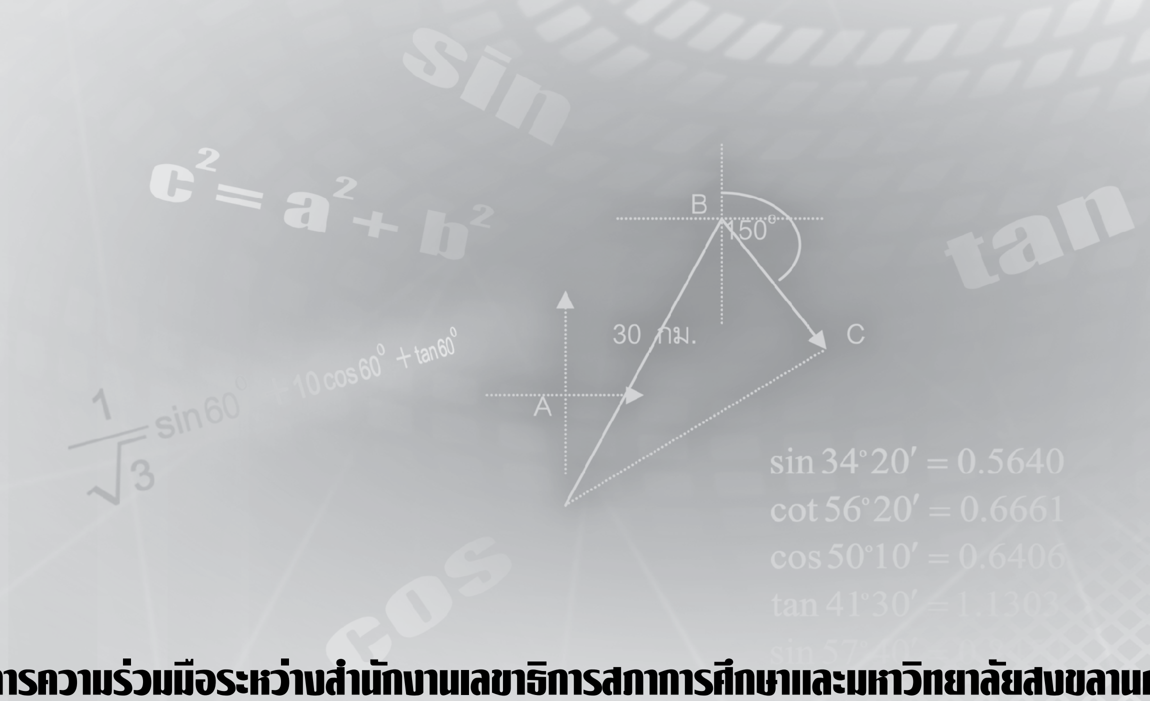
หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้
ตรีโกณมิติ



โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้

371.95	สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
ส 691 ผ	แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ตรีโกณมิติ หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กรุงเทพฯ : 2551
	183 หน้า
	ISBN 978-974-559-306-0
	1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร 2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ตรีโกณมิติ หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สิ่งพิมพ์ สกศ. อันดับที่ 48 /2551

พิมพ์ครั้งที่ 1 พฤษภาคม 2551

จำนวน 1,000 เล่ม

จัดพิมพ์เผยแพร่ สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา

99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300

โทร. 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530

โทรสาร. 0-2243-1129, 0-2668-7329

Web site: http://www.onec.go.th และ www.thaigifted.org

ผู้พิมพ์ บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด

580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1

ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230

โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753

คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ตรีโกณมิติ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

อำรุง

(นายอำรุง จันทวานิช)

เลขาธิการสภาการศึกษา

คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ใน มาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียนในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และPost-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน

ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน

ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ระดับ		เนื้อหา	จำนวนคาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบเขียนแผนการจัดการเรียนรู้
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		7. ตรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึก และมหาวชิราวุธ
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด	40	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	
		▪ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ)		โรงเรียนบูรณะรำลึก
		▪ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ)		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		▪ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ)		โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
รวม			100	

สารบัญ

ส่วนที่ 1

เรื่อง *หน้า*

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง ประวัติวิชาตรีโกณมิติและความหมายตรีโกณมิติ 2

ใบความรู้ที่ 1 4

แบบฝึกทักษะที่ 1 7

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย 8

ใบความรู้ที่ 2 11

แบบฝึกทักษะที่ 2 14

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง ทฤษฎีบทปีทาโกรัส 16

เอกสารฝึกหัดทบทวนที่ 3 19

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ 20

เอกสารแนะแนวทางที่ 4.1 23

เอกสารแนะแนวทางที่ 4.2 24

แบบฝึกทักษะที่ 4 25

โจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ 27

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 28

เอกสารฝึกหัดที่ 5 31

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60° 33

กิจกรรมที่ 6 35

เอกสารประกอบการเรียนที่ 6 36

เอกสารฝึกหัดที่ 6 39

แบบฝึกทักษะที่ 6 40

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	*หน้า*
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7	
เรื่อง การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมระหว่าง 0° ถึง 90° โดยใช้ตาราง	43
เอกสารฝึกหัดที่ 7	45
แบบฝึกทักษะที่ 7	46
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8	
เรื่อง การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้	50
ใบความรู้ที่ 8	52
ใบงานที่ 8	56
แบบฝึกทักษะที่ 8	58

ส่วนที่ 2

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9	
เรื่อง การวัดความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง	62
ใบงานที่ 9	64
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10	
เรื่อง การวัดความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง	68
ใบงานที่ 10	75
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11	
เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	81
ใบงานที่ 11.1	83
ใบงานที่ 11.2	84
ใบงานที่ 11.3	85
ใบงานที่ 11.4	86
ใบงานที่ 11.5	87
ใบงานที่ 11.6	88
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12	
เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ	90
ใบงานที่ 12.1	92
ใบงานที่ 12.2	93

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	*หน้า*
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13	
เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	95
ใบงานที่ 13.1	97
ใบงานที่ 13.2	98
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14	
เรื่อง การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง	100
ใบงานที่ 14.1	102
ใบงานที่ 14.2	102
ใบงานที่ 14.3	103
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15	
เรื่อง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	105
ใบงานที่ 15.1	108
ใบงานที่ 15.2	108

ส่วนที่ 3

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16	
เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์	114
ใบความรู้ที่ 16	116
ใบงานที่ 16	126
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 17	
เรื่อง อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	135
ใบความรู้ที่ 17	137
ใบงานที่ 17	145
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 18	
เรื่อง เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ	150
ใบความรู้ที่ 18	152
ใบงานที่ 18	158
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 19	
เรื่อง กฎของไซน์ โคไซน์ ระยะทางและความสูง	165
ใบความรู้ที่ 19	167
ใบงานที่ 19	170

ส่วนที่ 1

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง **ประวัติวิชาตรีโกณมิติและความหมายตรีโกณมิติ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ ความเข้าใจถึงประวัติวิชาตรีโกณมิติและความหมายของตรีโกณมิติ

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

มีความรู้ ความเข้าใจเรื่องประวัติวิชาตรีโกณมิติ และ ความหมายของตรีโกณมิติ

2. แนวความคิดหลัก (สาระสำคัญ)

ประวัติ และ ความหมายของวิชาตรีโกณมิติ จะทำให้เกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาวิชา

3. เนื้อหาสาระ

1. ประวัติวิชาตรีโกณมิติ
2. ความหมายของตรีโกณมิติ

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นเรื่องคณิตศาสตร์มีความจำเป็นต่อชีวิตประจำวันอย่างไรบ้าง

2. ครูแจกใบความรู้ที่ 1 ให้นักเรียน ทุกคน และให้นักเรียนอ่านประมาณ 20 นาที แล้วให้นักเรียนเข้ากลุ่มๆ ละ 4 คน อภิปรายกัน ในหัวข้อที่ว่า จากการอ่านใบความรู้ที่ 1 นักเรียนได้ความรู้ หรือ ข้อสรุปอะไรบ้าง

3. ครูใช้การถามตอบสุ่มเรียกตัวแทนกลุ่มต่าง ตอบคำถามนั้น แล้วบันทึกคำตอบที่แต่ละกลุ่มตอบได้บนกระดาน แล้วครูสรุปปัญหาที่นักเรียนทำกิจกรรมจากการอ่าน

4. ให้นักเรียนสรุปใบความรู้ที่ 1 ในแบบฝึกทักษะที่ 1

5. ใช้การถามตอบให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบข้อสรุปที่สรุปได้ถูกต้อง ครบถ้วนหรือไม่

6. จากใบความรู้ที่ 1 และแบบฝึกทักษะที่ 1 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปให้ได้ว่า

“ วิชาตรีโกณมิติไม่ได้เป็นผลงานของผู้หนึ่งผู้ใดและของชาติใด ”

" ตรีโกณมิติของชาวอียิปต์ ได้ถูกนำไปใช้ในการก่อสร้างสิ่งที่ยิ่งใหญ่ คือ พีระมิด"

" ตรีโกณมิติของชาวบาบิโลน มีหลักฐานที่บอกว่าชาวบาบิโลนรู้จักวิชาตรีโกณมิติ คือ ชิ้นส่วนของวงกลมซึ่งเป็นเครื่องมือในการวัดมุม"

" ตรีโกณมิติของชาวกรีก มีนักดาราศาสตร์เฮโรโดตัส ได้กล่าวว่า ชาวกรีกได้นำนาฬิกาแดดของชาวบาบิโลนมาใช้เป็นเครื่องมือแบบหนึ่งของการสังเกตทางดาราศาสตร์"

5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1
2. แบบฝึกทักษะที่ 1

6. การวัดผลและประเมินผล

วิธีวัด	เครื่องมือวัด	การประเมินผล
1. สังเกตจากการถามตอบ		
2. ตรวจแบบฝึกทักษะ	แบบฝึกทักษะ	

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 1
ประวัติวิชาตรีโกณมิติ

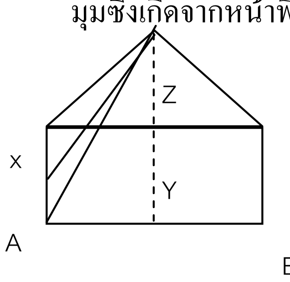
วิชาตรีโกณมิติก็เหมือนวิชาอื่นๆ ของคณิตศาสตร์ ซึ่งไม่ได้เป็นผลงานของผู้หนึ่งผู้ใดหรือชาติใดชาติหนึ่ง ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวัดสามเหลี่ยมเป็นที่รู้จักและใช้กันมาตั้งแต่ชาวอียิปต์โบราณและชาวบาบิโลน เมื่อประมาณ 2,000 ปีก่อนคริสต์ศักราชได้มีการค้นพบว่าชาวกรีกได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของคอร์ดกับมุมที่รองรับคอร์ดนั้นอย่างมีระบบ ซึ่งเรื่องเหล่านี้เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายของชาวกรีกสมัยฮิปโปเครตีส (Hippo-crates) ประมาณ 460 ปีก่อนคริสต์ศักราช ต่อมาประมาณ 408 – 355 ปีก่อนคริสต์ศักราชยูโดซัส (Eudoxus) ใช้อัตราส่วนและการวัดมุมในการหาขนาดของโลกและระยะทางสัมพัทธ์ระหว่างดวงอาทิตย์และดวงจันทร์ ส่วนผลงานยุคลิดในทางเรขาคณิตนั้นมีทฤษฎีบทที่สามารถใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบททางตรีโกณมิติ โดยเฉพาะทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับความยาวของคอร์ด ซึ่งคล้ายกับไซน์และโคไซน์ของผลบวกและผลต่างของมุม

ตรีโกณมิติของชาวอียิปต์

Pyramids of Giza

ในอาเมสปาปิรัส (Ahmes papyrus) (1,500 B.C.) มีปัญหาอยู่ 5 ข้อ เกี่ยวกับเรื่องการวัดพีระมิด ซึ่ง 4 ใน 5 ข้อนี้กล่าวถึงคำว่า “Sept of angle” ของมุม คำว่า Sept นี้ไอน์สไตน์ (Einstein , ค.ศ. 1823 - 1852) ได้ให้ความหมายว่าเป็นอัตราส่วนจำนวน (ratio number) จากการบันทึกในอาเมสปาปิรัสนี้ไม่ได้ให้ความหมายหรือคำอธิบายเกี่ยวกับ “ Sept ” ไว้ แต่จากเนื้อเรื่องที่บันทึกได้มีการสันนิษฐานว่า “Sept of angle” หมายถึง โคแทนเจนต์ของมุมซึ่งเกิดจากหน้าพีระมิดกับฐานของมันโดยทั่วไป

พีระมิดในอียิปต์ ใช้เป็นที่ฝังพระศพ เป็นสิ่งก่อสร้างที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ด้านข้างทั้งสี่เป็นรูปสามเหลี่ยมปลายจุดยอดไปบรรจบกันที่ยอด

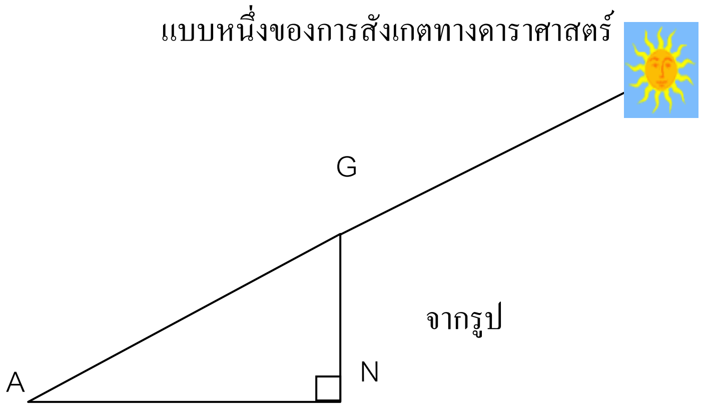


โดยทั่วๆ ไปพีระมิดที่สร้างโดยชาวอียิปต์ให้มุม YXZ มีค่าคงที่ ประมาณ 52 องศา และมุม YAZ มีค่าคงที่ ประมาณ 42 องศา

ตรีโกณมิติของชาวบาบิโลน

จากความสัมพันธ์ในวิชาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของชาวอียิปต์กับชาวบาบิโลน ตั้งแต่ 3,000 ปีก่อนคริสต์ศักราช เป็นต้นมา ทำให้สันนิษฐานได้ว่า ชาวบาบิโลนคงรู้จักตรีโกณมิติของอียิปต์ดั้งเดิม แต่ไม่มีหลักฐานยืนยันนอกจากหลักฐานที่เกี่ยวกับการวัดมุมที่ตกทอดมาถึงปัจจุบันคือ ชิ้นส่วนของวงกลมซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของเครื่องมือวัดมุมแต่โบราณ

เฮโรโดตัส (Herodotus , 484 – 425 ปีก่อนคริสต์ศักราช) นักดาราศาสตร์เมื่อ 450 ปีก่อนคริสต์ศักราช ได้กล่าวไว้ว่า ชาวกรีกได้นำเอา **นาฬิกาแดด** ของชาวบาบิโลนมาใช้ นาฬิกาแดดมีความสัมพันธ์กับวิชาตรีโกณมิติที่ว่า เป็นเครื่องมือวัดแบบหนึ่งของการสังเกตทางดาราศาสตร์



จากรูป

ให้ GN เป็นเสาซึ่งทราบความสูง

AN เป็นเงาของเสา GN

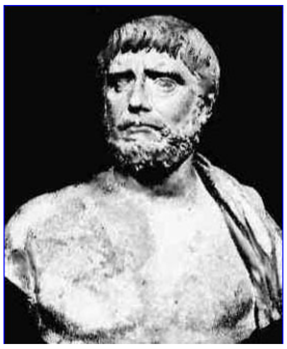
S เป็นดวงอาทิตย์

GN มีค่าคงที่แต่ AN แปรผันไปตามมุม A หมายความว่า GN : AN เป็นฟังก์ชันของมุม A นั่นคือ โคแทนเจนต์ของมุม A นั่นเอง แต่ในสมัยนั้นยังไม่มีการใช้ชื่อ โคแทนเจนต์ นอกจากคำว่า **Sept**

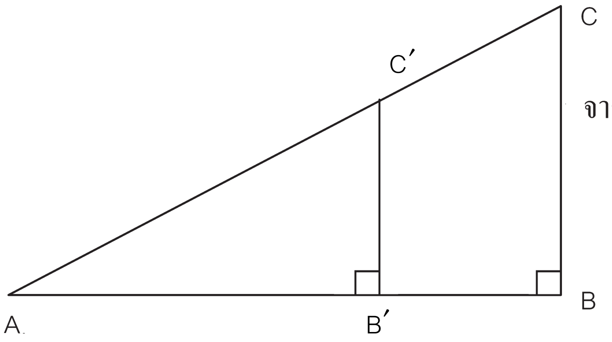
ทาเลส (Thales , 640 – 546 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ได้รับการยกย่องว่าเป็นผู้เชี่ยวชาญในการคำนวณเงา การวัดความสูงของพีระมิดโดยใช้เงานั้น ทาเลสใช้การเปรียบเทียบเงาของพีระมิดกับเงาของต้นไม้ซึ่งทราบความยาว

เกร็ดความรู้

เกร็ดความรู้



ทาเลส เป็นนักปรัชญามีความรู้ทั้งคำนวณดาราศาสตร์ ฟิสิกส์ เขาคือผู้คิดวัดความสูงของพีระมิด โดยใช้หลักของความคล้ายกัน เขาเป็นที่รู้จักในนามบิดาแห่งคณิตศาสตร์และ ดาราศาสตร์



จากรูป BC แทน ความสูงของพีระมิด

$B'C'$ แทน ความสูงของต้นไม้

AB แทน ความยาวของเงาพีระมิด

AB' แทน ความยาวของเงาต้นไม้

ทาเลส ให้ความสัมพันธ์ จากรูปดังต่อไปนี้

$$BC : AB = B'C' : AB'$$

นั่นคือ BC : AB คือขนาดของ tan A ที่เรารู้จักกันในปัจจุบันนี้

ในสมัยโจวเป่ย ซูอันเกิง (Chou-pei Suan-king, ประมาณ 1,105 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ชาวจีนรู้จักใช้สามเหลี่ยมมุมฉากสำหรับวัดระยะทาง ความสูง และความลึก ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ชาวจีนในสมัยนั้นมีความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างด้านต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตรีโกณมิติ (Trigonometry) เป็นวิชาที่ว่าด้วยการคำนวณเกี่ยวกับด้าน มุม และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมาจากคำว่า

ตรี – tri แปลว่า สาม

โกณ – gono แปลว่า ด้าน

มิติ – metry แปลว่า การวัด

ความหมายของตรีโกณมิติ

ตรีโกณมิติ หมายถึง วิทยาศาสตร์วิเคราะห์ (Analysis Science) จุดเริ่มต้นของวิชานี้ เริ่มในศตวรรษที่ 17 หลังจากพัฒนาสัญลักษณ์พีชคณิต

ตรีโกณมิติ หมายถึง เรขาคณิตเกี่ยวกับดาราศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการวัดมุม ต้นกำเนิดของวิชานี้อาจจะอยู่ที่ผลงานของฮิปพาร์คัส (Hipparchus)

ตรีโกณมิติ หมายถึง การวัดรูปสามเหลี่ยมต้นกำเนิดของวิชานี้อาจจะมีมานานราว 2,000 ปีก่อนคริสต์ศักราช

แบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่อง ประวัติของวิชาตรีโกณมิติ และ ความหมายของตรีโกณมิติ

ชื่อ..ชั้น..............................เลขที่...........................

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง มีความรู้ ความเข้าใจถึงประวัติวิชาตรีโกณมิติ และความหมายของตรีโกณมิติ

1. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 1 ประวัติของวิชาตรีโกณมิติ และ ความหมายของตรีโกณมิติ
2. เมื่อศึกษาใบความรู้ที่ 1 เสร็จแล้วให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 ตรีโกณมิติเป็นผลงานของใคร ? และของชาติใด ?..

2.2 ตรีโกณมิติของชาวอียิปต์ ได้ถูกนำมาใช้ในการก่อสร้างสิ่งที่ยิ่งใหญ่คืออะไร………………

2.3 ตรีโกณมิติของชาวบาบิโลน มีหลักฐานที่บอกว่าชาวบาบิโลนรู้จักวิชาตรีโกณมิติหรือหลักฐานที่สัมพันธ์กับวิชาตรีโกณมิติคืออะไร...

2.4 ตรีโกณมิติของชาวกรีก มีนักดาราศาสตร์เฮโรโดตัสได้กล่าวว่า ชาวกรีกได้นำเอาเครื่องมืออะไร ? ของชาวบาบิโลนมามาใช้ และเครื่องมือนี้มีความสัมพันธ์กับวิชาตรีโกณมิติอย่างไร ?

………...

....

2.5 นาฬิกาแดดของชาวบาบิโลนคืออะไร...

....

2.6 ทาเลส (Thales , 640 – 546 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ได้รับการยกย่องอย่างไร..........................

....

2.7 ตรีโกณมิติของชาวจีน ชาวจีนรู้จักวิชาตรีโกณมิติในสมัยของใคร ประมาณปีใด

....

2.8 ความหมายของตรีโกณมิติคืออะไร...

....

....

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง **สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. มีความรู้ ความเข้าใจเรื่องสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย
2. สามารถหาอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันสองรูปได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

มีความรู้ ความเข้าใจเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย และ สามารถคำนวณหาอัตราส่วนของสามเหลี่ยมคล้ายได้

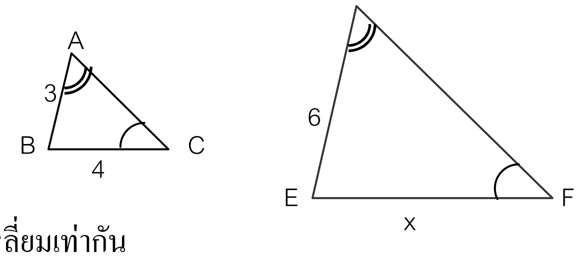
2. แนวความคิดหลัก

สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย และความคิดรวบยอดของสามเหลี่ยมคล้าย มีประโยชน์ในการหาอัตราส่วนของด้านของรูปสามเหลี่ยม

3. เนื้อหาสาระ

1. สามเหลี่ยม สองรูปคล้ายกันก็ต่อเมื่อสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีมุมเท่ากัน 3 คู่ มุมต่อมุม
2. มุมที่เท่ากันในรูปสามเหลี่ยมคล้าย เรียกว่ามุมที่สมนัยกัน
3. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นสามเหลี่ยมคล้ายแล้ว มุมที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองจะมีขนาดเท่ากัน
4. ด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่สมนัยกัน เรียกว่าด้านที่สมนัยกัน
5. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นสามเหลี่ยมคล้ายแล้ว อัตราส่วนของความยาวด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป จะเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า x จากรูปที่กำหนดให้

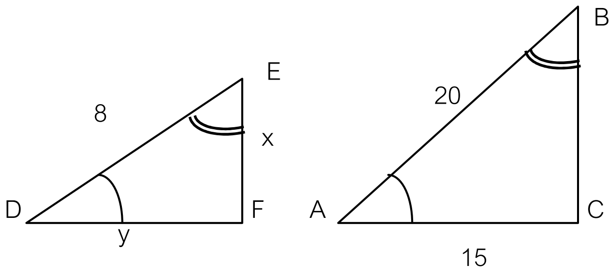


จากรูป มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเท่ากัน

ดังนั้น $\Delta ABC \approx \Delta DEF$, $\frac{x}{4} = \frac{6}{3}$, $x = \frac{6 \times 4}{3}$

จะได้ $x = 8$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา EF และ DF เมื่อ $B\hat{A}C = E\hat{D}F$, $A\hat{B}C = D\hat{E}F$, AC = 15 หน่วย AB = 20 หน่วย BC = 10 หน่วย DE = 8 หน่วย



จากรูป $\Delta ABC \approx \Delta DEF$

$$\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{y}{15} = \frac{8}{20}$$

$$y = 6$$

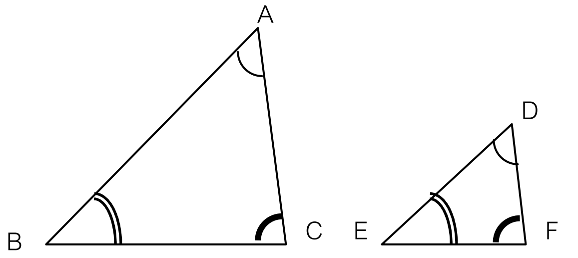
ดังนั้น DF = 6 หน่วย

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นว่า คนเราคล้ายกัน สังเกตหรือพิจารณาจาก อะไรได้บ้าง

2. ครูให้นักเรียนดูใบไม้ชนิดเดียวกัน 2 ใบ มีขนาดต่างๆ ให้นักเรียนอภิปรายว่าคล้ายกันหรือไม่ โดยสังเกตจากอะไร

3. ครูใช้การถามตอบทบทวนเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย สามเหลี่ยมสองรูปเป็นสามเหลี่ยมคล้ายกันเมื่อใด มีสมบัติใดบ้างที่เกี่ยวข้องกับสามเหลี่ยมคล้าย และจากการตอบของนักเรียนครูจะวาดรูปสามเหลี่ยม และ สรุปอัตราส่วนที่เท่ากันไว้บนกระดาน



$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$$

4. ครูให้นักเรียนสรุปให้ได้ว่า

“ สามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน **ก็ต่อเมื่อ** สามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีมุมเท่ากัน 3 คู่ มุมต่อมุม ”

“ อัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ”

5. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างที่ 1 และ 2 บนกระดาน ใช้การถามตอบ แสดงวิธีทำตัวอย่างทั้ง 2 ข้อ

6. ครูให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องจากใบความรู้ที่ 2 และให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ ที่ 2 เป็นแบบฝึกหัดส่งให้ตรวจ

8. นักเรียนทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ 2 ข้อ

5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้

ใบความรู้ที่ 2

แบบฝึกทักษะที่ 2

ใบไม้

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

วิธีวัด	**เครื่องมือวัด**	**การประเมินผล**
1. สังเกตจากการถามตอบ	ตัวอย่าง	
2. ตรวจแบบฝึกทักษะ	แบบฝึกทักษะ	
3. ตรวจผลงานจากการทำใบกิจกรรม	ใบกิจกรรม	

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 2

ทบทวนเรื่องสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย

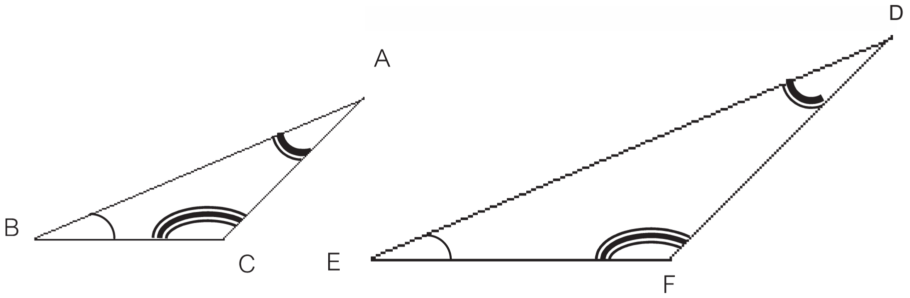
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. มีความรู้ ความเข้าใจเรื่องสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย
2. สามารถนำคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้

สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย

1. สามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันก็ต่อเมื่อ สามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีมุมเท่ากัน 3 คู่ มุมต่อมุม

พิจารณารูป $\triangle$ ABC และ $\triangle$ DEF



กำหนดให้

$\hat{A} = \hat{D}$

$\hat{B} = \hat{E}$

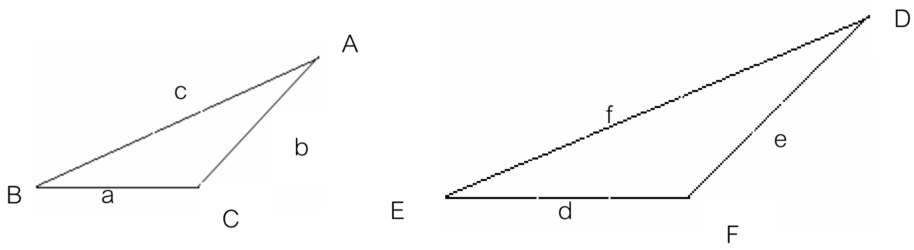
$\hat{C} = \hat{F}$

จะสรุปได้ว่า

Δ ABC ~ Δ DEF

(Δ ABC คล้ายกันกับ Δ DEF

2. “อัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงกันข้ามที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสาม อัตราส่วน” ให้ นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมคล้ายสองรูปดังนี้



จากรูป Δ ABC ~ Δ DEF ดังนั้น $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

จาก $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ ดังนั้น $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$

(สมบัติการเท่ากันของอัตราส่วน)

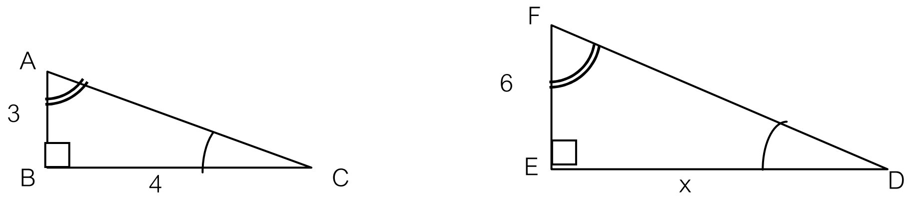
จาก $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$ ดังนั้น $\frac{b}{c} = \frac{d}{f}$

(สมบัติการเท่ากันของอัตราส่วน)

และ $\frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ดังนั้น $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$

(สมบัติการเท่ากันของอัตราส่วน)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า x จากรูปที่กำหนดให้



วิธีทำ จากรูปที่กำหนดให้มุมทั้ง 3 เท่ากัน ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม DEF

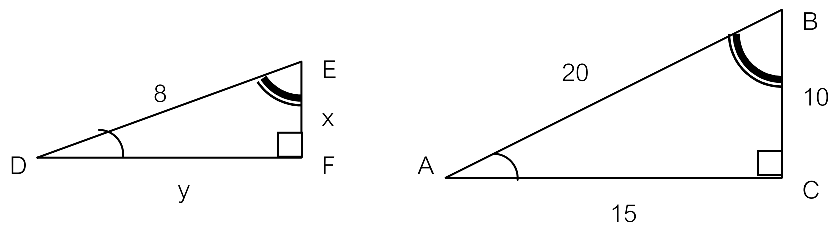
$$\frac{x}{4} = \frac{6}{3}$$

จะได้ว่า $x = \frac{6}{4} \times 4$

$$\therefore\ x = 8$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา EF และ DF เมื่อ $B\hat{A}C = E\hat{D}F,\ A\hat{B}C = D\hat{E}F$

AC = 15 หน่วย , AB = 20 หน่วย , BC = 10 หน่วย , DE = 8 หน่วย



วิธีทำ จาก $\Delta\ ABC$ และ $\Delta\ DEF$

1. $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ กำหนดให้
2. $\hat{C} = \hat{F}$ มุมภายในรูปสามเหลี่ยม

ดังนั้น $\Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF$

นั่นคือ

$$\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{y}{15} = \frac{8}{20}$$

$$y = \frac{8 \times 15}{20}$$

$$y = 6$$

ดังนั้น DE ยาว 6 หน่วย

$$\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{8}{20}$$

$$x = \frac{8 \times 10}{20}$$

$$x = 4$$

นั่นคือ EF ยาว 4 หน่วย

แบบฝึกทักษะที่ 2

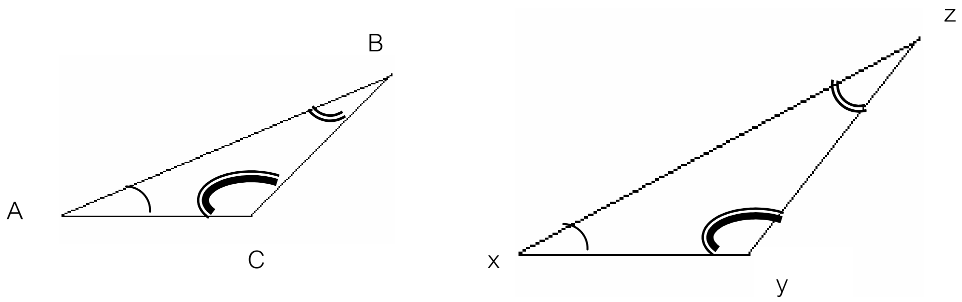
เรื่อง สมบัติสามเหลี่ยมคล้าย

ชื่อ..ชั้น.......................เลขที่..............

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง 1. มีความรู้ ความเข้าใจ เรื่องสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย

2. สามารถหาอัตราส่วนของสามเหลี่ยมคล้ายได้

1. ให้นักเรียนเติมข้อความให้สมบูรณ์ โดยใช้สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย

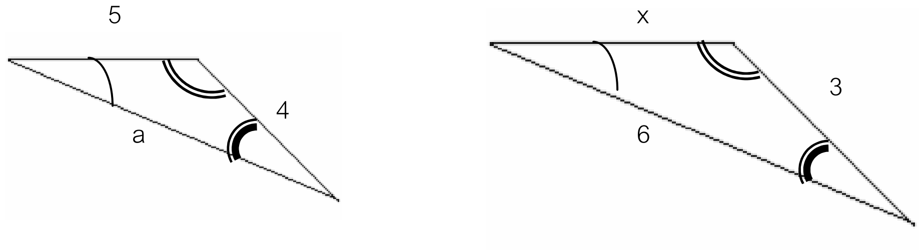


$\frac{a}{b}$ = ... $\frac{c}{a}$ = ...

$\frac{a}{x} = \frac{\quad}{y}$ $\frac{z}{b} = \frac{y}{\quad}$

$\frac{b}{z} = \frac{a}{\quad}$ $\frac{c}{b} =$

2.



(1) จงหาค่า a

วิธีทำ..

…………………………………………..

…………………………………………..

…………………………………………..

(2) จงหาค่า x

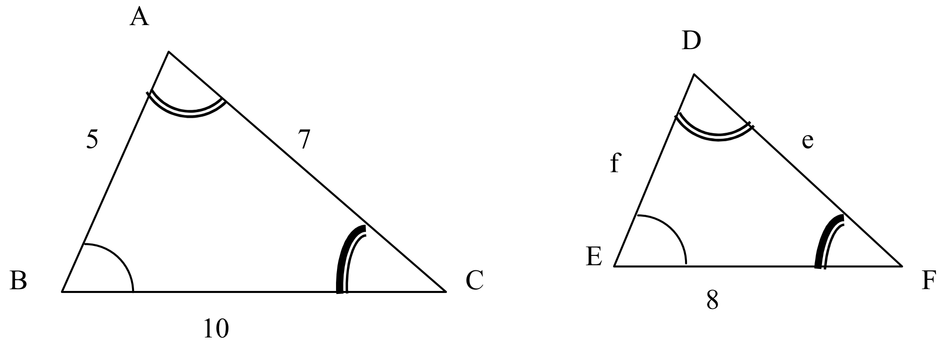
วิธีทำ..

…………………………………………....

…………………………………………….

…………………………………………..

3.



(1) จงหาค่า a

วิธีทำ..
....
....
....

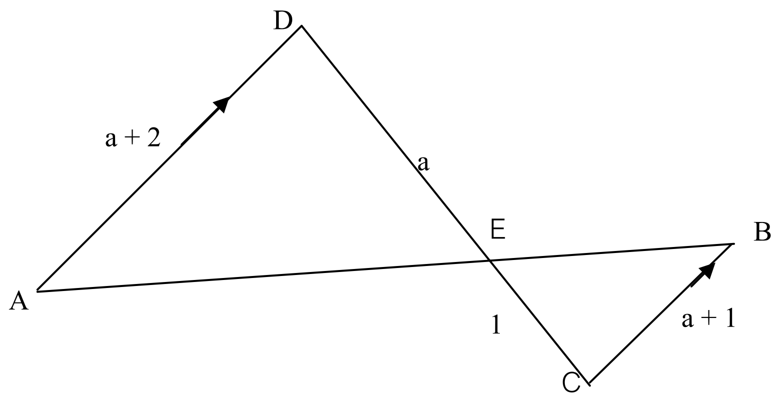
(2) จงหาค่า f

วิธีทำ ....
…………………………………………
....
....

(3) ถ้า $f = 4$ จงหาค่า e

วิธีทำ..
………………………………………………………………..………………………………
……………………………………………………………………………………………………..

4. ถ้า BC ขนานกับ AD จงหาค่า a เมื่อ $BC = a + 1$, $AD = a + 2$, $DE = a$ และ $CE = 1$



วิธีทำ ....
....
....
....
....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง **ทฤษฎีบทปีทาโกรัส** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. มีความรู้ ความเข้าใจเรื่องอัตราส่วนรูปสามเหลี่ยมและทฤษฎีบทปีทาโกรัส
2. บอกได้ว่าสามเหลี่ยมรูปใด เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
3. นำความรู้เรื่องทฤษฎีบทปีทาโกรัสมาใช้ในการแก้ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. มีความรู้ ความเข้าใจเรื่องทฤษฎีบทปีทาโกรัส
2. สามารถหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ทฤษฎีบทปีทาโกรัส

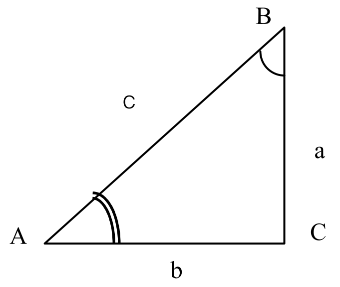
2. แนวความคิดหลัก

ทฤษฎีบทปีทาโกรัส มีประโยชน์ในการหาความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งจะได้นำไปใช้ในการหาอัตราส่วนของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

3. เนื้อหาสาระ

ทฤษฎีบทปีทาโกรัส (Pythagoras' theory)

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสองมีค่าเท่ากับผลบวกของกำลังสองของอีก 2 ด้าน



จากรูปให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม ACB เป็นมุมฉาก c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังนี้

$$c^2 = a^2 + b^2$$

เมื่อ a แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม A

b แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม B

c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม C

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูถามนักเรียนว่านักเรียนรู้จักนักคณิตศาสตร์ชื่อปีทาโกรัสหรือไม่ ครูเล่าประวัติปีทาโกรัสให้นักเรียนฟัง

2. ครูเขียนทฤษฎีบทปีทาโกรัส บนกระดานพร้อมทั้งวาดรูปประกอบ แล้วครูแนะนำด้านต่างๆ ของสามเหลี่ยมเช่น ด้านตรงข้ามมุมฉาก ด้านประกอบมุมฉาก พร้อมทั้งให้นักเรียนลอกลงในสมุด

3. ครูอธิบายทฤษฎีบทปีทาโกรัส พร้อมทั้งแสดงให้นักเรียนเห็นจริงว่า $c^2 = a^2 + b^2$ โดยใช้สื่อรูปพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส

4. ครูกำหนดสามเหลี่ยมมุมฉากรูปใหม่ โดยกำหนดความยาวของด้านเป็น x, y, z หรือ M, N, O ฯลฯ แล้วให้นักเรียนฝึกวิเคราะห์สูตร ตามทฤษฎีบทปีทาโกรัส โดยครูซักถามเป็นรายบุคคล

5. ครูกำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก และกำหนดด้านของสามเหลี่ยมเพียงสองด้าน แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาด้านที่สาม

6. ครูกำหนดโจทย์รูปสามเหลี่ยมและกำหนดความยาวของด้านทั้งสามด้าน แล้วให้นักเรียนตรวจสอบว่า สามเหลี่ยมที่ครูกำหนดขึ้นเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 3 โดยมีครูคอยให้คำชี้แนะ

8. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ

9. สอนให้นักเรียนร้องเพลงทฤษฎีบทปีทาโกรัส

เพลงทฤษฎีบทปีทาโกรัส

c กำลังสอง มีค่าเท่ากับ a กำลังสองบวก b กำลังสอง
c นั้นก็คือ ด้านตรงข้ามมุมฉาก
ส่วน a และ b คือด้านประกอบมุมฉาก

*** ทำนอง หกนาฬิกา***

10. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปให้ได้ว่า

ทฤษฎีบท

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
ด้านตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสอง
มีค่าเท่ากับผลบวกของกำลังสองของอีกสองด้าน

สูตร $c^2 = a^2 + b^2$

a แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม A

b แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม B

c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม C

5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 3
2. แบบฝึกทักษะที่ 3
3. เพลงทฤษฎีบทปีทาโกรัส
4. รูปพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส

6. การวัดผลและประเมินผล

วิธีวัด	เครื่องมือวัด	การประเมินผล
1. สังเกตจากการถามตอบและการวิเคราะห์	ใบความรู้	
2. ตรวจแบบฝึกทักษะ	แบบฝึกทักษะ	

7. บันทึกหลังการสอน

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

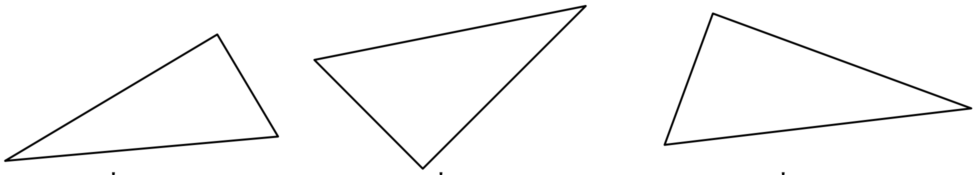
....

เอกสารฝึกหัดทบทวนที่ 3

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำความรู้เรื่องทฤษฎีบทปีทาโกรัสมาใช้แก้ปัญหาได้

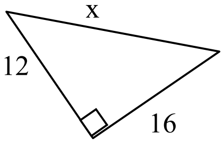
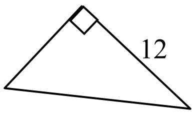
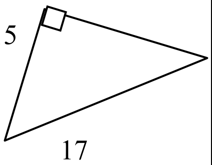
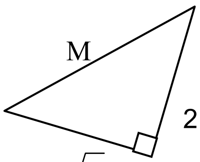
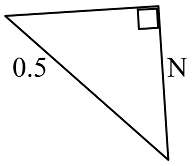
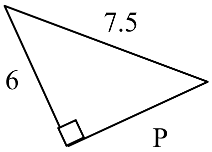
1. รูปและอัตราส่วนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นอัตราส่วนของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่แตกต่างกันมีอยู่เพียงรูปเดียวเท่านั้นที่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้พิจารณาว่าเป็นรูปใด โดยใช้ทฤษฎีบทปีทาโกรัส



รูปที่ 1	รูปที่ 2	รูปที่ 3
8 : 10 : 12	12: 16 : 20	7 : 12 : 13

…….
…….
…….
…….

2. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงใช้ทฤษฎีบทปีทาโกรัสหาความยาวของด้านที่เหลือ

รูปสามเหลี่ยม	ทฤษฎีบทปีทาโกรัส	รูปสามเหลี่ยม	ทฤษฎีบทปีทาโกรัส
	…………………… …………………… ……………………		…………………… …………………… ……………………
	…………………… …………………… ……………………		…………………… …………………… ……………………
	…………………… …………………… ……………………		…………………… …………………… ……………………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง **อัตราส่วนตรีโกณมิติ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้เรื่องการหาค่า sin , cos และ tan จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

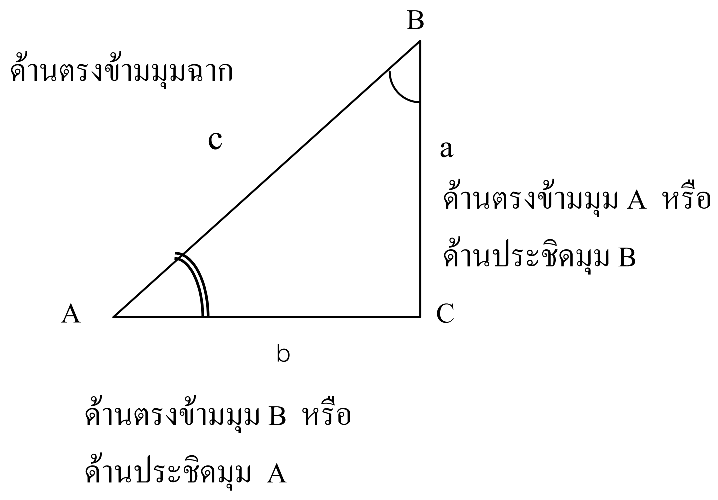
มีความรู้ ความเข้าใจ การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก sin , cos และ tan

2. แนวความคิดหลัก

สามารถหาค่า sine , cosine และ tangent ของมุม จากอัตราส่วนของด้านในสามเหลี่ยมมุมฉาก

3. เนื้อหาสาระ

กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม ACB เป็นมุมฉาก



$$\text{ไซน์ของมุม } A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม}A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{โคไซน์ของมุม } A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม}A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{แทนเจนต์ของมุม } A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม}A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม}A} = \frac{a}{b}$$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ทบทวนทฤษฎีบทปีทาโกรัสและสามเหลี่ยมคล้าย

2. ให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางที่ 4.1 และที่ 4.2 ซึ่งเป็นเอกสารฝึกการเรียกชื่อของด้านต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และอัตราส่วนตรีโกณมิติของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

3. ครูใช้การถามตอบตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารแนะแนวทางทั้ง 4.1 และ 4.2 และ ผลสรุปของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

4. ครูกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก บนกระดาน 1 รูป ให้นักเรียนบอกอัตราส่วนของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC หลายๆ คู่ เช่น อัตราส่วนของด้าน $\frac{AC}{AB}, \frac{BC}{AB}, \frac{BC}{AC}$ ฯลฯ แล้วให้นักเรียนเรียกชื่ออัตราส่วนของ ด้านที่นักเรียนบอกมานี้

5. ครูให้นักเรียนช่วยหาค่าของ sin B , cos B , tan B โดยการซักถาม

6. ครูกำหนดสามเหลี่ยมมุมฉากรูปใหม่ และกำหนดชื่อใหม่ เช่น xyz และกำหนดมุมฉาก แต่ละรูปต่างกัน ให้นักเรียนบอกค่าอัตราส่วน sin x , cos y , ฯลฯ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

7. ให้นักเรียนลอกสูตรของ sin A , cos A , tan A ลงในสมุด ครูอาจแนะนำสูตรลัดในการจำ เช่น $\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$, $\cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$,$\tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

8. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 4

9. ครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบ

10. ให้นักเรียนทำเอกสารแนะแนวทางในเวลาเรียน เป็นโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ แล้วส่งให้ตรวจเมื่อหมดคาบเรียน

เพลง sin , cos ,tan

ข้ามฉาก ชิดฉาก และก็ข้ามชิด สูตร sin , cos ,tan นี่หน่า
ด้านที่ ตรงข้ามกับมุม จะเรียกย่อๆ ยังไง เรียกมันว่า ฉากไง (ซ้ำ)
ด้านตรงข้ามมุม เรียกมันข้ามไง
ด้านประชิดมุม เรียกมันชิดเลย

**** ทำนอง เพลงเหลวไหล ****

5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้

เอกสารแนะแนวทางที่ 4.1 และ 4.2

แบบฝึกทักษะที่ 4

เพลง sin , cos , tan

6. การวัดผลและประเมินผล

วิธีวัด	เครื่องมือวัด	การประเมินผล
1. สังเกตจากการถามตอบและการวิเคราะห์	เอกสารแนะแนวทางที่ 4.1 และ 4.2	
2. ตรวจแบบฝึกทักษะ	แบบฝึกทักษะ	

7. บันทึกหลังการสอน

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

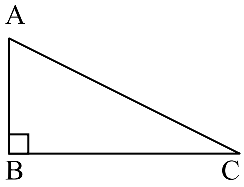
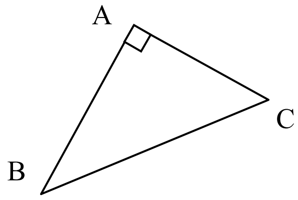
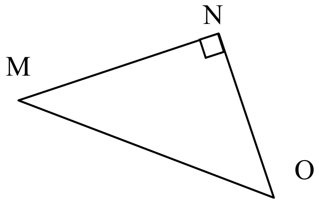
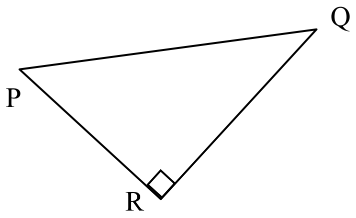
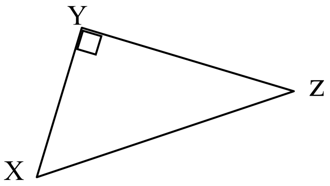
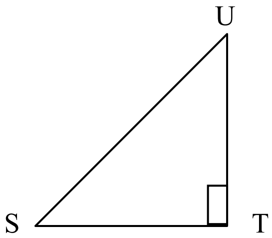
....

....

....

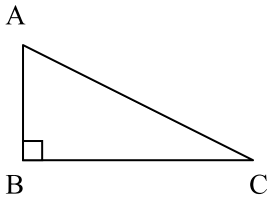
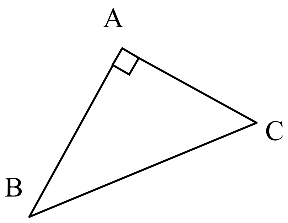
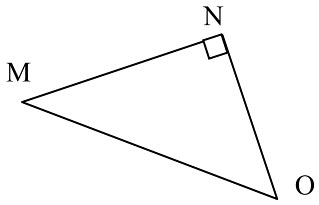
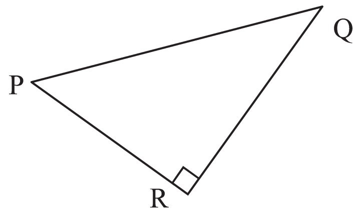
เอกสารแนะแนวทางที่ 4.1

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูป จงบอกชื่อด้านตามชื่อที่กำหนด

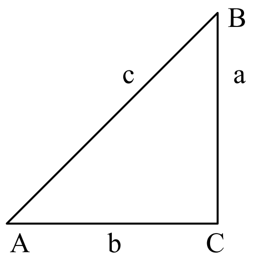
รูปสามเหลี่ยม	ชื่อของด้าน
	ด้านตรงข้ามมุมฉาก คือ ด้าน AC ด้านตรงข้ามมุม A คือ ด้าน BC ด้านประชิดมุม A คือ ด้าน AB ด้านตรงข้ามมุม C คือ ด้าน AB ด้านประชิดมุม C คือ ด้าน BC
	ด้านตรงข้ามมุมฉาก คือ ด้าน ………………..... ด้านตรงข้ามมุม A คือ ด้าน …………………. ด้านประชิดมุม A คือ ด้าน …………………. ด้านตรงข้ามมุม C คือ ด้าน ……………..…… ด้านประชิดมุม C คือ ด้าน …………………
	ด้านตรงข้ามมุมฉาก คือ ด้าน ……………..…... ด้านตรงข้ามมุม O คือ ด้าน …………………. ด้านประชิดมุม O คือ ด้าน ………………..... ด้านตรงข้ามมุม M คือ ด้าน ……………..…… ด้านประชิดมุม M คือ ด้าน …………………..
	ด้าน PQ คือ ด้านตรงข้ามมุมฉาก ด้าน PR คือ ด้านตรงข้ามมุม Q ด้าน RQ คือ ด้านตรงข้ามมุม P ด้าน PR คือ ด้านประชิด มุม P ด้าน RQ คือ ด้านประชิดมุม Q
	ด้าน XZ คือ …………………………………… ด้าน YZ คือ ………………………………มุม Z ด้าน XY คือ ………………………..…...มุม Z ด้าน XY คือ ………………………….......มุม X ด้าน YZ คือ ……………………………...มุม X
	ด้าน SU คือ …………………………………… ด้าน ST คือ ……………………………...มุม U ด้าน UT คือ ……………………………...มุม U ด้าน ST คือ …………………………........มุม S ด้าน UT คือ ……………………...……..มุม S

เอกสารแนะแนวทางที่ 4.2

จากอัตราส่วนตรีโกณของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์

รูปสามเหลี่ยม	อัตราส่วนของความยาวด้าน
	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert}=\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมC}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}=\sin C$ $\frac{\lvert BC\rvert}{\lvert AC\rvert}=\frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุมC}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}=\cos C$ $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert BC\rvert}=\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมC}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุมC}}=\tan C$
	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert BC\rvert}=\sin C$, $\frac{\lvert AC\rvert}{\lvert BC\rvert}=\cos C$, $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert}=\tan C$ $\frac{\lvert AC\rvert}{\lvert BC\rvert}=\sin B$, $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert BC\rvert}=\cos B$, $\frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AB\rvert}=\tan B$
	$\frac{\lvert MN\rvert}{\lvert MO\rvert}=.........O$, $\frac{\lvert NO\rvert}{\lvert MO\rvert}=........O$ $\frac{\lvert NO\rvert}{\lvert MN\rvert}=.........O$ $\frac{\lvert NO\rvert}{\lvert MN\rvert}=........M$
	$\sin P=$ ___ $\sin Q=$ ___ $\cos Q=$ ___ $\cos P=$ ___ $\tan Q=$ ___ $\tan P=$ ___

สรุปได้ว่า เมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี a เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , b เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม B และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม C



ไซน์ (sine)ของมุม A คือ ……………………………………………………

โคไซน์ (cosine)ของมุม A คือ ……………………………………………..….

แทนเจนต์(tangent) ของมุม A คือ ………………………………………….....

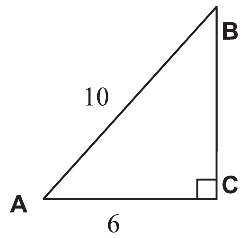
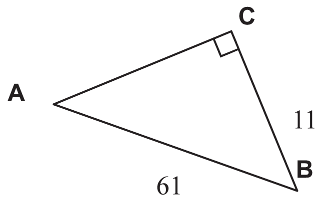
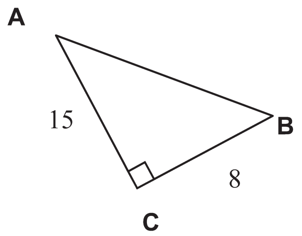
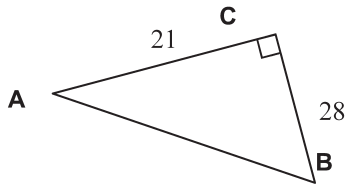
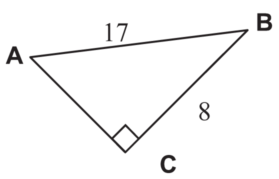
แบบฝึกทักษะที่ 4

เรื่อง การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ชื่อ..ชั้น..................เลขที่.......................

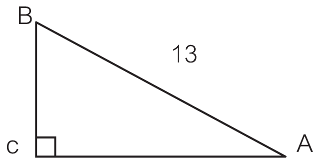
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง : หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง 1. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้แต่ละรูป จงหา sin A ,cosA ,tan A

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	วิธีทำ	หาค่าของ
	…………………………….. …………………………….. …………………………….. ……………………………..	sin A =…………………… cosA = …………………… tan A = …………………..
	…………………………….. …………………………….. …………………………….. ……………………………..	sin A =…………………… cosA = …………………… tan A = …………………..
	…………………………….. …………………………….. …………………………….. ……………………………..	sin A =…………………… cosA = …………………… tan A = …………………..
	…………………………….. …………………………….. …………………………….. ……………………………..	sin A =…………………… cosA = …………………… tan A = …………………..
	…………………………….. …………………………….. …………………………….. ……………………………..	sin A =…………………… cosA = …………………… tan A = …………………..

2. จงหาค่า ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุม A และมุม B จากรูปต่อไปนี้

1)

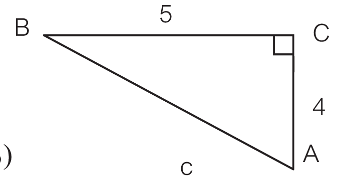


sin A =………… cos A =……….

sin B =………… cos B =……….

tan A =………… tan B =……….

2)

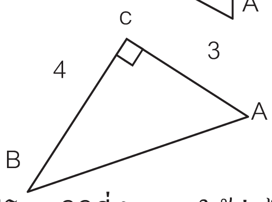


sin A =………… cos A =……….

sin B =………… cos B =……….

tan A =………… tan B =……….

3)

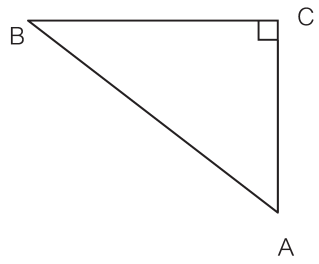


sin A =………… cos A =……….

sin B =………… cos B =……….

tan A =………… tan B =……….

3. จงหาว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A หรือ B



1) sin………. = $\dfrac{BC}{AB}$

2) sin………. = $\dfrac{AC}{AB}$

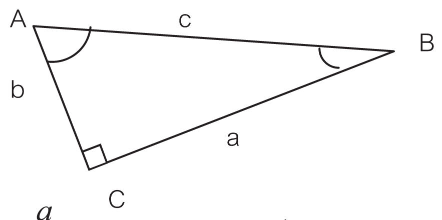
3) cos……… = $\dfrac{AC}{AB}$

4) cos……… = $\dfrac{BC}{AB}$

5) tan……… = $\dfrac{AC}{BC}$

6) tan……… = $\dfrac{BC}{AC}$

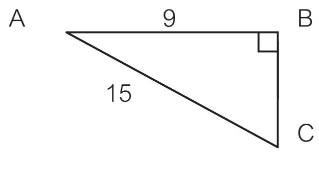
4. จงหาว่าอัตราส่วนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นค่าไซน์หรือโคไซน์ของมุมที่กำหนดให้



1) ………..A = $\dfrac{a}{c}$ 2) …………A = $\dfrac{b}{c}$

3) ………..B = $\dfrac{a}{c}$ 4) …………B = $\dfrac{b}{c}$

5. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่กำหนดให้ จงหา



1) sin A = ……………………..

2) tan A = ……………………..

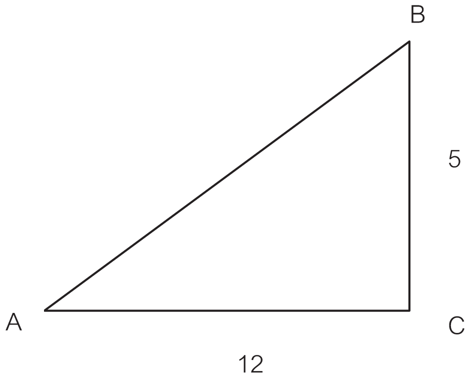
3) cos C = ……………………..

4) tan C = ……………………..

โจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉากและมีความยาวของด้านดังรูป จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไซน์ โคไซน์ และ แทนเจนต์ ของ มุม A และ B

วิธีทำ จากที่กำหนดให้ AC = 12 หน่วย BC = 5 หน่วย



$\tan A = \frac{BC}{AC}$ = ………………………………..

$\tan B$ = ……………………………………...…

การหาอัตราส่วนไซน์ และโคไซน์ของมุม A และ B จำเป็นต้องหาด้าน ………………………….……………

โดย ………………………………...………………...

……………………………………………..…………

…………………………………………...………………

ดังนั้น

$\sin A =$ …………………………………………………………………..……..

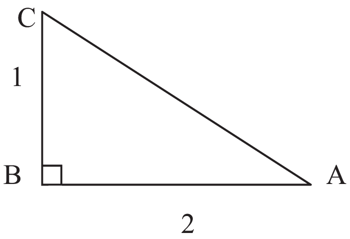
$\sin B =$ ……………………………………………………………………...…

$\cos A =$ ……………………………………………………………………..….

$\cos B =$ ……………………………………………………………………...……

2. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\tan A = \frac{1}{2}$ จงหา

1 sinA 2. cosA 3. sinC 4. cosC 5. tanC



สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีมุม B เป็นมุมฉาก

เพราะว่า $\tan A = \frac{1x}{2x}$

ให้ BC = 1x หน่วย และ AB = 2x หน่วย

ต้องหาด้าน ……………………………………………….………………..

โดย ………………………………………………………………..

…………………………………………………………...…

………………………………………………………………..

ดังนั้น

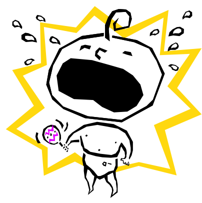
$\sin A =$ ……………………………………..…………..

$\sin C =$ ………………………………………………….

$\cos A =$ …………………………………………………

$\cos C =$ …………………………………………………

$\tan C =$ ……………………………………………....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง **อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมุมที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

สามารถนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการหาความยาวด้าน หรืออัตราส่วนตรีโกณมิติ ของมุมที่กำหนดให้ได้

1. แนวความคิดหลัก

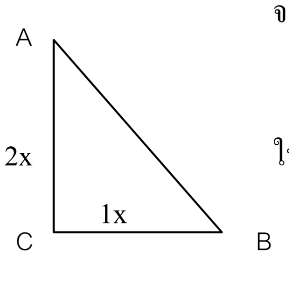
จากอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของมุมแหลมใดๆของสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนด สามารถนำไปใช้หาความยาวด้าน และหามุมของรูปสามเหลี่ยมได้ และสามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติอื่นๆ ได้จากข้อกำหนด

2. เนื้อหาสาระ

การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและนำไปใช้ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติอื่นๆ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\tan A = \frac{1}{2}$

จงหา sinA



จากรูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก

จาก $\tan A = \frac{1}{2}$

ให้ ด้าน AC ยาว 2x หน่วย และ ด้าน BC ยาว 1x หน่วย

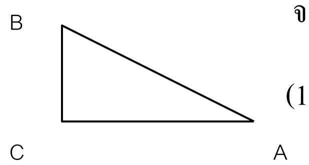
ดังนั้น ด้าน AB ยาว $\sqrt{5}$ x หน่วย

$$\sin A = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก และ a, b ,c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ

1. ให้ $\sin A = \frac{4}{5}$, a = 10 หน่วย จงหาค่า c

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $\sin A = \frac{4}{5}$ ....(1)



จากรูป $\sin A = \frac{10}{c}$ ....(2)

(1) = (2) $\frac{4}{5} = \frac{10}{c}$

$4c = 50$

$\therefore \quad c = \frac{50}{4} = 12.5$ #

โจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\cos C = \frac{2}{3}$

จงหา 1) sinC 2) tanC 3) cosA

4) tanA 5) sinA

4. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูยกโจทย์จากโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจในคาบเรียนที่ผ่านมา นำมาเฉลยเพื่อเป็นแนวทางชี้แนะในการทำโจทย์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีมุม B เป็นมุมฉาก และ

$\tan A = \frac{1}{2}$ จงหา sinA

2. ครูใช้การถามตอบประกอบคำอธิบาย ตัวอย่างที่ 2 โดยกำหนดโจทย์ และแสดงวิธีทำไว้บนกระดาน ให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

3. ให้นักเรียนฝึกทำเอกสารฝึกหัด

4. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

5. นักเรียนทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ 1 ข้อ

5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้

เอกสารฝึกหัด

6. การวัดผลและประเมินผล

วิธีวัด	เครื่องมือวัด	การประเมินผล
1. สังเกตจากการถามตอบและการวิเคราะห์		
2. ตรวจแบบฝึกทักษะ	แบบฝึกทักษะ	
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	กิจกรรม	

7. บันทึกหลังการสอน

....
....
....
....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....
....
....
....
....

เอกสารฝึกหัดที่ 5

การนำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติใช้ในการคำนวณ

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก และ a, b ,c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ

1.1 ให้ $\tan B = \frac{2}{3}$, $b = 4$ จงหาค่า a

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

1.2 $\cos B = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ sinA , cos A , tan A , tanB

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

1.3 จงหาค่าของ cos A , tan A , sinB , tanB

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

1.4 $\tan B = 4$ และ $a = 5$ จงหาค่าของ sinA , cos A , tan A

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง **อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

มีความรู้ ความเข้าใจ วิธีการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

2. แนวความคิดหลัก

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่คงที่ ย่อมมีค่าคงที่ เพื่อการนำไปใช้จึงหาค่าคงที่ของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

3. เนื้อหาสาระ

การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° โดยใช้ทฤษฎีบทปีทาโกรัส

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูใช้การถามตอบทบทวนสูตรการหาค่า sin , cos และ tan
2. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 6 เพื่อสรุปให้ได้ว่า ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่เท่ากันย่อมมีค่าคงที่ ไม่ว่าด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากจะยาวเท่าใดก็ตาม
3. เมื่อได้ข้อสรุป ครูให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง โดยกำหนดให้ความยาวของด้านยาวด้านละ 2 หน่วย ให้ชื่อว่าสามเหลี่ยม ABC แล้วให้นักเรียนวาดเส้นตรงจากจุดยอด A ให้ตั้งฉากกับฐาน BC ที่จุด D
4. ให้นักเรียนวิเคราะห์รูปสามเหลี่ยม ABD เพื่อหาขนาดของมุมและความยาวของด้านทั้งสามด้านของสามเหลี่ยม ABDให้ได้ว่า รูปสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่ามีมุม เป็น 60° และเมื่อลากเส้น AD จะเป็นเส้นมัธยฐาน และ แบ่งครึ่งมุมยอด จึงได้มุม 30° และหาความยาวของด้าน AD
5. ครูให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของ sin 30° , cos 30° , tan 30° และ sin 60°, cos 60° และ tan 60° โดยการซักถาม

6. ครูให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC โดยกำหนดให้มุมที่ฐานกางมุมละ 45 องศา และฐานยาว 2 หน่วย และให้ลากเส้นตรงจากมุมยอดตั้งฉากกับฐาน BC ที่จุด D

7. ให้นักเรียนวิเคราะห์สามเหลี่ยม ABD และหาความยาวด้านทั้งสามด้าน

8. ให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของ $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\tan 45^\circ$ โดยครูใช้วิธีการซักถาม

9. ครูใช้การถามตอบเพื่อสรุปค่าที่ได้ บนกระดานอีกครั้ง และให้นักเรียนบันทึกในเอกสาร

10. ให้นักเรียนฝึกทำโจทย์ในเอกสารฝึกหัด เพื่อทบทวนค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ และนำค่าที่ได้ไปใช้แล้วให้นักเรียนจับคู่กันตรวจสอบความถูกต้อง

11. ครูใช้การถามตอบตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

12. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 6

5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้

1. กิจกรรมที่ 6
2. เอกสารประกอบการเรียนที่ 6
3. เอกสารฝึกหัดที่ 6
4. แบบฝึกทักษะที่ 6

6. การวัดผลและประเมินผล

วิธีวัด	เครื่องมือวัด	การประเมินผล
1. สังเกตจากการถามตอบและการวิเคราะห์	ใบความรู้	
2. ตรวจแบบฝึกทักษะ	แบบฝึกทักษะ	

7. บันทึกหลังการสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....

กิจกรรมที่ 6
เรื่อง SCT

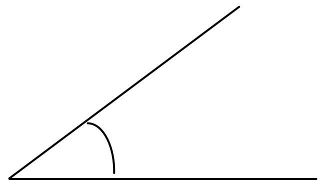
จุดประสงค์การเรียนรู้ด้านทักษะ/ กระบวนการ

1. มีความคิดริเริ่ม สร้างสรรค์
2. มีทักษะในการสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่าย
3. หาค่า sin A , cosA และ tanA ได้

วิธีดำเนินการ

1. ผู้เรียนแบ่งกลุ่มๆ ละ 4 คน
2. แต่ละคนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ให้มีมุม A เท่ากับมุมที่กำหนด

มุมที่กำหนด



สร้างรูป

3. แต่ละคนวัดความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมของตนเอง และใช้ความยาวของด้านหาอัตราส่วนอย่างต่ำของ sinA , cosA และ tanA

………

………

4. แต่ละคนในกลุ่มนำค่าที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาเปรียบเทียบกัน ให้อภิปรายแสดงความคิดเห็นในกลุ่มของตนเอง

………

………

5. แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมานำเสนอให้เพื่อนกลุ่มอื่นๆฟังและสรุปผลที่ได้จากกิจกรรมนี้

………

………

สรุปได้ว่า
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

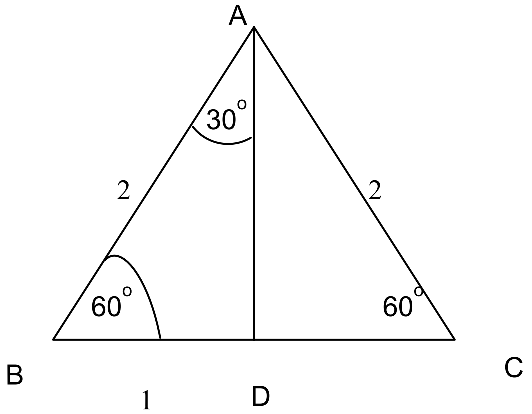
เอกสารประกอบการเรียนที่ 6

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° , 60°

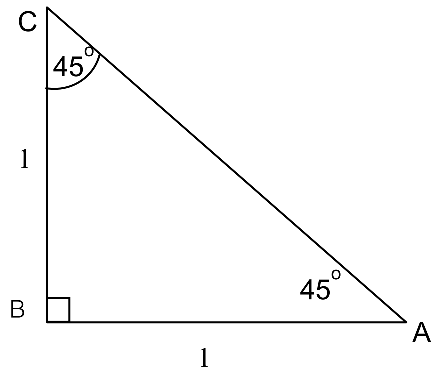
1. จงหา $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\tan 30^\circ$ และ $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 60^\circ$

สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ให้ BC เป็นฐานยาว 2 หน่วย



2. จงหาค่า $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\tan 45^\circ$

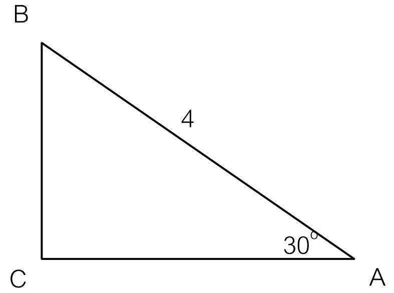
สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หน้าจั่ว ABC



3. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

อัตราส่วนตรีโกณของ มุม A	30°	45°	60°
sin			
cos			
Tan			

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 30° และ AB = 4 หน่วย จงหาขนาดของมุม B จงหาขนาดของด้านที่เหลือ

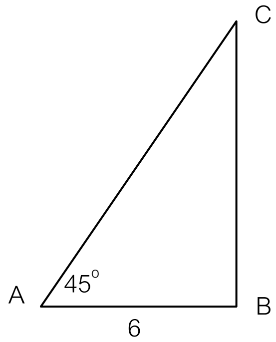


มุม B = ……………………..……

ด้าน AC = ……………………...

ด้าน BC = ………………..…….

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม B เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 45° และ AB = 6 หน่วย จงหาขนาดของมุม C จงหาขนาดของด้านที่เหลือ



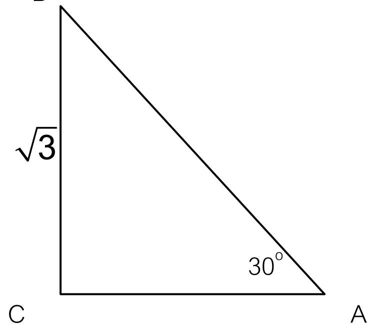
มุม C = ……………………....

ด้าน AC = ………………..…..

ด้าน BC = ……………..……..

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 30° และ BC = $\sqrt{3}$ หน่วย จงหา AB , AC พร้อมทั้งแสดงให้เห็นจริงว่า

1. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 3. $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$



AC = …………………..AB = ……………………….……....

………………………………………………..………...............

…………………………………………………………………..…

……………………………………………………………….……

……………………………………………………………….……

....

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $4\sin 30^{\circ} + \sqrt{3}\cos 30^{\circ} - \sqrt{3}\tan 30^{\circ}$

จาก $\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$, $\cos 30^{\circ} =$ .... และ $\tan 30^{\circ} =$ ....

แทนค่าใน $4\sin 30^{\circ} + \sqrt{3}\cos 30^{\circ} - \sqrt{3}\tan 30^{\circ}$

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $2\sin 45^{\circ} - 4\cos 45^{\circ} + 6\tan 45^{\circ}$

จาก $\sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^{\circ} =$ .... และ $\tan 45^{\circ} =$ ....

แทนค่าใน $2\sin 45^{\circ} - 4\cos 45^{\circ} + 6\tan 45^{\circ}$

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 60^{\circ} + 10\cos 60^{\circ} + \tan 60^{\circ}$

จาก $\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^{\circ} =$ .... และ $\tan 60^{\circ} =$ ....

แทนค่าใน $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 60^{\circ} + 10\cos 60^{\circ} + \tan 60^{\circ}$

....

....

....

....

เอกสารฝึกหัดที่ 6

การยกกำลังของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว การยกกำลังของอัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่มี n เป็นเลขชี้กำลัง นิยมเขียนดังต่อไปนี้

$\sin^n A$ หมายถึง $(\sin A)^n$

$\cos^n A$ หมายถึง $(\cos A)^n$

$\tan^n A$ หมายถึง $(\tan A)^n$

เช่น $\sin^2 30^\circ = (\sin 30^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

1. จงหาค่าของ $\cos^3 45^\circ$ = ……………………………………………………………………………....

   $\tan^4 60^\circ$ = ……………………………………………………………………………....

2. จงหาค่าของ $2\cos^4 45^\circ + 3\sin^2 45^\circ - 4\tan^2 45^\circ$

   เนื่องจาก $\cos^4 45^\circ$ = ………….. …….$\sin^2 45^\circ$ = ………..……….. $\tan^2 45^\circ$ = …………………......

   ดังนั้น $2\cos^4 45^\circ + 3\sin^2 45^\circ - 4\tan^2 45^\circ$ = ……………………………………………………..

   = ……………………………………………………...

   = ……………………………………………………

3. จงหาค่าของ $2\tan^2 30^\circ + 4\cos^2 30^\circ - 3\sin^2 30^\circ$

   ………………………………………………………………………………………………..

   ………………………………………………………………………………………………..

   ………………………………………………………………………………………………..

   ………………………………………………………………………………………………..

4. จงหาค่าของ $6\sin^2 30^\circ + 8\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$

   ………………………………………………………………………………………………..

   ………………………………………………………………………………………………..

   ………………………………………………………………………………………………..

   ………………………………………………………………………………………………..

5. จงหาค่าของ $4\sin^2 45^\circ + 2\cos^2 45^\circ - 3\tan^2 60^\circ$

   ………………………………………………………………………………………………..

   ………………………………………………………………………………………………..

   ………………………………………………………………………………………………..

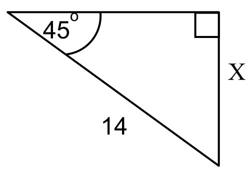
   ………………………………………………………………………………………………..

แบบฝึกทักษะที่ 6
เรื่อง การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

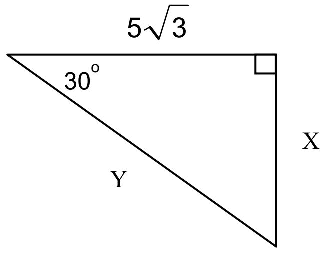
ชื่อ...ชั้น..................เลขที่.......................

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง : หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ที่กำหนดให้ได้

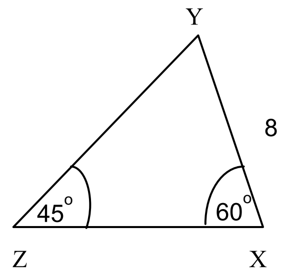
1. จงหาค่าของ x , y หรือ z จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1)


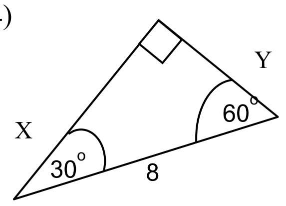
วิธีทำ...
....
....
....

2)


วิธีทำ...
....
....
....
....

3)


วิธีทำ...
....
....
....
....

4)


วิธีทำ...
....
....
....

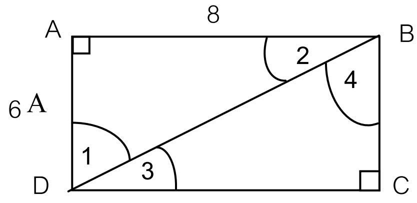
2. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\cos A = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ

1) sin A = **...................** 2) tan A = ...

3) sin B = **...................** 4) cos B = ...

5) tan B = **...................**

3. จากรูปจงหาค่าต่อไปนี้



1) BD = ………………………………...

2) sin $\hat{1}$ = …………………..……………

3) cos $\hat{1}$ = ………………………………...

4) sin $\hat{2}$ = ……………….

5) cos $\hat{2}$ = ……………………….……….

6) sin $\hat{3}$ = ……………….

7) cos $\hat{3}$ = …………………………...…….

8) sin $\hat{4}$ = ……………….

9) $\hat{1}$ = …………………….……………...

10) $\hat{2}$ = ………………..

11) $\hat{3}$ =…………….……

12) $\hat{4}$ = ……………..……

4. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก และ a , b ,c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ

1) tan A = $\sqrt{2}$ a = 10 หน่วย จงหาค่า b

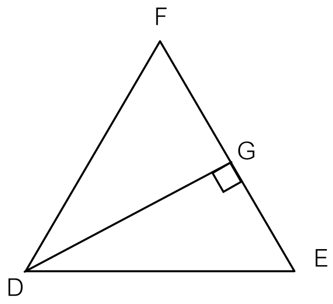
2) tan B = $\frac{1}{4}$ b = 3 หน่วย จงหาค่า a

3) a = 5 หน่วย b = 12 หน่วย จงหาค่า sin A

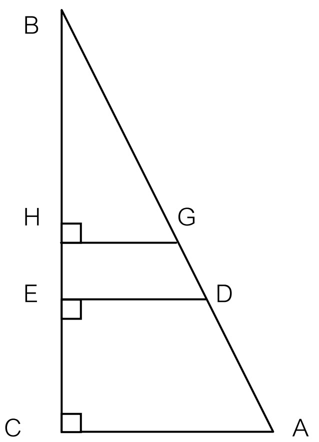
4) cos B = $\frac{2}{3}$ a = 5 หน่วย จงหาค่า c

5) a = 4 หน่วย c = 6 หน่วย จงหาค่า tan B

5. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า DEF มี $\overline{DG}$ เป็นส่วนสูงและ $\overline{DE}$ ยาว 18 หน่วย ดังรูป จงหาความยาวของ $\overline{DG}$

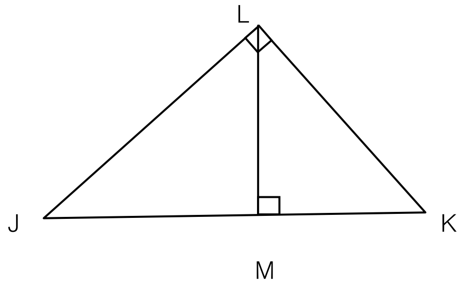


6.



1) จากรูปถ้า BG = 12 หน่วย BD = 15 หน่วย และ GH= 8 หน่วย จงหา BE
2) ถ้า AC = 9 หน่วย DE = 6 หน่วย และ AB = 15 หน่วย จงหา EC
3) ถ้ามุม A เท่ากับ 50° และ BH = 4 หน่วย จงหา GH
4) ถ้า AB = $10\sqrt{2}$ หน่วย และ AC = $6\sqrt{5}$ หน่วย จงหาขนาดของมุม B

7. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว JKL มี $\overline{LM}$ เป็นส่วนสูง และ JL= 16 หน่วย ดังรูป จงหา LM



8. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ และ $\hat{A} = 27^\circ$ ด้าน BC ยาว 10 หน่วย จงหาความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC

....

....

....

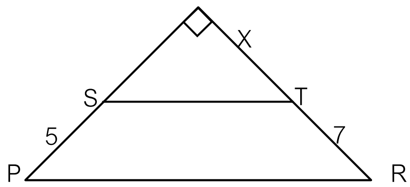
9. กำหนดให้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งยาว 14 , 14 และ 18 เซนติเมตร จงหาขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้

....

....

....

10. กำหนดให้เส้น $\overline{ST} // \overline{PR}$, $|\overline{QS}| = 13$ ซม. $|\overline{SP}| = 5$ ซม. และ $|\overline{TR}| = 7$ ซม. จงหาความยาวของเส้นตรง



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง **การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมระหว่าง** 0° **ถึง** 90° **โดยใช้ตาราง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถเปิดตารางหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมระหว่าง 0° ถึง 90° ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

มีความรู้ ความเข้าใจในการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของมุม ที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 90 โดยการใช้ตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2. แนวความคิดหลัก

การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมต่างๆ สามารถหาได้จากตารางซึ่งแสดงค่าอัตราส่วนของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 90°

3. เนื้อหาสาระ

การเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมระหว่าง 0° ถึง 90°

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูใช้การถามตอบทบทวนการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ

2. ครูอธิบายให้นักเรียนทราบว่านอกจากนักเรียนจะใช้สูตรในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติได้แล้ว นักเรียนยังสามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 0° ถึง 90° โดยใช้ตารางได้

3. ครูอธิบายให้นักเรียนทราบว่าในตารางจะมีหน่วยของมุมดังนี้

    1. Degree (องศา)

        1 องศา = 60 ลิปดา

        1 ลิปดา = 60 ฟิลิปดา

    2. Radians

4. ครูอธิบายโดยการยกตัวอย่าง เช่น $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ให้นักเรียนลองคิดค่า $\sin 30^\circ, \cos 30^\circ, \tan 30^\circ$ เป็นทศนิยมได้เท่ากับเท่าไร แล้วให้นักเรียนเปิดตารางว่าได้ค่าเท่ากันหรือไม่ หลังจากนั้นให้นักเรียนคิดค่า sin,cos,tan ของมุม 45 และ 60 องศา เป็นทศนิยม แล้วเปิดตาราง

5. ครูและนักเรียนช่วยกันทำตัวอย่างการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้การเปิดตารางดังนี้

$\sin 34^\circ 20' = 0.5640$

$\cot 56^\circ 20' = 0.6661$

$\cos 50^\circ 10' = 0.6406$

$\tan 41^\circ 30' = 1.1303$

$\sin 57^\circ 40' = 0.8450$

$\cot 38^\circ 50' = 1.2423$

$\cos 52^\circ 30' = 0.6088$

จงหาค่า θ เมื่อกำหนดค่าอัตราส่วนจากตาราง , θ แทน ขนาดของมุม

sin…….= 0.6041 $(37^\circ 10')$

cos……= 0.6202 $(51^\circ 40')$

tan…….= 1.1571 $(49^\circ 10')$

cot…….= 0.8002 $(31^\circ 20')$

sin…….= 0.8403 $(57^\circ 10')$

6. ครูเขียนโจทย์แบบฝึกหัดบนกระดานแล้วให้นักเรียนทำพร้อมบันทึกลงในสมุด
7. ครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบ และครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง
8. ให้นักเรียนทำโจทย์เอกสารฝึกหัดที่ 7 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ
9. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 7

5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 0° ถึง 90°

หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ เล่ม 2

6. การวัดผลและประเมินผล

วิธีวัด	เครื่องมือวัด	การประเมินผล
1. สังเกตจากการถามตอบ		
2. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	แบบฝึกหัด	

7. บันทึกหลังการสอน

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

เอกสารฝึกหัดที่ 7

การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมอื่นๆ โดยใช้ตาราง

1. จงหาค่าโดยประมาณของ $2\sin 40^\circ - 3\cos 35^\circ$

วิธีทำ จากตาราง $\sin 40^\circ$ = ………….. และ $\cos 35^\circ$ = ……………

ดังนั้น $2\sin 40^\circ - 3\cos 35^\circ$ = ………………………………………………………..……

= ……………………………………………………………..

= ……………………………………………………………..

ดังนั้น $2\sin 40^\circ - 3\cos 35^\circ$ = ……………………………………………………………………

2. จงหาค่าโดยประมาณของ $2\tan 10^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ + \frac{1}{5}\cos 68^\circ$

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

3. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A เท่ากับ 40° และ ความยาวด้าน AB เท่ากับ 5 หน่วย จงหาขนาดของมุม และความยาวด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC

……………………………………………………………..

……………………………………………………………..

……………………………………………………………..

……………………………………………………………..

……………………………………………………………..

……………………………………………………………..

……………………………………………………………..

วิเคราะห์โจทย์

แบบฝึกทักษะที่ 7

1. จากตาราง จงหาค่าของ

(1) $\sin 21^{\circ}$ = ………………………………………	7. $\cos 21^{\circ}$ = ………………………………………
(2) $\tan 68^{\circ}$ = ………………………………………	8. $\tan 1^{\circ}$ = ………………………………………
(3) $\cos 75^{\circ}$ = ………………………………………	9. $\cos 81^{\circ}$ = ………………………………………
(4) $\sin 40^{\circ}$ = ………………………………………	10 $\sin 73^{\circ}$ = ………………………………………
(5) $\tan 10^{\circ}$ = ………………………………………	11. $\cos 50^{\circ}$ = ………………………………………
(6) $\cos 32^{\circ}$ = ………………………………………	12. $\sin 40^{\circ}$ = ………………………………………

1. จงหาขนาดของมุม θ เมื่อกำหนดค่า ดังนี้

1. $\sin\theta = 0.53$ แล้ว θ = …………	2. $\sin\theta = 0.899$ แล้ว θ = …………
3. $\sin\theta = \frac{2}{5}$ แล้ว θ = …………	4. $\sin\theta = \frac{5}{8}$ แล้ว θ = …………
5. $\cos\theta = 0.50$ แล้ว θ = …………	6. $\cos\theta = 0.99$ แล้ว θ = …………
7. $\cos\theta = \frac{3}{4}$ แล้ว θ = …………	8. $\cos\theta = \frac{3}{5}$ แล้ว θ = …………
9. $\tan\theta = 0.404$ แล้ว θ = …………	10. $\tan\theta = 4.011$ แล้ว θ = …………
11. $\tan\theta = \frac{9}{4}$ แล้ว θ = …………	12. $\tan\theta = \frac{4}{7}$ แล้ว θ = …………

2. จงหาขนาดของมุมต่อไปนี้เมื่อกำหนดค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติให้ดังนี้

1. cos …… ≈ 0.616	2. tan ….. ≈ 0.488
3. sin …… ≈ 0.982	4. tan ….. ≈ 2.356
5. cos ….. ≈ 0.707	6. sin …… ≈ 0.508

4. ถ้า $\tan A = \frac{12}{5}$ แล้ว $\sin A + \cos A$ มีค่าเท่าไร

……

……

……

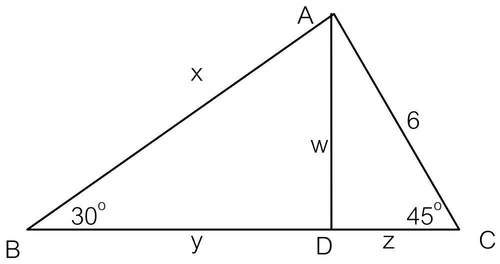
5. ถ้ากำหนดให้ $5 \sin A = 3$ แล้ว $\sin A \,.\, \cos A \,.\, \tan A$ มีค่าเท่าไร

……

……

……

6. จากรูปที่กำหนดจงหาค่า x , y , z และ w



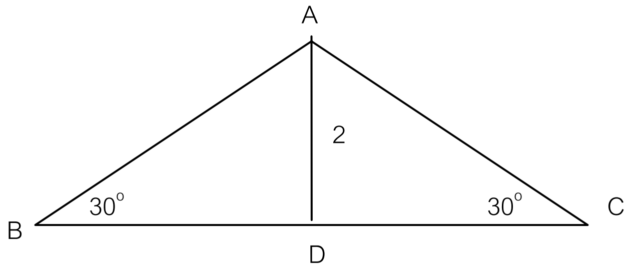
....

....

....

....

7. จากรูป กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยที่ $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 30^{\circ}$ และ AD = 2 จงหาความยาวรอบรูปสามเหลี่ยม ABC



....

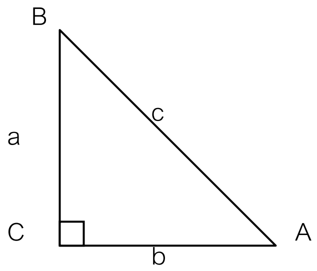
....

....

....

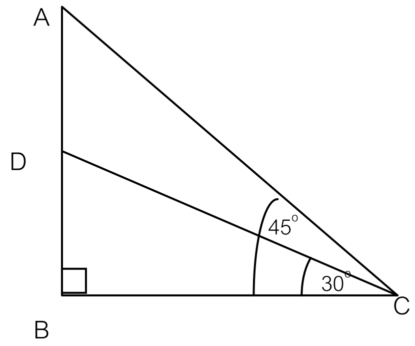
....

8. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก และ a , b , และ c แทนความยาวด้านตรงข้าม A , B และ C ตามลำดับ จงหาคำตอบของข้อต่อไปนี้



1. ถ้า $\sin A = \frac{3}{5}$ แล้ว cos A = …………….. และ tan A = …………..
2. ถ้า $\sin A = \frac{3}{5}$ และ a = 12 หน่วย แล้ว b = ……หน่วย c = ………..หน่วย
3. ถ้า $\tan B = \frac{2}{3}$ และ b = 10 หน่วย แล้ว a = ……หน่วย c = ………..หน่วย
4. ถ้า $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{3}$ และ b = $5\sqrt{2}$ หน่วย แล้ว a = ….หน่วย c = …… หน่วย
5. ถ้า sinA = 0.8 แล้ว cosA = ………………
6. ถ้า 4 tanA = 3 แล้ว $\sin A \cdot \cos A$ มีค่าเท่าใด

9.



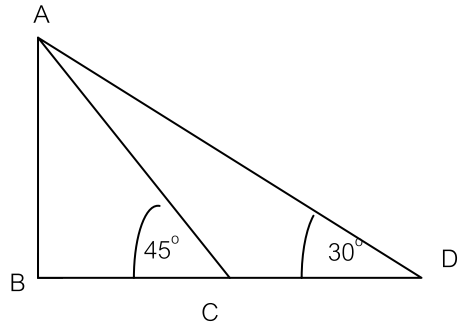
จากรูป ถ้า BD = 10 หน่วย AB เท่ากับกี่หน่วย

....

....

....

10.



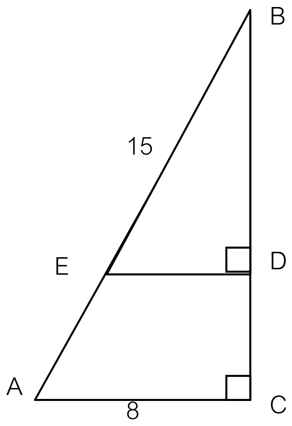
จากรูป ถ้า CD = 4 หน่วย AB เท่ากับกี่หน่วย

....

....

....

11.



จากรูป กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และ EBD โดยที่มุม C และ มุม D เป็นมุมฉาก ถ้า $\sin B\hat{A}C = \frac{4}{5}, \tan C\hat{A}D = \frac{1}{2}$ และ BE = 15 หน่วย และ AC = 8 หน่วย จงหา BC

....

....

....

....

....

12. จากตารางค่า ไซน์ โคไซน์ และ แทนเจนต์ของมุม จงหาคำตอบโดยประมาณของข้อต่อไปนี้

1. $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ$

……………………………………………

……………………………………………

2. $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 70^\circ$

……………………………………………

……………………………………………

3. $\tan 50^\circ + \tan 70^\circ - \tan 80^\circ$

……………………………………………

……………………………………………

4. $\sin 25^\circ + \cos 35^\circ + \tan 55^\circ$

……………………………………………

……………………………………………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง **การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. สามารถอธิบายความหมายของมุมยกขึ้นและมุมกดลงได้
2. นำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้

2. แนวความคิดหลัก

ในชีวิตประจำวันมีการวัดระยะทาง ความสูงของวัตถุที่ไม่สามารถวัดได้โดยตรง จึงใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติในการวัด

3. เนื้อหาสาระ

มุมยกขึ้นและมุมกดลง

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ

2. ให้นักเรียนจับกลุ่มๆ ละ 4 คน อภิปรายว่า ถ้านักเรียนจะวัดระยะทางและความสูงของสิ่งต่างๆ (ที่ไม่สามารถวัดโดยตรงได้) นักเรียนจะมีวิธีวัดอย่างไรได้บ้าง

3. ให้นักเรียนนำเสนอผลที่ได้หน้าห้อง ครู และเพื่อนนักเรียนช่วยกันวิเคราะห์ว่าจากการศึกษา อภิปราย และ นำเสนอสามารถทำได้หรือไม่

4. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 8 และร่วมกันสรุปให้ได้ว่า

" มุมเงยคือมุมที่อยู่สูงกว่าระดับสายตา
มุมก้มคือมุมที่อยู่ต่ำกว่าระดับสายตา "

*** เส้นระดับสายตาต้องขนานกับแนวนอน ***

5. ครูใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย ช่วยกันทำตัวอย่างที่ 1, 2 และ 3 พร้อมให้นักเรียนบันทึกลงในสมุด

6. ให้นักเรียนฝึกหัดทำใบงานที่ 8
7. สุ่มเรียกนักเรียนเฉลยวิธีทำบนกระดาน ครู และนักเรียนช่วยกันตรวจสอบและสรุปความถูกต้อง
8. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 8

5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 8
2. ใบงานที่ 8
3. แบบฝึกทักษะที่ 8

6. การวัดผลและประเมินผล

วิธีวัด	เครื่องมือวัด	การประเมินผล
1. สังเกตจากการถามตอบและวิเคราะห์		
2. สังเกตจากการทำใบงาน	ใบงาน	

7. บันทึกหลังการสอน

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

เมื่อนักเรียนเข้าใจวิธีการวัดแล้ว ให้นักเรียนวางแผนปฏิบัติจริง โดยให้นักเรียนใช้เวลาในคาบต่อไปเตรียมอุปกรณ์เท่าที่จำเป็นวัดความสูงของเสาธง หรือต้นไม้

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 8

เรื่อง การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

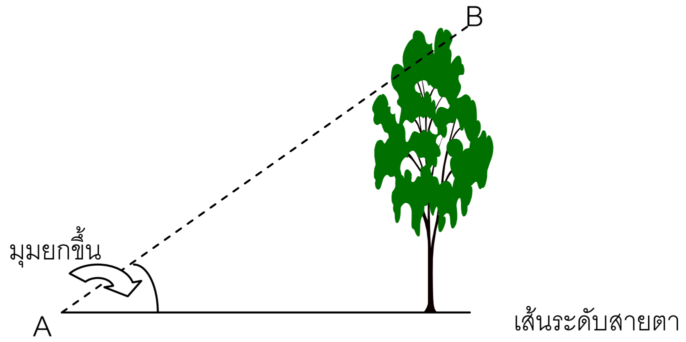
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมาใช้ในการแก้ปัญหาได้

การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

ในการวัดระยะทางและความสูง วิชาตรีโกณมิติจะให้ประโยชน์อย่างมากมาย เพราะไม่จำเป็นต้องทำการวัดจริง เพียงแต่ทราบมุมที่เกี่ยวข้องเราก็สามารถหาระยะทางและความสูงของสิ่งต่างๆ ได้ เช่น ภูเขา อาคาร เสาธง เป็นต้น เพียงแต่เรายึดเส้นระดับสายตา (horizontal line) จะได้มุมสำคัญสองชนิด คือ มุมยกขึ้นหรือมุมเงย (Angle of Elevation) และมุมกดลงหรือมุมก้ม (Angle of Depression)

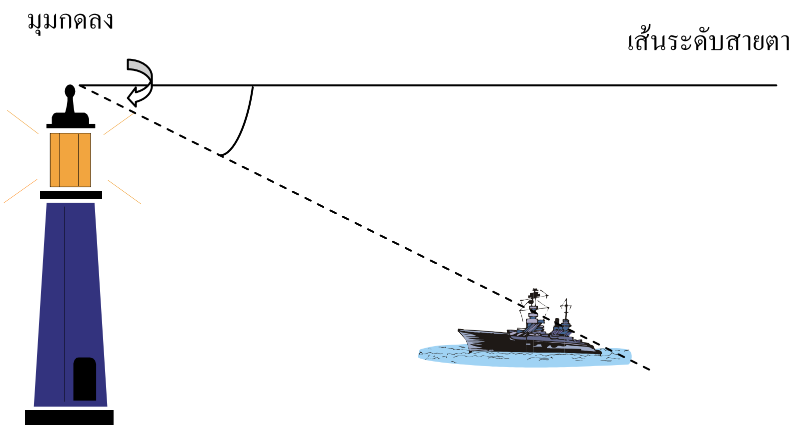
1. มุมยกขึ้นหรือมุมเงย (Angle of Elevation)

ให้ A เป็นจุดสังเกต และ B เป็นยอดของต้นไม้ มุมยกขึ้นของยอดไม้ B เมื่อสังเกตที่จุด A คือ มุมซึ่งเส้นตรง AB ทับเส้นระดับสายตาที่จุด A



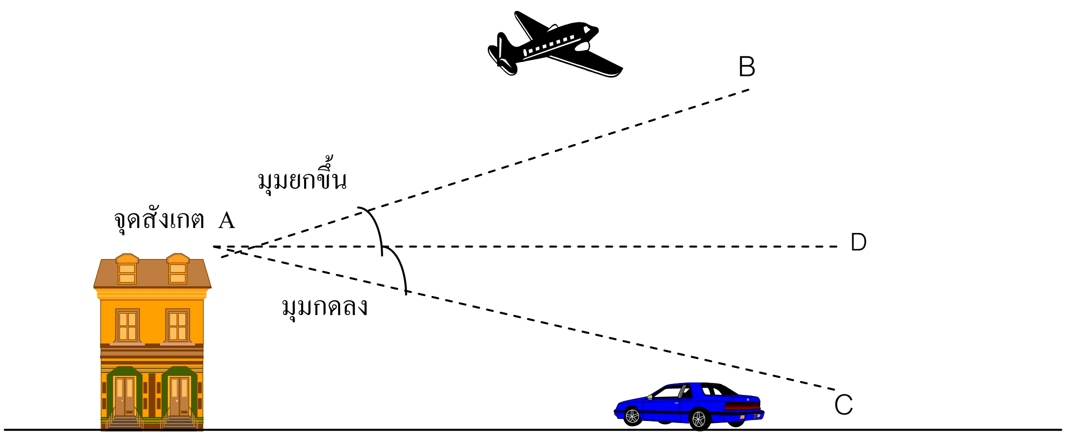
2. มุมกดลงหรือมุมก้ม (Angle of Depression)

ให้ A เป็นจุดสังเกต และ B เป็นจุดซึ่งเรือทอดสมออยู่ มุมกดลงของเรือ B เมื่อสังเกตที่จุด A คือ มุมที่เส้นตรง AB ทำกับเส้นระดับสายตาที่จุด A



ตัวอย่างที่ 1

มุมยกขึ้นและมุมกดลง



จากรูป A เป็นจุดสังเกตซึ่งอยู่บนยอดตึกที่มีความสูง

AD คือ เส้นระดับสายตา

มุมยกขึ้นของเครื่องบิน B อยู่หนือเส้นระดับสายตา AD คือ มุมที่เส้นตรง AB ทำกับเส้นระดับสายตา AD ที่จุด A

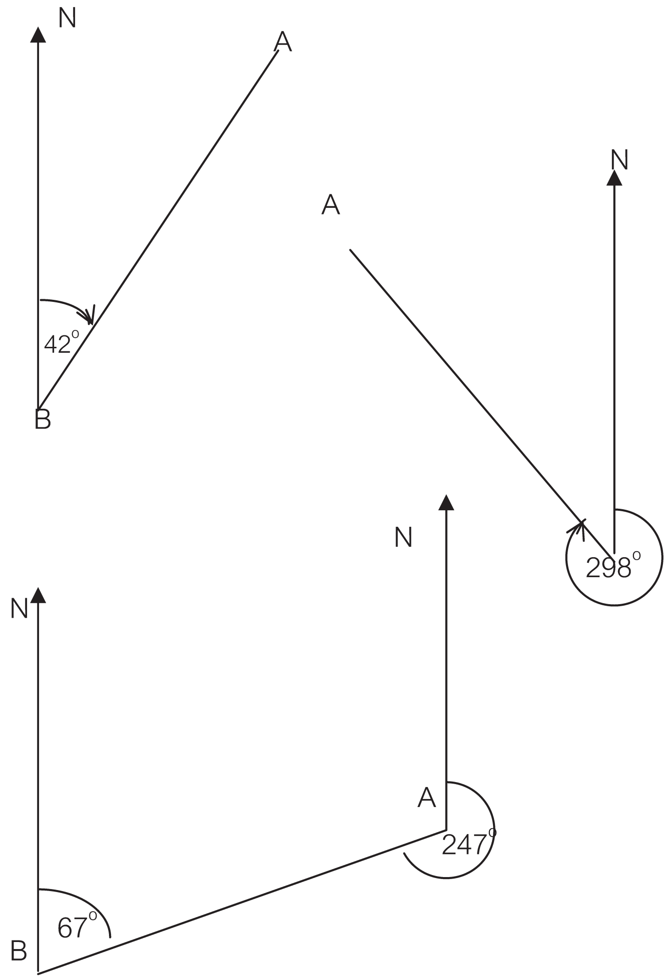
มุมกดลงของรถยนต์ C อยู่ใต้เส้นระดับสายตา AD คือ มุมที่เส้นตรง AC ทำกับเส้นระดับสายตา AD ที่จุด A

ตัวอย่างที่ 2

เกร็ดความรู้

การบันทึกเส้นทางการเดินเรือและการบันทึกเส้นทางการบินของเครื่องบินใช้การวัดมุมที่เรียกว่า แบริง (bearings)

แบริง (bearings) คือการวัดมุม โดยเริ่มวัดจากทิศเหนือไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจนถึงเส้นทางที่ต้องการ ซึ่งค่าของมุมนี้จะมีค่าระหว่าง 0° ถึง 360° และถ้าค่าของมุมต่ำกว่า 100 จะต้องเขียน 0 นำหน้าด้วย เพื่อให้ได้ตัวเลขครบ 3 ตัวทุกครั้ง หรือ เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Three figure system การวัดมุมประเภทนี้จะใช้เฉพาะนักเดินเรือและนักบิน



แบริง ของ A จาก B เท่ากับ 067°

แบริง ของ B จาก A เท่ากับ 247°

ตัวอย่างที่ 3

เรือไอน้ำลำหนึ่ง แล่นออกจากท่า A ไปทางทิศเหนือเป็นระยะทาง 27 กิโลเมตร ถึงท่า B แล้วเปลี่ยนเส้นทางไปทิศ 090° (แบริง 090°) ถึงท่า C เป็นระยะทาง 36 กิโลเมตร

จงหา 1. เรืออยู่ห่างจากท่า A เป็นระยะทางเท่าใด

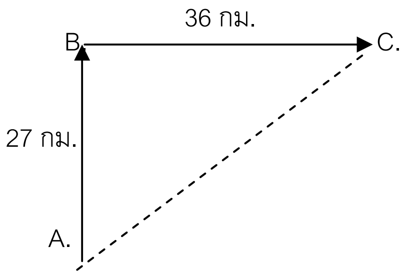
2. แบริงของ C จาก A (หาค่ามุม A)

วิธีคิด 1. จากรูป เรือแล่นออกจากท่า A ถึงท่า B และไปถึงท่า C

ดังนั้นการหาว่าเรืออยู่ห่างจากท่า A เป็นระยะทางเท่าไร

คือ การวัดระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ถึง C

จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส ;



จะได้ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 27^2 + 36^2$

$= 729 + 1,296$

$AC^2 = 2,025$

$AC = \sqrt{2,025}$

$= 45$

ดังนั้น เรืออยู่ห่างจากท่า A = 45 กิโลเมตร #

2. แบริ่งของ C จาก A คือ มุม BAC

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

BC เป็นด้านตรงข้ามมุม BAC

AB เป็นด้านประชิดมุม BAC

AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

ดังนั้น $\tan B\hat{A}C = \frac{BC}{AB}$

$= \frac{36}{27}$

$\tan B\hat{A}C = 1.3333$

เปิดตารางตรีโกณมิติ ;

จะได้ $\tan 53^\circ 10' = 1.3351$

ดังนั้น $B\hat{A}C$ มีค่าประมาณ $53^\circ 10'$

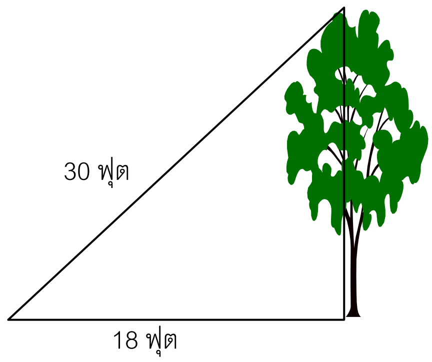
แบริ่งของ C จาก A คือ $53^\circ 10'$ #

ใบงานที่ 8

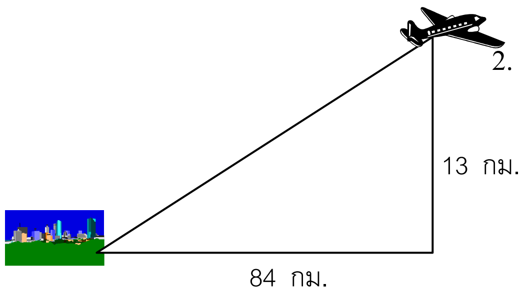
เรื่อง การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้และแก้ปัญหา

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง นำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาที่พบในชีวิตประจำวันได้ ให้นักเรียนปฏิบัติตามคำชี้แจงต่อไปนี้

คำชี้แจง ผู้เรียนแสดงวิธีหาคำตอบจากโจทย์ต่อไปนี้

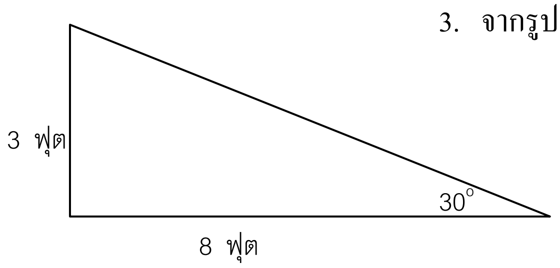


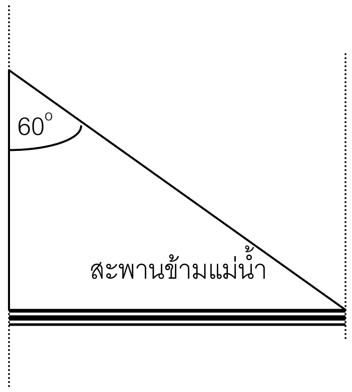
1. จากรูป ต้นไม้สูงเท่าไร



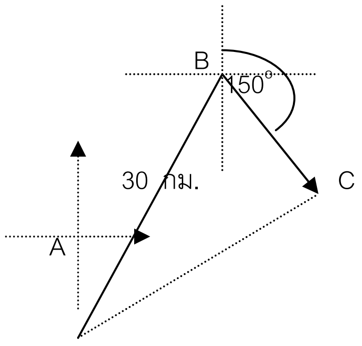
2. จากรูปเครื่องบินอยู่ห่างจากสนามบิน เป็นระยะทางเท่าไร

3. จากรูป จงหาค่าของ x





4. นักสำรวจคนหนึ่งต้องการวัดความกว้างของแม่น้ำ โดยใช้การวัดความยาวของสะพาน ณ จุดสำรวจที่เขายืนอยู่ห่างจากปลายสะพานอีกด้านหนึ่งที่อยู่ตรงกันข้าม ทำมุม 60^0 จงหาความยาวของสะพาน



5. เรือท่องเที่ยวลำหนึ่งแล่นจากจุด A ไปในทิศ 030^0 เป็นระยะทาง 30 กิโลเมตร ถึงจุด B และแล่นต่อไปในทิศ 150^0 เป็นระยะทาง 15 กิโลเมตร ถึงจุด C จงหาว่า
    5.1 เรือท่องเที่ยวลำนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าไร
    5.2 เรือท่องเที่ยวลำนี้อยู่ทางทิศใดของจุดเริ่มต้น (แบริงของ C จาก A)

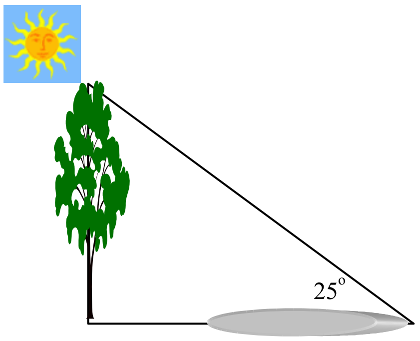
เสนอแนะวิธีคิด : ต่อ $\overline{BC}$ ออกไปถึงจุด D โดยให้จุด D อยู่ในทิศ 090^0 ของ A

แบบฝึกทักษะที่ 8

1. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาริมฝั่งทะเล ซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล 150 เมตร มองเห็นเรือลำหนึ่งเป็นมุมก้ม 30 องศา เรือลำนี้อยู่ห่างจากหน้าผากี่เมตร

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

2. ต้นไม้ต้นหนึ่งทอดเงายาว 40 เมตร แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดปลายของเงาต้นไม้และยอดไม้ทำมุม 25° กับเงาของต้นไม้ จงหาความสูงของต้นไม้



……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

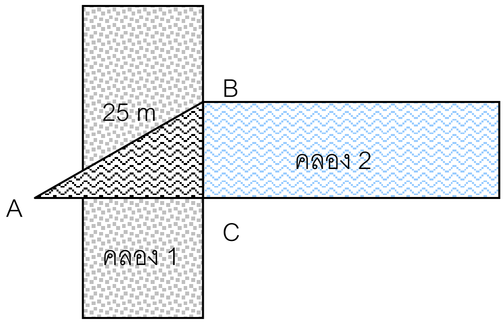
3. พาดบันไดไว้กับกำแพงโดยให้ปลายบันไดตอนบนจดปลายกำแพงพอดี ถ้าบันไดยาว 6.5 เมตร และโคนบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 4 เมตร จงหาว่าบันไดทำมุมกับพื้นดินประมาณกี่องศา และกำแพงนี้สูงประมาณเท่าใด

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

4. ลูกเสือคนหนึ่งต้องการหาความสูงของเสาธงของโรงเรียนจึงทำมุมขนาด 45° ขึ้นอันหนึ่ง ถ้าขณะที่เล็งเขายืนอยู่ห่างจากเสาธง 10 เมตร และหาความสูงจากพื้นดินถึงระดับตาเขาเป็น 1.5 เมตร เสาธงสูงเท่าใด

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

5. นพและศักดิ์หาความกว้างของคลอง 1 และ คลอง 2 โดยใช้เชือกยาว 25 เมตรขึงกับพื้นดินตรงจุด A และ B (ดังรูป) ให้จุด A และ จุด B อยู่ตรงข้ามกับจุด C ปรากฏว่าถ้าให้เชือกขึงตึง จุด A จะอยู่ห่างจากริมฝั่งคลองเป็นระยะทาง 4 เมตร และวัดมุม BAC ได้ 32 องศา จงหาความกว้างของคลอง 1 และคลอง 2

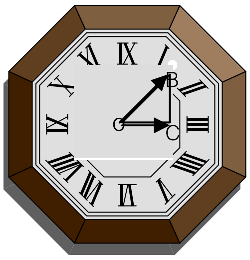


……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

6. ดวงดาวกับดวงใจยืนอยู่คนละด้านของเสาธง คนทั้งสองมองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 45° และ 60° ตามลำดับคนทั้งสองอยู่ห่างกัน 100 เมตร เสาธงสูงประมาณกี่เมตร

……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

7. จากการสังเกตนาฬิกาเรือนหนึ่งพบว่า เมื่อเวลา 15.07 นาฬิกา ถ้าลากเส้นตรงต่อจุดปลายของเข็มชั่วโมงและเข็มนาที เส้นตรงนี้จะตั้งฉากกับเข็มชั่วโมง ถ้าเข็มนาทีของนาฬิกาเรือนนั้นยาว 10 เซนติเมตร จงหาความยาวของเข็มชั่วโมง



จากรูป OB เป็นเข็มชั่วโมง

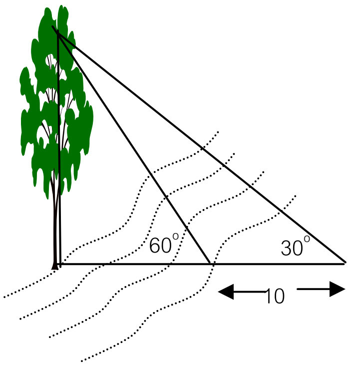
OA เป็นเข็มนาทียาว 10 เซนติเมตร

………

………

………

8. สุกิจยืนอยู่บนฝั่งแม่น้ำซึ่งอยู่ตรงกันข้ามกับต้นไม้บนอีกฝั่งหนึ่งเขามองเห็นยอดไม้ด้วยมุมเงย 60 องศา และเมื่อเขาถอยหลังไป 10 เมตร มุมเงยของยอดไม้เป็น 30 องศา แม่น้ำกว้างเท่าไร



………

………

………

ส่วนที่ 2

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง **การวัดความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หาความยาวของส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (1, 0), (0, 1), (-1, 0) และ (0, -1) ได้

2. แนวความคิดหลัก

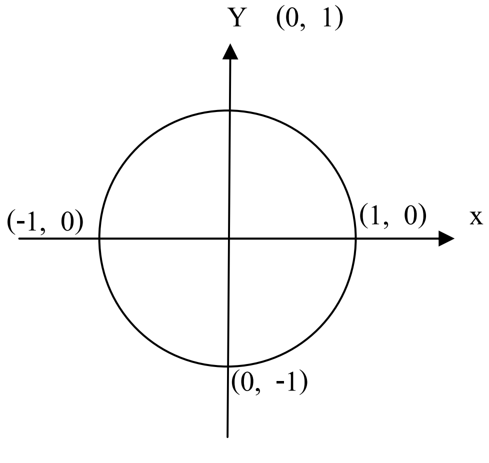
การวัดความยาวของส่วนโค้งของวงกลม 1 หน่วย

ถ้า $\theta < 0$ เป็นการวัดความยาวส่วนโค้งตามเข็มนาฬิกา

ถ้า $\theta > 0$ เป็นการวัดความยาวส่วนโค้งทวนเข็มนาฬิกา

3. เนื้อหาสาระ

การวัดความยาวของส่วนโค้งและหาจุดปลายของส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

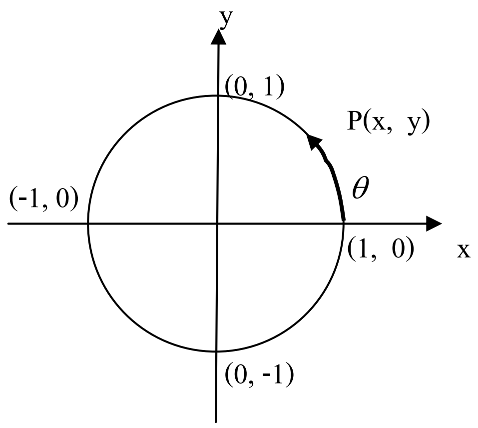


ความยาวเส้นรอบของวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย คือ $2\pi r$ หน่วย

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบวงของวงกลมที่มีรัศมียาว 1 หน่วย เท่ากับ 2π หน่วย

ความยาวส่วนโค้งครึ่งวงกลมเท่ากับ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ หน่วย

ความยาวส่วนโค้งเสี้ยววงกลมเท่ากับ $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ หน่วย



ถ้า P(x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1,0) ไปตามส่วนโค้งเป็นระยะจำนวนจริง θ หน่วย ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ค่าที่แทนขนาดของความยาวส่วนโค้งจะแทนด้วยจำนวนจริงบวก และถ้าวัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1,0) ไปในทิศตามเข็มนาฬิกาความยาวส่วนโค้งจะแทนด้วยจำนวนจริงลบ

ใบงานที่ 9

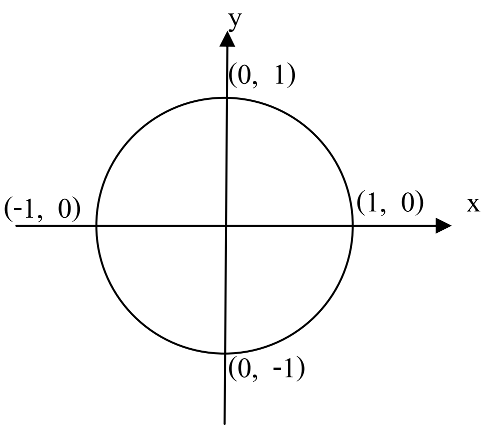
จงหาจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อกำหนด θ ต่อไปนี้

1. $\theta = 0$
2. $\theta = 2\pi$
3. $\theta = 10\pi$
4. $\theta = -18\pi$
5. $\theta = -32\pi$
6. $\theta = 5\pi$
7. $\theta = 9\pi$
8. $\theta = -13\pi$
9. $\theta = -27\pi$
10. $\theta = \frac{9\pi}{2}$
11. $\theta = \frac{17\pi}{2}$
12. $\theta = \frac{-19\pi}{2}$
13. $\theta = \frac{-35\pi}{2}$
14. $\theta = \frac{7\pi}{2}$
15. $\theta = \frac{11\pi}{2}$
16. $\theta = \frac{-21\pi}{2}$
17. $\theta = \frac{-45\pi}{2}$
18. $\theta = 102\pi$
19. $\theta = 204\pi$
20. $\theta = -500\pi$
21. $\theta = -1000\pi$
22. $\theta = 319\pi$
23. $\theta = 575\pi$
24. $\theta = -797\pi$
25. $\theta = -919\pi$
26. $\theta = \frac{401\pi}{2}$
27. $\theta = \frac{611\pi}{2}$
28. $\theta = \frac{-815\pi}{2}$
29. $\theta = \frac{-917\pi}{2}$
30. $\theta = \frac{-1011\pi}{2}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

คาบที่ 1

1. ให้นักเรียนเขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม ที่มีรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) พร้อมทั้งเขียนกราฟและหาจุดตัดบนแกน x และจุดตัดบนแกน y



ความสัมพันธ์ที่ได้ $\{(x, y) \in R \times R \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$

2. ทบทวนเครื่องหมายค่าของ x และค่าของ y ในแต่ละควอดรันต์

ควอดรันต์ที่ 1	x มีค่าเป็นบวก	, y ที่ค่าเป็น บวก
ควอดรันต์ที่ 2	x มีค่าเป็นลบ	, y ที่ค่าเป็น บวก
ควอดรันต์ที่ 3	x มีค่าเป็นลบ	, y ที่ค่าเป็น ลบ
ควอดรันต์ที่ 4	x มีค่าเป็นบวก	, y ที่ค่าเป็น ลบ

3. ให้นักเรียนรู้จักสัญลักษณ์ θ ใช้แทนความยาวส่วนโค้งของวงกลม 1 หน่วยที่เริ่มวัดจากจุด (1, 0) ถ้า $\theta > 0$ จะวัดความยาวไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ถ้า $\theta < 0$ จะวัดความยาวไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา P(x, y) แทนจุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

4. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (1,0) โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้

5. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน

6. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (1,0) โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกาจนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้

7. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน

8. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 4, ข้อ 6 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป

คาบที่ 2

1. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (0,1) โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกาจนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
2. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
3. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (0,1) โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกาจนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
4. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
5. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 1, ข้อ 3 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป
6. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (-1,0) โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกาจนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
7. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
8. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (-1,0) โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกาจนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
9. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
10. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 6, ข้อ 8 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป

คาบที่ 3

1. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (0,-1) โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกาจนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
2. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
3. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (0,-1) โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกาจนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
4. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
5. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 1, ข้อ 3 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป
6. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 9

5. แหล่งการเรียนรู้ / สื่อการเรียนการสอน

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. จากการนำเสนอผลงานบนกระดาน	นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85%
2. สังเกตจากความสนใจ	นักเรียนให้ความสนใจดี
3. จากการสรุปผล	นักเรียนสรุปผลได้ถูกต้อง 90%
4. ทำใบงานที่ 9	นักเรียนทำได้ถูกต้อง 90%

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....
....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....
....
....
....
....
....

ลงชื่อ..
วันที่..

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

เรื่อง **การวัดความยาวส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้ง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 6 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

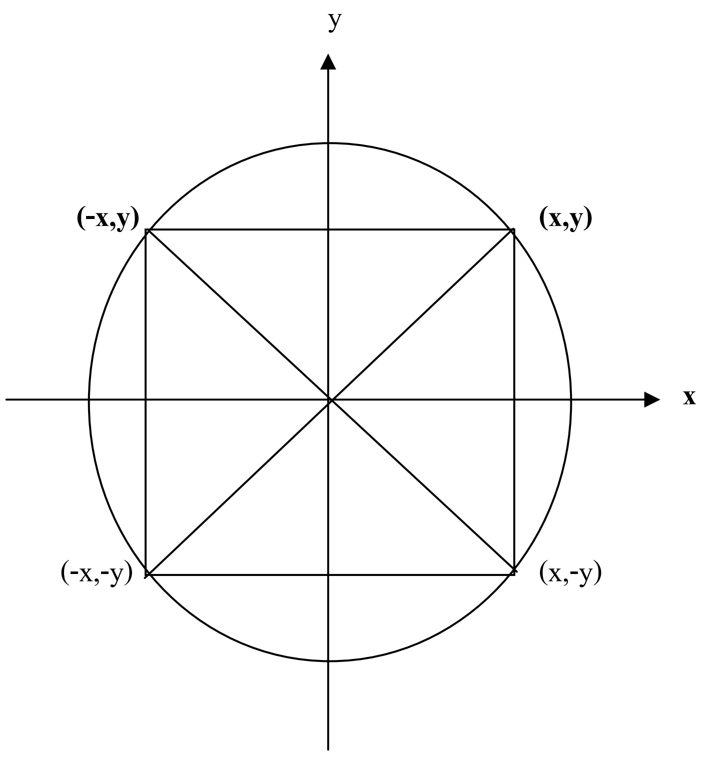
มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการอ่านจุดปลายส่วนโค้ง θ หน่วยที่กำหนดให้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หาความยาวของส่วนโค้งและจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ได้

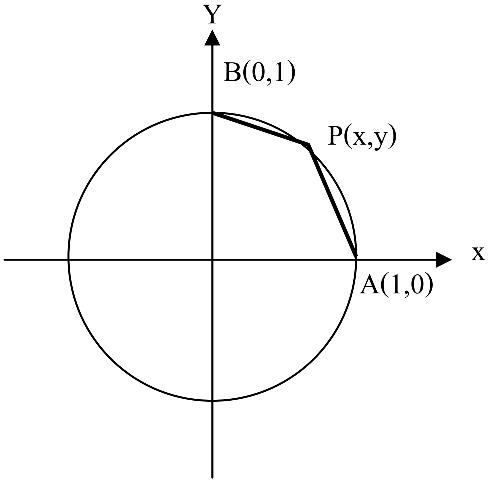
2. แนวความคิดหลัก

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ เมื่อ θ อยู่ในควอดรันต์ต่าง ๆ

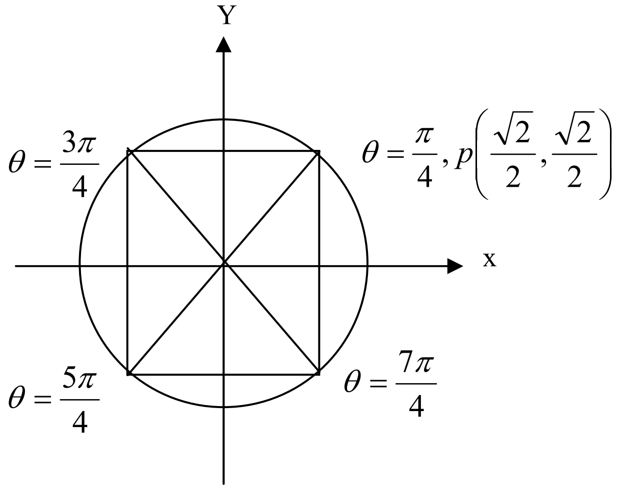


3. เนื้อหาสาระ

รูปที่ 1



รูปที่ 2



ให้ P(x,y) เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB เท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้คอร์ด PB ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ PB = PA

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

จะได้ x = y

แต่ $x^2 + y^2$ = 1 (เพราะจุด (x,y) อยู่บนวงกลม)

ดังนั้น $2x^2$ = 1

หรือ $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

เนื่องจาก P(x,y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 1

เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\dfrac{\pi}{4}$ หน่วย คือจุด $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

เนื่องจาก P_1 (-x,y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 2

เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $-x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

และ $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\dfrac{3\pi}{4}$ หน่วย คือจุด $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

เนื่องจาก P_2 (-x,-y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 3

เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $-x = -y = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\dfrac{5\pi}{4}$ หน่วย คือจุด $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

เนื่องจาก P_3 (x,-y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 4

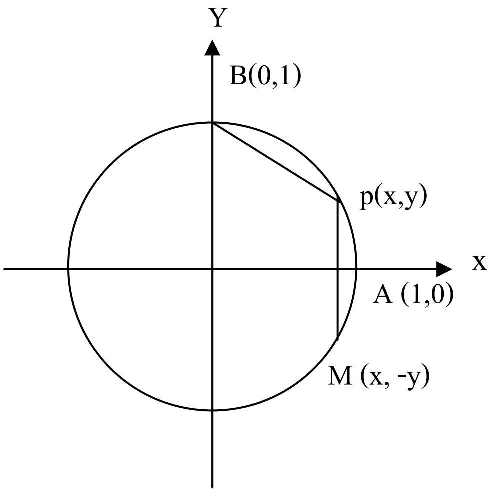
เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

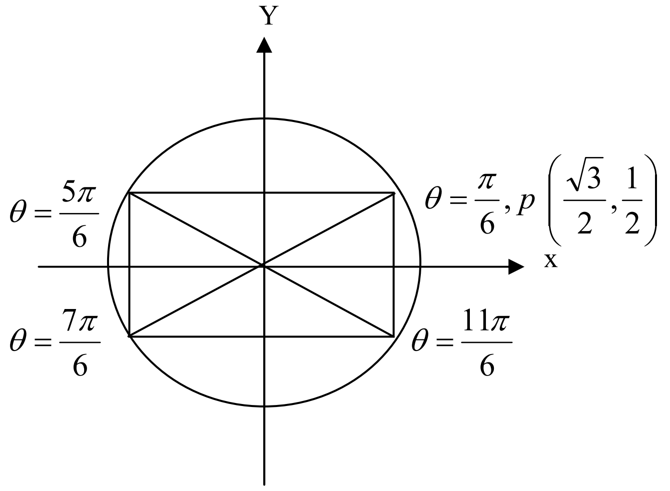
และ $-y = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\dfrac{7\pi}{4}$ หน่วย คือจุด $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

รูปที่ 3



รูปที่ 4



ให้จุด P(x,y) เป็นจุดซึ่งทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ดังนั้นส่วนโค้ง PB จึงยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M สมมาตรกับจุด P โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตรจะได้ส่วนโค้ง AM ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย และ M มีพิกัดเป็น (x, -y)

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM จึงยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย จะได้คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PB

นั่นคือ PM = PB

$$\sqrt{(y-(-y))^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\sqrt{(y+y)^2} = \sqrt{x^2+y^2-2y+1}$$

$$4y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$
$$4y^2 = 1 - 2y + 1 \quad (\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1)$$

$$4y^2 + 2y - 2 = 0$$
$$2\left(2y^2 + y - 1\right) = 0$$
$$2(2y-1)(y+1) = 0$$
$$2y - 1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad y + 1 = 0$$
$$\text{y} = \frac{1}{2} \quad \text{หรือ} \quad y = -1$$

เนื่องจาก P(x,y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $y = \frac{1}{2}$

และ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

เนื่องจาก P_1 (-x,y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $-x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

และ $y = \frac{1}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

เนื่องจาก P_2 (-x,-y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 3 เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $-x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

และ $-y = \frac{-1}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{7\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

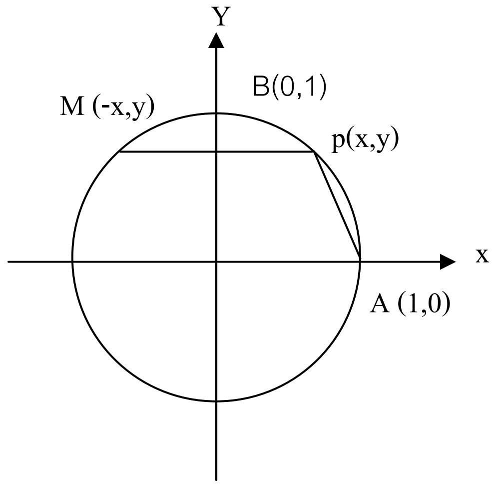
เนื่องจาก P_3 (x,-y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 4 เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

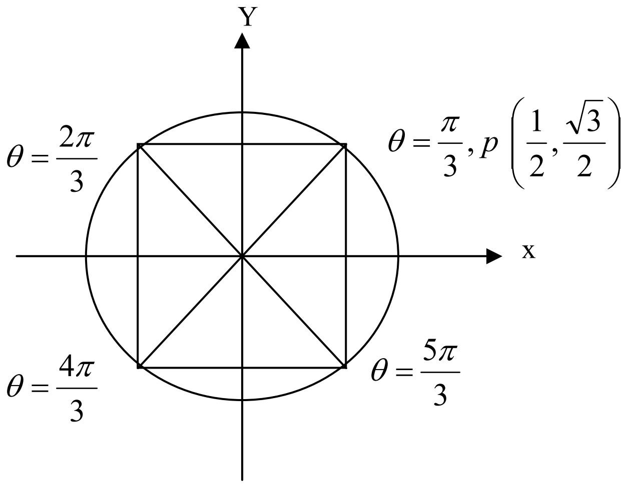
และ $-y = \frac{-1}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{11\pi}{6}$ หน่วย คือจุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$

รูปที่ 5



รูปที่ 6



ให้จุด P(x,y) เป็นจุดซึ่งทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ดังนั้นส่วนโค้ง PB ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย ให้จุด M สมมาตรกับจุด P(x,y) โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร จะได้ส่วนโค้ง BM ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

และ M มีพิกัดจุดเป็น -x,y ดังนั้นส่วนโค้ง PM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ PM = PA

$$\sqrt{(x-(-x))^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$\sqrt{(x+x)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$4x^2 = x^2-2x+1+y^2$$
$$4x^2 = 1-2x+1 \text{ (เนื่องจาก } x^2+y^2=1)$$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$(2)(2x^2 + x - 1) = 0$$
$$(2)(2x-1)(x+1) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x + 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \quad \text{หรือ} \quad x = -1$$

เนื่องจาก P(x,y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x = \frac{1}{2}$

และ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

เนื่องจาก P_1 (-x,y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $-x = \frac{-1}{2}$

และ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{2\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

เนื่องจาก P_2 (-x,-y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 3 เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $-x = \frac{-1}{2}$

และ $-y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{4\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

เนื่องจาก P_3 (x,-y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 4 เมื่อ x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x = \frac{1}{2}$

และ $-y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{5\pi}{3}$ หน่วย คือจุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

ใบงานที่ 10

กำหนดจำนวนจริง θ ให้หาจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยที่กำหนด

1. $\theta = \dfrac{13\pi}{6}$
2. $\theta = \dfrac{25\pi}{4}$
3. $\theta = \dfrac{13\pi}{3}$
4. $\theta = 3\pi$
5. $\theta = \dfrac{-20\pi}{3}$
6. $\theta = \dfrac{-37\pi}{6}$
7. $\theta = \dfrac{35\pi}{6}$
8. $\theta = \dfrac{-7\pi}{3}$

4. กระบวนการเรียนรู้

คาบที่ 1

1. จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ครูใช้วิธีการถามตอบเพื่อให้นักเรียนสรุปให้ได้ว่า ถ้า $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ถ้า $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ถ้า $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ และถ้า $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
2. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
3. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
4. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
5. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน

6. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 2, ข้อ 4 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป
7. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
8. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
9. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
10. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
11. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 7, ข้อ 9 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป

คาบที่ 2

1. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
2. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
3. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
4. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
5. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 1, ข้อ 3 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป (สรุปรวม)
6. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
7. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
8. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
9. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
10. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 6, ข้อ 8 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป

คาบที่ 3

1. จากรูปที่ 3 และรูปที่ 4 ครูใช้วิธีการถามตอบเพื่อให้นักเรียนสรุปให้ได้ว่า ถ้า $\theta = \frac{\pi}{6}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

   ถ้า $\theta = \frac{5\pi}{6}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

   ถ้า $\theta = \frac{7\pi}{6}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

   ถ้า $\theta = \frac{11\pi}{6}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
2. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
3. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
4. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
5. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
6. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 2, ข้อ 4 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป
7. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
8. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
9. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
10. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
11. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 7, ข้อ 9 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป

คาบที่ 4

1. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
2. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
3. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
4. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
5. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 1, ข้อ 3 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป
6. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
7. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
8. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
9. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
10. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 6, ข้อ 8 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป

คาบที่ 5

1. จากรูปที่ 5 และรูปที่ 6 ครูใช้วิธีการถามตอบเพื่อให้นักเรียนสรุปให้ได้ว่า ถ้า $\theta = \frac{\pi}{3}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   ถ้า $\theta = \frac{2\pi}{3}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   ถ้า $\theta = \frac{4\pi}{3}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

   ถ้า $\theta = \frac{5\pi}{3}$ จุดปลายส่วนโค้งจะอยู่ที่จุด $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
2. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
3. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน

4. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
5. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
6. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 2, ข้อ 4 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป
7. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
8. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
9. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
10. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
11. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 7, ข้อ 9 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป

คาบที่ 6

1. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
2. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
3. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
4. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
5. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 1, ข้อ 3 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป
6. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ โดยวัดแบบทวนเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
7. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
8. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้ง (θ) ที่ทำให้จุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ โดยวัดแบบตามเข็มนาฬิกา จนกว่านักเรียนสรุป θ ในรูปทั่วไปได้
9. ให้นักเรียนออกมานำเสนอบนกระดาน
10. ให้นักเรียนพิจารณา θ ที่ได้จากข้อ 6, ข้อ 8 แล้วสรุป θ ในรูปทั่วไป
11. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 10

5. แหล่งการเรียนรู้ / สื่อการเรียนการสอน

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. จากการสรุปผล	นักเรียนสรุปผลได้ถูกต้อง 90%
2. จากการนำเสนอผลงานบนกระดาน	นักเรียนทำได้ถูกต้องประมาณ 85%
3. สังเกตจากความสนใจ	นักเรียนให้ความสนใจดี
4. ทำใบงานที่ 10	นักเรียนทำได้ถูกต้อง 90%

7. บันทึกหลังสอน

………
………
………
………
………

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

………
………
………
………
………

ลงชื่อ…………………………………….
วันที่……………………………………...

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

เรื่อง **ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงได้

2. แนวความคิดหลัก

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ $R \times R$ ในที่นี้จะใช้วงกลมรัศมี 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติ และจะเรียกวงกลมดังกล่าวว่า "วงกลมหนึ่งหน่วย" วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$

3. เนื้อหาสาระ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติคือเซตของคู่อันดับระหว่างความยาวของส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยกับโคออร์ดิเนทจุดปลายส่วนโค้งนั้น

บทนิยาม *เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือเซตของคู่อันดับ (θ, y) ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือเซตของคู่อันดับ (θ, x)*

เนื่องจาก $(\theta, y) \in \sin e$ จะได้ $y = \sin e\theta$

และ $(\theta, x) \in \cos ine$ จะได้ $x = \cos ine\theta$

หรือเขียนสั้นๆ ว่า

$y = \sin\theta$ (อ่านว่าวายเท่ากับไซน์ทีตา)

$x = \cos\theta$ (อ่านว่าเอกซ์เท่ากับคอสทีตา)

โดยที่วงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$ จะเห็นว่า $-1 \le y \le 1$ และ $-1 \le x \le 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

นั่นคือเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์คือเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองคือเซตของจำนวนจริง

จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$ เนื่องจาก $y = \sin\theta$ และ $x = \cos\theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ดังนี้

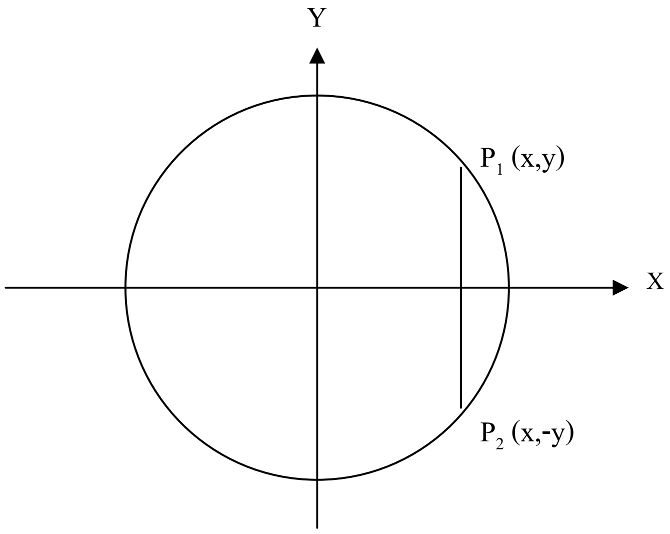
$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงหรือเขียนตามความนิยมได้เป็น

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ $\cos^2\theta$ หมายถึง $(\cos\theta)(\cos\theta)$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือจุด (x, y) จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วยจะเป็นจุด $(x, -y)$

รูปที่ 1



จากจุด (x, y) และ $(x, -y)$ ทำให้สรุปได้ว่า

$x = \cos\theta \quad , \quad y = \sin\theta$

และ $x = \cos(-\theta) \quad , \quad -y = \sin(-\theta)$

ดังนั้น $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกใดๆ ได้ ก็จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบที่เป็นจำนวนตรงข้ามของจำนวนจริงบวกนั้นได้ด้วย

ใบงานที่ 11.1

จงบอกจำนวนจริง θ มา 5 จำนวนที่ทำให้

1. $\sin\theta = 0$
2. $\sin\theta = 1$
3. $\cos\theta = 1$
4. $\sin\theta = -1$
5. $\cos\theta = -1$
6. $\sin\theta = \frac{1}{2}$
7. $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
8. $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
9. $\cos\theta = 0$
10. $\cos\theta = \frac{1}{2}$
11. $\sin\theta = \frac{-1}{2}$
12. $\cos\theta = \frac{-1}{2}$
13. $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
14. $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
15. $\sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
16. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
17. $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
18. $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

ใบงานที่ 11.2

จงหาค่าของฟังก์ชัน sine และ cosine ของจำนวนจริงที่กำหนดให้

1. $\theta = 0$
2. $\theta = \frac{\pi}{6}$
3. $\theta = \frac{\pi}{4}$
4. $\theta = \frac{\pi}{3}$
5. $\theta = \frac{\pi}{2}$
6. $\theta = \frac{2\pi}{3}$
7. $\theta = -2\pi$
8. $\theta = \frac{-11\pi}{6}$
9. $\theta = \frac{-7\pi}{4}$
10. $\theta = \frac{-5\pi}{3}$
11. $\theta = \frac{-3\pi}{2}$
12. $\theta = \frac{-4\pi}{3}$
13. $\theta = \frac{3\pi}{4}$
14. $\theta = \frac{5\pi}{6}$
15. $\theta = \pi$
16. $\theta = \frac{7\pi}{6}$
17. $\theta = \frac{5\pi}{4}$
18. $\theta = \frac{4\pi}{3}$
19. $\theta = \frac{3\pi}{2}$
20. $\theta = \frac{5\pi}{3}$
21. $\theta = \frac{7\pi}{4}$
22. $\theta = \frac{11\pi}{6}$
23. $\theta = 2\pi$
24. $\theta = \frac{-5\pi}{4}$
25. $\theta = \frac{-7\pi}{6}$
26. $\theta = -\pi$
27. $\theta = \frac{-5\pi}{6}$
28. $\theta = \frac{-3\pi}{4}$
29. $\theta = \frac{-2\pi}{3}$
30. $\theta = \frac{-\pi}{2}$
31. $\theta = \frac{-\pi}{3}$
32. $\theta = \frac{-\pi}{4}$
33. $\theta = \frac{-\pi}{6}$

ใบงานที่ 11.3

กำหนดให้ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = 0.4848$ จงหาค่าของ

1. $\cos\theta$
2. $\sin(\pi - \theta)$
3. $\cos(\pi + \theta)$
4. $\sin(-\theta)$
5. $\sin(3\pi - \theta)$
6. $\cos(\theta - 2\pi)$
7. $\sin(\pi + \theta)$
8. $\cos(\pi - \theta)$
9. $\sin(\theta - 2\pi)$
10. $\cos(3\pi - \theta)$
11. $\sin(3\pi + \theta)$
12. $\cos(3\pi + \theta)$
13. $\cos(-\theta)$
14. $\sin(2\pi - \theta)$
15. $\cos(2\pi - \theta)$

ใบงานที่ 11.4

1. ถ้า $\sin\theta = 0.56$ จงหาว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยจะอยู่ในควอดรันต์ใดบ้าง
2. ถ้า $\cos\theta = -0.56$ จงหาว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยจะอยู่ในควอดรันต์ใดบ้าง
3. ถ้า $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $\cos x$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$
4. กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{-3}{5}$ และ $\cos\theta > 0$ จงหาค่าของ $\cos\theta$
5. กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{-3}{5}$ และ $\cos\theta < 0$ จงหาค่าของ $\cos\theta$
6. กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{-5}{13}$ และ $\cos\theta > 0$ จงหาค่าของ $\cos\theta$
7. กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{-5}{13}$ และ $\cos\theta > 0$ จงหาค่าของ $\cos\theta$
8. กำหนดให้ $\cos\theta = \frac{12}{13}$ และ $\sin\theta < 0$ จงหาค่าของ $\sin\theta$
9. กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{13}}$ และ $\cos\theta < 0$ จงหาค่าของ $\cos\theta$
10. กำหนดให้ $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin\theta > 0$ จงหาค่าของ $\sin\theta$
11. กำหนดให้ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\sin\theta < 0$ จงหาค่าของ $\sin\theta$
12. กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ และ $\cos\theta < 0$ จงหาค่าของ $\cos\theta$
13. กำหนดให้ $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin\theta < 0$ จงหาค่าของ $\sin\theta$
14. กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{10}$ และ $\cos\theta < 0$ จงหาค่าของ $\cos\theta$

ใบงานที่ 11.5

จงเขียนค่าของฟังก์ชัน sin e และของจำนวนจริงต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของค่าฟังก์ชัน sin e และของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ เมื่อกำหนดจำนวนจริง ให้ดังต่อไปนี้

1.	$\theta = \frac{13\pi}{12}$	11.	$\theta = 5.5$
2.	$\theta = \frac{5\pi}{3}$	12.	$\theta = -7$
3.	$\theta = 4$	13.	$\theta = -12$
4.	$\theta = 5$	14.	$\theta = 12$
5.	$\theta = 6.1$	15.	$\theta = -7.5$
6.	$\theta = 7$	16.	$\theta = 22.2$
7.	$\theta = -8$	17.	$\theta = -29.5$
8.	$\theta = -9$	18.	$\theta = -40$
9.	$\theta = -3.14$	19.	$\theta = \frac{-29\pi}{5}$
10.	$\theta = -7.54$	20.	$\theta = \frac{-35\pi}{4}$

ใบงานที่ 11.6

จงหาค่าของ $\sin\theta$ หรือ $\cos\theta$

1. ถ้า $\cos\theta = \frac{-1}{2}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ จงหา $\sin\theta$
2. ถ้า $\sin\theta = \frac{3}{5}$ เมื่อ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ จงหา $\cos\theta$
3. ถ้า $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ จงหา $\sin\theta$
4. ถ้า $\sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $\pi \le \theta \le 3\frac{\pi}{2}$ จงหา $\cos\theta$
5. ถ้า $\cos\theta = \frac{4}{5}$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ จงหา $\sin\theta$
6. ถ้า $\cos\theta = \frac{-12}{13}$ เมื่อ $\pi \le \theta \le 3\frac{\pi}{2}$ จงหา $\sin\theta$
7. ถ้า $\sin\theta = \frac{5}{13}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ จงหา $\cos\theta$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปค่า θ ในรูปทั่วไปเมื่อจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด (1,0), (0,1), (-1,0) และ (0,-1)

2. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปค่า θ ในรูปทั่วไป เมื่อจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ควอดรันต์ที่ 2 ควอดรันต์ที่ 3 และควอดรันต์ที่ 4 เมื่อ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

3. ครูเขียนนิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์บนกระดาน และให้นักเรียนช่วยกันตีความหมายของนิยาม

4. ครูตั้งคำถามจนกระทั่งนักเรียนสามารถสรุปได้ว่า $(\theta, y) \in \sin e$ จะได้ $y = \sin\theta$ และ $(\theta, x) \in \cos ine$ จะได้ $x = \cos ine\theta$ หรือเขียนสั้นๆ ว่า $y = \sin\theta$ และ $x = \cos\theta$

5. ให้นักเรียนพิจารณากราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R / x^2 + y^2 = 1\}$ สังเกตค่าของ x และ y แล้วสรุปค่าเรนจ์และค่าโดเมนของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

6. จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$ เนื่องจาก $y = \sin\theta$ และ $x = \cos\theta$ ให้นักเรียนช่วยกันสรุปให้ได้ความสัมพันธ์ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

7. จากรูปที่ 1 ครูใช้วิธีการซักถามนักเรียนจนกระทั่งนักเรียนสามารถสรุปได้ว่า $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

8. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 11.1 ถึงใบงานที่ 11.6

5. แหล่งการเรียนรู้ / สื่อการเรียนการสอน

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากความสนใจ	นักเรียนให้ความสนใจดี
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง 90%
3. สังเกตจากการสรุปผล	นักเรียนสรุปผลได้ถูกต้อง 90%
4. ทำใบงานที่ 11.1 ถึง 11.6	นักเรียนทำได้ถูกต้อง 90%

7. บันทึกหลังสอน

……….
……….
……….
……….
……….
……….

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

……….
……….
……….
……….
……….
……….

ลงชื่อ…………………………………….
วันที่……………………………………..

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

เรื่อง **ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือ

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงได้

2. แนวความคิดหลัก

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังกล่าวแล้วข้างต้น ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ

$$\tan gent\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\sec ant\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\cos ecant\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

$$\cot angent\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

เขียนแทน "$\tan gent\theta$" ด้วย "$\tan\theta$" อ่านว่า แทนทีตา

เขียนแทน "$\sec ant\theta$" ด้วย "$\sec\theta$" อ่านว่า เซกทีตา

เขียนแทน "$\cos ecant\theta$" ด้วย "$\cos ec\theta$" หรือ "$\csc\theta$" อ่านว่า โคเซกทีตา

เขียนแทน "$\cot angent\theta$" ด้วย "$\cot\theta$" หรือ "$ctn\theta$" อ่านว่า คอตทีตา

จากบทนิยามข้างต้น อาจหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้เช่น

(1) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{1}{\tan\theta}$ เมื่อ $\sin\theta, \cos\theta \neq 0$

(2) $$1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0$$

(3) $$1+\cot^2\theta = 1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta} = \cos ec^2\theta \quad \text{เมื่อ} \quad \sin\theta \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของ $\dfrac{\pi}{6}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ และ $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

โดยบทนิยามจะได้

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos ec\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1\times\frac{2}{1} = 2$$

$$\sec\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\frac{\pi}{6} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sin\dfrac{4\pi}{3}\cos\dfrac{5\pi}{6}$

วิธีทำ
$$\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

ใบงานที่ 12.1

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนต่อไปนี้

1.	$\frac{3\pi}{4}$	6.	$-\frac{5\pi}{4}$
2.	$\frac{2\pi}{3}$	7.	$\frac{35\pi}{4}$
3.	$\frac{7\pi}{4}$	8.	$-\frac{29\pi}{6}$
4.	$-\frac{4\pi}{3}$	9.	$\frac{13\pi}{3}$
5.	$-\frac{3\pi}{4}$	10.	$\frac{15\pi}{6}$

จงหาค่าของ

1. $\cos\frac{7\pi}{2}-\sin\frac{5\pi}{3}+\tan\frac{9\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{6}+\tan\frac{7\pi}{6}$
2. $\sin\frac{5\pi}{6}+\tan\frac{7\pi}{6}-\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{4\pi}{3}$
3. $\sin\frac{3\pi}{2}+\tan\pi\cos\frac{\pi}{2}-\cot\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{7\pi}{6}$
4. $\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{3}+\cos\frac{11\pi}{3}\sin\frac{13\pi}{6}+\sin\frac{5\pi}{3}-\tan\frac{5\pi}{3}$
5. $\cos^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{6}+\cos^2\frac{13\pi}{6}$
6. $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)-\cos\frac{5\pi}{4}-\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$
7. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\frac{7\pi}{3}-\cos ec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$
8. $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\cot\frac{16\pi}{3}+\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$
9. $\cot\left(-\frac{23\pi}{6}\right)+\tan\frac{10\pi}{3}-\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)$
10. $\cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\cos\frac{9\pi}{4}\cdot\sec\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

ใบงานที่ 12.2

ให้พิสูจน์เอกลักษณ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\dfrac{1}{1+\tan^2 x}+\dfrac{1}{1+\cot^2 x}=1$
2. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\cot x=\operatorname{cosec} x$
3. $\dfrac{1}{\sec x-\tan x}+\dfrac{1}{\sec x+\tan x}=2\tan x$
4. $\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x-\sec^2 x\cdot\operatorname{cosec}^2 x=0$
5. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}+\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=2(\sec x-\tan x)$
6. $\dfrac{\cos x\ \cot x-\sin x\ \tan x}{\operatorname{cosec} x-\sec x}=1+\sin x\cdot\cos x$
7. $(1+\tan x+\sec x)\ (1+\tan x-\sec x)=2\tan x$
8. $(1-\sin x-\cos x)^2\ (1+\sin x+\cos x)^2=4\sin^2 x\ \cos^2 x$
9. $(1+\cot x-\operatorname{cosec} x)\ (1+\tan x+\sec x)=2$
10. $\sin^8 x-\cos^8 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)\ (1-2\ \sin^2 x\cdot\cos^2 x)$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูเขียนบทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ
2. จากตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ครูใช้วิธีการซักถามนักเรียนจนกระทั่งได้คำตอบ
3. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 12.1
4. จากบทนิยาม ครูใช้วิธีการซักถามให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่างๆ เช่น

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$
$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$
$$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$$

5. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 12.2

5. แหล่งการเรียนรู้ / สื่อการเรียนการสอน

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. จากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบได้ถูกต้องประมาณ 85%
2. สังเกตจากความสนใจ	นักเรียนให้ความสนใจดี
3. ทำใบงานที่ 12.1 และ 12.2	นักเรียนทำได้ถูกต้อง 90%

7. บันทึกหลังสอน

…….
…….
…….
…….
…….
…….

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

…….
…….
…….
…….
…….
…….
…….

ลงชื่อ…………………………………….
วันที่……………………………………..

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

เรื่อง **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

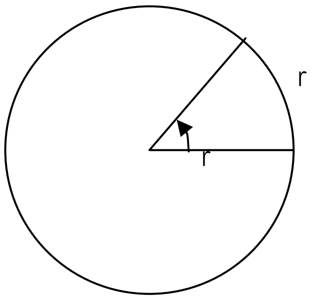
มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมได้

2. แนวความคิดหลัก

หน่วยในการวัดมุมที่รู้จักกันแล้วคือองศา ($^{\circ}$) โดยถือว่ามุมที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปครบหนึ่งรอบมีขนาด 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อยคือ ลิปดา ($'$) และพิลิปดา ($''$) ดังนี้ $1^{\circ} = 60'$ และ $1' = 60''$ หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่งคือ เรเดียน (radian)



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม นั่นถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

3. เนื้อหาสาระ

เนื่องจากวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย ดังนั้นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วย จึงมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียนหรือ 2π เรเดียนและมุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมที่ยาว πr หน่วยจะมีขนาด $\frac{\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ π เรเดียน จะเห็นได้ว่าสำหรับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี

r หน่วย ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว a หน่วยจะมีขนาด $\frac{a}{r}$ เรเดียน และถ้าให้ขนาดของมุมดังกล่าวเป็น θ เรเดียน

จะได้ $\theta = \frac{a}{r}$

เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีครบ 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน แต่มุมดังกล่าว เมื่อวัดเป็นองศาวัดได้ 360 องศา ดังนั้น

360 องศา = 2π เรเดียน

หรือ 180 องศา = π เรเดียน

ดังนั้น 1 องศา = $\frac{\pi}{180}$ เรเดียน

และ 1 เรเดียน = $\frac{180}{\pi}$ องศา

จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียนที่กล่าวมาข้างต้น จะได้ว่าเมื่อทราบขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่งแล้วจะสามารถหาขนาดของมุมนั้นในอีกหน่วยได้

ตัวอย่างที่ 1 จงเปลี่ยน 4 เรเดียนให้เป็นองศา

วิธีทำ เนื่องจาก π เรเดียน = 180 องศา

ดังนั้น 4 เรเดียน = $\frac{4 \times 180}{\pi}$ องศา

$= \frac{4 \times 180}{3.1416}$

$=$ 229.18 องศา

$= 229^\circ\ 10'48''$

$= 229^\circ\ 11'$

ตัวอย่างที่ 2 จงเปลี่ยน 82° ให้เป็นเรเดียน

วิธีทำ เนื่องจาก 180 องศา = π เรเดียน

ดังนั้น 82 องศา = $\frac{82 \times \pi}{180}$ เรเดียน

$= \frac{41\pi}{90}$ เรเดียน

ใบงานที่ 13.1

จงเปลี่ยนหน่วยเรเดียนให้เป็นองศา

1.	π	11.	4
2.	$\frac{2\pi}{3}$	12.	5
3.	$\frac{-5\pi}{6}$	13.	6.1
4.	$\frac{11\pi}{5}$	14.	7
5.	4π	15.	-8
6.	$\frac{-9\pi}{4}$	16.	-9
7.	$\frac{13\pi}{6}$	17.	-3.14
8.	$\frac{7\pi}{3}$	18.	-7.54
9.	$\frac{-8\pi}{5}$	19.	12
10.	$\frac{17\pi}{6}$	20.	15.2

จงเปลี่ยนหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียน

1. $112^\circ\ 40'$
2. $-130^\circ\ 15'$
3. 210°
4. -215°
5. 300°
6. 315°
7. $405^\circ\ 20'$
8. $455^\circ\ 30'$
9. -500°
10. $790^\circ\ 10'$

ใบงานที่ 13.2

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของมุมต่อไปนี้

1. 150°
2. 120°
3. 315°
4. -315°
5. 930°
6. 210°
7. -135°
8. -240°
9. -330°
10. 675°

จงหาค่าของ

1. $\dfrac{3\tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2\sin 330^\circ}$
2. $\dfrac{\tan(-480^\circ) - \sin(-840^\circ)}{\cos(-390^\circ)}$
3. $\dfrac{\sin 210^\circ + \cos 120^\circ - \tan 330^\circ}{\sin 210^\circ + \cos 120^\circ + \tan 330^\circ}$
4. $\dfrac{\operatorname{cosec} 315^\circ + \operatorname{cosec}(-30^\circ) + \operatorname{cosec}(-135^\circ)}{\sec 0^\circ + \sec(930^\circ) + \sec(-240^\circ)}$
5. $\dfrac{\tan 150^\circ - \tan(-120^\circ)}{1 + \tan 150^\circ \tan(-120^\circ)}$
6. $\dfrac{\tan 315^\circ + \tan(-135^\circ)}{1 - \tan 315^\circ \tan(-135^\circ)}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูอธิบายหน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่ง คือ เรเดียน
2. ครูตั้งคำถามให้นักเรียนตอบคำถามจนกว่านักเรียนสามารถสรุปได้ว่า

$$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

และ

$$1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา}$$

3. ให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบจากตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 โดยครูซักถาม
4. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 13.1 และใบงานที่ 13.2

5. แหล่งการเรียนรู้ / สื่อการเรียนการสอน

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากความสนใจ	นักเรียนให้ความสนใจดี
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง 95%
3. ทำใบงานที่ 13.1 และ 13.2	นักเรียนทำได้ถูกต้อง 90%

7. บันทึกหลังสอน

……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....
……………………………………………………………………………………………………….....

ลงชื่อ……………………………………..…
วันที่…………………………………….…...

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14

เรื่อง **การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ ใดๆ

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงที่กำหนดให้ครบทั้ง 6 ฟังก์ชัน โดยการเปิดตารางตรีโกณมิติ

2. แนวความคิดหลัก

หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ ใดๆจากตารางตรีโกณมิติ

ข้อสังเกตในการใช้ตาราง

- ค่าของ sine, secant และ tangent จะยิ่งมากขึ้น ถ้ามุมนั้นโตมากขึ้นระหว่าง $0^\circ - 90^\circ$
- ค่าของ cosine, cosecant และ cotangent จะยิ่งน้อยลงถ้ามุมนั้นโตมากขึ้นระหว่าง $0^\circ - 90^\circ$
- การหาค่าของ cosecant ต้องเปลี่ยนเป็น sine ก่อน แล้วจึงกลับเศษเป็นส่วน
- การหาค่าของ secant ต้องเปลี่ยนเป็น cosine ก่อนแล้วจึงกลับเศษเป็นส่วน

3. เนื้อหาสาระ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sin\ 42^\circ 15'$

วิธีทำ

ค่าของ $\sin\ 42^\circ 15'$ อ่านโดยตรงจากตารางไม่ได้ แต่เนื่องจากมุม $42^\circ 15'$ อยู่ระหว่างมุม $42^\circ 10'$ และมุม $42^\circ 20'$ ดังนั้นจึงเทียบหาค่าที่ต้องการได้ดังนี้

$$\sin\ 42^\circ 10' = 0.6713$$

$$\sin\ 42^\circ 20' = 0.6734$$

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น 10 ลิปดาค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0021

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น 5 ลิปดาค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\dfrac{0.0021 \times 5'}{10'}$

$$= 0.00105$$

ดังนั้น $\sin\ 42^\circ 15' = 0.6713 + 0.00105$

$$= 0.67235$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ cos 0.8820

วิธีทำ

ค่าของ cos 0.8820 อ่านโดยตรงจากตารางไม่ได้ แต่เนื่องจากมุม 0.8820 อยู่ระหว่างมุม 0.8814 กับมุม 0.8843 ดังนั้นจึงเทียบหาค่าที่ต้องการได้ดังนี้

$\cos 0.8814 = 0.6361$

$\cos 0.8843 = 0.6338$

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น 0.0029 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ลดลง 0.0023

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น 0.0006 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ลดลง $\dfrac{0.0023\times 0.0006}{0.0029}$

$= 0.0005$

ดังนั้น $\cos 0.8820 = 0.6361 - 0.0005$

$= 0.6356$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $0 \le \theta \le 180^\circ$ จงหาค่า θ ที่ทำให้ $\sin\theta = 0.2650$

วิธีทำ จากตารางจะได้

$\sin 15^\circ 20' = 0.2644$

$\sin 15^\circ 30' = 0.2672$

ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0028 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$

ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0006 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $\dfrac{0.0006\times 10'}{0.0028}$

$= 2'$

ดังนั้น $\theta = 15^\circ 20' + 2' = 15^\circ 20'$ หรือ $\theta = 180^\circ - 15^\circ 22' = 164^\circ 38'$

นั่นคือ $\sin 15^\circ 22' = 0.2650$ หรือ $\sin 164^\circ 38' = 0.2650$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $0 \le \theta \le \pi$ จงหาค่า θ ที่ทำให้ $\cos\theta = 0.8260$

วิธีทำ จากตารางจะได้

$\cos 0.5963 = 0.8274$

$\cos 0.5992 = 0.8258$

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ลดลง 0.0016 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น 0.0026 เรเดียน

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ลดลง 0.0014 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $\dfrac{0.0014\times 0.0029}{0.0016}$ เรเดียน

$= 0.0025$ เรเดียน

ดังนั้น $\theta = 0.5963 + 0.0025 = 0.5988$

นั่นคือ $\cos 0.5988 = 0.8260$

ใบงานที่ 14.1

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้ตาราง

1. $\cos 30^\circ 10'$
2. $\sin 40^\circ 30'$
3. $\tan (-378^\circ)$
4. $\cot 190^\circ 20'$
5. $\tan 27^\circ 36'$
6. $\cos 407^\circ 43'$
7. $\sin 112^\circ 45'$
8. $\cos 217^\circ 52'$
9. $\tan 322^\circ 20'$
10. $\cot 127^\circ 43'$
11. $\sin 0.2822$
12. $\cos 0.3200$
13. $\tan 0.4160$
14. $\cot 0.7185$
15. $\sin 1.5$
16. $\cos 5$
17. $\tan 1.3410$
18. $\cot 0.49$
19. $\sin 1.1083$
20. $\cos 3.16$

ใบงานที่ 14.2

จงหาค่าของ θ เมื่อ $0 \le \theta \le \pi$ หรือ $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ เมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันให้ดังต่อไปนี้

1. $\cos \theta = 0.9194$
2. $\tan \theta = 3.4124$
3. $\cos \theta = 0.8631$
4. $\sin \theta = 0.9382$
5. $\cos \theta = -0.3760$
6. $\cos \theta = 0.7200$
7. $\sin \theta = 0.8735$
8. $\sin \theta = 0.8648$
9. $\tan \theta = 0.5254$
10. $\sin \theta = -0.9392$
11. $\sin \theta = 0.5050$
12. $\cos \theta = -0.8241$
13. $\tan \theta = 0.9545$
14. $\sin \theta = 0.6728$
15. $\tan \theta = -0.8631$

ใบงานที่ 14.3

1. ถ้า θ อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน จงบอกว่าด้านสิ้นสุดของมุมขนาด θ ในแต่ละข้ออยู่ใน ควอดรันต์ใด

(1) $\sin\ \theta = \dfrac{-4}{5}$

(2) $\cos\ \theta = \dfrac{5}{13}$

(3) $\tan = -4$

(4) $\cot = \dfrac{12}{13}$

(5) $\sin = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$

2. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 20° และมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้าน AC และด้าน BC

3. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มุม A มีขนาด 70° มุม C มีขนาด 50° ด้าน AB ยาว 5 เซนติเมตร จาก B ลากเส้นตรงลงมาตั้งฉาก กับด้าน AC ที่จุด P จงหาความยาวของด้าน BP , BC , AP , PC และ AC

4. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มุม A และ C มีขนาด 110° และ 30° ตามลำดับด้าน AB ยาว 6 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้าน BC และ CA

5. ในรูป Δ ABC มุม B = 45° มุม C = 120° ถ้า a ยาว 40 เซนติเมตร จงหาเส้นตั้งฉากจาก A มายัง BC ที่ต่อออกไป

6. Δ ABC ถ้า มุม A = 42° , มุม B = $116^\circ33'$ จงหาเส้นตั้งฉากจาก C ไปยัง AB ที่ต่อออกไป กำหนด c = 55 Cm, $\tan 42^\circ = 0.9$ $\tan 63^\circ27' = 2$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูอธิบายการอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางแล้วซักถามนักเรียนแต่ละคน โดยให้นักเรียนเปิดตารางตอบคำถามของครู เช่น

cos	$45^\circ10'$	cos	0.0640
sin	$37^\circ20'$	sin	1.4806
tan	$54^\circ30'$	tan	0.1716
cot	$59^\circ40'$	cot	1.2945

2. ให้นักเรียนดูตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ซึ่งเป็นการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่ไม่สามารถเปิดตารางได้

3. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 14.1

4. ครูกำหนดค่าของฟังก์ชันแล้วซักถามนักเรียนแต่ละคนโดยให้นักเรียนหาค่า

$\sin \theta = 0.0581$	$\sin \theta = 0.8387$
$\cos \theta = 0.9983$	$\cos \theta = 0.4592$
$\tan \theta = 0.6289$	$\tan \theta = 2.7475$
$\cot \theta = 1.2497$	$\cot \theta = 0.2742$

5. ให้นักเรียนดูตัวอย่างที่ 3 และตัวอย่างที่ 4
6. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 14.2 และใบงานที่ 14.3

5. แหล่งการเรียนรู้ / สื่อการเรียนการสอน

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. จากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบได้ถูกต้องประมาณ 95%
2. สังเกตจากความสนใจ	นักเรียนให้ความสนใจดี
3. ทำใบงานที่ 14.1 , 14.2 และ 14.3	นักเรียนทำได้ถูกต้อง 90%

7. บันทึกหลังสอน

…….
…….
…….

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

…….
…….
…….

ลงชื่อ…………………………………….
วันที่……………………………………..

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15

เรื่อง **กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน

2. แนวความคิดหลัก

การเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นพื้นฐานในการเรียนเรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชันและลิมิตของฟังก์ชัน

โดยเฉพาะฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ นับว่าเป็นกราฟที่มีความสำคัญมาก ทั้งในคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ (ฟิสิกส์)

3. เนื้อหาสาระ

กราฟของ $y = \sin x$

ค่าของ $\sin x$ เมื่อ x มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังตารางต่อไปนี้

x	sin x
$\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$	เพิ่มขึ้นจาก 0 ไปถึง 1
$\left[\frac{\pi}{2} , \pi\right]$	ลดลงจาก 1 ไปถึง 0
$\left[\pi , \frac{3\pi}{2}\right]$	ลดลงจาก 0 ไปถึง -1
$\left[\frac{3\pi}{2} , 2\pi\right]$	เพิ่มขึ้นจาก -1 ไปถึง 0

กราฟของ $y = \cos x$

ค่าของ $\cos x$ เมื่อ x มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังตารางต่อไปนี้

x	cos x
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	ลดลงจาก 1 ไปถึง 0
$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	ลดลงจาก 0 ไปถึง -1
$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	เพิ่มขึ้นจาก -1 ไปถึง 0
$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	เพิ่มขึ้นจาก 0 ไปถึง 1

กราฟของ $y = \tan x$

ค่าของ $\tan x$ เมื่อ $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังตารางต่อไปนี้

x	tan x
$\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right]$	เพิ่มขึ้นจาก $-\infty$ ไปถึง 0
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$	เพิ่มขึ้นจาก 0 ไปถึง $+\infty$

กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$

ค่าของ $\operatorname{cosec} x$ เมื่อ $x \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังตารางต่อไปนี้

x	cosec x
$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	ลดลงจาก $+\infty$ ไปถึง 1
$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	เพิ่มขึ้นจาก 1 ไปถึง $+\infty$
$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	เพิ่มขึ้นจาก $-\infty$ ไปถึง -1
$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$	เพิ่มขึ้นจาก -1 ไปถึง $-\infty$

กราฟของ y = sec x

ค่าของ cosec x เมื่อ x $\in \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังตารางต่อไปนี้

x	sec x
$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$	เพิ่มขึ้นจาก 1 ไปถึง $+\infty$
$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$	เพิ่มขึ้นจาก $-\infty$ ไปถึง -1
$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$	ลดลงจาก -1 ไปถึง $-\infty$
$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$	ลดลงจาก $+\infty$ ไปถึง 1

กราฟของ y = cot x

ค่าของ cot x เมื่อ x $\in (0,\pi)$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังตารางต่อไปนี้

x	cot x
$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$	ลดลงจาก $+\infty$ ไปถึง 0
$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$	ลดลงจาก 0 ไปถึง $-\infty$

ใบงานที่ 15.1

1. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้แกนร่วมกันแต่เขียนให้กราฟมีสีต่างกัน

1. $y = \sin x$, $y = \sin 2x$
3. $y = \sin x$, $y = \sin 3x$
4. $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}\sin x$
5. $y = \cos x$, $y = \cos 2x$
6. $y = 2\cos x$, $y = \cos 2x$
7. $y = -\cos 2x$, $y = \cos 2x$
8. $y = -\frac{1}{2}\cos x$, $y = 2\cos 2x$
9. $y = \tan x$, $y = \tan\frac{x}{2}$
10. $y = \tan x$, $y = \cot x$
11. $y = \cot x$, $y = \cot\frac{x}{2}$
12. $y = \sin x$, $y = \cos x$
13. $y = \cos x$, $y = \sec x$
14. $y = \sin x$, $y = \cos ec\, x$

ใบงานที่ 15.2

1. จงเขียนกราฟของ y = sin x และ y = cos x เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$ โดยใช้แกนร่วมกันแล้วพิจารณารายละเอียดดังนี้

(1) ช่วงใดที่ $\sin x \ge \cos x$
(2) ช่วงใดที่ $\cos x > \sin x$
(3) ช่วงใดที่ $\sin x + \cos x \ge 0$
(4) ช่วงใดที่ $\sin x + \cos x < 0$

2. จากสมการที่กำหนดให้จงหาแอมพลิจูดของฟังก์ชัน และคาบของฟังก์ชัน

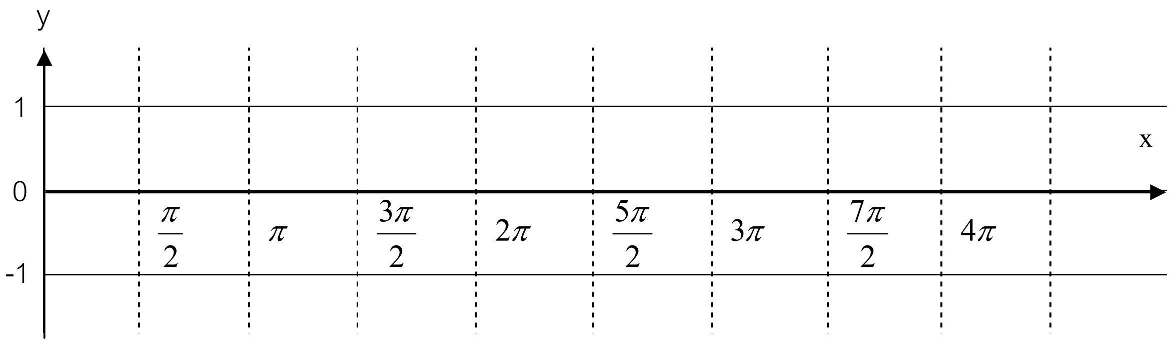
(1) $y = 0.001\sin(400\pi t)$ เป็นสมการของคลื่นเสียงที่เกิดจากซ่อมเสียงเมื่อ t แทนเวลาเป็นวินาที
(2) $I = a\sin(120\pi t)$ เป็นสมการของปริมาณของกระแสไฟในเวลา t วินาที (a เป็นค่าคงตัว)
(3) $y = \frac{2}{3}\sin 3x$
(4) $y = 3\cos\frac{x}{2}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. จากความยาว θ ที่กำหนดให้ ให้นักเรียนหาค่าของ y เมื่อ $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
y									

2. ให้นักเรียนนำคู่อันดับที่ได้มาเขียนกราฟ



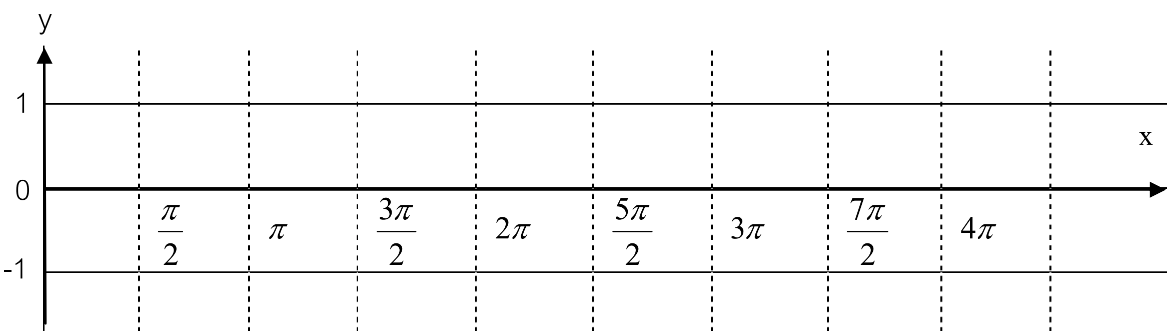
3. จากกราฟให้นักเรียนบอกค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน แล้วนำค่าสูงสุดของฟังก์ชันลบด้วยค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน แล้วหารด้วย 2 ซึ่งเราเรียกว่าแอบพลิจูดของฟังก์ชัน

4. ให้นักเรียนสังเกตกราฟที่ได้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ กล่าวคือ สามารถแบ่งแกน x ออกเป็นช่วงย่อย โดยที่ความยาวแต่ละช่วงย่อยเท่ากันและกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าวแล้วเรียกว่า คาบของฟังก์ชัน

5. จากความยาว θ ที่กำหนดให้ ให้นักเรียนหาค่าของ y เมื่อ $y = \operatorname{cosec} x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
y									

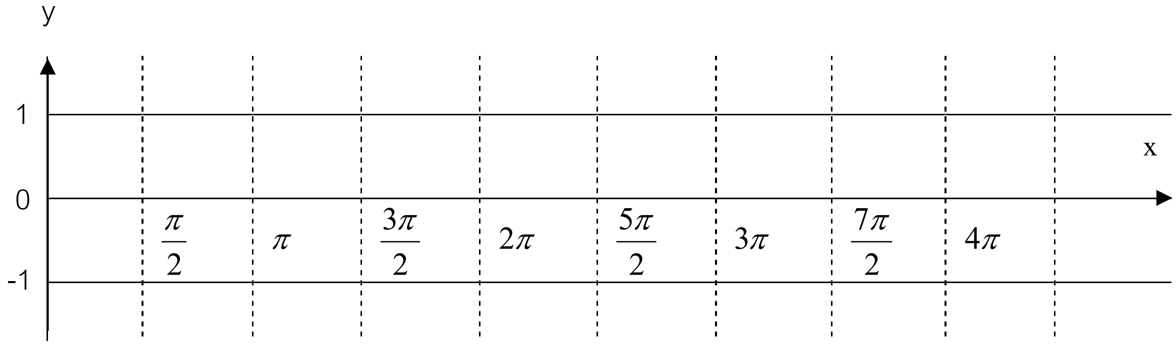
6. ให้นักเรียนทำคู่อันดับที่ได้มาเขียนกราฟ



7. จากความยาว θ ที่กำหนดให้ ให้นักเรียนหาค่าของ y เมื่อ $y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
y									

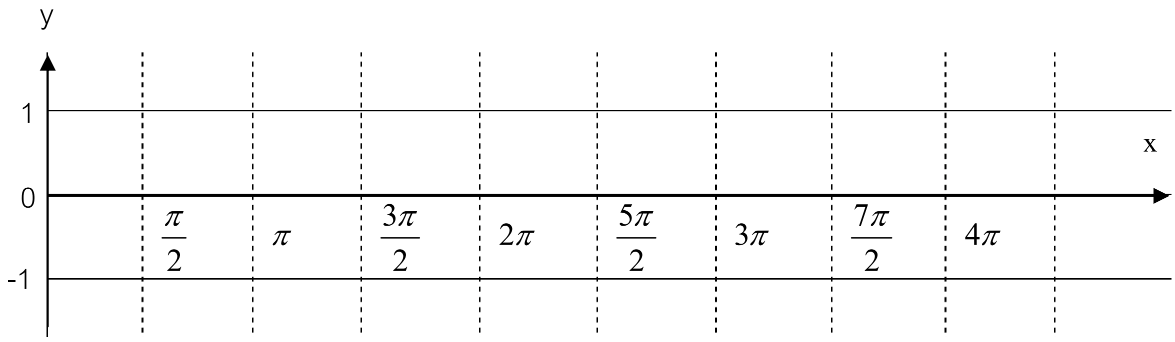
8. ให้นักเรียนทำคู่อันดับที่ได้มาเขียนกราฟ



9. จากความยาว θ ที่กำหนดให้ ให้นักเรียนหาค่าของ y เมื่อ $y = \sec x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
y									

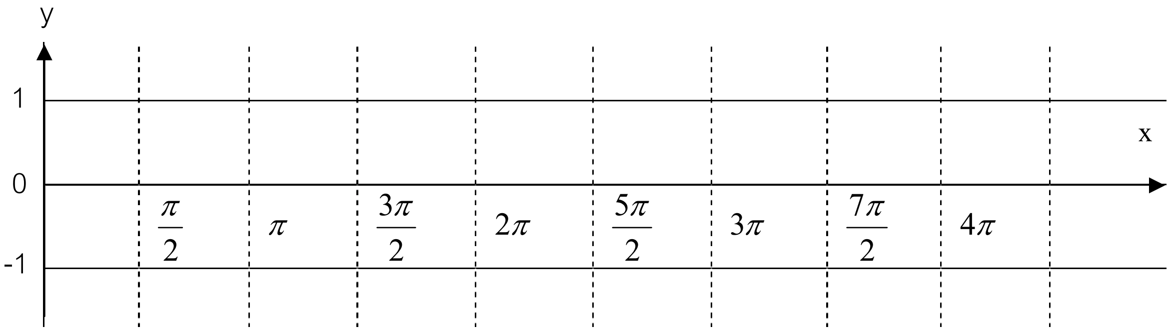
10. ให้นักเรียนทำคู่อันดับที่ได้มาเขียนกราฟ



11. จากความยาว θ ที่กำหนดให้ ให้นักเรียนหาค่าของ y เมื่อ $y = \tan x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
y									

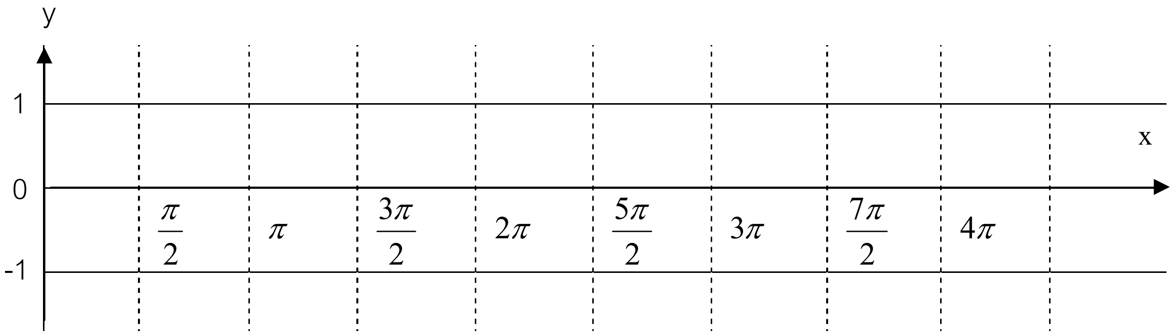
12. ให้นักเรียนทำคู่อันดับที่ได้มาเขียนกราฟ



13. จากความยาว θ ที่กำหนดให้ ให้นักเรียนหาค่าของ y เมื่อ $y = \cot x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
y									

14. ให้นักเรียนทำคู่อันดับที่ได้มาเขียนกราฟ



15. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 15.1 และใบงานที่ 15.2

5. แหล่งการเรียนรู้ / สื่อการเรียนการสอน

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากความสนใจ	นักเรียนให้ความสนใจดี
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง 95%
3. ทำใบงานที่ 15.1 และ 15.2	นักเรียนทำได้ถูกต้อง 90%

7. บันทึกหลังสอน

……
……
……
……
……
……

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

……
……
……
……
……
……

ลงชื่อ…………………………………………........

วันที่…………………………………………..........

ส่วนที่ 3

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16

เรื่อง **ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 8 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง หรือของมุม โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก หรือผลต่าง ของจำนวนจริง 2 จำนวน หรือของมุม 2 มุม

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้ผู้เรียนสามารถ

1. บอกค่าของ $\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta))$ ในรูป $\sin \alpha$,$\sin \beta$, $\cos \alpha$ และ $\sin \beta$
2. บอกค่าของ $\tan(\alpha \pm \beta)$ ในรูป $\tan \alpha$ และ $\tan \beta$
3. บอกค่าของ $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$, $\tan \frac{\theta}{2}$ ในรูปของ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$
4. บอกค่าของ $\sin 3\theta$ ในรูป $\sin \theta$,$\cos 3\theta$ ในรูปของ $\cos\theta$ และ $\tan 3\theta$ ในรูป $\tan\theta$
5. นำฟังก์ชันต่อไปนี้ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาได้

   5.1 $\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta), \tan(\alpha \pm \beta)$

   5.2 $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$,$\tan 2\theta$, $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$, $\tan \frac{\theta}{2}$,$\sin 3\theta$, $\cos 3\theta$

และ $\tan 3\theta$

2. แนวความคิดหลัก

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริง หรือของมุมต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมจากการเรียนพื้นฐานตรีโกณมิติ

3. เนื้อหาสาระ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 2 เท่า 3 เท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริง หรือมุม

ผลคูณ ผลบวก ผลต่าง ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับตรีโกณมิติ ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด ซึ่งนักเรียนควรบอกได้ว่า

1.1 ถ้า (x,y) เป็นจุดปลายบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วย จะได้ $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$

1.2 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

1.3 ระยะระหว่างจุด A (x,y)กับ B (x_1, y_1) คือ $|AB| = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$

2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน ศึกษาใบความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก ผลต่าง

3. ให้นักเรียนฝึกทักษะโจทย์ตรีโกณมิติ

5. แหล่งการเรียนรู้ ห้องสมุด แบบเรียนคณิตศาสตร์

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงาน 2.แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 % 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 80 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	-ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	-ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

8. ข้อเสนอแนะ

....

....

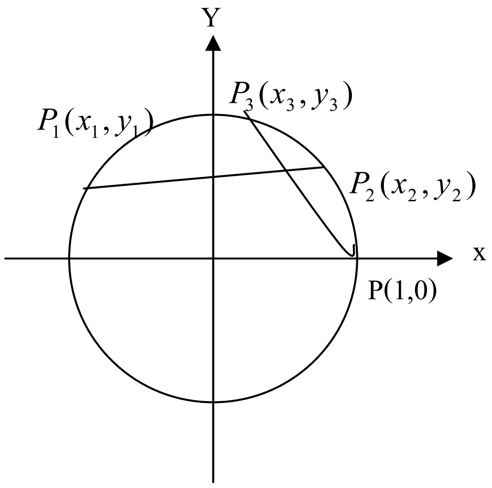
....

ลงชื่อ..

ใบความรู้ที่ 16 – 1 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม**

ศึกษาการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง 2 จำนวน หรือของมุม 2 มุม คือ Cos ($\alpha-\beta$)

กำหนดให้ α และ β แทนจำนวนจริงใดๆ และ P(α) ,P(β) เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่ง



ให้ $P_1(\alpha) = P_1(x_1, y_1)$ $P_2(\beta) = P_2(x_2, y_2)$

จะได้ส่วนโค้ง $PP_1 = \alpha$ หน่วย, ส่วนโค้ง $PP_2 = \beta$ หน่วยและ ส่วนโค้ง $P_1P_2 = \alpha - \beta$ หน่วย

กำหนดให้ $P_3(X_3, y_3)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่แทน $\alpha - \beta$

ดังนั้น ความยาวส่วนโค้ง PP_3 = ส่วนโค้ง P_1P_2 $\therefore$ $|PP_3| = |P_1P_2|$

$$\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3-0)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$x_3^2 - 2x_3 + 1 + y_3^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$$
$$x_3^2 + y_3^2 - 2x_3 + 1 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$
$$1 - 2x_3 + 1 = 2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$
$$-2x_3 = -2(x_1x_2 + y_1y_2)$$
$$x_3 = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta))$$
$$= \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

การหาค่า $\sin(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$

จาก $\cos(\frac{\pi}{2}-A) = \cos\frac{\pi}{2}\cos A+\sin\frac{\pi}{2}.\cos A$

$$= \sin A$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+A) = \cos(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-A))$$
$$\cos A = \sin(\frac{\pi}{2}-A)$$

จาก $\cos[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\,] = \cos[(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\beta)]$

$$\sin\,(\alpha-\beta) = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta-\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha).\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

นั่นคือ $\boxed{\sin\,(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

ในทำนองเดียวกัน $\sin\,(\alpha+\beta) = \sin\,(\alpha-(-\beta))$

$$= \sin\,\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \sin\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

นั่นคือ $\boxed{\sin\,(\alpha+\beta) = \sin\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

การหา tan, $\tan\,(\alpha+\beta)$

$$\tan\,(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

นำ $\cos\alpha\cos\beta$ หารทั้งเศษและส่วน

$$\tan\,(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$$

ใบความรู้ที่ 16 – 3 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม**

ตัวอย่างการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวก ผลต่าง ของจำนวนจริงหรือมุม

1. $\sin x1\ 55^\circ \cos 10^\circ - \cos 55^\circ \sin 10^\circ$

   จะได้ $\sin(55^\circ - 10^\circ) = \sin 45^\circ$

   $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\cos 160^\circ \cos 20^\circ - \sin 160^\circ \sin 20^\circ$

   จะได้ $\cos(160^\circ + 20^\circ) = \cos 180^\circ$

   $= -1$

3. $\cos 74^\circ \cos 44^\circ + \sin 74^\circ \sin 44^\circ$

   จะได้ $\cos(74^\circ - 44^\circ) = \cos 30^\circ$

   $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ$

   จะได้ $\sin(40^\circ + 20^\circ) = \sin 60^\circ$

   $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\sin(\frac{\pi}{3} - A).\cos(\frac{\pi}{6} + A) + \cos(\frac{\pi}{3} - A).\sin(\frac{\pi}{6} + A)$

   จะได้ $\sin(\frac{\pi}{3} - A + \frac{\pi}{6} + A) = \sin\frac{\pi}{2}$

   $= 1$

6. $\frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ . \tan 25^\circ} = \tan(20^\circ + 25^\circ)$

   $= \tan 45^\circ$

   $= 1$

7. $\frac{\tan 220^\circ - \tan 40^\circ}{1 + \tan 220^\circ . \tan 40^\circ} = \tan(220^\circ - 40^\circ)$

   $= \tan 180^\circ$

   $= 0$

8. $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$

   $= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

   $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

   $= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

9. $\sin 255^\circ = \sin(180^\circ + 75^\circ)$

   $= -\sin 75^\circ$

   $= -\sin(45^\circ + 30^\circ)$

   $= -(\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ)$

   $= -(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2})$

   $= -(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4})$

   $= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

ใบความรู้ที่ 16 - 4 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่าของจำนวนจริงหรือมุม**

การหาค่า $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ และ $\tan 2\theta$ ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ สามารถใช้ความรู้ $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin(\theta+\theta)\\ &= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos(\theta+\theta)\\ &= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta\\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ &= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)\\ &= 2\cos^2\theta - 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ &= 1-\sin^2\theta - \sin^2\theta\\ &= 1-2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \tan(\theta+\theta)\\ &= \frac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\cdot\tan\theta}\\ &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$$

ใบความรู้ที่ 16 - 5 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่าของจำนวนจริงหรือมุม**

การเขียน $\sin 2A$ และ $\cos\ \ 2$ ในรูป $\tan A$

จาก $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$$= 2\frac{\sin A\cos A}{\cos A.\cos A}\cdot\cos^2 A$$

$$= 2\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{1}{\sec^2 A}$$

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\boxed{\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}}$$

จาก $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= \left(\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)\cdot\cos^2 A$$

$$= (1-\tan^2 A)\cdot\frac{1}{\sec^2 A}$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\boxed{\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\cot 2A = \frac{1-\tan^2 A}{2\tan A}$$

$$= \frac{1-\dfrac{1}{\cot^2 A}}{2\cot A}$$

$$\boxed{\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}}$$

ใบความรู้ที่ 16 - 6 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่าของจำนวนจริงหรือมุม**

---

1. $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 2(15)^\circ$
$= \sin 30^\circ$
$= \dfrac{1}{2}$

2. $2\cos^2 75^\circ - 1 = \cos 2(75)^\circ$
$= \cos 150^\circ$
$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

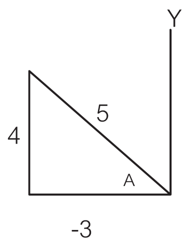
3. $1 - 2\sin^2\left(\dfrac{45}{2}\right)^\circ = \cos 2\left(\dfrac{45}{2}\right)^\circ$
$= \cos 45^\circ$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\cos^2 67.5 - \sin 67.5^\circ = \cos 2(67.5)$
$= \cos 135^\circ$
$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} = \tan\dfrac{2\pi}{8}$
$= \tan\dfrac{\pi}{4}$
$= 1$

6. ให้ $\dfrac{\pi}{2} < A < \pi$ และ $\cos A = \dfrac{-3}{5}$

จงหา sin 2A , cos 2A



$\sin 2A = 2\sin A \cos A$
$= 2\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(-\dfrac{3}{5}\right)$
$= -\dfrac{24}{25}$

$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$
$= 1 - 2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = -\dfrac{7}{25}$

7. ถ้า $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ และ $\cos\theta = -\dfrac{12}{13}$ จงหา

$\operatorname{cosec} 2\theta$, $\tan 2\theta$

$\operatorname{cosec} 2\theta = \dfrac{1}{\sin 2\theta}$
$= \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}$
$= \dfrac{1}{2\left(-\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)}$
$= \dfrac{169}{120}$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
$= \dfrac{2\left(\frac{5}{12}\right)}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}$
$= \dfrac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}} = \dfrac{120}{119}$

ใบความรู้ที่ 16-7 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม 2 เท่า**

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของครึ่งหนึ่งของจำนวนจริงหรือมุม

เราสามารถสร้างสูตรการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของครึ่งหนึ่งของจำนวนจริงหรือมุม โดยใช้สูตรการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่าของจำนวนจริงหรือมุม ดังต่อไปนี้

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

จากสูตร $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

สรุปได้ว่า

$$\boxed{\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

จากสูตร $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

สรุปได้ว่า $\boxed{\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}}$

และ $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$ = ...

=..

=..

=..

ใบความรู้ที่ 16-8 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม 2 เท่า**

ซึ่งอาจกล่าวได้ว่า

$$\boxed{\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}}$$

หรือ

$$\boxed{\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}}$$

ตัวอย่าง

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1.

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = 0.2588$$

2.

$$\sin 255^\circ = -\sqrt{\frac{1-\cos 510^\circ}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\cos 150^\circ}{2}}$$

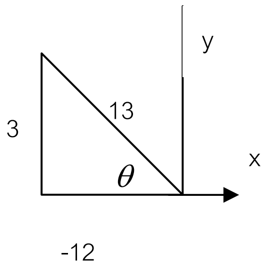
$$= -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -0.9659$$

ใบความรู้ที่ 16-9 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม 2 เท่า**

3. ให้ $\sin\theta = \frac{5}{13}$ $\quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

จงหา $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{3}$, $\tan\frac{\theta}{2}$



$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{1-\frac{12}{13}}} = 5$$

4. ถ้า $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ และ $\sin\theta < 0$ จงหา $\tan\frac{\theta}{2}$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{1}{2}$$

ใบความรู้ที่ 16-10 **ผลคูณ ผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

การเปลี่ยนฟังก์ชันของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นผลคูณ

1. ถ้า α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใดๆ แล้ว

   1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ----- (1)

   2) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ----- (2)

   3) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ----- (3)

   4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ----- (4)

$(1)+(2)$ จะได้ $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ ----- (5)

$(1)-(2)$ จะได้ $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$ ----- (6)

$(3)+(4)$ จะได้ $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ ----- (7)

$(3)-(4)$ จะได้ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

หรือ $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$ ----- (8)

จาก (5) ให้ A $= \alpha+\beta$ ----- (9)

B $= \alpha-\beta$ ----- (10)

(9)+(10) $2\alpha = A+B$ และ (9)-(10) จะได้ $2\beta = A-B$

$\alpha = \dfrac{A+B}{2}$, $\beta = \dfrac{A-B}{2}$

จาก (5) จะได้ $\sin A+\sin\beta = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

จาก (6) จะได้ $\sin A-\sin\beta = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

จาก (7) จะได้ $\cos A+\cos\beta = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

จาก (8) จะได้ $-\cos A+\cos\beta = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

หรือ $\cos A-\cos\beta = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

ใบงานที่ 16 – 1 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม**

---

1. จงเขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้ในรูป sin , cos ของจำนวนจริงหรือมุม

1.1 cos(X-Y) = ……………………………………

1.2 cos(A+B) = ……………………………………

1.3 sin(X – Y) = ……………………………………

1.4 cos(A+B) = ……………………………………

1.5 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

1.6 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

1.7 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

1.8 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

1.9 $\sin(2\pi+x)$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

1.10 $\cos\left(x-3\frac{\pi}{2}\right)$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

2. จงหาฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

2.1 $\sin 15^\circ$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

2.2 $\cos 75^\circ$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

2.3 $\cos 165^\circ$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

2.4 $\sin(-195^\circ)$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

2.5 $\cos(-285^\circ)$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

2.6 $\sin\frac{5\pi}{12}$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

2.7 $\cos\frac{13\pi}{12}$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

2.8 $\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)$ = ……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

ใบงานที่ 16 – 2 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม**

3. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อไปนี้

3.1 $\cos 110^\circ \cos 80^\circ + \sin 110^\circ \sin 80^\circ$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.2 $\sin 134^\circ \cos 74^\circ - \cos 134^\circ \sin 74^\circ$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.3 $\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}\ \sin\frac{5\pi}{12}$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.4 $\cos 112^\circ \cos 67^\circ + \sin 112^\circ \sin 67^\circ$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.5 $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.6 $\sin\frac{\pi}{12}\ \cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.7 $\cos 218^\circ 20' \cos 38^\circ 20' + \sin 218^\circ 20' \sin 38^\circ 20'$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.8 $\cos\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{9\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8}\pi\ \sin\frac{9\pi}{8}$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.9 $\sin(\frac{2\pi}{3} - \beta)\cdot\cos\beta + \cos(\frac{2\pi}{3} - \beta)\sin\beta$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.10 $\cos(\frac{\pi}{6} + \theta)\cdot\cos\theta + \sin(\frac{\pi}{6} + \theta).\sin\theta$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.11 $\sin\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{11\pi}{12}.\sin\frac{11\pi}{12}$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.12 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15^\circ - \frac{1}{2}\sin 15^\circ$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.13 $\sin 110^\circ \sin 110^\circ - \sin 20^\circ \sin 200^\circ$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3.14 $\cos 35^\circ \cos 10^\circ - \cos 80^\circ \cos 55^\circ$

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

ใบงานที่ 16 – 3 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม**

1. กำหนด $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$
เมื่อ $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta \le \frac{3\pi}{2}$
จงหา $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$

2 ถ้า α และ β เป็นมุมในควอดรันต์ที่ 3 และ 2 ตามลำดับโดย $\tan\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{cosec}\beta = \frac{13}{12}$
จงหา $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$

3. กำหนด $\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{4}$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$
เมื่อ $0 < \alpha-\beta < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$
จงหา $\cos(\alpha+2\beta)$, $\sin\alpha$

4. กำหนด $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
$\sin(\beta-\alpha) = \frac{3}{4}$ เมื่อ $0 < (\beta-\alpha) < \frac{\pi}{2}$
จงหา $\sin\beta$, $\cos(\beta-2\alpha)$

ใบงานที่ 16 – 4 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม**

จงหาค่า

1. $\dfrac{\tan 20^\circ + \tan 40^\circ}{1 - \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ}$

2. $\dfrac{\tan 20^\circ - \tan 40^\circ}{1 + \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ}$

3. $\dfrac{\tan(x+y) - \tan(x-y)}{1 + \tan(x+y) \cdot \tan(x-y)}$

4. $\tan 15^\circ$

5. $\cot 165^\circ$

6. $\tan\left(-\dfrac{23\pi}{12}\right)$

7. ให้ α , β เป็นมุมในควอดรันต์ที่ 2 โดยที่ $\tan \alpha = -\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{cosec} \beta = \dfrac{13}{12}$ จงหา $\tan(\alpha - \beta)$, $\cot(\beta + \alpha)$

8. ถ้า $\alpha + \beta = \dfrac{5\pi}{4}$ จงหา ค่า $(1 + \tan \alpha)\ (1 + \tan \beta)$

ใบงานที่ 16 - 5 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม 2 เท่า**

จงเติมข้อความลงในช่องว่าง

ข้อ	กำหนด	จัดอยู่ในรูปสูตร	คำตอบ
1	$2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$		
2	$2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$		
3	$2\sin\frac{7\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$		
4	$2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$		
5	$\sin 22\frac{1}{2}^\circ\ \cos 22\frac{1}{2}^\circ$		
6	$\sin 67\frac{1}{2}^\circ\ \cos 67\frac{1}{2}^\circ$		
7	$\cos^2 15^\circ \sin^2 15^\circ$		
8	$\cos^2 112\frac{1}{2}^\circ\ \sin^2 112\frac{1}{2}^\circ$		
9	$\cos^2\frac{5\pi}{8}-\sin^2\frac{5\pi}{8}$		
10	$\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$		
11	$\frac{2\tan\frac{5\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{5\pi}{12}}$		
12	$\frac{\cot^2\frac{\pi}{8}-1}{2\cot\frac{\pi}{8}}$		
13	$\frac{\cot^2 22\frac{1}{2}^\circ-1}{2\cot 22\frac{1}{2}^\circ}$		
14	$\sin^2\frac{7\pi}{8}-\cos^2\frac{7\pi}{8}$		
15	$4\sin\frac{25\pi}{12}-\cos\frac{25\pi}{12}$		

ใบงานที่ 16 - 6 **ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม 2 เท่า**

1. กำหนด $\cos A = -\frac{1}{2}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

จงหา cos2A , sin 2A

2. ถ้า $\tan x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ เมื่อ $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$

จงหา sin 2X , tan 2X

3. ให้ $\sin\theta = -0.6$ และ $\cos\theta > 0$

จงหา $\cot 2\theta$, $\sec 2\theta$

4. กำหนด $\cos\theta = -\frac{5}{12}$ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

จงหา $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)$, $\cos(\pi - 2\theta)$

5. กำหนด $\sec\theta = -\frac{13}{12}$ และ $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$

จงหา $\tan(\pi - 2\theta)$, $\cos(\pi - 2\theta)$

6. ถ้า $0 < A < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\frac{A}{2} = \frac{2}{5}$

จงหา sin A + sin A

ใบงานที่ 16- 7 **ผลคูณ ผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

---

1. สรุปการเปลี่ยนระหว่าง ผลบวกหรือผลต่าง ของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติกับผลคูณ

1.1 $2\sin\alpha\cos\beta$ =...

1.2 $2\cos\alpha\cos\beta$ = ...

1.3 $2\cos\alpha\cos\beta$ = ...

1.4 $2\sin\alpha\sin\beta$ = ...

1.5 $\sin\alpha+\sin\beta$ = ...

1.6 $\sin\alpha-\sin\beta$ = ...

1.7 $\cos\alpha+\cos\beta$ =...

1.8 $\cos\alpha-\cos\beta$ = ...

2. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

2.1 $2\sin 75^{\circ}\cos 15^{\circ}$=......................................

………………………………………………………..

2.2 $2\cos 15^{\circ}\sin 75^{\circ}$=......................................

....

2.3 $2\cos 165^{\circ}\cos 75^{\circ}$=...................................

....

2.4 $2\sin 75^{\circ}\sin 165^{\circ}$=.....................................

....

2.5 $2\sin 82.5^{\circ}\cos 37.5^{\circ}$=...............................

....

2.6 $2\sin 127.5^{\circ}\sin 97.5^{\circ}$=.............................

....

2.7 $\cos 165^{\circ}\cos 15^{\circ}$=.......................................

....

2.8 $\cos 255^{\circ}\cos 15^{\circ}$=......................................

....

2.9 $\frac{1}{2}\sin 165^{\circ}\sin 15^{\circ}$.......................................

2.10 $\frac{1}{2}\cos 105^{\circ}\sin 195^{\circ}$=................................

3. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

3.1 $\sin 15^{\circ}+\sin 75^{\circ}$=......................................

………………………………………………………..

3.2 $\sin 15^{\circ}-\sin 195^{\circ}$=....................................

………………………………………………………..

3.3 $\cos 75^{\circ}+\cos 15^{\circ}$=.....................................

....

3.4 $\cos 75^{\circ}-\cos 15^{\circ}$=......................................

....

จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1. $\cos^2 A+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+A\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-A\right)$

....

....

....

....

....

2. $2\cos 35^{\circ}\cos 70^{\circ}-\cos 35^{\circ}+\cos 15^{\circ}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ใบงานที่ 16-8 **ผลคูณ ผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

---

3. $\cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \cos 10^\circ$

....
....
....
....
....

4. $\dfrac{\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}}$

....
....
....
....
....

5. $3\cos 75^\circ \cos 105^\circ + 4\sin 75^\circ \sin 165^\circ$

....
....
....
....
....

6. $2\cos 30^\circ \sin 20^\circ - 2\sin 10^\circ \sin 50^\circ -$
$2\cos 20^\circ \cos 80^\circ$

....
....
....
....
....

7. $\left(1+\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(1+\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

....
....
....
....
....

8. ถ้า $A = \frac{\pi}{21}$ จงหา $\dfrac{\sin 23A - \sin 7A}{\sin 2A + \sin 14A}$

....
....
....
....
....

9. ถ้า $\cos(A+B) = a; \sin 2A = b$ และ $\sin 2B = c$ จงหาค่าของ $\cos(A-B)$

....
....
....
....
....

10. จงพิสูจน์ $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$

....
....
....
....
....

ใบงานที่ 16- 9 **ผลคูณ ผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

---

11. กำหนดให้ $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$ และ $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$ จงหาค่าของ $\sin 2\alpha \sin 2\beta$

....
....
....
....
....
....
....

12. ถ้า $3\cos 2\alpha - 2\cos 2\beta = -3$ และ $\sin\alpha - 2\sin\beta = 0$ โดยที่ $\alpha,\beta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ จงหาค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

13. จงหาค่าสูงสุดของ $3\sin A - 4\cos A$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

14. จงหาค่าต่ำสุดของ $8\sec^2 A + 18\cos^2 A$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 17

เรื่อง อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 8 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชัน arcsine, arccosine, arctangent และฟังก์ชันส่วนกลับได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine, arccosine, arctangent และฟังก์ชันส่วนกลับได้
2. หาค่าฟังก์ชัน arcsine, arccosine arctangent และฟังก์ชันส่วนกลับได้

2. แนวความคิดหลัก

1. อินเวอร์สของฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน
2. อินเวอร์สของฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันต่อเมื่อ ฟังก์ชันเดิมเป็นฟังก์ชัน 1-1
3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

3. เนื้อหาสาระ

ฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชัน sine, cosine tangent, cosecant secant cotangent

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น อินเวอร์สของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ในการศึกษาอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราสนใจอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสามารถทำได้โดยการจำกัดโดเมน แต่เรนจ์ยังคงเดิม

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ทบทวนเรื่องเกี่ยวกับฟังก์ชัน และอินเวอร์สของฟังก์ชัน และฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สามารถสรุปใจความสำคัญได้ว่า

1) อินเวอร์สของฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน
2) อินเวอร์สของฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันเดิมต้องเป็นฟังก์ชัน 1-1
3) ฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

จากข้อ 1) -3) จะได้ว่า อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน ดังนั้นในการศึกษาเรื่องอินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราจึงสนใจว่า ถ้าลดโดเมนลง แต่ยังมีเรนจ์คงเดิม จึงสามารถกำหนดโดเมนขึ้นใหม่ โดยทำให้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน 1-1 เพื่อให้อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน

2. แบ่งกลุ่มนักเรียนโดยให้แต่ละกลุ่มมีทั้งนักเรียนเก่งและอ่อนเพื่อศึกษาใบความรู้อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3. ให้นักเรียนฝึกการหาค่าอินเวอร์สตรีโกณมิติ จากใบงานที่ 17

5. แหล่งการเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 17
- ใบงานที่ 17
- หนังสือ

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

สิ่งที่วัด	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงาน 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 95% 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 80%
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	ผ่านระดับดี 90%
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี 90%

7. บันทึกหลังการสอน

……………………………………………………………………………………………………….....
……
……

8. กิจกรรมเสนอแนะ

……
……
……

ลงชื่อ ....

ใบความรู้ที่ 17-1 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

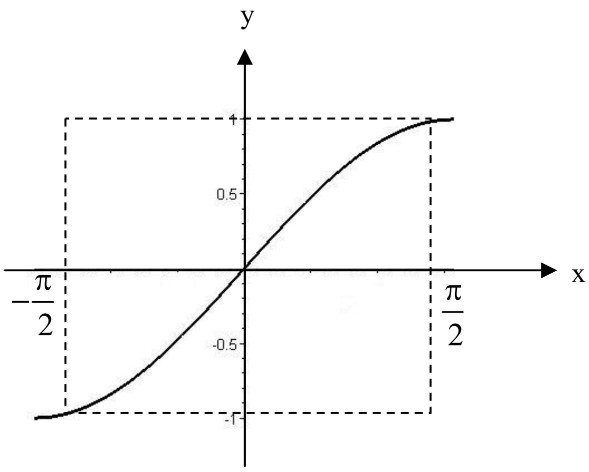
ฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กำหนดฟังก์ชันไซน์ดังนี้

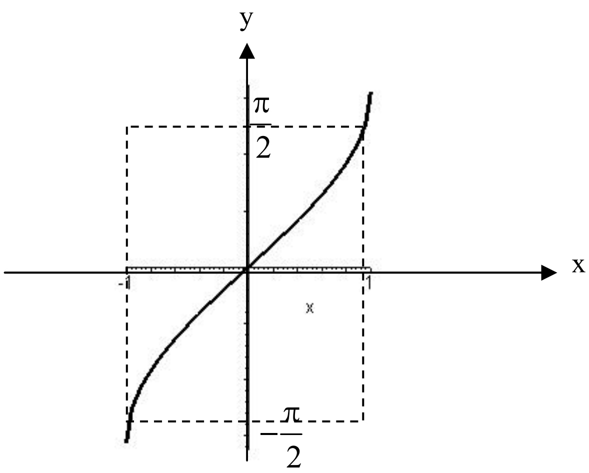
$$\sin e = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sin x\}$$

จะพบว่า โดเมนคือ R เรนจ์คือ $[-1,\ 1]$

Sine ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นอินเวอร์สของ sine ไม่เป็นฟังก์ชัน

ถ้าต้องการให้ sine เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำได้โดยลดโดเมนลง นั่นคือกำหนดโดเมนเท่ากับ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ แต่ยังคงมีเรนจ์เป็น $[-1,\ 1]$ ดังรูปต่อไปนี้





$y = \sin x\ ,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, -1 \le y \le 1$ $\qquad$ $y = \arcsin x, -\frac{\pi}{3} \le y \le \frac{\pi}{3}, -1 \le x \le 1$

กำหนด sine ซึ่งกำหนดโดเมนดังนี้

$$f = \left\{(x, y) \in R \times R \mid y = \sin x\ ,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

เรียก $f^{-1} = \left\{(x, y) \in R \times R \mid x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ sine หรือ

เรียกว่า ฟังก์ชัน $\arcsin e$ ซึ่ง $(x, y) \in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $y = \arcsin x$ หรือ

$y = \sin^{-1} x, -1 \le x \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

สรุป

$y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sin y$

ใบความรู้ที่ 17-2 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

ตัวอย่าง

1. จงหาค่า $y = \arcsin x$ เมื่อกำหนด x ดังนี้

1.1 $x = \frac{1}{2}$

$y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $\sin y = \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$y = \frac{\pi}{6}$

1.2 $x = 1$

$y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $\sin y = 1$, $\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$y = \frac{\pi}{2}$

1.3 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$y = -\frac{\pi}{3}$

1.4 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $\sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$y = -\frac{\pi}{4}$

2. จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $\arcsin\frac{1}{2}$ =...

2.2 $\arcsin 0$ =...

2.3 $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ =...

2.4 $\arcsin(-1)$ =...

2.5 $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ =...

2.6 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ =...

ใบความรู้ที่ 17-3 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

---

3. จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$ =……………………………………

3.2 $\cos\left(\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$ =……………………………………

3.3 $\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ =……………………………………

3.4 $\sec\left(\arcsin(-\frac{1}{2})\right)$ =……………………………………

3.5 $\arcsin\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$ =……………………………………

3.6 $\arcsin\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$ =……………………………………

3.7 $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ =……………………………………

3.8 $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$ =……………………………………

3.9 $\sin(\arcsin(-1))$ =……………………………………

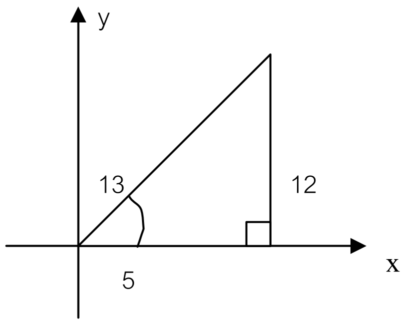
3.10 $\arcsin\left(\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$ =……………………………………

สรุป $\arcsin(\sin x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\sin(\arcsin x) = x$ เมื่อ $-1 \le x \le 1$

4. จงหาค่า

1) $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$



ให้ $\theta = \arcsin\frac{12}{13}, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\sin\theta = \frac{12}{13}$

จะได้ $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) = \cos\theta = \frac{5}{12}$

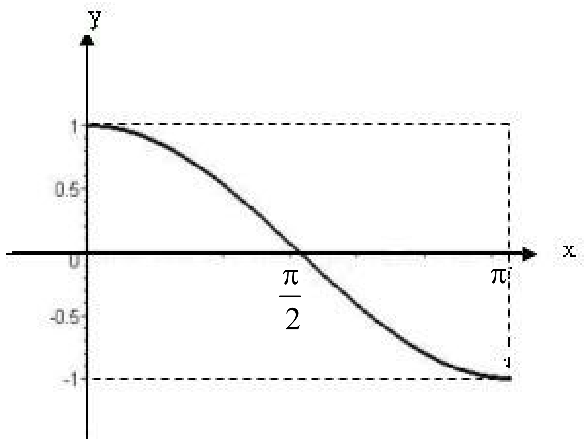
ใบความรู้ที่ 17-4 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

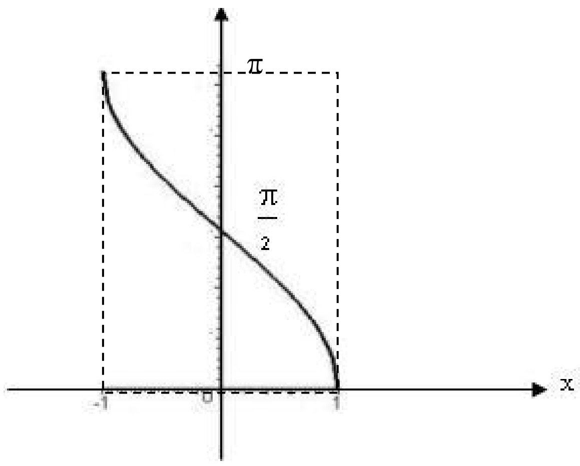
ฟังก์ชันอินเวอร์สโคไซน์ กำหนดฟังก์ชันโคไซน์

$$\cos ine = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \cos x \}$$

จะพบว่า โดเมน คือ R เรนจ์คือ $[-1, 1]$

cosine ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นอินเวอร์สของ cosine ไม่เป็นฟังก์ชัน ถ้าต้องการให้ cosine เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำได้โดยลดโดเมนลง นั่นคือ ถ้ากำหนดโดเมนเป็น $[0, \pi]$ แต่ยังมีเรนจ์คงเดิมเป็น $[-1, 1]$ ดังรูป





$y = \cos x$, ⟵ $0 \le x \le \pi, -1 \le y \le 1$ $y = \arccos x, 0 \le y \le \pi, -1 \le x \le 1$

กำหนด cosine ซึ่งกำหนดโดเมนดังนี้

$$f = \{(x, y) \in R \times R / y = \cos x, 0 \le x \le \pi\}$$

เรียก $f^{-1}\{(x, y) \in R \times R / x = \cos y, 0 \le y \le \pi\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ cosine หรือเรียกว่า ฟังก์ชัน $\arcsin e$ ซึ่ง $(x, y) \in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $y = \arcsin x$ หรือ $y = \sin^{-1} x$ และ $0 \le y \le \pi$

สรุป $\boxed{y = \arccos x \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = \cos y}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า

1.1 $\arccos\frac{1}{2}$

ให้ $\arccos\frac{1}{2} = t$ เมื่อ $0 \le t \le \pi$

จะได้ $\cos t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

1.2 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ให้ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ = t เมื่อ $0 \le t \le \pi$

จะได้ $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$t = \frac{3\pi}{4}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

1.3 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ =……………………………..

1.4 $\arccos 1$ =……………………………….

1.5 $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ =…………………………..

1.6 $\arccos(-1)$ =……………………………..

1.7 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ =………………………….

1.8 $\arccos 0$ =……………………………….

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า

2.1 $\sin\left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

ให้ $\arccos\frac{1}{2} = \theta$ เมื่อ $0 \le \theta \le \pi$

จะได้ $\cos\theta = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $\theta = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\sin\left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

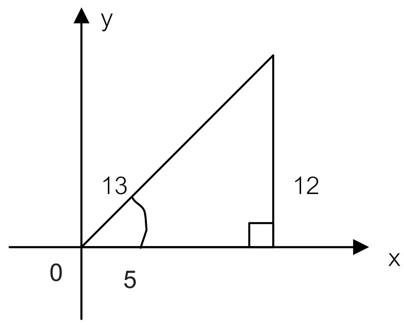
$= \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

2.2 $\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$

ให้ $\arccos\frac{5}{13} = \theta$ เมื่อ $0 \le \theta \le \pi$

จะได้ $\cos\theta = \frac{5}{13}$



จากรูปจะได้ $\sin\theta = \frac{12}{13}$

$\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right) = \sin\theta$

$= \frac{12}{13}$

ใบความรู้ที่ 17-6 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

ฟังก์ชันอินเวิร์สของฟังก์ชันแทนเจนต์ กำหนดฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังนี้

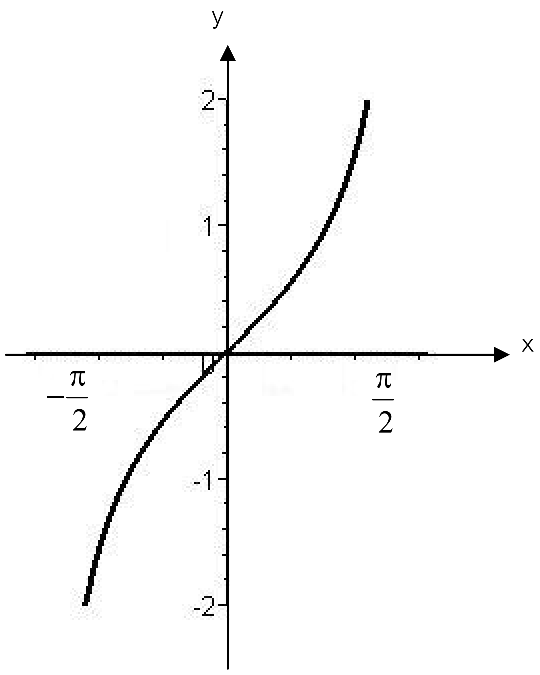
$$f=\left\{(x,y)\in R\times R \mid y=\tan x \quad \text{เมื่อ} \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right\}$$

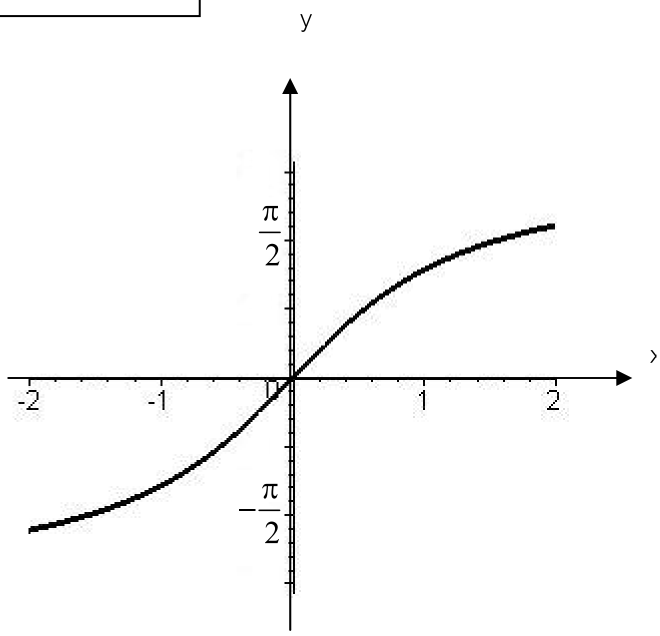
เรียก $f^{-1}=\left\{(x,y)\in R\times R \mid x=\tan y \quad \text{เมื่อ} \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right\}$

ว่าเป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ $\tan gent$ หรือฟังก์ชัน $\arctan gent$ ซึ่ง

$(x,y)\in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $y=\arctan x$ หรือ $y=\tan^{-1}x$ เมื่อ $x\in R$ และ $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

สรุป $\boxed{y=\arctan x \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = \tan y}$





y = tan x เมื่อ $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, y\in R$

y = arctan x เมื่อ $,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}, x\in R$

ตัวอย่าง

1. จงหาค่า $\arctan(-\sqrt{3})$

ให้ $\arctan(-\sqrt{3}) = t$

จะได้ว่า $\tan t = -\sqrt{3}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\therefore t = -\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

2. จงหาค่า $\arctan 1$

ให้ $\arctan 1 = y$

จะได้ว่า $\tan y = 1$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $y = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

3. จงหาค่า $\cos\left(\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$

ให้ $\arctan\left(-\frac{4}{3}\right) = \theta$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $\tan\theta = -\frac{4}{3}$

นั่นคือ $\cos\theta = \frac{3}{5}$

ดังนั้น $\cos\left(\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \cos\theta$

$= \frac{3}{5}$

ใบความรู้ที่ 17-8 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

ฟังก์ชัน arccotangent , arcsecant, arccosecant

กำหนด $f = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \cot x$ เมื่อ $0 < x < \pi\}$
เรียก $f^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \mid x = \cot y$ เมื่อ $0 < y < \pi\}$ ว่าฟังก์ชันอินเวอร์สของ $\cot angent$ หรือเรียก arccotangent ซึ่ง $(x,y) \in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ y = arccotx, หรือ $y = \cot^{-1} x$ เมื่อ $x \in R$ และ $y \in (0,\pi)$

กำหนด $f = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \sec x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}\}$
เรียก $f^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \mid x = \sec y$ เมื่อ $0 \le y \le \pi$, $y \ne \frac{\pi}{2}\}$ ว่าฟังก์ชันอินเวอร์สของ $\sec ant$ หรือเรียกว่า arcsecant ซึ่ง $(x,y) \in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ y = arcsecx หรือ $y = \sec^{-1} x$ เมื่อ $x \in (-\alpha,-1] \cup [1,\alpha)$ และ $y \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$

กำหนด $f = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \cos ecx$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, x \ne 0\}$
เรียก $f^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \mid x = \cos ec\, y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, y \ne 0\}$ ว่าฟังก์ชันอินเวอร์สของ $\cos ecant$ หรือเรียกว่า $\text{arccos}\, ecant$ ซึ่ง $(x,y) \in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $y = \text{arccos}\, ec\ x$ หรือ $y = \cos ec^{-1} x$ เมื่อ $x \in (-\alpha,-1] \cup [1,\alpha)$ และ $y \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

ใบงานที่ 17- 1 **อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

จงหาค่าของ

1. $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$

…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

2. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

3. $\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$

…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

4. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$

…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

5. $\cos\left(2\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

6. $\sec\left(\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{5}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$

…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

7. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$

…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

8. $\tan\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$

…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

ใบงานที่ 17-2 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

---

1. จงหาค่า

1.1 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....

1.2 $\arccos\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ ....

1.3 $\arccos\left(\cos(-\frac{\pi}{4})\right)$ ....

1.4 $2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....

1.5 $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right)$ ....

1.6 $\tan\left(\arccos(-\frac{1}{2})\right)$ ....

1.7 $\arccos\left(\tan\frac{7\pi}{4}\right)$ ....

1.8 $\sec\left(\arccos\ (-1)\right)$ ....

1.9 $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$ ....

1.10 $\cos\left(\arccos(\frac{-1}{2})\right)$ ....

2. จงหาค่า

2.1 $\arcsin(\cos 314^{\circ})$

....

....

....

2.2 $\arccos\left(\sin\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{12}\right)$

....

....

....

2.3 $\sin\left[\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)+\frac{2\pi}{5}\right]$

....

....

....

2.4 $\cos^{-1}\left(\cos^{2}\frac{\pi}{12} - \sin^{2}\frac{5\pi}{12}\right)$

....

....

....

2.5 $\tan\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

....

....

....

2.6 $\cos\left(\arcsin\frac{-3}{5} - \frac{3\pi}{2}\right)$

....

....

....

2.7 $\sin\left(2\sin^{-1}\frac{4}{5} - \cos^{-1}\frac{12}{13}\right)$

....

....

....

ใบงานที่ 17-3 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

---

1. จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1.1 $\arctan\left(\sqrt{2}\ \sin\frac{5\pi}{4}\right)$

=..

1.2 $\tan\left(\arctan\sqrt{3}\right)$

=..

1.3 $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

=..

1.4 $\arctan\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right)$

=..

1.5 $\arctan\left(\tan\frac{5\pi}{6}\right)$

....

1.6 $\tan\left(\arctan\sqrt{3}\right)$

=..

1.7 $\dfrac{2\tan\left(\arctan\frac{1}{7}\right)}{1-\tan\left(\arctan\frac{1}{7}\right)}$

=..

2. จงหาค่า $\tan\left(\arctan\frac{3}{4}+\arccos\frac{12}{13}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

3. จงหาค่า $\cos\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\arcsin\frac{12}{13}\right)$

....

....

....

....

4. จงหาค่า $\cos(\arcsin(\frac{-3}{4})+\arctan\frac{3}{4})$

....

....

....

....

....

5. จงหาค่า $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{5}{12}\right)$

....

....

....

....

....

6. จงหาค่า $\cos\left(\dfrac{\tan^{-1}(\frac{-3}{4})}{2}\right)$

....

....

....

....

ใบงานที่ 17- 4 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ……
2. $\sec\left(\cot^{-1}(-1)\right)$ ……
3. $\sin\left(\sec^{-1}\frac{5}{3}\right)$ ……
4. $\tan\left(\operatorname{cos}ec^{-1}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ ……
5. $\operatorname{cos}ec\left(\cot^{-1}(-3)\right)$ ……
6. $\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ……
7. $\sin\left(\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{5}{4}\right)$ ……
8. $\cot\left(\sin^{-1}(-\frac{12}{13})\right)$ ……
9. $\sec\left(\tan^{-1}2\right)$ ……
10. $\sin\left(2\cos^{-1}a\right)$ ……
11. $\cos^2\left(\sin^{-1}0.9261\right)$ ……
12. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ……
13. $\tan\left(\sin^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ……
14. $\operatorname{cos}ec\left(\sec^{-1}(-2)\right)$ ……
15. $\cot\left(3\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$ ……

จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

……

……

……

2. $\tan\left(\pi+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{15}{7}\right)$

……

……

……

3. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\operatorname{cos}ec^{-1}\left(-\frac{13}{12}\right)\right)$

……

……

……

4. $\sec\cdot\left(\frac{\pi}{2}+3\sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

……

……

……

5. $\operatorname{cos}ec\left(2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}-1\right)-2\pi\right)$

……

……

……

6. $\cos\left(2\sec^{-1}(-2)+\frac{1}{2}\operatorname{cos}ec^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$

……

……

……

ใบงานที่ 17-5 **อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$

....

....

....

....

....

2. $\sin\left(2\cos^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$

....

....

....

....

....

3. $\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right)\right)$

....

....

....

....

....

4. $\operatorname{cos}ec\left(2\tan^{-1}(-1)-\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)\right)$

....

....

....

....

....

5. $\tan\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{3}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right)$

....

....

....

....

....

....

6. $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\pi-\sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\right]$

....

....

....

....

....

....

7. $\left[\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{15}{5}\right)\right)\right]\ \left[\cot\left(-2\sin^{-1}\frac{5}{13}\right)\right]$

....

....

....

....

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 18

เรื่อง **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 6 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนสามารถพิสูจน์เอกลักษณ์ และแก้สมการตรีโกณมิติได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้ผู้เรียนสามารถ

1. พิสูจน์เอกลักษณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. แก้สมการตรีโกณมิติเมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ให้
3. แก้สมการตรีโกณมิติที่มีคำตอบของสมการอยู่ในรูปทั่วไป

2. แนวความคิดหลัก

สมการตรีโกณมิติเป็นสมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏ ซึ่งแยกเป็น 2 ประเภท คือสมการเอกลักษณ์ หมายถึงสมการที่เป็นจริง สำหรับทุกค่าของตัวแปรที่ปรากฏในสมการนั้น และสมการเงื่อนไข หรือ สมการจะเป็นจริงบางค่าสำหรับตัวแปรที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ปรากฏ

3. เนื้อหาสาระ

การแก้สมการตรีโกณมิติต้องอาศัยเอกลักษณ์พื้นฐาน เช่น $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1+\tan^2 x = \sec^2 x$,sin(A+B) = sinA cosB + cosAsinB , sin2x = 2sinx cosx ฯลฯ

การแก้สมการอาจมีคำตอบเป็นคำตอบเฉพาะถ้าโจทย์กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ที่มีขอบเขตจำกัด เช่น $[0\ ,\ 2\pi]$, $[0,\pi]$ หรือคำตอบในรูปทั่วไปเมื่อโจทย์กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง R

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับตรีโกณมิติ ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน ศึกษาใบความรู้เกี่ยวกับสมการ และเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. ให้นักเรียนฝึกทักษะโจทย์สมการ และเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 18
- ใบงานที่ 18
- หนังสือ คู่มือคณิตศาสตร์ ห้องสมุด

6. การวัดผลและการประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงาน 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 % 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 80 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	-ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	-ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

8. ข้อเสนอแนะ

ลงชื่อ..

ใบความรู้ที่ 18-1 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

สมการตรีโกณมิติ หมายถึงสมการที่ประกอบด้วยพจน์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติของตัวแปร แบ่งออกได้ดังนี้

1. สมการเอกลักษณ์ หรือเอกลักษณ์ หมายถึงสมการที่เป็นจริง เมื่อแทนตัวแปรด้วยจำนวนจริงใด ๆ เช่น $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1+\tan^2 x = \sec^2 x$, $1+\cot^2 x = \cos^2 x$

2. สมการมีเงื่อนไข หรือสมการ ที่มีสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์เพียงบางตัว หรือไม่มีจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งเมื่อแทนตัวแปรในสมการนั้นและทำให้เป็นจริง เช่น $\sin x = 1$, $\cos x = 1$

การพิสูจน์เอกลักษณ์และการแก้สมการ จำเป็นต้องอาศัยเอกลักษณ์พื้นฐานตามที่กล่าวไปแล้ว ตัวอย่างการพิสูจน์เอกลักษณ์

1. พิสูจน์ว่า $\sin 4x = 4 \sin x \cos x \ (2\cos x - 1)$

ในที่นี้จะพิสูจน์ว่า นิพจน์ทางซ้าย เท่ากับ นิพจน์ทางขวา

$$\begin{aligned}\sin 4x &= 2 \sin 2x \cos 2x \\ &= 2(2 \sin x \cos x)(2\cos^2 x - 1) \\ &= (4 \sin x \cos x))(2\cos^2 x - 1)\end{aligned}$$

****

2. $$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$

$$\begin{aligned}\cot 2x &= \frac{1}{\tan 2x} \\ &= \frac{1}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}} \\ &= \frac{1-\tan^2 x}{2\tan} \\ &= \frac{1-\frac{1}{\cot^2 x}}{2\tan x} \\ &= \frac{\cot^2 x - 1}{2\cdot\frac{1}{\cot x}\cdot\cot^2 x} = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}\end{aligned}$$

---

3. $$\frac{\sin 2\theta + \sin\theta}{\cos 2\theta + \cos\theta + 1} = \tan\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta + \sin\theta}{\cos 2\theta + \cos\theta + 1} = \tan\theta$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{\left(2\cos^2\theta - 1\right) + \cos\theta + 1}$$

$$= \frac{\sin\theta\left(2\cos\theta + 1\right)}{2\cos\theta + \cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta\left(2\cos\theta + 1\right)}{\cos\theta\left(2\cos\theta + 1\right)}$$

$$= \tan\theta$$

---

4. $$1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta = \frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$$

$$\frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{(\sin\theta + \cos\theta)\,(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)}{\sin\theta + \cos\theta}$$

$$= 1 - \sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

ใบความรู้ที่ 18-3 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

ตัวอย่างจงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1. กำหนด A+B+C = 180° จงพิสูจน์ว่า

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

> แนวการวิเคราะห์
>
> $A+B+C = 180^\circ$
>
> จาก $A+B = 180^\circ - C$
>
> $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$

พิสูจน์

$$A+B = 180^\circ C$$

$$A+B = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

จากกำหนด $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)$

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

2. กำหนด $A+B = 180^\circ C$ จงพิสูจน์

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

แนวการวิเคราะห์

ด้านซ้ายมือ	ด้านขวามือ	ความสัมพันธ์
3.มุม A,B,C	มุม $\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}$	
4. ฟังก์ชัน sine บวกกัน	ฟังก์ชัน cosine คูณกัน	$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

พิสูจน์ L.S. $= \sin A + \sin B + SinC$

$$= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\left[\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\right]\cos\left[\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right]\right)$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = R.S.$$

หลักการแก้สมการตรีโกณมิติ

1. หาคำตอบทั้งหมดของสมการในช่วง $[0,2\pi]$ หรือช่วงที่โจทย์กำหนด
2. หาคำตอบทั่วไปของ X คือคำตอบของสมการที่อยู่ในรูปทั่วไปภายใต้เอกภพสัมพัทธ์ R

2.1 การหาคำตอบทั่วไปของสมการของฟังก์ชัน sine และ cosecant

กำหนด $\sin x = a$ เมื่อ $-1 \le a \le 1$

$\operatorname{cosec} x = a$ เมื่อ $a \ge 1$ หรือ $a \le -1$

ทำได้ดังนี้

1. หาคำตอบทั้งหมดในช่วง $[0,2\pi]$ ถ้า $x = 0$
2. เนื่องจาก sine ,cosecant เน้นฟังก์ชันคาบ และมีคาบเป็น 2π

$\therefore$ คำตอบคือ $x = 2n\pi + \theta$, $n \varepsilon I$

เช่น $\sin x = \frac{1}{2}$

1. $x \varepsilon [0, 2\pi]$ จะได้ $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$
2. คำตอบทั่วไปคือ $x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$, $x = 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$, $n \varepsilon I$

หรือ $x = n\pi + (-1)^n \theta$, $n \varepsilon I$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงบวกน้อยสุดหรือศูนย์

$\therefore x = x\pi + (-1)^3 \frac{\pi}{6}$

2.2 การหาคำตอบทั่วไปของฟังก์ชัน cosine , secant

กำหนด $\cos x = a$ $-1 \le a \le 1$

$\operatorname{Sec} x = a$ $a \ge 1$ หรือ $a \le -1$

หาคำตอบเช่นเดียวกับฟังก์ชัน sine และ cosecant

เช่น $\cos x = -\frac{1}{2}$

1. $x \varepsilon [0,2\pi]$ จะได้ $x = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$
2. $x \varepsilon R$ จะได้ $x = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$, $2n\pi + \frac{4\pi}{3}$

หรือ $x = 2n\pi \pm \theta_1$ เมื่อ θ_1 เป็นจำนวนจริงบวกที่น้อยที่สุดหรือ ศูนย์

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

2. 3 การหาคำตอบทั่วไปของฟังก์ชัน tangent และ cotangent

กำหนด $\tan x = a$ เมื่อ $a \varepsilon R$

$\cot x = a$ เมื่อ $a \varepsilon R$

เนื่องจากฟังก์ชัน tangent และ cotangent เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเป็น π

ทำได้โดย 1. หาคำตอบ θ ที่เป็นจำนวนจริงบวกน้อยที่สุด หรือศูนย์

2. คำตอบรูปทั่วไปคือ $x = n\pi + \theta$ เมื่อ $n \varepsilon I$

ใบความรู้ที่ 18-5 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

เช่น $\tan x = -\sqrt{3}$

1. $x \varepsilon [0, 2\pi]$, $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
2. คำตอบทั่วไป $x = n\pi + \frac{2\pi}{3}$, $n \in I$

ตัวอย่างการหาคำตอบของสมการตรีโกณมิติ

จงหาเซตคำตอบของสมการ เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$

1. $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$

$2(1-\sin^2 x) - \sin x + 1 = 0$

$2 - 2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$

$(2\sin x - 3)(\sin x + 1) = 0$

$\sin x = \frac{-3}{2}$ หรือ $\sin x = -1$

เป็นเท็จ , $x = \frac{3\pi}{2}$

เซตคำตอบ $\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

2. $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\theta-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$

$2\sin\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$+\cos\frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} , \frac{5\pi}{6}$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ $\quad 0 \le \frac{\theta}{2} \le \pi$

เซตคำตอบ คือ $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

ใบความรู้ที่ 18-6 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

---

1. 2 sin x . tan x - 2sin x - tan x + 1 = 0

2sin x (tan x - 1) - (tan x - 1) = 0

(tan x - 1) (2sin x -1) = 0

ดังนั้น (tan x - 1) = 0 หรือ 2sin x - 1 = 0

tan x = 1 sin x = $\frac{1}{2}$

1. ถ้า sin x = $\frac{1}{2}$ และ $x\,\varepsilon[0,2\pi]$ จะได้ $x = \frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

คำตอบทั่วไป $x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$, $n\ \varepsilon\ I$ หรือ $n = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in I$

2. ถ้า tan x = 1 และ $x\,\varepsilon[0,2\pi]$ จะได้ $x = \frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$

คำตอบทั่วไปคือ $x = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in I$

คำตอบทั่วไปของสมการคือ $x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$, $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$, $n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n\ \varepsilon\ I$

2. cos 2x = sin x

$1\text{-}2\sin^2 x = \sin x$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(\sin x + 1)(2\sin x + 1) = 0$

ดังนั้น sin x + 1 = 0 หรือ 2sin x – 1 = 0

sin x = -1 sin x = $\frac{1}{2}$

$x\,\varepsilon[0,2\pi]$, x = $\frac{3\pi}{2}$ x = $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

คำตอบทั่วไปคือ $x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$, $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$, $2n\pi + \frac{3\pi}{2}, n \in I$

ใบงานที่ 18 - 1 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1. $\dfrac{\operatorname{cos}ec^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cot^2\theta$

2. $\sin^2\alpha\cot^2\alpha + \tan^2\alpha\cos^2\alpha = 1$

3. $\dfrac{\cos x}{\sec x}+\dfrac{\sin x}{\csc x} = 1$

4. $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^2\theta\tan^4\theta$

5. $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

6 $\sin^2\theta\tan\theta - \cos^2\theta\cot\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$= \tan\theta + \cot\theta$

ใบงานที่ 18 - 2 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1. $\dfrac{1+\tan^2(45^\circ-\theta)}{1+\tan^2(45^\circ-\theta)}+ \quad = \quad \cos ec2\theta$

....
....
....
....
....
....

2. $\cos(\alpha+\beta)\ \cos(\alpha-\beta) \quad = \cos^2\alpha-\sin^2\beta$

....
....
....
....
....
....

3. $\sin(\alpha+\beta)\ \sin(\alpha-\beta) \quad = \cos^2\beta-\sin^2\alpha$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. $\cos\ 4\alpha\ \cos\ \alpha\ -\sin\ 4\alpha\ \sin\ 4\alpha$

$= \cos\ 3\alpha\ \cos\ 2\alpha\ -\sin\ 3\alpha\ \sin\ 2\alpha$

....
....
....
....
....
....
....

5. $\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2 \quad = \quad 1+\sin\theta$

....
....
....
....
....
....

6. $\tan 70^\circ - \tan 20^\circ \quad = 2\tan 50^\circ$

....
....
....
....
....
....
....
....

ใบงานที่ 18 – 3 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

1. จงพิสูจน์ $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

2. จงพิสูจน์ $\frac{\sin 8\theta + \sin 2\theta}{\cos 8\theta + \cos 2\theta} + \; = \tan 5\theta$

3. จงพิสูจน์

$$\frac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta} + \; = \tan 3\theta$$

4. $\cos^2 A - \cos^2(60^\circ + A) + \cos^2(60^\circ - A) = \frac{3}{2}$

ใบงานที่ 18 - 4 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

กำหนด $A + B + C = 180^{\circ}$ จงพิสูจน์

1. $\cos A - \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1$

= ____

= ____

= ____

= ____

= ____

= ____

2. $\tan(A + B) = -\tan C$

= ____

= ____

= ____

= ____

= ____

= ____

3. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

= ____

= ____

= ____

= ____

= ____

= ____

4. $\cos A = -\cos(B + C)$

= ____

= ____

= ____

= ____

= ____

ใบงานที่ 18- 5 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

ถ้า $0 \le \theta \le 2\pi$

1. $\sin 3\theta \cos\theta - \cos 3\theta \sin\theta = \cos\theta$

2. $\sin 2\theta - \cos^2\theta + 3\sin^2\theta = 0$

3. $\cos 2\theta - 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1$

4. $\cos\theta - 4\sin\theta - \sin 2\theta = 2$

จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

ถ้า $0 \le \theta \le 2\pi$

1. $4\tan^2 x - 3\sec^2 x^2\theta = 0$

2. tan x sin x + tan x = 0

3. cos 2x = sin x

4. cos x + 4 sin x - sin2x = 2

5. $4\cos^2 x = 3$

6. $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin 3x = \cos x$

จงแก้สมการต่อไปนี้ เมื่อ $0^\circ \le x \le 360^\circ$

1. $\cos 2x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

2. $\sin 5x + \sin 3x = 0$

3. $\cot x + 2\sin x = \operatorname{cosec} x$

4. $2\sin x \tan x - 2\sin x - \tan x + 1 = 0$

5. $3\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

6. $2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

7. $4\cos^4 x = (\sin x)^2$

ใบงานที่ 18-7 **เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ**

จงแก้สมการข้อต่อไปนี้ เมื่อ $0 \le x \le \pi$

1. $\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$

2. $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

3. $4\sin x - \sin 2x - 2 + \cos x = 0$

4. $\sin\frac{x}{2} - \cos x - 1 = 0$

จงแก้สมการข้อต่อไปนี้ (หาคำตอบทั่วไป)

1. $\sin x - \sin x + \sin 3x = 0$

2. $\tan^2 x - 4\sec 2x + 5 = 0$

3. $2\sin^2 x + 1 = -\sin x + 2\sqrt{2\sin^2 x + \sin x} = 0$

4. $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = 0$

5. $\cos x + 4\sin x - \sin 2x = 2$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 19

เรื่อง **กฎของไซน์ โคไซน์ ระยะทางและความสูง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 8 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำกฎของไซน์และกฎของโคไซน์ไปใช้ หาระยะทางและความสูงของสิ่งของได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. บอกกฎของโคไซน์
2. หาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมโดยใช้ กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์
3. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง และความสูง

2. แนวความคิดหลัก

นอกเหนือจากการใช้ตรีโกณมิติ คำนวณหาความยาวของด้าน และขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแล้ว ยังสามารถใช้ตรีโกณมิติคำนวณหาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมใดๆ ได้อีก กฎที่ใช้ในการคำนวณเรียกว่า กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์ และใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเฉพาะกฎของไซน์ และโคไซน์ ช่วยคำนวณระยะทางและความสูงของสิ่งของได้

3. เนื้อหาสาระ

กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a ,b ,c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ตามลำดับแล้วจะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

และ $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{C}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูซักถามเกี่ยวกับความยาว ความสูง ของวัตถุต่างๆ เรามีวิธีการใดบ้างที่สามารถคำนวณได้ เช่น ความสูงของเสาของสถานีวิทยุ , ความสูงของต้นไม้ใหญ่ ความกว้างของแม่น้ำ จนได้ผลสรุปว่า

ถ้าหาความยาวหรือความสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หาได้โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ แต่ถ้าไม่ใช่สามเหลี่ยมมุมฉาก ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้

2. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้เรื่องการหาความยาวด้าน และมุมของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

3. ให้นักเรียนฝึกทักษะจากใบงาน

5. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 19
- ใบงานที่ 19
- หนังสือ คู่มือคณิตศาสตร์ ห้องสมุด

6. การวัดผลและการประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน	1. ใบงาน	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 %
	2. ทดสอบ	2.แบบทดสอบ	2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 80 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน	1. แบบตรวจผลงาน	-ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90 %
	2. สังเกต	2. แบบสังเกต	
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	-ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90 %

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

8. ข้อเสนอแนะ

....

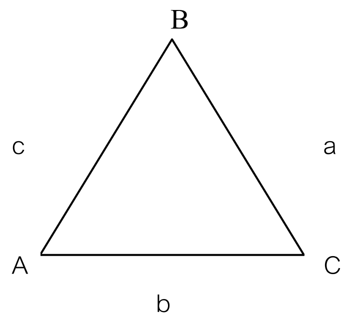
....

....

ลงชื่อ...

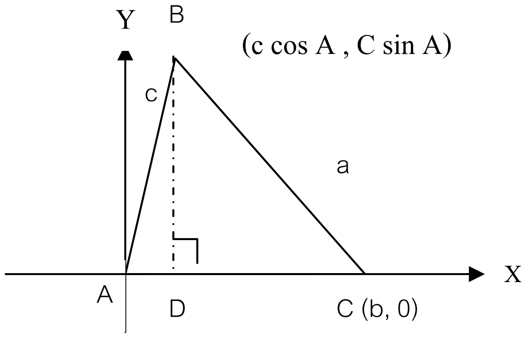
ใบความรู้ที่ 19-1 **กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์**

กฎของโคไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า a , b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B, C ตามลำดับ จะได้



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

พิสูจน์กฎของโคไซน์ ได้ดังนี้



จากรูปสามเหลี่ยม ABD จะได้ $\cos A = \frac{AD}{c}$

$$\therefore\ AD = c\cos A$$

และ $\sin A = \frac{BD}{c}$

$$\therefore BD = c\sin A$$

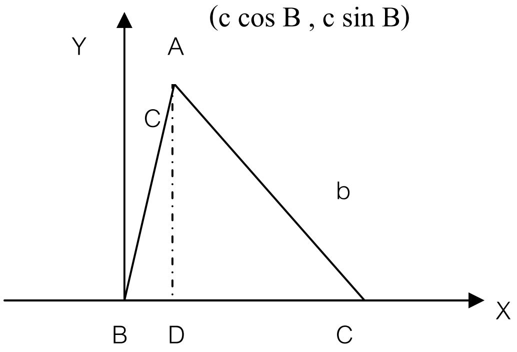
จะได้จุด B (c cos A , c sin A)

$$a = \sqrt{(c\cos A - b)^2 + (c\sin A)^2}$$
$$a^2 = c^2\cos^2 A - 2bc\cos A + b^2 + c^2\sin^2 A$$
$$= b^2 + c^2(\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc\cos A$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

ใบความรู้ที่ 19-2 **กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์**

ให้นักเรียนแสดง $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$



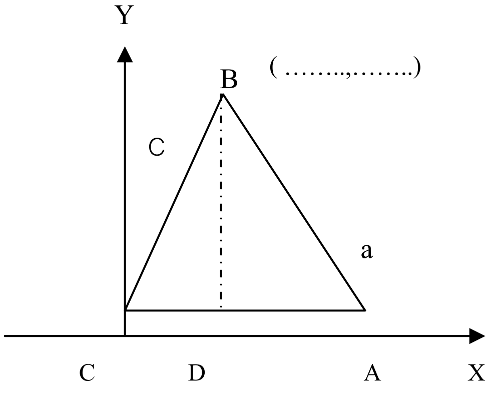
รูป △ ABD , จะได้ cos B $= \dfrac{BD}{c}$

BD = c cos B

sin B $= \dfrac{AD}{c}$

AD = c sin B

ให้นักเรียนแสดง $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



ใบความรู้ที่ 19-3 **กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์**

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนรูปจากโจทย์ปัญหาที่กำหนดแล้วแสดงวิธีทำ

โจทย์ปัญหา	รูป	วิธีทำ
1. ถ้า $C=45^\circ, a=10$ และ b = 15 จงหาค่า c	1.	1. โดยกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2+b^2 - 2ab\cos C$ $c = \sqrt{10^2+15^2-2(10)(15)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $= \sqrt{112.87}$ $= 10.6$
2. จงหา a เมื่อกำหนด b=20 , c=30 ,A = 60°	2.	2.
3. จงหา A เมื่อกำหนด a=2 , b=3 ,c = 4	3.	3.
4. จงหา C เมื่อกำหนด a =10 , b=12 , c = $2\sqrt{91}$	4.	4.

สรุปได้ว่า กฎของโคไซน์ใช้ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เมื่อกำหนด

1...

2...

ใบงานที่ 19 - 1 **กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์**

1. กำหนด $a=\sqrt{2}, b=2, c=\sqrt{3}-1$ จงหาขนาดของมุมที่ใหญ่ที่สุดของสามเหลี่ยม

2. เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งยาว 4 และ 8 นิ้ว ตัดกันเป็นมุม 30° จงหาความยาวของด้านยาวของสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปนี้

3. ในสามเหลี่ยม ABC โดยมี a,b,c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A,B,C ตามลำดับ ถ้า $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$ แล้ว A มีค่าเท่าใด

4. เรือหาปลา 2 ลำ จอดอยู่ในทะเล ระยะจากเรือแต่ละลำมายังจุดสังเกตบนฝั่งเป็น 100 และ 200 เมตร และมุมบนฝั่ง ณ จุดสังเกตเป็น 60° จงหาระยะที่เรือทั้งสองอยู่ห่างกัน

ใบงานที่ 19 – 2 **กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์**

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม B= 30° , b= $\sqrt{2}$ และ b= $2\sqrt{3}$ จงหาว่าเกิดสามเหลี่ยมกี่รูป

2. จะมีรูปสามเหลี่ยม ABC เกิดขึ้นหรือไม่ ถ้าให้ความยาวด้านตรงข้ามมุม B คือ b = 2 หน่วย

ความยาวด้านตรงข้ามมุม A คือ a = 6 หน่วย และมุม b = 30°

แนวการคิดวิเคราะห์ โจทย์กำหนด 1. ด้าน 2 ด้าน a = 6 , b = 2

2. มุมตรงข้ามด้านมุม B = 30°

โดยกฎของโคไซน์เลือกสมการ

วิธีทำ โดยกฎของโคไซน์

3. กำหนดด้านตรงมุม C คือ c = 12 , b = 12 ,B = 45° จงหาว่าเกิดรูปสามเหลี่ยมกี่รูป

ใบงานที่ 19 – 3 **กฎของโคไซน์ และกฎของไซน์**

4. กำหนดให้ ABC สามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีสมบัติว่า $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ แล้ว $\cos C$ มีค่าเท่าใด

5. ในสามเหลี่ยม ABC จงพิสูจน์ว่า $(b-c)\cos\frac{A}{2} = a\sin\frac{B-C}{2}$

ใบงานที่ 19 – 4 **การหาระยะทางและความสูง**

---

1. ก้านยืนอยู่บนดาดฟ้าของตึกสูง 15 ชั้น หลังหนึ่ง เขามองเห็นป้อมยามที่อยู่ทางทิศตะวันออกของตึก เป็นมุมก้ม 60 องศา และมองเห็นรถบรรทุกคันหนึ่งจอดอยู่ทางทิศใต้ของป้อมยามนั้นเป็นมุมก้ม 30 องศา อยากทราบว่ารถบรรทุกอยู่ห่างจากป้อมยามเท่าใด ถ้าตึกนั้นสูงชั้นละ 4 เมตร

----

2. เรือ 2 ลำ ทอดสมออยู่ห่างกัน 60 เมตร และอยู่ในแนวเดียวกับประภาคาร ทหารในเรือแต่ละลำมองเห็นยอดประภาคารเป็นมุมเงย 45 องศาและ 30 องศา จงหาว่าเรือลำที่อยู่ใกล้ประภาคารอยู่ห่างจากประภาคารเท่าไร

----

3. มุมเงยของยอดเนินดินแห่งหนึ่งเป็น 45 องศา ถ้าเดินขึ้นไปตามไหล่เนินซึ่งเอียงทำมุม 30 องศากับแนวราบเป็นระยะทาง 100 เมตร มุมเงยของยอดเนินดินเป็น 60 องศา จงหาความสูงของเนินดินจากพื้นราบ

ใบงาน 19 – 5 **การหาระยะทางและความสูง**

4. จากยอดหอคอยสูง h ฟุต สังเกตเห็นวัตถุ 2 อัน ซึ่งอยู่บนพื้นราบและอยู่ในแนวเส้นตรงที่ลากผ่านเชิงหอคอยเป็นมุมก้ม $45 - \theta$ และ $45 + \theta$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่าวัตถุทั้งสองห่างกัน $2h\tan 2\theta$ เมตร

5. ที่จุด A ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกของภูเขาลูกหนึ่ง มองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 45 องศา แต่เมื่อเดินไปที่จุด B ซึ่งอยู่ทางทิศใต้ของจุด A มุมเงยของยอดเขาเป็น 30 องศา จงหาระยะทาง AB กำหนดภูเขาสูง 500 ฟุต

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ดร.อำรุง จันทวานิช	เลขาธิการสภาการศึกษา
ดร.สิริพร บุญญานันต์	รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	ที่ปรึกษาด้านระบบการศึกษา สกศ.
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้เรียบเรียง :

ส่วนที่ 1

นางจุรี เรืองเริงกุลฤทธิ์	โรงเรียนมหาวชิราวุธ	จังหวัดสงขลา
นางสาวเจริญศรี แซ่พู่	โรงเรียนมหาวชิราวุธ	จังหวัดสงขลา
นางโสภา สุขมี	โรงเรียนมหาวชิราวุธ	จังหวัดสงขลา
นางผกาพรรณ สังขมณี	โรงเรียนมหาวชิราวุธ	จังหวัดสงขลา

ส่วนที่ 2

นางสาวประภา แซ่กวด	โรงเรียนบูรณะรำลึก	จังหวัดตรัง

ส่วนที่ 3

นางพัชรี คำมณี	โรงเรียนบูรณะรำลึก	จังหวัดตรัง

ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร
อาจารย์เอธัสวัฒน์ คำมณี
อาจารย์สุธิตา มณีชัย
คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้พิจารณารายงาน : นายบัณฑิตย์ ฝอยทอง โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา	หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
นายรวิช ตาแก้ว	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ

บรรณาธิการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : http://www.onec.go.th
http://www.thaigifted.org