\sqrt{3}$$
$$= [l, m, n]\sqrt{3}$$,(ทฤษฎีบทประกอบที่ 2)

หาจำนวนครั้งที่กระดอน

เราทราบว่า

$$Z = \left(\frac{amnl}{(amn, bnl, clm)}, \frac{bnlm}{(amn, bnl, clm)}, \frac{clmn}{(amn, bnl, clm)} \right)$$

เพราะฉะนั้น

- จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านที่ขนานระนาบ XY = k_3

หรือ $\frac{clm}{(amn, bnl, clm)}$ ครั้ง

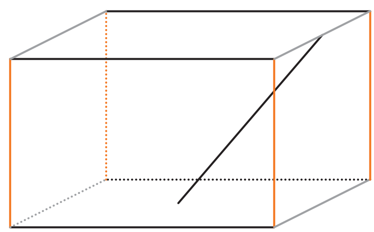
- จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านที่ขนานระนาบ YZ = k_1

หรือ $\frac{amn}{(amn, bnl, clm)}$ ครั้ง

- จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านที่ขนานระนาบ ZX = k_2

หรือ $\dfrac{bnl}{(amn,bnl,clm)}$ ครั้ง

เนื่องจากครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านข้าง 2 ด้านพร้อมๆ กันดังภาพ จะถูกนับเกินจึงต้องลบออก



การที่วัตถุกระทบกรอบทั้งสองด้าน คือการที่วัตถุเข้ามุมเมื่อพิจารณาใน 2 มิติ

จะแสดงการนับจำนวนครั้งที่วัตถุเข้ามุมเมื่อพิจารณาในระนาบ XY จากการพิสูจน์ใน 2 มิติ จะได้ว่า วัตถุจะเข้ามุมที่คู่อันดับ $\left(\dfrac{lma}{(am,bl)}k,\dfrac{lmb}{(am,bl)}k\right)$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใดๆ

แต่วัตถุจะหลุดออกจากกรอบที่

$$\left(\frac{amnl}{(amn,bnl,clm)},\frac{bnlm}{(amn,bnl,clm)}\right)$$

ดังนั้น $k \le \dfrac{n(am,bl)}{(amn,bnl,clm)} = \dfrac{(amn,bnl)}{(amn,bnl,clm)}$

เพราะฉะนั้น วัตถุจะเข้ามุมเมื่อพิจารณาในระนาบ XY ทั้งหมด $\dfrac{(amn,bnl)}{(amn,bnl,clm)}$ ครั้ง

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

วัตถุจะเข้ามุมเมื่อพิจารณาในระนาบ YZ ทั้งหมด

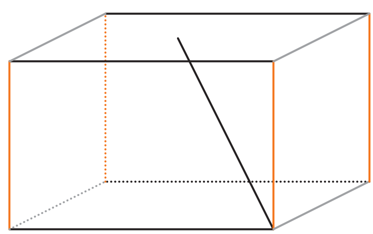
$\dfrac{(bnl,clm)}{(amn,bnl,clm)}$ ครั้ง

วัตถุจะเข้ามุมเมื่อพิจารณาในระนาบ ZX ทั้งหมด

$\dfrac{(amn,clm)}{(amn,bnl,clm)}$ ครั้ง

นั่นคือ จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบด้านข้าง 2 ด้านพร้อมๆ กัน เท่ากับ $\dfrac{(amn,bnl)}{(amn,bnl,clm)}+\dfrac{(bnl,clm)}{(amn,bnl,clm)}+\dfrac{(amn,clm)}{(amn,bnl,clm)}$ ครั้ง

เนื่องจากครั้งที่กระทบกรอบด้านข้าง 3 ด้านพร้อมๆ กันดังภาพ จะถูกลบออกเกินจึงต้องบวกเข้าอีก 1 ครั้ง



และครั้งสุดท้ายเป็นครั้งที่วัตถุออกจากกรอบจึงไม่นับเป็นการกระทบกรอบ

$\therefore$ จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบ

$$= \frac{amn}{(amn,bnl,clm)} + \frac{bnl}{(amn,bnl,clm)} + \frac{clm}{(amn,bnl,clm)}$$

$$- \frac{(amn,bnl)}{(amn,bnl,clm)} - \frac{(bnl,clm)}{(amn,bnl,clm)} - \frac{(amn,clm)}{(amn,bnl,clm)} + 1 - 1$$

$$= \frac{1}{(amn,bnl,clm)}\left(amn + bnl + clm - (amn,bnl) - (bnl,clm) - (amn,clm)\right)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $a = b = c$ จะได้ว่า

จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบ

$$= \frac{1}{(amn,anl,alm)}\left(amn + anl + alm - (amn,anl) - (anl,alm) - (amn,alm)\right)$$

$$= \frac{1}{(mn,nl,lm)}\left(mn + nl + lm - (mn,nl) - (nl,lm) - (mn,lm)\right)$$

จากทฤษฎีบทประกอบที่ 2 และ 3 จะได้ว่า

$$\frac{1}{(mn,nl,lm)}\left(mn + nl + lm - (mn,nl) - (nl,lm) - (mn,lm)\right)$$

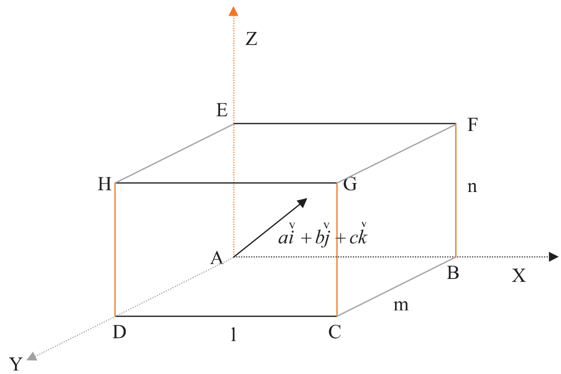
$$= [l,m,n]\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{[l,m]} - \frac{1}{[m,n]} - \frac{1}{[n,l]}\right)$$

ฉะนั้น จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบคือ

$[l,m,n]\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{[l,m]} - \frac{1}{[m,n]} - \frac{1}{[n,l]}\right)$ ครั้ง

หามุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบ

กำหนดการยิงและมุมต่าง ๆของกรอบดังรูป



จะได้ผลดังนี้

ความเป็นคู่คี่ (Parity)			มุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออก
$\frac{amn}{(amn, bnl, clm)}$	$\frac{bnl}{(amn, bnl, clm)}$	$\frac{clm}{(amn, bnl, clm)}$	
คู่	คู่	คู่	ไม่สามารถเกิดกรณีนี้
คู่	คู่	คี่	E
คู่	คี่	คู่	D
คู่	คี่	คี่	H
คี่	คู่	คู่	B
คี่	คู่	คี่	F
คี่	คี่	คู่	C
คี่	คี่	คี่	G

สรุปผลการดำเนินงาน

จากการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรอบได้ผลดังต่อไปนี้

การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 2 มิติ

ในการยิงวัตถุเข้าไปในกรอบขนาด m x n เมื่อ $m,n \in \mathbb{N}$ ในทิศ $a\bar{i} + b\bar{j}$ โดย $a,b \in \mathbb{R}_0^+$

กรณีที่ 1 a เท่ากับ 0 หรือ b เท่ากับ 0 วัตถุจะเคลื่อนที่หลุดออกจากกรอบโดยไม่กระทบกรอบ

กรณีที่ 2 $a,b \in \mathbb{R}^+$ และ $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ วัตถุจะไม่หลุดออกจากกรอบ

กรณีที่ 3 $a,b \in \mathbb{R}^+$ และ $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ โดยไม่เสียนัยจะเลือก $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ ได้ และจะได้ว่า

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ

$$\frac{mn}{(an,bm)}\sqrt{a^2+b^2}$$

จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบเท่ากับ

$$\frac{bm}{(an,bm)} + \frac{an}{(an,bm)} - 2 \text{ ครั้ง}$$

และมุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบเป็นดังนี้

จำนวนครั้งที่ชน	$\frac{an}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคู่	$\frac{an}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคี่
$\frac{bm}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคู่	ไม่สามารถเกิดกรณีนี้	B
$\frac{bm}{(an,bm)}$ เป็นจำนวนคี่	D	C

การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 3 มิติ

การยิงวัตถุในกรอบขนาด l x m x n เมื่อ $l,m,n \in \mathbb{N}$ ในทิศ $a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ โดย $a,b,c \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$

กรณีที่ 1 $abc = 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในระนาบ 2 มิติ ซึ่งได้ผลสรุปแล้วในข้างต้น

กรณีที่ 2 $a,b,c \in \mathbb{R}^{+}$ และ $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q} \vee \frac{b}{c} \notin \mathbb{Q}$ จะได้ว่าวัตถุไม่เคลื่อนที่หลุดออกจากกรอบสามมิติ

กรณีที่ 3 $a,b,c \in \mathbb{R}^{+}$ และ $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ โดยไม่เสียนัยจะเลือกได้ $a,b,c \in \mathbb{N}$ และได้ว่า

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ก่อนหลุดออกจากกรอบเท่ากับ

$$\frac{lmn\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{(amn,bnl,clm)}$$

จำนวนครั้งที่วัตถุกระทบกรอบเท่ากับ

$$\frac{1}{(amn,bnl,clm)}\big(amn+bnl+clm-(amn,bnl)$$

$$-(bnl,clm)-(amn,clm)\big)$$ ครั้ง

และมุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออกจากกรอบเป็นดังนี้

ความเป็นคู่คี่ (Parity)			มุมที่วัตถุเคลื่อนที่ออก
$\frac{amn}{(amn,bnl,clm)}$	$\frac{bnl}{(amn,bnl,clm)}$	$\frac{clm}{(amn,bnl,clm)}$	
คู่	คู่	คู่	ไม่สามารถเกิดกรณีนี้
คู่	คู่	คี่	E
คู่	คี่	คู่	D
คู่	คี่	คี่	H
คี่	คู่	คู่	B
คี่	คู่	คี่	F
คี่	คี่	คู่	C
คี่	คี่	คี่	G

แนวทางการศึกษาต่อเนื่อง

1. ศึกษาการยิงวัตถุให้ชนตำแหน่งใด ๆที่กำหนดในกรอบ
2. ศึกษากรณีที่จุดที่วัตถุเริ่มเคลื่อนที่ ณ จุดใด ๆ ในกรอบโดยที่ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดมุมก็ได้

การนำไปใช้

การศึกษาเรื่องการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรอบสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับเตาไมโครเวฟ ซึ่งมีการสะท้อนคลื่นไมโครเวฟในเตา เพื่อทำให้อาหารสุกทั่วถึง หรือจะเป็นเตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ ซึ่งในการควบคุมจำนวนนิวตรอนซึ่งเป็นตัวกระตุ้นปฏิกิริยานิวเคลียร์ ถ้ามีมากเกินไปจะทำให้เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์กลายเป็นระเบิดนิวเคลียร์ได้ ถ้าเราทราบปริมาณนิวตรอนที่เคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งต่าง ๆ ก็จะทำให้สามารถควบคุมจำนวนนิวตรอนในปฏิกิริยานิวเคลียร์ได้อย่างเหมาะสม

เอกสารอ้างอิง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. **ทฤษฎีจำนวน**.กรุงเทพฯ : สำนักพัฒนาธุรกิจ, 2544.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. **คอมบินาทอริก**. กรุงเทพฯ : สำนักพัฒนาธุรกิจ, 2544.

อัจฉรา หาญชูวงศ์. **ทฤษฎีจำนวน**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

บัญชีสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

1. $\cup$	อ่านว่า Union $A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4\}$ $A \cup B = \{1,2,3,4\}$		$P = \{1,2,3,4\}$ $Q = \{2,3,4,5\}$ $R = \{1,2,3\}$ $S = \{6\}$ $P \cup Q = \{1,2,3,4,5\}$ $P \cup R = P$ $P \cup S = \{1,2,3,4,6\}$
	$A \cup B = \{ x \mid x \in$ หรือ $x \in B$ หรือ x เป็นสมาชิกของทั้งสองเซต $\}$		
2. $\cap$	อ่านว่า Intersection ของเซต $A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4\}$ $A \cap B = \{3\}$ $A \cap B = \{ x \mid x \in$ และ $x \in B \}$		$P = \{1,2,3,4\}$ $Q = \{2,3,4,5\}$ $R = \{1,2,3\}$ $S = \{6\}$ $P \cap Q = \{2,3,4\}$ $P \cap R = R$ $P \cup S = \varphi$
3. $\phi, \{\ \}$	อ่านว่า Empty set หรือ เซตว่าง		

4. $\in$ อ่านว่า เป็นสมาชิกของ

$A = \{1,2,3\}$

$1 \in A$

$2 \in A$

$3 \in A$

5. $\notin$ อ่านว่า ไม่เป็นสมาชิกของ

$A = \{1,2,3\}$

$4 \notin A$

6. $\square$ อ่านว่า Natural No หมายถึง จำนวนธรรมชาติหรือจำนวนนับ

7. $\vee$ อ่านว่า หรือ เป็นสัญลักษณ์เชื่อมประพจน์

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

8. $\wedge$ อ่านว่า และ เป็นสัญลักษณ์ เชื่อมประพจน์

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

9. $\neq$ เป็นสัญลักษณ์ แทนไม่เท่ากัน

$A = \{ x | x$ เป็นสระในภาษาอังกฤษ $\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

$C = \{1,2,3,4,5\}$

$A = B$

$B \neq C$

10. $\leq$ เป็นสัญลักษณ์ แทนน้อยกว่าหรือเท่ากับ

$A = \{ x | x \in I^{+}$ และ $x \leq 5 \}$

$A = \{1,2,3,4,5\}$

11. ≥ เป็นสัญลักษณ์ แทนมากกว่าหรือเท่ากับ

$$A = \{\ x | x \in I \text{ และ } \geq 3\ \}$$

$$A = \{3,4,5...\ \}$$

---

12. $\bar{i}$ เป็นสัญลักษณ์ แทนปริมาณเวคเตอร์ i

$\overrightarrow{CD}$ เป็นสัญลักษณ์ แทนปริมาณเวคเตอร์ CD
หมายถึง เวคเตอร์ที่มีทิศทางจาก C ไป D

$\overrightarrow{EF}$ เป็นสัญลักษณ์ แทนปริมาณเวคเตอร์ EF
หมายถึง เวคเตอร์ที่มีทิศทางจาก E ไป F

$|\overrightarrow{CD}|$ เป็นสัญลักษณ์ แทนขนาดของเวคเตอร์ $\overrightarrow{CD}$

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ดร.อำรุง จันทวานิช	เลขาธิการสภาการศึกษา
ดร.สิริพร บุญญานันต์	รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	ที่ปรึกษาด้านระบบการศึกษา
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้จัดทำรายงาน :

สุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร และคณะ	ครูโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ
นายภูมิพงศ์ วัฒนะประกรณ์กุล	นักเรียนโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
นายธนวิต แซ่ซือ	นักเรียนโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา
นายสุขุม สัตตรัตนามัย	นักเรียนโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา	หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
นายรวิช ตาแก้ว	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ

บรรณาธิการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา
นายรวิช ตาแก้ว

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : http://www.onec.go.th
http://www.thaigifted.org