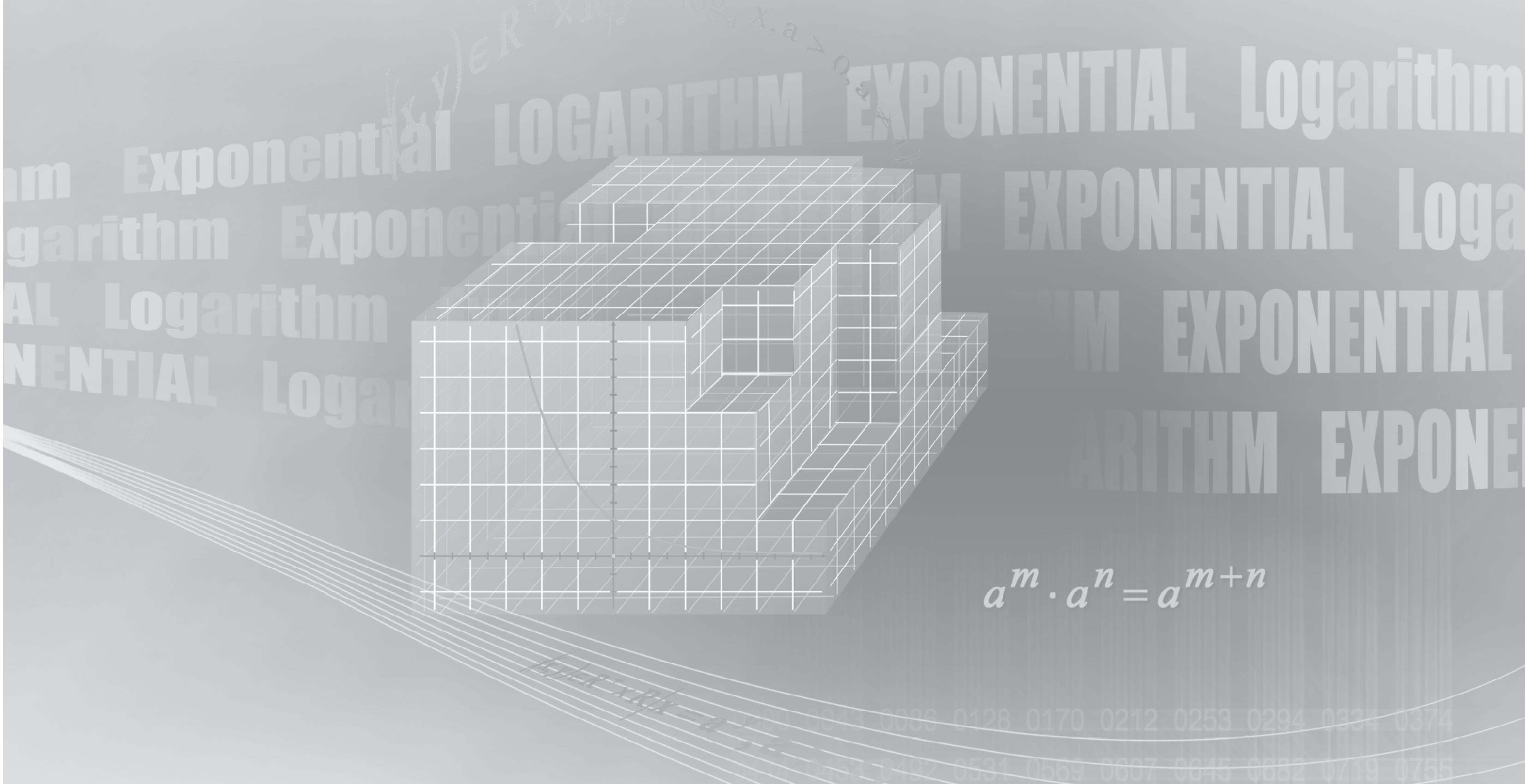
หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้
ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม



โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา

ส 691 ผ แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กรุงเทพฯ : 2551

98 หน้า

ISBN 978-974-559-323-7

1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร 2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สิ่งพิมพ์ สกศ.	อันดับที่ 50 /2551
พิมพ์ครั้งที่ 1	พฤษภาคม 2551
จำนวน	1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่	สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา 99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300 โทรศัพท์ 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530 โทรสาร 0-2243-1129, 0-2668-7329 Web site: http:// www.onec.go.th และ http:// www.thaigifted.org
ผู้พิมพ์	บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด 580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1 ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230 โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753

คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามาถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

(นายอำรุง จันทวานิช)
เลขาธิการสภาการศึกษา

คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตร การศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียนในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน

ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ระดับ		เนื้อหา	จำนวนคาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบเขียนแผนการจัดการเรียนรู้
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		7. ตรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึก และมหาวชิราวุธ
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด	40	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	
		■ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ)		โรงเรียนบูรณะรำลึก
		■ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ)		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		■ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ)		โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
รวม			100	

สารบัญ

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง **เลขยกกำลัง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 5 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

เขียนจำนวนในรูปเลขยกกำลัง และหาค่าของเลขยกกำลังได้ บวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลังได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของเลขยกกำลังได้
2. หาค่าของจำนวนที่เขียนในรูปเลขยกกำลังได้
3. บวก ลบ คูณ และหารจำนวนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มได้
4. บวก ลบ คูณ และหารจำนวนที่อยู่ในรูปรากที่ n หรือ อยู่ในรูปกรณฑ์ได้
5. บวก ลบ คูณ และหารจำนวนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะได้

ด้านทักษะ/ กระบวนการ นักเรียนสามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. ในการให้เหตุผล
2. ในการสื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
3. เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นได้

ด้านคุณลักษณะ

1. เป็นคนช่างสังเกต
2. มีความรับผิดชอบ
3. มีความร่วมมือซึ่งกันและกัน

2. แนวความคิดหลัก

เลขยกกำลังเป็นตัวเลขที่กำหนดขึ้นแทนจำนวนที่เกิดจากการคูณซ้ำๆ กัน ของจำนวนใดๆ ซึ่งในการนำจำนวนในรูปเลขยกกำลัง มาบวก ลบ คูณ หรือ หารกัน สามารถกระทำได้ตามสมบัติของการดำเนินการของจำนวนเต็ม

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ สามารถเขียนได้ในรูปกรณฑ์อันดับใดๆ การดำเนินการของจำนวนที่เขียนในรูปกรณฑ์ใดๆ สามารถกระทำได้ตามสมบัติของจำนวนเต็มเช่นเดียวกัน

3. เนื้อหาสาระ

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม a^n **แทน** $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ตัว}}$ **เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก**

เรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง (อ่านว่า "กำลังที่เอ็นของเอ" หรือ "เอ ยกกำลัง เอ็น") มี a เป็นฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง

ทฤษฎีบท 1 ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

1.1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

1.2 $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

1.3 $(a^m)^n = a^{mn}$

1.4 เมื่อ $a \neq 0$; $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } m = n \\ a^{m-n} & \text{เมื่อ } m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{เมื่อ } n > m \end{cases}$

1.5 เมื่อ $b \neq 0$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 1.4 พิจารณา

$$\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0 = 1$$

จากประโยคดังกล่าวสามารถนิยาม a^0 และ a^{-n} ดังนี้

บทนิยาม $a^0 = 1$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่เท่ากับ 0

บทนิยาม $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่เท่ากับ 0 และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จากบทนิยามข้างต้น จะได้ทฤษฎีบทเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มดังนี้

ทฤษฎีบท 2 ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่เป็น 0 และ m , n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

2.1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2.2 $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

2.3 $(a^m)^n = a^{mn}$

2.4 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2.5 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

แบบฝึกทักษะที่ 1.1

1. จงทำให้เป็นรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

   1.1 $9^{2}\cdot 3^{-5}$ = ……………………………………………………………………………………....

   1.2 $(21)^{2}\left(\frac{7}{3}\right)^{-3}$ = …………………………………………………………………………...

   1.3 $\left(\frac{24}{25}\right)^{3}\left(\frac{16}{15}\right)^{-2}$ = ………………………………………………………………………..

2. ถ้า $x>0, x\neq 1, m$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด

   ……… 2.1 $\frac{1}{x^{m}}\cdot\frac{1}{x^{n}}=x^{m-n}$

   ……… 2.2 $\frac{1}{x^{-n}}=x^{n}$

   ……... 2.3 $\frac{x^{m}}{x^{-n}}=x^{m-n}$

   ……... 2.4 $x^{m}+x^{n}=x^{m+n}$

   ……... 2.5 $x^{m}>1$ ก็ต่อเมื่อ x > 1

   ……… 2.6 ถ้า $\frac{x^{m}}{x^{n}}=x^{0}$ แล้ว x^{n} เป็นอินเวอร์สการคูณของ x^{m}

   ……... 2.7 ถ้า $x^{m}-x^{n}=0$ จะได้ m เป็นอินเวอร์สการคูณของ n

   …….. 2.8 ถ้า $\frac{x^{m}}{x^{n}}=x^{p}$ จะได้ m – n – p = 0

   …….. 2.9 ถ้า $m=x^{n}$ แล้ว $mx^{-n}=0$

   …….. 2.10 $(x^{m}+x^{n})^{-1}=\frac{1}{x^{m}}+\frac{1}{x^{n}}$

3. จงหาค่าของ

   1) $\frac{2^{-3}3^{-5}}{3^{-5}2^{0}}$ = …………………………………………………………………………………..

   2) $\left(a^{-5}b^{7}\right)\left(a^{-2}b^{-7}c^{0}\right)$ = ………………………………………………………………….....

   3) $\left(2ab^{-1}\right)\left(ab^{2}\right)^{-2}$ = ………………………………………………………………………..

   4) $\left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{2}\right)^{-4}$ =……………………………………………………………………………….

   5) $\left(\frac{1}{3a^{2}b^{-3}}\right)^{-2}$ =……………………………………………………………………………..

   6) $\left(x^{2}y^{-3}z^{-5}\right)\left(x^{-2}y^{3}z^{8}\right)$ =……………………………………………………………...……

   7) $\left(\frac{x^{-5}y^{4}}{x^{2}y^{-2}}\right)^{2}\left(\frac{x^{4}y^{-5}}{x^{3}y^{-7}}\right)^{-3}$ =……………………………………………………………………….

8) $\left(\dfrac{a^{-1}b^{-2}}{c^{3}}\right)^{2}\left(\dfrac{a^{-4}b^{2}}{c^{-3}}\right)^{-2}$ =……………………………………………………………………

9) $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-1}-b^{-1}}$ =……………………………………………………………………………..

10) $\dfrac{9-x^{4}}{3x^{-1}-x}$ =……………………………………………………………………………...…

11) $\dfrac{a^{2}+b^{2}}{(a+b)^{2}}+\dfrac{\frac{2}{ab}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{2}}$ =……………………………………………………………………

12) $\dfrac{a^{2n-3}}{a^{3n+1}}\cdot\dfrac{a^{n+5}}{a^{n-3}}$ =……………………………………………… ……………………………..

13) $\dfrac{\left(3x^{n+1}\right)^{2}}{x^{2(n+1)}}\cdot\dfrac{x^{-n}}{\left(x^{-n}\right)^{3}}$ =…………………………………………………………………..………

14) $\dfrac{3\cdot 2^{n}-4\cdot 2^{n-2}}{2^{n}-2^{n-1}}$ =…………………………………………………………………………....

15) $\dfrac{2\cdot 2^{2n+3}-24\cdot 2^{2(n-1)}}{10\left(2^{n}\right)^{2}}$ =………………………………………………………………………

16) $\dfrac{2^{n}\cdot\left(2^{n-1}\right)^{n}}{2^{n+1}\cdot 2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{4^{-n}}$ =……………………………………………………………………..

17) $\dfrac{6\cdot 2^{n}-4\cdot 2^{n-2}}{2^{n+1}+2^{n-1}}$ =…………………………………………………………………………….

รากที่ n ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

บทนิยาม ถ้า x , y เป็นจำนวนจริง y เป็นรากที่สองของ x ก็ต่อเมื่อ $y^{2}=x$

เนื่องจาก $y^{2}=(-y)^{2}$ ดังนั้น ถ้ามีจำนวนจริง y ที่ยกกำลังสองแล้วได้ x ก็จะมีจำนวนจริง (-y) ที่ยกกำลังสองแล้ว x ด้วย เพราะฉะนั้น ถ้า $x\geq 0$ แล้ว x จะมีรากที่สองที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เรียกรากนี้ว่า ***รากที่สองที่ไม่เป็นลบ*** ของ x จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{x}$

ถ้า x > 0 จะมีรากที่สองของ x สองรากคือ $\sqrt{x}$ และ $-\sqrt{x}$ จะได้ $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนบวก และ $-\sqrt{x}$ เป็นจำนวนลบ

ถ้า x = 0 จะมีจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวคือ 0 เป็นรากที่สองของ x นั่นคือ $\sqrt{0}=0$

ถ้า x < 0 ไม่มีรากที่สองของ x ที่เป็นจำนวนจริง

สมบัติของรากที่สองที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 3 ถ้า $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า $x \geq 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

ข้อสังเกต จำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ จะมีรากที่ n เสมอ และจำนวนลบจะมีรากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

บทนิยาม ให้ x เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n จำนวนจริง y จะเป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

1. y เป็นรากที่ n ของ x
2. $xy \geq 0$

หมายเหตุ

1. เครื่องหมาย $\sqrt[n]{}$ เรียกว่าเครื่องหมายกรณฑ์ เรียก n ว่า ดัชนีของกรณฑ์
2. เมื่อ x เป็นจำนวนจริง จำนวนจริงที่เขียนในรูป $\sqrt[n]{x}$ เรียกว่ากรณฑ์
3. $\sqrt[n]{x}$ อ่านว่ากรณฑ์ที่ n ของ x หรือ ค่าหลักของรากที่ n ของ x
4. ถ้า $n = 2$ จะเขียน $\sqrt{}$ แทน $\sqrt[2]{}$
5. $\sqrt[n]{1} = 1$
6. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ นั่นคือ กำลังที่ n ของค่าหลักของรากที่ n ของ x คือ x

สมบัติของรากที่ n

ทฤษฎีบท 5 ถ้า x และ y มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

ทฤษฎีบท 6 ถ้า x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

ทฤษฎีบท 7 ถ้า x มีรากที่ r และ x มีรากที่ n แล้ว x มีรากที่ rn

ตัวอย่าง จงทำให้เป็นผลสำเร็จ $\left(3\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\left(3\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right) &= \left(3\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2}\right)+\left(7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}\right)-\left(7\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}\right)\\ &= 15-9\sqrt{10}+7\sqrt{10}-42\\ &= -27-2\sqrt{10}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงทำเป็นผลสำเร็จ $\sqrt{80}-\sqrt{45}+\sqrt{125}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\sqrt{80}-\sqrt{45}+\sqrt{125} &= 4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}\\ &= (4-3+5)\sqrt{5}\\ &= 6\sqrt{5}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงเขียน $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ ให้อยู่ในรูปที่ส่วนไม่ติดกรณฑ์

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} &= \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{15}}{15}\\ &= \frac{\sqrt{75}-\sqrt{45}}{15}\\ &= \frac{5\sqrt{3}}{15}-\frac{3\sqrt{5}}{15}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงเขียน $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ให้อยู่ในรูปที่ส่วนไม่ติดกรณฑ์

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} &= \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\\ &= \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}\\ &= 3-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\sqrt{x+2}=x-4$

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt{x+2}=x-4$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $x+2=(x-4)^2$

$$x+2=x^2-8x+16$$

$$x^2-9x+14=0$$

$$(x-2)(x-7)=0$$

ดังนั้น $x = 7, 2$ เป็นจริง

ตรวจสอบคำตอบ โดยแทนค่า x ในสมการโจทย์ พบว่า

$x = 7$ เป็นจริง

ตัวอย่าง จงเขียนเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x+2} = \sqrt{7-x} - 3$

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt{x+2} = \sqrt{7-x} - 3$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = -3$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

จะได้ $(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 = (-3)^2$

$$(x+2) - 2\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} + (7-x) = 9$$

$$9 - 2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 9$$

$$-2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 0$$

$$\sqrt{(x+2)(7-x)} = 0$$

$$(x+2)(7-x) = 0$$

$$x = -2,\ 7$$

ตรวจสอบคำตอบ $x = -2$ ทำให้สมการเป็นจริง ดังนั้นเซตคำตอบของสมการคือ $\{-2\}$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $3\sqrt{x} + \sqrt{9x+13} - 13 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $3\sqrt{x} + \sqrt{9x+13} - 13 = 0$

$$\sqrt{9x+13} = 13 - 3\sqrt{x}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง ได้ $9x + 13 = 169 - 78\sqrt{x} + 9x$

$$78\sqrt{x} = 156$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

เซตคำตอบของสมการคือ $\{4\}$

ตรวจสอบคำตอบ $x = 4$ ทำให้สมการเป็นจริง ดังนั้นเซตคำตอบคือ $\{4\}$

แบบฝึกทักษะที่ 1.2

1. จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย
   1) $\sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{4a}$
   2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12}$
   3) $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$
   4) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{27}$
2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ส่วนไม่ติดกรณฑ์
   1) $\sqrt{\frac{5}{2}}$
   2) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{15}}$
   3) $\sqrt{\frac{5a}{2b}}$
   4) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{5}}$
3. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ
   1) $(a+b)\sqrt{x} - (a-b)\sqrt{x}$
   2) $3\sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{32}$
   3) $\frac{a}{\sqrt{3}} - \sqrt{12}a + \frac{4a}{\sqrt{3}}$
   4) $3\sqrt{5}\left(\sqrt{10} + 2\sqrt{5}\right)$
   5) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$
   6) $\left(2 + \sqrt{3}\right)^2$
   7) $\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(2\sqrt{5} - 1\right)$
   8) $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)$
4. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้
   1) $7\sqrt{3x-5} = 28$
   2) $6 + \sqrt[4]{x-2} = 9$
   3) $2\sqrt{x} - 1 = \sqrt{4x-11}$
   4) $\sqrt{14+25x} = \sqrt{7+9x} + \sqrt{1+4x}$
   5) $4x + 1 - 2\sqrt{x^2 - 6x + 2} = x^2 - 2x$
   6) $3x - \sqrt{2x^2 + 6x + 1} = 1 - x^2$
   7) $2x^2 - 3\sqrt{2x^2 - 7x + 7} = 7x - 3$
   8) $3\sqrt[3]{5x-35} = 5\sqrt[3]{2x-7}$
   9) $(x+1)^2 = 5\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1\right)$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 และ a มีรากที่ n

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง p , q เป็นจำนวนเต็มที่ (p , q) = 1 , q > 0 และ $a^{\frac{1}{q}} \in R$

โดยเมื่อ p < 0 แล้ว a ต้องไม่เป็น 0 $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p}$

ทฤษฎีบท 8 ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ q และ p เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ a^{p} เป็นจำนวนจริง จะได้ a^{p} มีรากที่ q

ตัวอย่าง จงหาผลสำเร็จของ $(27)^{\frac{2}{3}} + (16)^{\frac{3}{4}} - \dfrac{2}{8^{-\frac{2}{3}}} + \dfrac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}}$

วิธีทำ $(27)^{\frac{2}{3}} + (16)^{\frac{3}{4}} - \dfrac{2}{8^{-\frac{2}{3}}} + \dfrac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}} = \left(3^{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(2^{4}\right)^{\frac{3}{4}} - \dfrac{2}{\left(2^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}} + \dfrac{2^{\frac{1}{5}}}{\left(2^{2}\right)^{-\frac{2}{5}}}$

$$= 3^{2} + 2^{3} - \frac{2}{2^{-2}} + \frac{2^{\frac{1}{5}}}{2^{-\frac{4}{5}}}$$

$$= 9 + 8 - 2^{3} + 2^{\frac{5}{5}}$$

$$= 9 + 8 - 8 + 2$$

$$= 11$$

เกมจับผิดคณิตศาสตร์

ให้ $-1 = (-1)^{1} = (-1)^{\frac{2}{2}}$ …………………(1)

$= \left[(-1)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$ …………………(2)

$= 1^{\frac{1}{2}}$ …………………(3)

$= 1$

ผิดที่ใด

แบบฝึกทักษะที่ 1.3

1. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

   1. $4^{\frac{1}{2}}$ ....

   2. $8^{\frac{2}{3}}$ ....

   3. $(-27)^{\frac{2}{3}}$ ....

   4. $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ ....

   5. $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$ ....

   6. $5^{\frac{3}{5}} \times 5^{\frac{2}{5}}$ ....

   7. $\dfrac{4^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{5}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}}$ ....

   8. $\dfrac{3^{-\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{7}{2}} \times 3^{-\frac{9}{2}}}$ ....

2. จงเขียน $\left(\dfrac{x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{5}{4}}y^{\frac{7}{2}}z^{\frac{9}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนนับ

2. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 5 - 6 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาเรื่องเลขยกกำลังจากเอกสาร และให้นักเรียนสรุปทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2

3. ให้นักเรียนร่วมกันทำแบบฝึกทักษะที่ 1.1 แล้ว ให้ตัวแทนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาโจทย์

ชั่วโมงที่ 2

1. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 5 – 6 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาเรื่องรากที่ n และจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์จากเอกสาร และให้นักเรียนสรุปทฤษฎีบท 1 ถึง ทฤษฎีบท 4

2. ครูและนักเรียนร่วมกันหาข้อสรุปเกี่ยวกับสมบัติของการ บวก ลบ คูณ หาร เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม กับการ บวก ลบ คูณ หาร จำนวนในรูปติดกรณฑ์

3. ให้นักเรียนร่วมกันทำแบบฝึกทักษะที่ 1.2 ข้อที่ 1 - 3

ชั่วโมงที่ 3

1. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 5 – 6 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาเรื่องเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วนจากเอกสารประกอบการเรียนรู้

2. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตั้งโจทย์ที่เป็นโจทย์คู่ขนานกับในเอกสาร แล้วให้ทุกกลุ่มสุ่มหยิบโจทย์ขึ้นมากลุ่มละหนึ่งข้อแล้วออกมาแสดงวิธีทำหน้าชั้นเรียน โดยมีคะแนนดังนี้ กลุ่มที่คิดโจทย์จะได้ 2 คะแนนจากการตั้งโจทย์ แต่จะถูกหัก 1 คะแนนถ้ากลุ่มที่สุ่มหยิบโจทย์ข้อนั้นขึ้นมาแล้วแก้โจทย์ได้ และจะถูกหัก 2 คะแนนถ้าเจ้าของโจทย์เฉลยคำตอบผิด ส่วนกลุ่มที่ออกมาทำโจทย์ได้จะได้ 2 คะแนน แต่ถ้าทำไม่ได้ หรือไม่ถูกต้อง จะต้องถูกหัก 1 คะแนน

3. ให้นักเรียนร่วมกัน เล่นเกมจับผิดคณิตศาสตร์ กลุ่มที่ได้คำตอบก่อน และถูกต้องจะได้ 5 คะแนน กลุ่มถัดไป จะได้คะแนน 4, 3 , 2 และ 1 ตามลำดับ

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1.3 เป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 4

1. ให้นักเรียนร่วมกันศึกษาจากเอกสารเรื่องการแก้สมการที่อยู่ในรูปติดกรณฑ์ แล้วร่วมกันอภิปรายวิธีการและกระบวนการการแก้สมการ

2. ให้นักเรียนทำแบบฝึกประสบการณ์และอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน โดยมีครูเป็นผู้ถามนำทาง

3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1.2 ข้อที่ 4

ชั่วโมงที่ 5

1. ให้นักเรียนฝึกทำโจทย์ระคนอย่างยากจากเอกสารประกอบการสอน

2. ครูเฉลยโจทย์อย่างยากเฉพาะข้อที่นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาได้

5. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการเรียนรู้
2. ใบแบบฝึกประสบการณ์
3. ใบเกมจับผิดคณิตศาสตร์

6. การวัดผลประเมินผล ดังนี้

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงาน 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 80 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 50 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %

7. บันทึกหลังสอน

ใช้สอนจริง/ห้อง					
วัน เดือน ปี					

7.1 ปัญหา หรือ สิ่งที่ต้องการพัฒนา

………

………

………

7.2 แนวทางการปรับปรุงการเรียนครั้งต่อไป

………

………

………

7.3 ผลที่เกิดกับผู้เรียน

………

………

………

8. กิจกรรมเสนอแนะ

………

………

………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง **ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 5 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถบอกลักษณะของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ ด้านความรู้

1. บอกได้ว่าฟังก์ชันใดเป็น หรือ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล
2. บอกได้ว่าฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันลด
3. สามารถนำสมบัติของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลไปใช้แก้ปัญหาได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ

นักเรียนสามารถใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการ

1. ให้เหตุผล
2. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
3. เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นได้

ด้านคุณลักษณะ

1. เป็นคนช่างสังเกต
2. มีความรับผิดชอบ
3. มีความร่วมมือซึ่งกันและกัน

2. แนวความคิดหลัก

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเลขชี้กำลังกับค่าของเลขยกกำลัง ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ในรูป $f = \{(x, y) \in R \times R^{+} \mid y = a^{x}, a > 0, a \neq 1\}$

ฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลเป็นฟังก์ชันที่นำไปประยุกต์ใช้ในวงการธนาคารเกี่ยวกับการคำนวณดอกเบี้ยเงินฝาก ยอดเงินฝาก การศึกษาเกี่ยวกับการเพิ่มหรือลดของประชากรต่างๆ การแผ่รังสีของสารกัมมันตภาพ การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของสารบางชนิด เป็นต้น

3. เนื้อหาสาระ

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล , กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

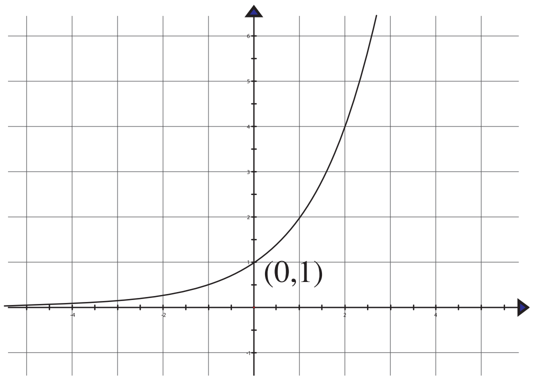
ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียน

บทนิยาม ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล คือ $f = \{(x, y) \in R \times R^+ \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

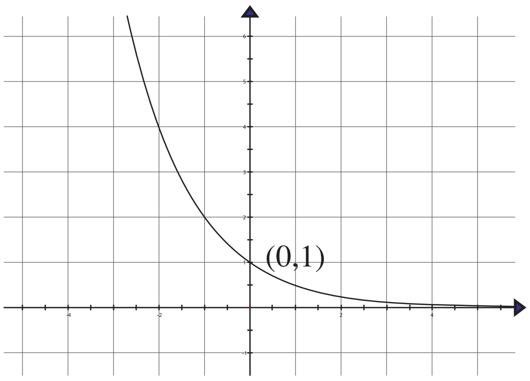
ข้อสังเกต 1. กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ จะผ่านจุด (0 , 1) เสมอ

2. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

3. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก R ไปทั่วถึง R^+



กราฟของฟังก์ชัน
$y = a^x, a > 1$



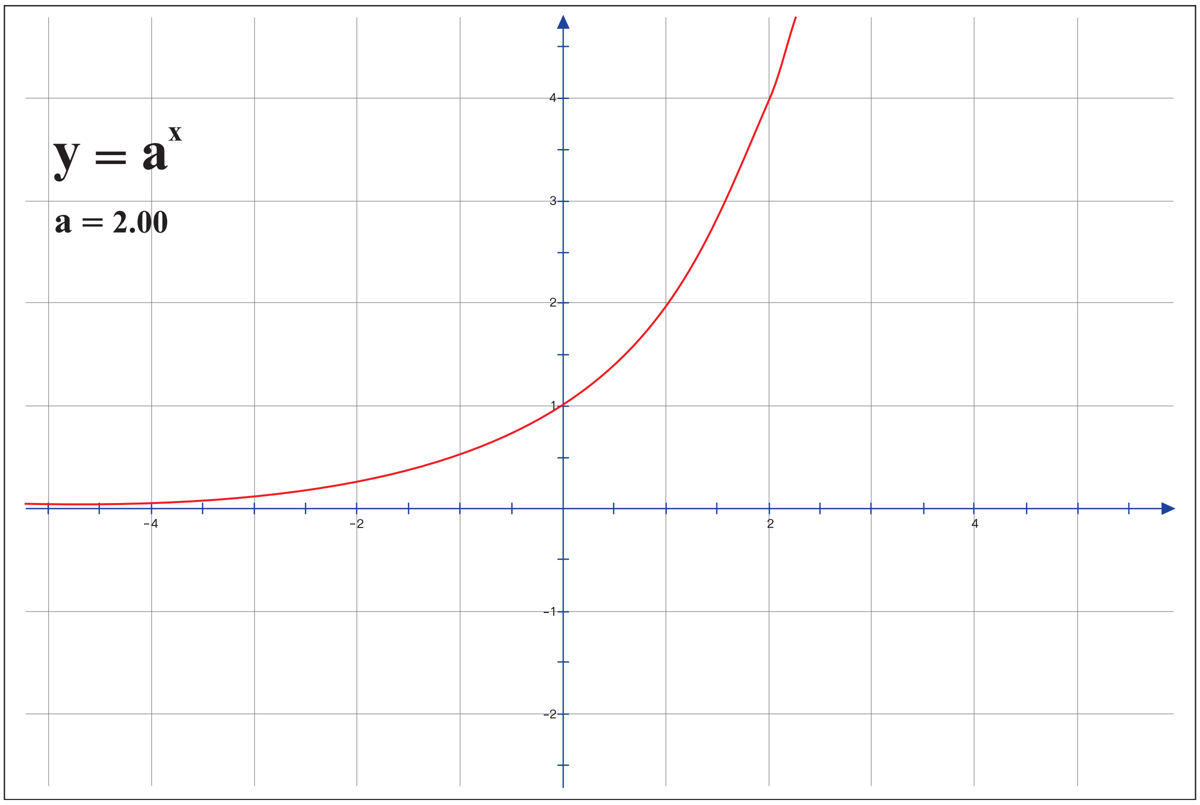
กราฟของฟังก์ชัน
$y = a^x, 0 < a < 1$

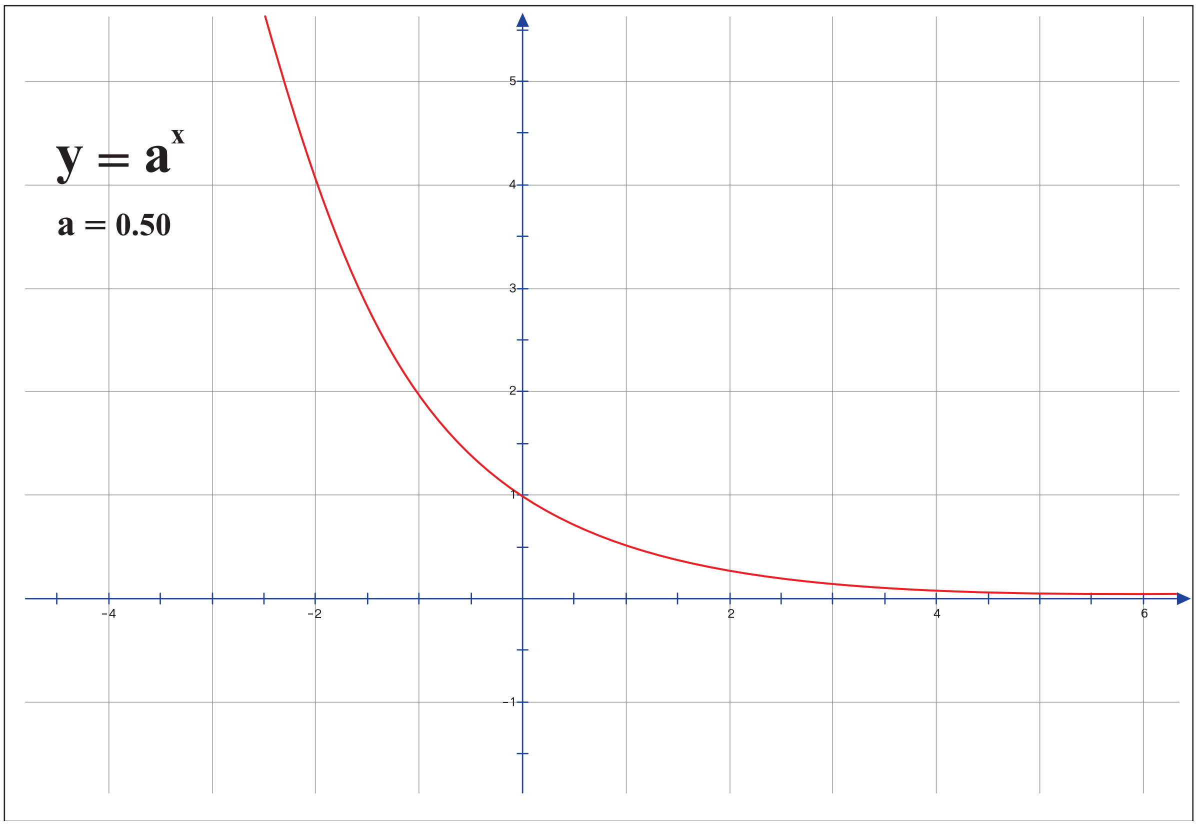
ข้อสังเกต 1. กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x, a > 0$ และ $a \neq 1$ จะผ่านจุด (0 , 1) เสมอ เพราะ $a^0 = 1$
2. ถ้า a > 1 แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และถ้า a < 1 แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด

สมบัติบางประการที่ควรทราบ

1. ถ้า $a^m = a^n$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว m = n
2. ถ้า $a^n = b^n$ เมื่อ $a \neq b$ แล้ว n = 0

สไลด์ประกอบการเรียน





แบบฝึกทักษะที่ 1.4

1. จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลหรือไม่ ถ้าเป็นให้เขียนกราฟ และบอกด้วยว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

   1) $y = 2^{x}$
   2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
   3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$
   4) $y = (-2)^{2x}$
   5) $y = (0.45)^{-x}$
   6) $y = 3^{-x} + 1$
   7) $y = 2^{|-x|}$
   8) $y = |3^{x}| + 2$

2. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

   1) $3^{x} = 3^{2x+1}$
   2) $7^{x-3} = 1$
   3) $3^{6-x} = \sqrt{27}$
   4) $3^{x(x+4)} = \frac{1}{81}$
   5) $5^{2x+1} = 25^{x} \cdot 5^{3x}$
   6) $2^{x(x-1)} = 4$
   7) $3^{x} = 9^{x+1} \cdot 27^{1-2x}$

3. ให้ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n < x < n+1$ จงหาค่า n จากสมการต่อไปนี้

   1) $3^{x} = 16.2$
   2) $4^{x} = 87.1$
   3) $10^{x} = 0.016$
   4) $2^{x} = 6$

4. กำหนด $8^{-k} = 6$ จงหาค่าของ 4^{3k}

……

……

……

……

……

……

โจทย์ระคนอย่างยาก

1. กำหนด $a^x = b, b^y = c, c^z = a$ จงหา $x^2y^2z^2$
2. กำหนด $6^{-x} = 3^y = 2^z$ จงหาค่าของ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$
3. ถ้า $8^x = 9^y = 6^z$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z}$
4. กำหนด $A = \left\{ x \,\middle|\, 3^{\left[2^{2x+1} - 9\left(2^{x+\frac{1}{2}}\right) + 32\right]} = 27^{\left(2^{x+\frac{1}{2}}\right)} \right\}$ จงหาผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ A
5. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $a < b$ และ $3\left(a^2 + b^2\right) = 10ab$ แล้ว จงหาค่าของ $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3$
6. ถ้า $7^{x+y} = 21$ และ $3^{2x+y} = 1$ แล้ว $7^{x+1} + 7^{y-2}$ มีค่าเท่าใด
7. กำหนด $A = \left\{ x \in R \,\middle|\, 3^{x^2+2x} - 3^{x^2-1} - 9^{x+1} + 27 = 0 \right\}$ ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทั้งหมดของ A เป็นเท่าใด
8. ถ้ากำหนด $2^x = 3^y = 4^z = 24^k$ และ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = k^m$ จงหาค่า m
9. ถ้า $a^x - a^{-x} = 5$ แล้วจงหา $a^{2x} + a^{-2x}$
10. จงแก้สมการ $3^{4m+2} - 9^{2m-1} + 81^m = 89$
11. จงแก้สมการ $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 155\sqrt{5}$
12. จงแก้สมการ $7^{2x} + 4 \cdot 7^x - 5 = 0$
13. จงแก้สมการ $\frac{e^{2x}}{\left(1 + e^x\right)^2} = \frac{1}{4}$
14. จงแก้สมการ $2^x - 3^x = 0$
15. จงแก้สมการ $4^x + 9^x = 25^x$

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ชั่วโมงที่ 1

1. ให้นักเรียนทบทวนเรื่องเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริง
2. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $y = a^x$ ให้นักเรียน ลองสมมุติค่า a ที่แตกต่างกัน
3. ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงลักษณะของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $y = a^x$ เมื่อ $a \le 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$ และ $a > 1$

ชั่วโมงที่ 2

1. ครูนำสไลด์ประกอบการเรียนเรื่องกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (โปรแกรม GSP) แสดงให้นักเรียนดู

2. นักเรียนร่วมกันอภิปราย หาข้อสรุป และยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $y = a^x$

ชั่วโมงที่ 3

1. ให้นักเรียนช่วยกันเขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $y = a^x$ ที่นักเรียนทำในการเรียนชั่วโมงที่ 1

2. ให้นักเรียนร่วมกันสรุปลักษณะของกราฟของความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $y = a^x$

3. นักเรียนร่วมกันสรุปจากกราฟที่ได้ว่า จากความสัมพันธ์ $\mathrm{y = a^x}$ จะเป็นฟังก์ชันลด เมื่อค่าของ a อยู่ในช่วงใด และ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อค่าของ a เป็นอย่างไร

ชั่วโมงที่ 4

1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกันออกเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละเท่าๆ กัน (คนที่เหลือให้เป็นกรรมการคอยตรวจสอบความถูกต้อง) แข่งกันเขียนฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียนที่เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มและฟังก์ชันลดสลับกัน โดยแต่ละกลุ่มใช้วิธีผลัดกันเขียนคนละ 1 ฟังก์ชันวนไปจนครบทุกคนในกลุ่ม กลุ่มที่เขียนเสร็จและถูกต้องก่อนจะเป็นฝ่ายชนะ

2. ครูให้ตัวอย่างฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลที่นอกเหนือจากที่นักเรียนเขียน และให้นักเรียนช่วยกันเขียนกราฟของฟังก์ชัน

3. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1.4

ชั่วโมงที่ 5

ครูให้นักเรียนร่วมกันฝึกทำโจทย์ระคนอย่างยาก โดยมีครูคอยให้คำแนะนำ

เลือกนักเรียนออกมานำเสนอข้อที่น่าสนใจ

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปอีกครั้งหนึ่ง

5. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. สไลด์ประกอบการเรียนแสดงกราฟของความสัมพันธ์ $\mathrm{y = a^x}$ เมื่อ a มีค่าเปลี่ยนแปลง
2. เอกสารประกอบการเรียน
3. โจทย์ระคนอย่างยาก

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงาน 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 80 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 50 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %

7. บันทึกหลังการสอน

7.1) ปัญหา หรือ สิ่งที่ต้องการพัฒนา

……

……

……

……

7.2) แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

……

……

……

……

7.3) ผลที่เกิดจากผู้เรียน

……

……

……

8. กิจกรรมเสนอแนะ

……

……

……

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง **ฟังก์ชันลอการิทึม** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 5 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล กับ ฟังก์ชันลอการิทึมได้
2. แก้ปัญหาลอการิทึมโดยใช้สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล กับ ฟังก์ชันลอการิทึมได้

ด้านทักษะ/ กระบวนการ นักเรียนสามารถ

1. ใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการให้เหตุผล
2. ใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการสื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
3. เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นได้

ด้านคุณลักษณะ

1. เป็นคนช่างสังเกต
2. มีความรับผิดชอบ
3. มีความร่วมมือซึ่งกันและกัน

2. แนวความคิดหลัก

ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนแชียล เขียนอยู่ในรูปของ $\{(x,y)\in R^{+}\times R \mid x=a^{y}, a>0, a\neq 1\}$ หรือ $\{(x,y)\in R^{+}\times R \mid y=\log_{a}x, a>0, a\neq 1\}$

3. เนื้อหาสาระ

ฟังก์ชันลอการิทึม

เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลคือ $y=a^{x}$ เมื่อ $a>0$ และ $a\neq 1$

อินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลคือ $x=a^{y}$ เมื่อ $a>0$ และ $a\neq 1$ (***จำให้ดี*** $\underline{x>0}$)

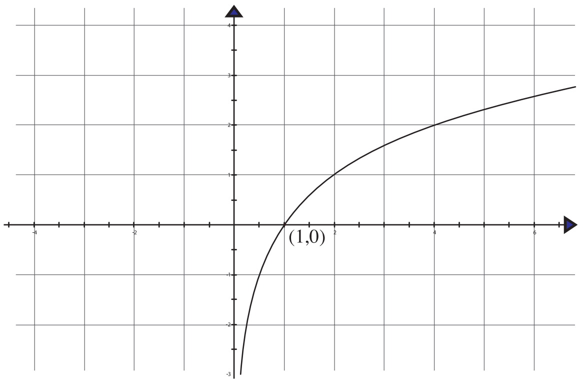
ซึ่งสามารถเขียนในรูป $y=f(x)$ ได้โดยกำหนดให้ $y=\log_{a}x$

บทนิยาม	ฟังก์ชันลอการิทึมคือ $\{(x,y)\in R^{+}\times R \mid y=\log_{a}x, a>0, a\neq 1\}$
	เป็นอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล $\{(x,y)\in R\times R^{+} \mid y=a^{x}, a>0, a\neq 1\}$

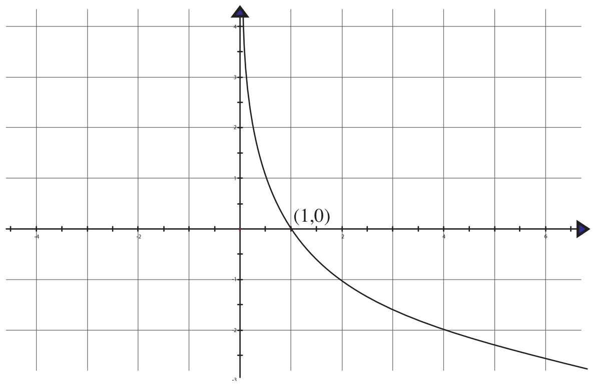
นั่นคือ

จาก $x = a^y$ เขียนใหม่เป็น $\log_a x = y$
หรือ $\log_a x = y$ หมายถึง $x = a^y$

กราฟของพังก์ชันลอการิทึม $y = \log_a x$ เขียนได้ดังรูป



$y = \log_a x$ เมื่อ $a > 1$



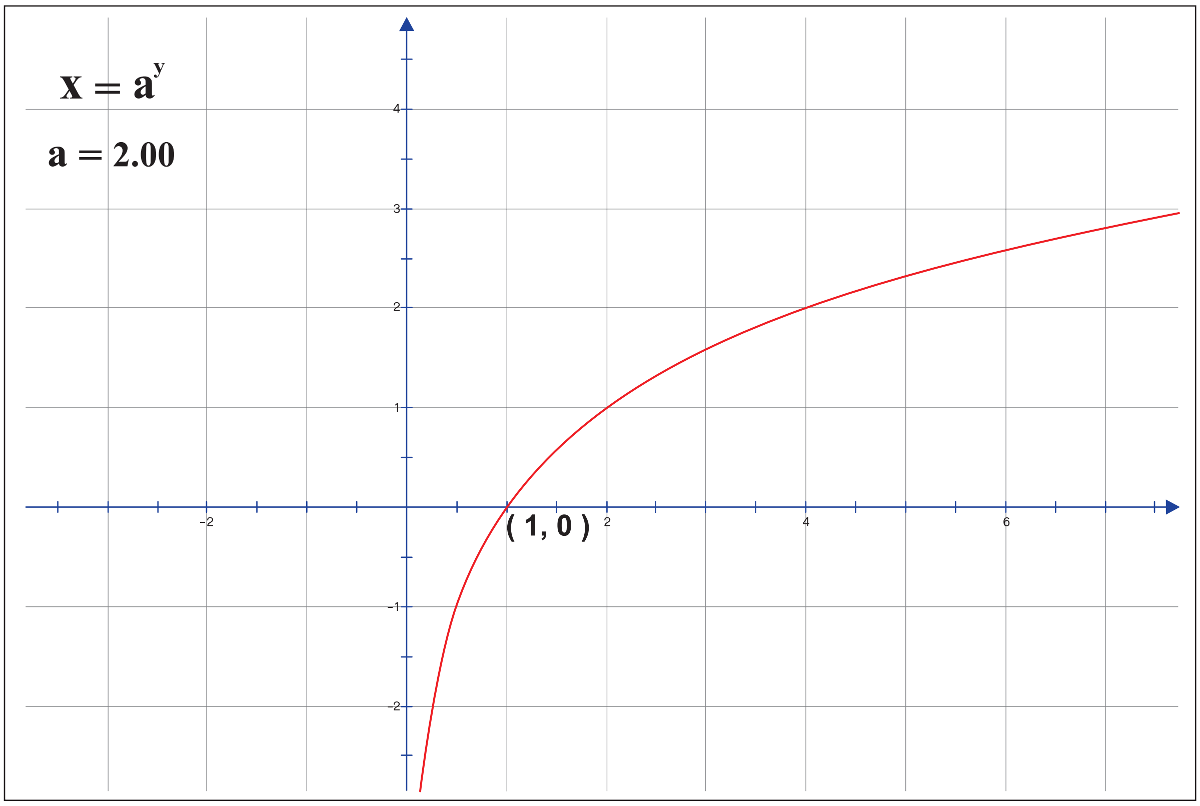
$y = \log_a x$ เมื่อ $0 < a < 1$

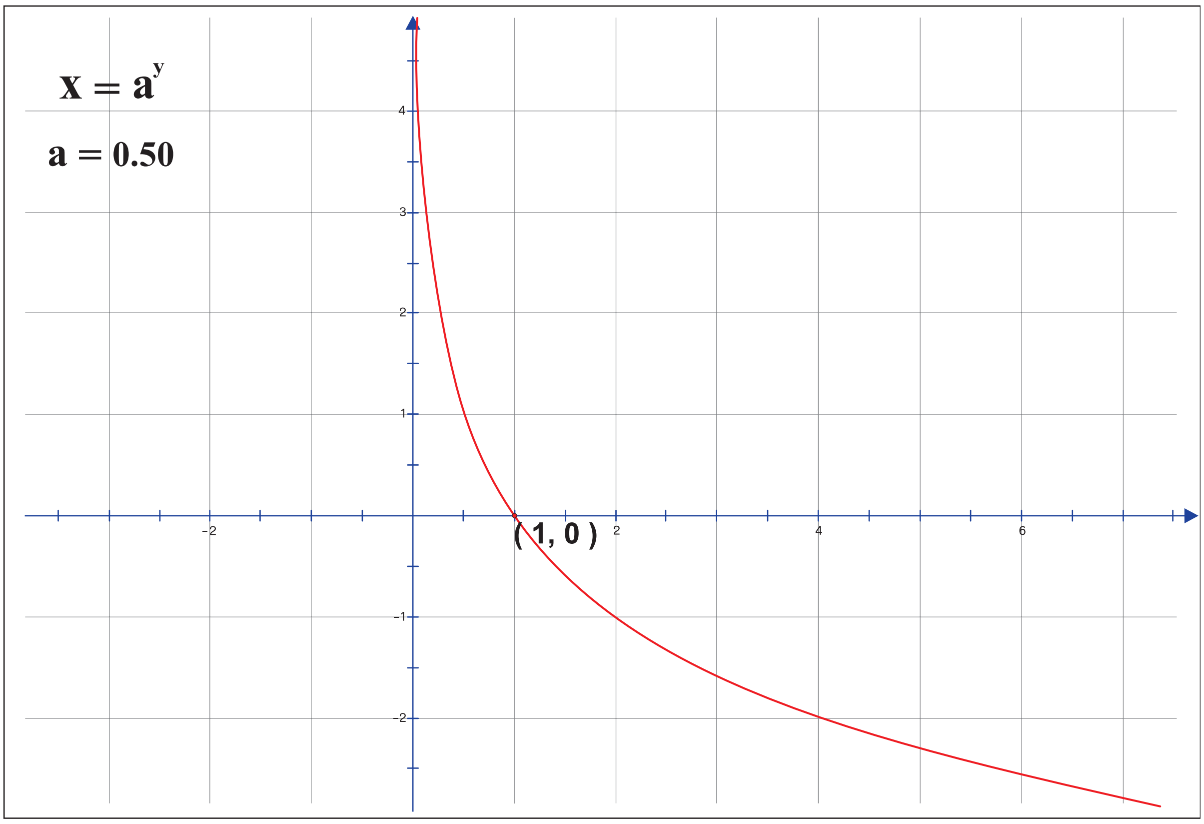
สมบัติของ ลอการิทึม

กำหนดให้ M และ N เป็นจำนวนจริงบวก เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0 และ $a \neq 1$

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^p = p \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $a^{\log_a N} = N$
7. $\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}$
8. $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$
9. $M^{\log_a P} = P^{\log_a M}$
10. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

สไลด์แสดงกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม





ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $(\log_2 8)(\log_3 81) + 4\log_{10} 400 - \log_{10} 256$

วิธีทำ I $(\log_2 8)(\log_3 81) + 4\log_{10} 400 - \log_{10} 256 = (\log_2 2^3)(\log_3 3^4) + 4\log_{10}(4\times 100) - \log_{10} 2^8$

$= 3(4) + 4(\log_{10} 4 + \log_{10} 100) - 8\log_{10} 2$

$= 12 + 4(\log_{10} 2^2 + \log_{10} 10^2) - 8\log_{10} 2$

$= 12 + 4(2\log_{10} 2 + 2) - 8\log_{10} 2$

$= 12 + 8\log_{10} 2 + 8 - 8\log_{10} 2$

$= 20$

วิธีทำ II $= (\log_2 2^3)(\log_3 3^4) + 4\log 400 - \log 4^4$

$= (3)(4) + 4(\log \frac{400}{4})$

$= 12 + 4\log 100$

$= 12 + 4(2)$

$= 12 + 8 = 20$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\log_{10}\sqrt{28} + \log_{10}\sqrt{325} - \log_{10}\sqrt{91}$

วิธีทำ $\log_{10}\sqrt{28} + \log_{10}\sqrt{325} - \log_{10}\sqrt{91} = \log_{10}(\frac{\sqrt{28}\times\sqrt{325}}{\sqrt{91}})$

$= \log_{10}\sqrt{\frac{28\times 325}{91}}$

$= \log_{10}\sqrt{100}$

$= \log_{10} 10$

$= 1$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $(\log_2 16)\left(\log_5\left(\frac{1}{25}\right)\right) - (\log_{27} 9)\left(\log_2\left(\frac{1}{8}\right)\right) + (\log_{27} 3) + \log_8 4$

วิธีทำ

$(\log_2 16)\left(\log_5\left(\frac{1}{25}\right)\right) - (\log_{27} 9)\left(\log_2\left(\frac{1}{8}\right)\right) + (\log_{27} 3) + (\log_8 4)$

$= (\log_2 2^4)(\log_5 5^{-2}) - (\log_{3^3} 3^2)(\log_2 2^{-3}) + (\log_{3^3} 3^1) + (\log_{2^3} 2^2)$

$= (4)(-2) - (\frac{2}{3})(-3) + (\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3})$

$= -8 + 2 + 1$

$= -5$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$

วิธีทำ $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}} = \sqrt{10^2 \times 10^{\frac{1}{2}\log 16}}$

$= \sqrt{10^2 \times 10^{\log\sqrt{16}}}$

$= \sqrt{10^2} \times \sqrt{10^{\log 4}}$

$= 10 \times \sqrt{4}$

$= 10(2)$

$= 20$

แบบฝึกทักษะที่ 1.5

1. จงเขียนลอการิทึมต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

   1.1 $\log_9 729 = 3$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

   1.2 $\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

   1.3 $\log_2\left(\frac{1}{256}\right) = -8$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

   1.4 $\log_{10} 1 = 0$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

   1.5 $\log_{10} 300 = 24771$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

   1.6 $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

2. จงหาค่าของ $\log_3 9 + \log_2 64$
3. จงหาค่าของ $\log_2 (5 + \log_2 \frac{1}{2})$
4. กำหนด $a = \log_{10} 28, b = \log_{10} 25, c = \log_{10} 21$ จงหาค่าของ $\log_{10} 21$
5. จงหาค่าของ $\log_6 10 + \log_6 18 - \log_6 5$
6. จงหาค่าของ $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3}}$
7. จงหาค่าของ $\log_2 30 + 2\log_2 \frac{5}{16} - 3\log_2 \frac{25}{32} + \log_2 \frac{125}{96}$
8. จงหาค่าของ $\log_4\{2\log_3[1 + \log_2(1 + \log_2 8)]\}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1 -2

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล
2. ครูสนทนาซักถามถึงลักษณะของกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล
3. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆละ 5 - 6 คน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปรายถึงอินเวอร์ส ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล
4. ครูให้นักเรียนดูสไลด์แสดงกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม
5. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาความรู้จากเอกสารการเรียนแล้วช่วยกันสรุปโดยมีครูร่วมอภิปรายสรุป

ชั่วโมงที่ 3 - 5

1. ครูยกตัวอย่างโจทย์ลอการิทึม บนกระดาน
2. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆละ 5-6 คน ให้มาแข่งกันทำโจทย์บนกระดาน โดยให้แต่ละกลุ่มส่งสมาชิกแต่ละคนผลัดกันออกมาทำโจทย์คนละ 1 ข้อ โดยครูให้คะแนน ความถูกต้องให้ข้อละ 2 คะแนน ความรวดเร็วให้ข้อละ 1 คะแนน (ทำได้ภายในเวลาข้อละ 2 นาที) โดยแต่ละกลุ่มต้องไม่ใช้คนซ้ำกัน

5. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการเรียน
2. สไลด์ประกอบการเรียนแสดงกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

6. การวัดผลประเมินผล ดังนี้

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงาน 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 80 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 50 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %

7. บันทึกหลังการสอน

7.1) ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องพัฒนา

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

7.2) แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

7.3) ผลที่เกิดจากผู้เรียน

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

8. กิจกรรมเสนอแนะ

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง **ลอการิทึมสามัญ แอนติลอการิทึมและลอการิทึมธรรมชาติ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 6 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หาค่าลอการิทึมสามัญ แอนติลอการิทึม และลอการิทึมธรรมชาติได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาค่าลอกการิทึมสามัญได้
2. หาค่าแมนทิสซา และ แคเรกเตอริสติกของ logN เมื่อกำหนดค่าจำนวนจริงบวก N ใดๆ ให้ได้
3. หาค่าประมาณของจำนวนอตรรกยะโดยใช้การดำเนินการทางคณิศาสตร์และค่าลอการิทึมจากตารางได้

ด้านทักษะ/ กระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ

1. ในการให้เหตุผล
2. ในการสื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
3. เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นได้

ด้านคุณลักษณะ

1. เป็นคนช่างสังเกต
2. มีความรับผิดชอบ
3. มีความร่วมมือซึ่งกันและกัน

2. แนวความคิดหลัก

ลอการิทึมที่ใช้กันมากในการคำนวณคือ ลอการิทึมสามัญ(Common logarithms) ซึ่งหมายถึงลอการิทึมฐานสิบ นิยมเขียนโดยไม่มีเลขฐานกำกับ เป็น $\log \mathrm{N}$ แทน $\log_{10} \mathrm{N}$

3. เนื้อหาสาระ

ลอการิทึมสามัญ หรือลอการิทึมฐานสิบ และลอการิทึมธรรมชาติ

1. $\log_{10} M$ เรียกว่าลอการิทึมสามัญ เขียนแทนด้วย $\log M$
2. $\log_e M$ เรียกว่าลอการิทึมธรรมชาติ เขียนแทนด้วย $\ln M$
3. $\log(A \times 10^n) = n + \log A$ เมื่อ $1 \le A < 10$

   เรียก n ว่าแคแรกเตอร์ริสติก ของ $\log(A \times 10^n)$

   เรียก $\log A$ ว่าแมนทิสสาของ $\log(A \times 10^n)$

ตัวอย่าง จงหาแมนทิสซา และแคแรกเทอร์ริสติกของ $\log 5710$

วิธีทำ เพราะว่า $\log 5710 = \log(5.71 \times 10^3)$

$= \log 5.71 + \log 10^3$

$= \log 5.71 + 3$

ดังนั้น แมนทิสซาของ $\log 5710$ คือ 0.7566 และ แคแรกเทอร์ริสติกคือ 3

ตัวอย่าง

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598

จงหาค่าของ

1. $\log 214$ 2. $\log 22800$ 3. $\log 0.209$ 4. $\log 0.000217$

วิธีทำ 1. $\log 214 = \log(2.14 \times 10^2)$

$= \log 2.14 + \log 10^2$

$= \log 2.14 + 2$

$= 0.3304 + 2$

$= 2.3304$

2. $\log 22800 = \log(2.28 \times 10^4)$

$= \log 2.28 + \log 10^4$

$= 0.3579 + 4$

$= 4.3579$

3. $\log 0.209 = \log(2.09 \times 10^{-1})$

$= \log 2.09 + \log 10^{-1}$

$= 0.3201 + (-1)$

$= -0.6799$

4. $\log 0.000217 = \log\left(2.17 \times 10^{-4}\right)$

$= \log 2.17 + \log 10^{-4}$

$= 0.3365 + (-4)$

$= -3.6635$

ตัวอย่าง จำนวน 225^{36} เป็นจำนวนที่มีตัวเลขกี่หลัก

วิธีทำ เพราะว่า $\log 225^{36} = 36 \log 225$

$= 36 \log\left(2.25 \times 10^2\right)$

$= 36(\log 2.25 + \log 10^2)$

$= 36(0.3522 + 2)$

$= 36 \times 2.3522$

$= 84.6792$

จะได้ค่าแคแรกเทอร์ริสติกของ $\log 225^{36}$ เป็น 84 นั่นคือ 225^{36} เป็นจำนวนที่มีตัวเลข 85 หลัก

แอนติลอการิทึม(antilogarithm) ของ log N

แอนติลอการิทึมของ log N คือการ หาค่า N เมื่อทราบค่า log N

เนื่องจาก $\log N = \log N_0 + n$ เมื่อ $0 \le \log N_0 < 1$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น เมื่อกำหนด $\log N$ ใดๆ มาให้ จึงเขียน $\log N$ ให้อยู่ในรูป $\log N = \lambda + n$ เมื่อ $0 \le \lambda < 1$ และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้วหา $\log N_0$ ที่เท่ากับ λ จากนั้นจึงอาศัยสมบัติของลอการิทึมหาค่า N ได้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\log 6.37 = 0.8041$ และ $\log N = 4.8041$ จงหาค่า N

วิธีทำ จาก $\log N = 4.8041$

$= 0.8041 + 4$

และ $\log 6.37 = 0.8041$

จะได้ $\log N = \log 6.37 + 4\log 10$

$= \log 6.37 + \log 10^4$

$= \log (6.37 \times 10^4)$

ดังนั้น $N = 6.37 \times 10{,}000$

$= 63{,}700$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\log 5.37 = 0.7300$ และ $\log N = -9.2700$ จงหาค่า N

วิธีทำ จาก $\log N = -9.2700$

$= -9 - 0.2700$

$= -9 - 0.2700 + 1 - 1$

$= -9 - 1 + 0.7300$

$= -10 + 0.7300$

$= \log 10^{-10} + \log 5.37$

$= \log(5.37 \times 10^{-10})$

ดังนั้น $N = 5.37 \times 0.0000000001$

$= 0.000000000537$

แบบฝึกทักษะที่ 1.6

1. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าประมาณถึงทศนิยมตำแหน่งที่สี่ของ $\sqrt[10]{8}$
2. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าประมาณของ $\sqrt[6]{6.9344}$
3. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าของ antilog 4.5237
4. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าของ antilog(-2.4584)
5. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าประมาณถึงทศนิยมตำแหน่งที่สี่ ของ $\dfrac{\left(275\times\frac{1}{63}\right)^5}{\sqrt[4]{35\times 2.983}}$
6. จากค่าในตาราง จงหาค่าของ x จากสมการ $12^{2-5x}\cdot 8^{x+3}=16$
7. จากค่าในตาราง จงหาค่าของ x จากสมการ $5^{x}=2^{-y}$ และ $5^{2+y}=2^{2-x}$

ตารางค่าลอการิทึม

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	7237	7250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
5.5	7408	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7757	7774
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8242	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8561	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8765	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9476	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

4. กระบวนการจัดการเรียนการสอน

ชั่วโมงที่ 1

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เรื่องลอการิทึมฐาน a จากเอกสารประกอบการเรียน
2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มๆ ละ 5 คน ให้นักเรียนแข่งขันกันเปิดหาค่าลอการิทึมจากตาราง
3. ให้นักเรียนศึกษาทบทวนเรื่องการเขียนจำนวนในรูป $A \times 10^n$ เมื่อ $1 \le A < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

ชั่วโมงที่ 2

1. นักเรียนศึกษาความรู้จากเอกสารประกอบการเรียน เรื่องค่าแมนทิสซา และแคแรกเทอร์ริสติก
2. ครูบรรยาย และยกตัวอย่างการหาค่าแมนทิสซา และแคแรกเทอร์ริสติก
3. ครูยกตัวอย่างการใช้ค่าแคแรกเทอร์ริสติก และแมนทิสซาในการหาค่าประมาณของจำนวนจริง

ชั่วโมงที่ 3

แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ร่วมกันศึกษาการแก้ปัญหาโจทย์จากเอกสารประกอบการเรียน และร่วมกันทำโจทย์ที่ครูมอบให้แล้วออกมาเฉลยหน้าห้องเพื่อให้นักเรียนคนอื่นๆ ในห้องได้อภิปรายซักถาม

ชั่วโมงที่ 4-6

ครูยกตัวอย่างโจทย์อย่างยาก และให้นักเรียนร่วมกันแก้ปัญหาโจทย์อย่างยาก โดยมีครูคอยแนะนำและช่วยเหลือ

5. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการเรียน
2. ใบตารางลอการิทึม
3. เอกสารฝึกทักษะโจทย์อย่างยาก

6. การวัดและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงาน 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 80 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 50 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %

7. บันทึกหลังการสอน

7.1) ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องพัฒนา

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

7.2) แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

7.3) ผลที่เกิดจากผู้เรียน

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

8. กิจกรรมเสนอแนะ

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

วิชา **คณิตศาสตร์** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เรื่อง การแก้สมการและอสมการเอกซ์โปเนนเชียล และลอการิทึม เวลา 6 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แก้ปัญหาสมการและอสมการเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึมได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. แก้สมการที่อยู่ในรูปเอกซ์โปเนนเชียลได้
2. แก้สมการที่อยู่ในรูปลอการิทึมได้
3. แก้อสมการที่อยู่ในรูปเอกซ์โปเนนเชียลได้
4. แก้อสมการที่อยู่ในรูปลอการิทึมได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนสามารถ

1. ในการให้เหตุผล
2. ในการสื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
3. เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นได้

ด้านคุณลักษณะ

1. เป็นคนช่างสังเกต
2. มีความรับผิดชอบ
3. มีความร่วมมือซึ่งกันและกัน

2. แนวความคิดหลัก

สมการและอสมการเอกซ์โปเนนเชียลเป็นสมการและอสมการที่มีเลขชี้กำลังเป็นตัวแปร

สมการและอสมการลอการิทึมเป็นสมการและอสมการที่มีลอการิทึมของตัวแปรรวมอยู่ด้วย

3. เนื้อหาสาระ

การแก้สมการและอสมการเอกซ์โปเนนเชียล

หลักการ การแก้สมการและอสมการเอกซ์โปเนนเชียล

1. ถ้า $a^m = a^n$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว $m = n$
2. ถ้า $a^n = b^n$ เมื่อ $a \neq b$ แล้ว $n = 0$

3. ถ้า $a > 1$ และ $a^m > a^n$ แล้ว $m > n$
4. ถ้า $0 < a < 1$ และ $a^m > a^n$ แล้ว $m < n$
5. ต้องพยายามทำฐานให้เท่ากัน หรือ เลขชี้กำลังเหมือนกันให้ได้
6. ในกรณีที่ ฐานไม่เหมือนกัน แต่เลขชี้กำลังเท่ากัน ให้ใช้สมบัติดังนี้

   ถ้า $a^x > b^x$ โดยที่ $a > b > 0$ และ $a, b \neq 1$ จะได้ว่า

   1) $a^x > b^x \leftrightarrow x > 0$
   2) $a^x < b^x \leftrightarrow x < 0$
   3) $a^x = b^x \leftrightarrow x = 0$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ x จากสมการ $2^{x^2-3x-4} = 1$

วิธีทำ จากสมการ $2^{x^2-3x-4} = 1$

เพราะว่า $2^0 = 1$

ดังนั้น $2^{x^2-3x-4} = 2^0$

จะได้ $x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = -1$ หรือ 4

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $8^{2x-12} = 9^{3x-18}$

วิธีทำ จากสมการ $8^{2x-12} = 9^{3x-18}$

$(2^3)^{2x-12} = (3^2)^{3x-18}$

$2^{6x-36} = 3^{6x-36}$

จะได้ $6x - 36 = 0$

ดังนั้น $x = 6$

ตัวอย่าง จงหาช่วงคำตอบของอสมการ $2^{x-3} > 3^{x-3}$

วิธีทำ จาก $2^{x-3} > 3^{x-3}$

เพราะว่า $2 < 3$ ดังนั้น $x - 3 < 0$

นั่นคือ $x < 3$

ดังนั้นช่วงคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, 3)$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $13^{x^2-5x+1} = \frac{1}{169}$

วิธีทำ จาก $13^{x^2-5x+1} = \frac{1}{169}$

จะได้ $13^{x^2-5x+1} = (13)^{-2}$

ดังนั้น $x^2 - 5x + 1 = -2$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_x(3x^{\log_5 x} + 4) = 2\log_5 x$

วิธีทำ จาก $\log_x(3x^{\log_5 x} + 4) = 2\log_5 x$

ให้ $m = \log_5 x$ จะได้ว่า $\log_x(3x^m + 4) = 2m$

โดยนิยามจะได้ $3x^m + 4 = x^{2m}$

หรือ $x^{2m} - 3x^m - 4 = 0$

$$(x^m - 4)(x^m + 1) = 0$$

$$x^m = 4, -1$$

เพราะว่า $x > 0$ ดังนั้น $x^m \neq -1$

แทนค่า $m = \log_5 x$ จะได้ $x^{\log_5 x} = 4$

ใส่ ลอการิทึมฐาน 5 ทั้งสองข้างของสมการ

$$\log_5 x^{\log_5 x} = \log 4$$

$$\log_5 x \log_5 x = \log_5 4$$

$$(\log_5 x)^2 = \log_5 4$$

$$\log_5 x = \pm\sqrt{\log_5 4}$$

$$x = 5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$$

เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{5^{\sqrt{\log_5 4}}, 5^{-\sqrt{\log_5 4}}\right\}$

แบบฝึกทักษะที่ 1.7

1. จากค่าในตาราง จงหาค่าของ x จากสมการ $12^{2-5x} \cdot 8^{x+3} = 16$
2. จากค่าในตาราง จงหาค่าของ x จากสมการ $5^{x} = 2^{-y}$ และ $5^{2+y} = 2^{2-x}$
3. จงหาช่วงคำตอบของอสมการต่อไปนี้
   1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x+8} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+12}$ ………………………………………………………………….....
   2) $3^{2x-5} < 3^{5x-6}$ …………………………………………………………………………
   3) $5^{3x-2} > 2^{3x-2}$ …………………………………………………………………………..
   4) $5^{3x+2} < 7^{3x+2}$ ………………………………………………………………………...
   5) $8^{x} + 18^{x} - 2 \cdot 27^{x} > 0$ ……………………………………………………………………..
   6) $9^{x} - 10 \cdot 3^{x} + 9 \le 0$ …………………………………………………………………………

การแก้สมการ logarithm

หลักการ
1. $\log_a M = \log_a N$ ก็ต่อเมื่อ M = N
2. ต้องพยายามทำฐานของ log ให้เหมือนกันให้ได้
3. $\log_a M = \log_b M$ และ $a \neq b$ แล้ว จะได้ว่า M = 1
4. แก้สมการได้แล้วต้องตรวจคำตอบเสมอ

ตัวอย่าง จงหาค่า x จากสมการ $\log_4 (\log_3 (\log_2 (x^2 - 2x))) = 0$

วิธีทำ จาก

$$\log_4 (\log_3 (\log_2 (x^2 - 2x))) = 0$$
$$\log_3 (\log_2 (x^2 - 2x) = 4^0$$
$$\log_2 (x^2 - 2x) = 3^1$$
$$x^2 - 2x = 2^3$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x + 2)(x - 4) = 0$$
$$x = -2, 4$$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^{\log x} > 10$

วิธีทำ จาก $x^{\log x} > 10$

ใส่ลอการิทึมฐานสิบทั้งสองข้างของสมการ

$$\log x^{\log x} > \log 10$$
$$\log x \log x > \log 10$$
$$\log^2 x > 1$$
$$(\log x)^2 - 1 > 0$$
$$(\log x - 1)(\log x + 1) > 1$$

จะได้ $\log x > 1$ หรือ $\log x < -1$

นั่นคือ $x > 10$ หรือ $0 < x < \frac{1}{10}$

แบบฝึกทักษะที่ 1.8

จงแก้สมการ

1. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=1$ ……………………
2. $\log_4 \log_3 \log_2 \left(x^2-2x\right)=0$ ……………………
3. $\log_4 \log_3 \log_2 \left(x^2-2x\right)=0$ ……………………
4. $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}}=10$ ……………………
5. $5^{\log_3 x}+3^{\log_5 x}=10$ ……………………
6. $\log_{100} x=1-\log\sqrt{10^{\log x}+15}$ ……………………
7. $x^{\log x}=100x$ ……………………
8. $\log\left(3x^2 12\right)-\log\left(x^2-4\right)=\log x^2$ ……………………
9. $\sqrt{\log x}+\log\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ ……………………
10. $\log_{3\sqrt{x}} x+\log_{3x}\sqrt{x}=0$ ……………………
11. $\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\frac{1}{2}\log 16-\sqrt{x+0.25}\,\log 4$ ……………………
12. $5^{\log x}=3^{\log x}$ ……………………
13. $\log_3 x-4\log_x 3+3=0$ ……………………
14. $3\log\sqrt[3]{x}=\log(3x-4)$ ……………………
15. จงหาค่าของ $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} A}+\dfrac{2}{\log_{\frac{2}{3}} A}+\dfrac{3}{\log_{\frac{3}{4}} A}+\dfrac{4}{\log_2 A}$
16. ถ้า $\dfrac{\log x^2}{a^2-b^2}=\dfrac{\log y^2}{b^2-c^2}=\dfrac{\log z^2}{c^2-a^2}$ แล้ว จงหาค่าของ $\sqrt{xyz}$
17. จงแก้สมการ $\log_2\left[2\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right)\right]=1$
18. จงแก้สมการ $\log\left(2^x+x-4\right)=x(1-\log 5)$
19. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_x\left(x^2+1\right)>2$
20. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_4 \log_3 \log_2 7^{\log_7\left(x^2+2x\right)}=0$
21. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_x \dfrac{x+3}{x-1}>1$
22. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_{0.25}(x-1)+\log_{0.25}(x+1)>\log_{0.25} 3$
23. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2+\log_2\sqrt{x+1}>1-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4-x^2}$
24. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_{\frac{1}{2}}(x+8)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>\log_{\frac{1}{2}} 3x$
25. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $25>5^{\log_5(4-3x)}$
26. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_2(4-3x)\le -3$
27. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_4(3-4x)\ge -1$

แบบฝึกทักษะ โจทย์อย่างยาก

1. กำหนด $A \times 2^{3\log_2 6} = 648$ จงหาค่าของ $\dfrac{2^{3\log_2 6}}{A}$
2. จงเขียนเซตคำตอบของสมการ $\log_{0.5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$
3. กำหนด $A = \left\{ x \middle| \log_4 \log_2 \log_3 (2x-1) = \dfrac{1}{2} \right\}$ และ $B = \{ y | (1-\log 2)\log_5 x = \log 3 - \log(x-2) \}$

   จงหาค่าของ $x + y$
4. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(2.25)^{\log_2(x^2-3x-10)} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4)}$
5. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(8-x)^{\log_2^2(8-x)} \le 2^{3x-4}$
6. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_{100} x = 1 - \log\sqrt{10^{\log x} + 15}$
7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log 5 + \log(4^{x-2} + 1) - \log 2^{x-2} = 1$
8. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x-5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2y-5}} = 7\sqrt{2}$
9. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right) + (\log_3 x)^2 = 1$
10. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(0.4)^{(\log x)^2 + 1} = (6.25)^{2 - \log x^3}$

โจทย์ ENT' ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. จงหาค่า x จาก $\left(4\sqrt{7}\right)^{10x-8} = (112)^{7x+8}$
2. กำหนดให้ $7^{-(x-3y)} = 49$ และ $5^{x+3} + 5^{3y+1} = 50$ จงหาค่าของ $\dfrac{x}{4}$
3. ค่าของ x ที่เป็นคำตอบของสมการ $2(81^x) = 36^x + 3(16^x)$ สอดคล้องกับข้อใด

   1. $(0,1)$ 2. $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 3. $(-2,0)$ 4. $\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$
4. $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$ จงหาค่า x
5. กำหนดระบบสมการ $2^{2x} \cdot 3^{-y} = 24$ และ $x - 2y = 2$ แล้ว ค่าของ x และ y ตามลำดับคือข้อใด

   1. $\dfrac{6\log 2}{4\log 2 - \log 3}, \dfrac{\log 3 - \log 2}{4\log 2 - \log 3}$
   2. $\dfrac{2\log 3 - 6\log 2}{\log 3 - 4\log 2}, \dfrac{\log 2}{\log 3 - 4\log 2}$
   3. $\dfrac{10\log 2 - 2\log 3}{4\log 2 - \log 3}, \dfrac{\log 2}{4\log 2 - \log 3}$
   4. $\dfrac{4\log 3 - 10\log 2}{\log 3 - 4\log 2}, \dfrac{\log 3 - \log 2}{\log 3 - 4\log 2}$
6. จงแก้อสมการ $9^x - 10.3^x + 9 \le 0$

7. ถ้า A และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ 1 และ 2 ตามลำดับ

1. $\log\left(\dfrac{1}{2^x + x - 1}\right) = x\left(\log 5 - 1\right)$

2. $\log_2\left(9^{x-1} + 7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-1} + 1\right)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $n(A \cap B) = 2$ 2. $n(A - B) = 1$ 3. $n(B - A) = 0$ 4. $n(A \cup B) = 2$

8. ถ้า $\log_b a$ เป็นคำตอบของสมการ $\log_6 2^{x+3} - \log_6\left(3^x - 2\right) = x$ แล้วจงหารากที่สองของ ab

1. $2\sqrt{2}$ 2. $2\sqrt{3}$ 3. $3\sqrt{2}$ 4. 4

9. จาก $\log_x\left(4x^{\log_5 x} + 5\right) = 2\log_5 x$ จงหาค่าของ x

10. จงหาผลคูณของคำตอบสมการ $3\log_2 x = \log_x 8 + \log_x\left(3 - x^{\log_2 x}\right)$

1. $\dfrac{1}{100}$ 2. $\dfrac{1}{10}$ 3. 1 4. 10

11. กำหนดสมการ $\log_{\frac{x}{3}} 3 = \left(\log_3 x\right)^2 + \log_3 3x$ จงหาค่าของ x

12. จงหาค่าของ $\dfrac{x}{y}$ จากสมการ $\log\left(5 \cdot 7^x + 50 - 5 \cdot 7^{3y}\right) = 2 - \log 2$

13. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$\log(x - 3y) - \log(3x - 7y) = \log y - \log(x - y)$ จงหาค่าของ $\dfrac{x}{y}$

13. กำหนดให้ $s = \left\{x \in R \,/\, 2^x \log_2 x + 8 > 2^{x+1} + \log_2 x^4\right\}$ เซต s มีจำนวนสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มซึ่งน้อยกว่า 20 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 14 2. 15 3. 16 4. 17

14. เซตคำตอบของอสมการ $x^{\log x} < 100x$ เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,90)$ 2. $\left(\frac{1}{2},120\right)$ 3. $\left(\frac{1}{20},110\right)$ 4. $[1,130)$

15. ผลบวกข้อจำนวนเต็มทั้งหมด ซึ่งสอดคล้องอสมการ $x^{1+\log_{0.5} x} > \dfrac{x}{16}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

16. ถ้า a และ b เป็นคำตอบของสมการ $3^{3x} = \dfrac{10}{3} - 3^{-3x}$ แล้ว $\log\left(|a| + |b|\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\log 2 + \log 3$ 2. $\log 2 - \log 3$

3. $(\log 2)(\log 3)$ 4. $\dfrac{\log 2}{\log 3}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1 – 2

1. ครูยกตัวอย่างบนกระดาน อภิปรายซักถาม

2. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆละ 4 คน มอบหมายโจทย์ให้กลุ่มละ 5 – 6 ข้อ ให้นักเรียนในกลุ่มช่วยกันแก้ปัญหา

3. ให้แต่ละกลุ่มผลัดกันส่งตัวแทนออกมาเฉลยโจทย์ทีละกลุ่ม โดยเฉลยครั้งละ 1 ข้อต่อกลุ่ม

ชั่วโมงที่ 3 - 4

1. จัดกลุ่มนักเรียนใหม่หลังจากทุกกลุ่มได้ออกมานำเสนอโจทย์ครบทุกข้อโดยนักเรียนที่เคยอยู่กลุ่มเดียวกันจะต้องแยกกลุ่มกัน

2. ให้นักเรียนในกลุ่มใหม่ตั้งโจทย์กลุ่มละ 3 ข้อ พร้อมทั้งเฉลยให้ถูกต้อง โดยครูตรวจดูความถูกต้องของโจทย์ก่อนแล้วนำไปแลกโจทย์กับกลุ่มอื่น โดยนักเรียนคนใดเคยอยู่กลุ่มใดก็ให้กลับไปแลกกับกลุ่มนั้น

3. ทุกคนทำโจทย์ที่ตนเองได้รับ โดยครูกำหนดให้โจทย์แต่ละข้อมีค่า 1 คะแนน ถ้าใครแก้ปัญหาโจทย์ได้ถูกต้องจะได้ 1 คะแนน แต่หากทำไม่ได้คะแนนจะกลายเป็นของผู้ตั้งโจทย์ แต่ถ้าผู้ตั้งโจทย์เฉลยผิดจะต้องถูกหัก 1 คะแนน

ชั่วโมงที่ 5 - 6

1. ครูให้โจทย์อย่างยาก ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายและคิดแก้ปัญหา โดยมีครูคอยช่วยเหลือ

2. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปหลักการ นิยาม และกฎต่างๆ ที่ได้เรียนมาแล้วในเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และ ลอการิทึม

5. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการเรียน
2. แบบฝึกประสบการณ์
3. ตารางลอการิทึม

6. การวัดผลประเมินผล ดังนี้

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบแบบฝึกทักษะ 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกอย่างน้อย 80 % 2. ทำถูกอย่างน้อย 50 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %
3. ด้านคุณลักษณะ	สังเกต	แบบสังเกต	ผ่านระดับดี อย่างน้อย 80 %

7. บันทึกหลังการสอน

7.1) ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องพัฒนา

……..

……..

……..

…….

…...

7.2) แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

……..

…….

…........………..…….. ……..………………………………………………………………………………….. ..

……………..………………………………………………………………………………..………..…..

.....………..…….. ……..………………………………………………………………………………..

7.3) ผลที่เกิดจากผู้เรียน

…….…

……..……

………...……

………..……………………………………………………………………………………..……………......

………..…….. ……..………………………………………………………………………………..

8. กิจกรรมเสนอแนะ

ในบทนี้มีแบบฝึกหัดเป็นจำนวนมาก ครูอาจจัดกระบวนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้การจัดกลุ่มแบบจิ๊กซอว์ นักเรียนก็จะมีทักษะการเรียนรู้มากขึ้น

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

1. เลขยกกำลัง

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม a^n แทน $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ตัว}}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง (อ่านว่า "กำลังที่เอ็นของเอ" หรือ "เอ ยกกำลัง เอ็น") มี a เป็นฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง

เช่น เราเรียก 3^4 ว่า เลขยกกำลัง
เรียก 3 ว่า ฐานของเลขยกกำลัง
เรียก 4 ว่า เลขชี้กำลัง

ตัวอย่างที่ 1 1. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{32}$

3. $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-3)(-3)(-3)}{5 \times 5 \times 5} = -\frac{27}{125}$

ทฤษฎีบท 1 ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

1.1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

1.2 $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

1.3 $(a^m)^n = a^{mn}$

1.4 เมื่อ $a \neq 0$; $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } m = n \\ a^{m-n} & \text{เมื่อ } m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{เมื่อ } n > m \end{cases}$

1.5 เมื่อ $b \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

ตัวอย่างที่ 2 1. $7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{2+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

3. $6^5 = (2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$

4. $8^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

5. $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$

6. $\frac{12^4}{18^2} = \frac{(4\times 3)^4}{(2\times 9)^2} = \frac{(2^2)^4 \times 3^4}{2^2 \times (3^2)^2} = \frac{2^{2\times 4}\times 3^4}{2^2\times 3^4} = \frac{2^8\times 3^4}{2^2\times 3^4}$

$= 2^{8-2}\times 3^{4-4} = 2^6 \times 3^0$

จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 1.4 พิจารณา $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0 = 1$

จากประโยคดังกล่าวสามารถนิยาม a^0 และ a^{-n} ดังนี้

บทนิยาม $a^0 = 1$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0

บทนิยาม $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จากบทนิยามข้างต้น จะได้ทฤษฎีบทเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มดังนี้

ทฤษฎีบท 2 ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เป็น 0 และ m , n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

2.1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2.2 $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

2.3 $(a^m)^n = a^{mn}$

2.4 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2.5 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

กรณีที่ 1 ถ้า $m > 0$ และ $n > 0$ จะได้ $a^m a^n = a^{m+n}$ …………………. (กฎข้อที่ 1)

กรณีที่ 2 ถ้า $m < 0$ และ $n < 0$

ให้ m = - p และ n = - q เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ $a^m a^n = a^{-p} a^{-q}$

$= \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q}$ ....(บทนิยาม)

$= \frac{1}{a^{p+q}}$ ....(กฎข้อที่ 1)

$= a^{-(p+q)}$ ....(บทนิยาม)

$= a^{-p-q} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n}$

กรณีที่ 3 ถ้า m และ n มีจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนบวก และ อีกจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนลบ

สมมติให้ $m > 0$ และ $n < 0$

ให้ $m = p$ และ $n = -q$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ $a^m a^n = a^p a^{-q}$

$= a^p \times \frac{1}{a^q}$ ....(บทนิยาม)

$= \frac{a^p}{a^q}$

$= a^{p-q}$

$= a^{p+(-q)} = a^{m+n}$

สำหรับกรณีที่ $m < 0$ และ $n > 0$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

กรณีที่ 4 ถ้า m และ n มีอยู่หนึ่งจำนวนที่มีค่าเป็น 0

สมมติให้ $m = 0$ และ $n > 0$

จะได้ $a^m a^n = a^0 a^n$

$= 1 \cdot a^n$

$= a^n$

$= a^{0+n}$

$= a^{m+n}$

สำหรับกรณีที่เหลือ เราใช้วิธีพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

กรณีที่ 5 ถ้า $m = 0$ และ $n = 0$

จะได้ $a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^0$

$= 1 \cdot 1$

$= 1$

$= a^0$

$= a^{0+0}$

$= a^{m+n}$

สรุป *จากทั้ง 5 กรณี เราสรุปได้ว่า* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ *เป็นจริงเมื่อ* m *และ* n *เป็นจำนวนเต็ม*

การพิสูจน์ข้อ 2 – 5 ให้นักเรียนทำเป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกทักษะที่ 1.1

1. จงทำให้เป็นรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

1.1 $9^2 \cdot 3^{-5} =$ ……………………………………………………………………………………...

1.2 $(21)^2\left(\frac{7}{3}\right)^{-3} =$ ………………………………………………………………………………

1.3 $\left(\frac{24}{25}\right)^3\left(\frac{16}{15}\right)^{-2} =$ …………………………………………………………………………......

2. ถ้า $x > 0, x \neq 1, m$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด

……… 2.1 $\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x^n} = x^{m-n}$

……… 2.2 $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$

……... 2.3 $\frac{x^m}{x^{-n}} = x^{m-n}$

……... 2.4 $x^m + x^n = x^{m+n}$

……... 2.5 $x^m > 1$ ก็ต่อเมื่อ x > 1

……… 2.6 ถ้า $\frac{x^m}{x^n} = x^0$ แล้ว x^n เป็นอินเวอร์สการคูณของ x^m

……... 2.7 ถ้า $x^m - x^n = 0$ จะได้ m เป็นอินเวอร์สการคูณของ n

…….. 2.8 ถ้า $\frac{x^m}{x^n} = x^p$ จะได้ m – n – p = 0

…….. 2.9 ถ้า $m = x^n$ แล้ว $mx^{-n} = 0$

…….. 2.10 $(x^m + x^n)^{-1} = \frac{1}{x^m} + \frac{1}{x^n}$

3. จงหาค่าของ

1) $\frac{2^{-3}3^{-5}}{3^{-5}2^0} =$ …………………………………………..……………………………….………....

2) $\left(a^{-5}b^7\right)\left(a^{-2}b^{-7}c^0\right) =$ ……………………………………………………………...…………...

3) $\left(2ab^{-1}\right)\left(ab^2\right)^{-2} =$ ………………………………………………………………...………….

4) $\left(\frac{1}{2}x^{-3}y^2\right)^{-4} =$ ……………………………………...…………………..…………….

5) $\left(\frac{1}{3a^2b^{-3}}\right)^{-2} =$ ……………………………………………………………...……………….

6) $\left(x^2y^{-3}z^{-5}\right)\left(x^{-2}y^3z^8\right) =$ ………………………………………………………..……………

7) $\left(\frac{x^{-5}y^4}{x^2y^{-2}}\right)^2\left(\frac{x^4y^{-5}}{x^3y^{-7}}\right)^{-3} =$ …………………………..……………………….....……….

8) $\left(\frac{a^{-1}b^{-2}}{c^3}\right)^2\left(\frac{a^{-4}b^2}{c^{-3}}\right)^{-2} =$ ……………………………………………………..................……

9) $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-1}-b^{-1}}=$..

10) $\dfrac{9-x^{4}}{3x^{-1}-x}=$..

....

....

11) $\dfrac{a^{2}+b^{2}}{(a+b)^{2}}+\dfrac{\frac{2}{ab}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{2}}=$..

....

....

12) $\dfrac{a^{2n-3}}{a^{3n+1}}\cdot\dfrac{a^{n+5}}{a^{n-3}}=$..

....

13) $\dfrac{\left(3x^{n+1}\right)^{2}}{x^{2(n+1)}}\cdot\dfrac{x^{-n}}{\left(x^{-n}\right)^{3}}=$..

....

14) $\dfrac{3\cdot 2^{n}-4\cdot 2^{n-2}}{2^{n}-2^{n-1}}=$..

....

....

15) $\dfrac{2\cdot 2^{2n+3}-24\cdot 2^{2(n-1)}}{10\left(2^{n}\right)^{2}}=$..

....

....

16) $\dfrac{2^{n}\cdot\left(2^{n-1}\right)^{n}}{2^{n+1}\cdot 2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{4^{-n}}$ ....

....

17) $\dfrac{6\cdot 2^{n}-4\cdot 2^{n-2}}{2^{n+1}+2^{n-1}}=$..

....

....

....

2. รากที่ n ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

บทนิยาม ถ้า x , y เป็นจำนวนจริง y เป็นรากที่สองของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2 = x$

เนื่องจาก y2 = $(-y)^2$ ดังนั้น ถ้ามีจำนวนจริง y ที่ยกกำลังสองแล้วได้ x ก็จะมีจำนวนจริง (-y) ที่ยกกำลังสองแล้ว x ด้วย เพราะฉะนั้น ถ้า $x \geq 0$ แล้ว x จะมีรากที่สองที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เรียกรากนี้ว่า ***รากที่สองที่ไม่เป็นลบ*** ของ x จะแทนด้วยสัญลักษณ์

ถ้า $x > 0$ จะมีรากที่สองของ x สองรากคือ $\sqrt{x}$ และ $-\sqrt{x}$ จะได้ x เป็นจำนวนบวก และ $-\sqrt{x}$ เป็นจำนวนลบ

ถ้า $x = 0$ จะมีจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวคือ 0 เป็นรากที่สองของ x นั่นคือ $\sqrt{0} = 0$

ถ้า $x < 0$ ไม่มีรากที่สองของ x ที่เป็นจำนวนจริง

สมบัติของรากที่สองที่ไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 3 ถ้า $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$
ทฤษฎีบท 4 ถ้า $x \geq 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

ข้อสังเกต จำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ จะมีรากที่ n เสมอ และจำนวนลบจะมีรากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

บทนิยาม ให้ x เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n จำนวนจริง y จะเป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ 1. y เป็นรากที่ n ของ x 2. $xy \geq 0$

หมายเหตุ

1. เครื่องหมาย $\sqrt[n]{}$ เรียกว่าเครื่องหมายกรณฑ์ เรียก n ว่า ดัชนีของกรณฑ์
2. เมื่อ x เป็นจำนวนจริง จำนวนจริงที่เขียนในรูป $\sqrt[n]{x}$ เรียกว่ากรณฑ์
3. $\sqrt[n]{x}$ อ่านว่ากรณฑ์ที่ n ของ x หรือ ค่าหลักของรากที่ n ของ x
4. ถ้า $n = 2$ จะเขียน $\sqrt{}$ แทน $\sqrt[2]{}$
5. $\sqrt[n]{1} = 1$
6. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ นั่นคือ กำลังที่ n ของค่าหลักของรากที่ n ของ x คือ x

สมบัติของรากที่ n

ทฤษฎีบท 5 ถ้า x และ y มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$

ทฤษฎีบท 6 ถ้า x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

ทฤษฎีบท 7 ถ้า x มีรากที่ r และ x มีรากที่ n แล้ว x มีรากที่ rn

ตัวอย่าง จงทำให้เป็นผลสำเร็จ $\left(3\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\left(3\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right) &= \left(3\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2}\right)+\left(7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}\right)-\left(7\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}\right)\\ &= 15-9\sqrt{10}+7\sqrt{10}-42\\ &= -27-2\sqrt{10}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงทำเป็นผลสำเร็จ $\sqrt{80}-\sqrt{45}+\sqrt{125}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\sqrt{80}-\sqrt{45}+\sqrt{125} &= 4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}\\ &= (4-3+5)\sqrt{5}\\ &= 6\sqrt{5}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงเขียน $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ ให้อยู่ในรูปที่ส่วนไม่ติดกรณฑ์

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} &= \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{15}}{15}\\ &= \frac{\sqrt{75}-\sqrt{45}}{15}\\ &= \frac{5\sqrt{3}}{15}-\frac{3\sqrt{5}}{15}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงเขียน $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ให้อยู่ในรูปที่ส่วนไม่ติดกรณฑ์

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} &= \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\\ &= \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}\\ &= 1-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\sqrt{x+2} = x-4$

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt{x+2} = x-4$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $x+2 = (x-4)^2$

$$x+2 = x^2-8x+16$$

$$x^2-9x+14 = 0$$

$$(x-2)(x-7) = 0$$

$x = 2, 7$ ตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่า x ในสมการโจทย์ แล้วได้ $x = 7$

ตัวอย่าง จงเขียนเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x+2} = \sqrt{7-x}-3$

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt{x+2} = \sqrt{7-x}-3$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x} = -3$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

จะได้ $(\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x})^2 = (-3)^2$

$$(x+2)-2\sqrt{x+2}\sqrt{7-x}+(7-x) = 9$$

$$9-2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 9$$

$$-2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 0$$

$$\sqrt{(x+2)(7-x)} = 0$$

$$(x+2)(7-x) = 0$$

$$x = -2, 7$$

เพราะว่า ค่า $x = 7$ ทำให้สมการเป็นเท็จ ดังนั้นเซตคำตอบของสมการคือ { -2 }

6 7

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $3\sqrt{x}+\sqrt{9x+13}-13 = 0$

36

วิธีทำ จากสมการ $3\sqrt{x}+\sqrt{9x+13}-13 = 0$

$$\sqrt{9x+13} = 13-3\sqrt{x}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง ได้ $9x+13 = 169-78\sqrt{x}+9x$

$$78\sqrt{x} = 156$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

เซตคำตอบของสมการคือ { 4 }

แบบฝึกทักษะที่ 1.2

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

   1) $\sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{4a}$ ....

   2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12}$ ....

   3) $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$ ....

   4) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{27}$ ....

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ส่วนไม่ติดกรณฑ์

   1) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ....

   2) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{15}}$ ....

   3) $\sqrt{\frac{5a}{2b}}$ ....

   4) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{5}}$ ....

3. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

   1) $(a+b)\sqrt{x} - (a-b)\sqrt{x}$ ....
   ....

   2) $3\sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{32}$ ....
   ....

   3) $\frac{a}{\sqrt{3}} - \sqrt{12}a + \frac{4a}{\sqrt{3}}$ ....
   ....

   4) $3\sqrt{5}\left(\sqrt{10} + 2\sqrt{5}\right)$ ....
   ....

   5) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ ....
   ....

   6) $\left(2 + \sqrt{3}\right)^2$ ....
   ....

   7) $\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(2\sqrt{5} - 1\right)$ ....
   ....

   8) $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)$ ....
   ....

4. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $7\sqrt{3x-5}=28\ 6+\sqrt[4]{x-2}=9$

....
....
....
....
....
....
....

2) $2\sqrt{x}-1=\sqrt{4x-11}$

....
....
....
....
....
....
....

3) $\sqrt{14+25x}=\sqrt{7+9x}+\sqrt{1+4x}$

....
....
....
....
....
....
....

4) $4x+1-2\sqrt{x^2-6x+2}=x^2-2x$

....
....
....
....
....
....
....

5) $3x-\sqrt{2x^2+6x+1}=1-x^2$

………
………
………
………
………
………
………

6) $2x^2-3\sqrt{2x^2-7x+7}=7x-3$

………
………
………
………
………
………
………

7) $3\sqrt[3]{5x-35}=5\sqrt[3]{2x-7}$

………
………
………
………
………
………
………

8) $(x+1)^2=5\left(\sqrt{x^2+2x+2}-1\right)$

………
………
………
………
………
………
………

3. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 และ a มีรากที่ n
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง p , q เป็นจำนวนเต็มที่ (p , q) = 1 , q > 0 และ $a^{\frac{1}{q}} \in R$
โดยเมื่อ p < 0 แล้ว a ต้องไม่เป็น 0 $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p}$

ทฤษฎีบท 8 ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ q และ p เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ a^p เป็นจำนวนจริง
จะได้ a^p มีรากที่ q

ตัวอย่าง จงหาผลสำเร็จของ $(27)^{\frac{2}{3}} + (16)^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{8^{-\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}}$

วิธีทำ
$$(27)^{\frac{2}{3}} + (16)^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{8^{-\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} + \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}} + \frac{2^{\frac{1}{5}}}{\left(2^2\right)^{-\frac{2}{5}}}$$
$$= 3^2 + 2^3 - \frac{2}{2^{-2}} + \frac{2^{\frac{1}{5}}}{2^{-\frac{4}{5}}}$$
$$= 9 + 8 - 2^3 + 2^{\frac{5}{5}}$$
$$= 9 + 8 - 8 + 2$$
$$= 11$$

เกมจับผิดคณิตศาสตร์

ให้ $-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}}$ …………….. (1)

$= \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ ………………(2)

$= 1^{\frac{1}{2}}$ ……… …….(3)

$= 1$

ผิดที่ใด

แบบฝึกทักษะที่ 1.3

1. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $4^{\frac{1}{2}}$ ....

2. $8^{\frac{2}{3}}$ ....

3. $(-27)^{\frac{2}{3}}$ ....

4. $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ ....

5. $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$ ....

6. $5^{\frac{3}{5}} \times 5^{\frac{2}{5}}$ ....

7. $\dfrac{4^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{5}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}}$ ....

....

....

....

8. $\dfrac{3^{-\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{7}{2}} \times 3^{-\frac{9}{2}}}$ ....

....

....

....

....

2. จงเขียน $\left(\dfrac{x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{5}{4}}y^{\frac{7}{2}}z^{\frac{9}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

....

....

....

....

4. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล , กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

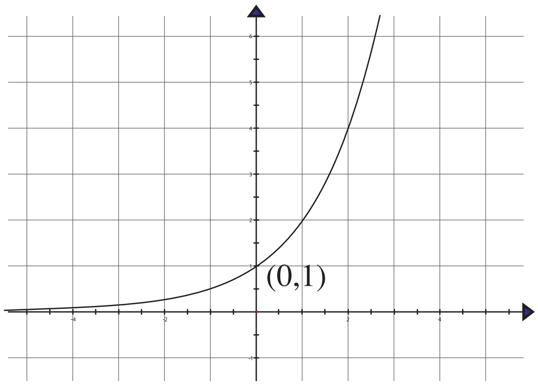
ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียน

บทนิยาม ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล คือ $f = \{(x,y) \in R \times R \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

ข้อสังเกต 1. กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ จะผ่านจุด $(0,1)$ เสมอ

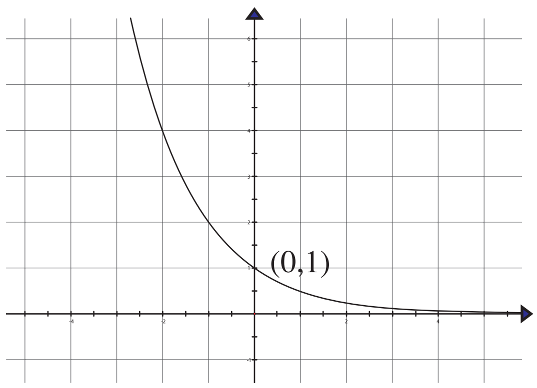
2. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

3. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก R ไปทั่วถึง R^+



กราฟของฟังก์ชัน

$y = a^x, a > 1$



กราฟของฟังก์ชัน

$y = a^x, 0 < a < 1$

ข้อสังเกต 1. กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x, a > 0$ และ $a \neq 1$ จะผ่าน จุด $(0,1)$ เสมอ เพราะ $a^0 = 1$
2. ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชัน

สมบัติบางประการที่ควรทราบ

1. ถ้า $a^m = a^n$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว $m = n$
2. ถ้า $a^n = b^n$ เมื่อ $a \neq b$ แล้ว $n = 0$

แบบฝึกทักษะที่ 1.4

1. จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลหรือไม่ ถ้าเป็นให้เขียนกราฟ และบอกด้วยว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

1) $y = 2^{x}$ ....

2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ ....

3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ ....

4) $y = (-2)^{2x}$ ....

5) $y = (0.45)^{-x}$ ....

6) $y = 3^{-x} + 1$ ....

7) $y = 2^{|-x|}$ ....

8) $y = \left|3^{x}\right| + 2$ ....

2. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $3^{x} = 3^{2x+1}$

....

....

....

2) $7^{x-3} = 1$

....

....

....

3) $3^{6-x} = \sqrt{27}$

....

....

....

4) $3^{x(x+4)} = \frac{1}{81}$

....

....

....

5) $5^{2x+1} = 25^{x} \cdot 5^{3x}$

……
……
……

6) $2^{x(x-1)} = 4$

……
……
……

7) $3^{x} = 9^{x+1} \cdot 27^{1-2x}$

……
……
……

3. ให้ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n < x < n+1$ จงหาค่า n จากสมการต่อไปนี้

1) $3^{x} = 16.2$

……
……
……

2) $4^{x} = 87.1$

……
……
……

3) $10^{x} = 0.016$

……
……
……

4) $2^{x} = 6$

……
……
……

5. กำหนด $8^{-k} = 6$ จงหาค่าของ 4^{3k}

……
……
……

โจทย์ระคนอย่างยาก

1. กำหนด $a^{x} = b, b^{y} = c, c^{z} = a$ จงหา $x^{2}y^{2}z^{2}$

………
………
………
………
………
………
………

2. กำหนด $6^{-x} = 3^{y} = 2^{z}$ จงหาค่าของ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

………
………
………
………
………
………
………
………

3. ถ้า $8^{x} = 9^{y} = 6^{z}$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}$

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

4. กำหนด $A = \left\{ x \,\middle|\, 3^{\left[2^{2x+1} - 9\left(2^{x+\frac{1}{2}}\right) + 32\right]} = 27^{\left(2^{x+\frac{1}{2}}\right)} \right\}$ จงหาผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ A

………
………
………
………
………
………
………
………

5. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $a < b$ และ $3\left(a^2 + b^2\right) = 10ab$ แล้วจงหาค่าของ $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3$

………
………
………
………
………
………
………
………
………

6. ถ้า $7^{x+y} = 21$ และ $3^{2x+y} = 1$ แล้ว $7^{x+1} + 7^{y-2}$ มีค่าเท่าใด

………
………
………
………
………
………
………
………
………

7. กำหนด $A = \left\{ x \in R \middle| 3^{x^2+2x} - 3^{x^2-1} - 9^{x+1} + 27 = 0 \right\}$ ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทั้งหมดของ A เป็นเท่าใด

……
……
……
……
……
……
……
……
……

8. กำหนด $2^x = 3^y = 4^z = 24^k$ และ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = k^m$ จงหาค่า m

……
……
……
……
……
……
……
……
……

9. ถ้า $a^x - a^{-x} = 5$ แล้วจงหา $a^{2x} + a^{-2x}$

……
……
……
……
……
……
……
……

10. จงแก้สมการ $3^{4m+2} - 9^{2m-1} + 81^{m} = 89$

………

………

………

………

………

………

11. จงแก้สมการ $5^{x} + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 155\sqrt{5}$

………

………

………

………

………

………

………

12. จงแก้สมการ $7^{2x} + 4 \cdot 7^{x} - 5 = 0$

………

………

………

………

………

………

………

13. จงแก้สมการ $\dfrac{e^{2x}}{(1+e^{x})^{2}} = \dfrac{1}{4}$

………

………

………

………

………

………

………

14. จงแก้สมการ $2^x - 3^x = 0$

………

………

………

………

………

………

………

15. จงแก้สมการ $4^x + 9^x = 25^x$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

16. จงแก้สมการ $6(2^{5x}) + 11(2^{3x}) - 3(2^x) = 2^{5x+1}$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

5. ฟังก์ชันลอการิทึม

เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลคือ $y = a^x$ เมื่อ a > 0 และ $a \neq 1$

อินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลคือ $x = a^y$ เมื่อ 0 < a < 1 และ $a \neq 1$ (***จำให้ดี $x > 0$***)

ซึ่งสามารถเขียนในรูป $y = f(x)$ ได้โดยกำหนดให้ $y = \log_a x$

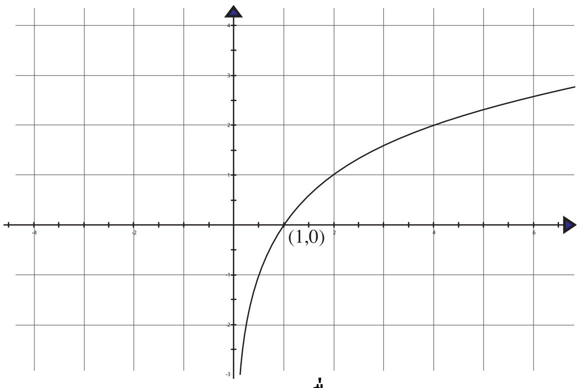
บทนิยาม ฟังก์ชันลอการิทึมคือ $\{(x, y) \in R^+ \times R \mid y = \log_a x, a > 0, a \neq 1\}$
เป็นอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล $\{(x, y) \in R \times R^+ \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

นั่นคือ

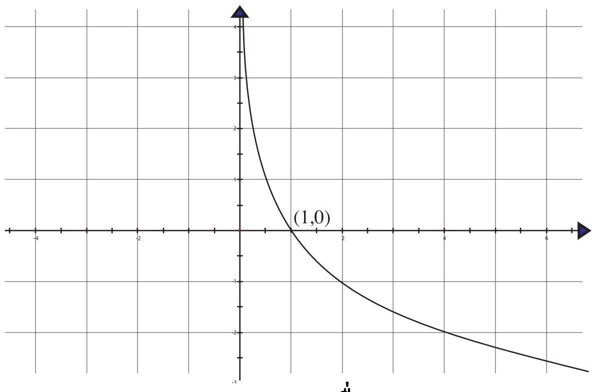
จาก $x = a^y$ **เขียนใหม่เป็น** $\log_a x = y$

หรือจาก $\log_a x = y$ **หมายถึง** $x = a^y$

กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม $y = \log_a x$ เขียนได้ดังรูป



$y = \log_a x$ เมื่อ a > 1



$y = \log_a x$ เมื่อ 0 < a < 1

สมบัติของ ลอการิทึม

กำหนดให้ M และ N เป็นจำนวนจริงบวก เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0 และ $a \neq 1$

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^p = p \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $a^{\log_a N} = N$
7. $\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}$
8. $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$
9. $M^{\log_a P} = P^{\log_a M}$
10. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

การพิสูจน์ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

ให้ $\log_a M = x$ จะได้ $a^x = M$ ....(1)

ให้ $\log_a N = y$ จะได้ $a^y = N$ .... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $MN = a^x \cdot a^y$

$MN = a^{x+y}$

เขียนในรูปลอการิทึมเป็น $\log_a (MN) = x + y$

ดังนั้น $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

จงแสดงว่า $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

....

....

....

....

....

....

....

การพิสูจน์ $\log_a M^p = p\log_a M$

ให้ $\log_a M = x$ จะได้ $M = a^x$

ยกกำลัง P $M^p = (a^x)^p$

$= a^{xp}$

เขียนให้อยู่ในรูปลอการิทึมเป็น $\log_a M^p = xp$

$= px$

$\log_a M^p = p\log_a M$

จงแสดงว่า $\log_a a = 1$

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $(\log_2 8)(\log_3 81) + 4\log 400 - \log 256$

วิธีทำ
$$
\begin{aligned}
(\log_2 8)(\log_3 81) + 4\log 400 - \log 256 &= \left(\log_2 2^3\right)\left(\log_3 3^4\right) + 4\log(4\times 100) - \log 2^8 \\
&= 3(4) + 4(\log 4 + \log 100) - 8\log 2 \\
&= 12 + 4(\log 2^2 + \log 10^2) - 8\log 2 \\
&= 12 + 4(2\log 2 + 2) - 8\log 2 \\
&= 12 + 8\log 2 + 8 - 8\log 2 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\log\sqrt{28} + \log\sqrt{325} - \log\sqrt{91}$

วิธีทำ
$$
\begin{aligned}
\log\sqrt{28} + \log\sqrt{325} - \log\sqrt{91} &= \log\left(\frac{\sqrt{28}\times\sqrt{325}}{\sqrt{91}}\right) \\
&= \log\sqrt{\frac{28\times 325}{91}} \\
&= \log\sqrt{100} \\
&= \log 10 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $(\log_2 16)\left(\log_5\left(\frac{1}{25}\right)\right) - \left(\log_{27} 9\right)\left(\log_2\left(\frac{1}{8}\right)\right) + \left(\log_{27} 3\right) + \log_8 4$

วิธีทำ
$$
\begin{aligned}
&\left(\log_2 16\right)\left(\log_5\left(\frac{1}{25}\right)\right) - \left(\log_{27} 9\right)\left(\log_2\left(\frac{1}{8}\right)\right) + \left(\log_{27} 3\right) + \left(\log_8 4\right) \\
&= \left(\log_2 2^4\right)\left(\log_5 5^{-2}\right) - \left(\log_{3^3} 3^2\right)\left(\log_2 2^{-3}\right) + \left(\log_{3^3} 3^1\right) + \left(\log_{2^3} 2^2\right) \\
&= (4)(-2) - \left(\frac{2}{3}\right)(-3) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) \\
&= -8 + 2 + 1 \\
&= -5
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log_{10} 16}}$

วิธีทำ
$$
\begin{aligned}
\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log_{10} 16}} &= \sqrt{10^2 \times 10^{\frac{1}{2}\log_{10} 16}} \\
&= \sqrt{10^2 \times 10^{\log_{10}\sqrt{16}}} \\
&= \sqrt{10^2} \times \sqrt{10^{\log_{10} 4}} \\
&= 10\times\sqrt{4} \\
&= 10(2) \\
&= 20
\end{aligned}
$$

แบบฝึกทักษะที่ 1.5

1. จงเขียนลอการิทึมต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

 1.1 $\log_9 729 = 3$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

 1.2 $\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

 1.3 $\log_2\left(\frac{1}{256}\right) = -8$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

 1.4 $\log_{10} 1 = 0$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

 1.5 $\log_{10} 300 = 24771$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

 1.6 $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$ เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็น..

2. จงเขียนเลขยกกำลังต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปลอการิทึม

 2.1 $2^7 = 128$ เขียนในรูปลอการิทึมเป็น..

 2.2 $81^{\frac{1}{2}} = 9$ เขียนในรูปลอการิทึมเป็น..

 2.3 $64^{\frac{1}{6}} = 2$ เขียนในรูปลอการิทึมเป็น..

 2.4 $10^{0.4771} = 3$ เขียนในรูปลอการิทึมเป็น..

 2.5 $10^{-3} = 0.001$ เขียนในรูปลอการิทึมเป็น..

 2.6 $M = a^{-4}$ เขียนในรูปลอการิทึมเป็น..

3. จงหาค่าของ $\log_3 9 + \log_2 64$

....

....

4. จงหาค่าของ $\log_2 (5 + \log_2 \frac{1}{2})$

....

....

5. กำหนด $a = \log_{10} 28, b = \log_{10} 25, c = \log_{10} 21$ จงหาค่าของ $\log_{10} 21$

....

....

....

....

....

....

6. จงหาค่าของ $\log_6 10 + \log_6 18 - \log_6 5$

……

…... ………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

7. จงหาค่าของ $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3}}$

……

…... ………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

8. จงหาค่าของ $\log_2 30 + 2\log_2 \frac{5}{16} - 3\log_2 \frac{25}{32} + \log_2 \frac{125}{96}$

……

…... ………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

………………………………

9. จงหาค่าของ $\log_4 \{2\log_3 [1 + \log_2 (1 + \log_2 8)]\}$

……

…... ………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

6. ลอการิทึมสามัญ และลอการิทึมธรรมชาติ

ในการเขียนลอการิทึมโดยทั่วไป เราต้องเขียนฐานของลอการิทึมกำกับอยู่ด้วยเสมอ เช่น $\log_2 8$, $\log_3 5$, $\log_6 3$ เป็นต้น แต่มีลอการิทึมอยู่สองชนิดที่ไม่นิยมเขียนฐานของลอการิทึมกำกับไว้ เพราะลอการิทึมดังกล่าวนี้เป็นลอการิทึมที่เรานิยมใช้กันมาก คือ ลอการิทึมฐาน 10 หรือที่เรียกว่าลอการิทึมสามัญ และลอการิทึมฐาน e หรือที่เรียกว่าลอการิทึมธรรมชาติ (ค่า e เป็นค่าของจำนวนอตรรกยะ มีค่าประมาณ 2.7182818)

ลอการิทึมสามัญ หรือลอการิทึมฐานสิบ และลอการิทึมธรรมชาติ

1. $\log_{10}M$ เรียกว่าลอการิทึมสามัญ เขียนแทนด้วย $\log M$
2. $\log_e M$ เรียกว่าลอการิทึมธรรมชาติ เขียนแทนด้วย $\ln M$
4. $\log(A\times 10^n) = n + \log A$ เมื่อ $1 \le A < 10$

   เรียก n ว่าแคแรกเทอร์ริสติก ของ $\log(A\times 10^n)$

   เรียก $\log A$ ว่าแมนทิสซาของ $\log(A\times 10^n)$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\log 9 - \log 8 - \log\sqrt{75} + \log\sqrt{\frac{25}{27}}$ เมื่อกำหนด $\log 2 = 0.301$

วิธีทำ 1 เนื่องจากโจทย์ไม่ได้กำหนดฐานของลอการิทึมมาให้ แสดงว่าเป็นลอการิทึมฐาน 10

$$\log 9 - \log 8 - \log\sqrt{75} + \log\sqrt{\frac{25}{27}} = \log 3^2 - \log 2^3 - \log(5\sqrt{3}) + \log\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$= 2\log 3 - 3\log 2 - (\log 5 + \log 3^{\frac{1}{2}}) + (\log 5 - \log 3^{\frac{3}{2}})$$

$$= 2\log 3 - 3\log 2 - \log 5 - \frac{1}{2}\log 3 + \log 5 - \frac{3}{2}\log 3$$

$$= -3\log 2$$

$$= (-3)(0.301) = -0.903$$

วิธีทำ 2 $= \log \frac{9}{8} \times \sqrt{\frac{1}{75}\times\frac{25}{27}}$

$= \log \frac{9}{8} \times \frac{1}{9}$

$= \log 2^{-3}$

$= -3\log 2 = -3\,(0.30\,10)$

$= 0.9030$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ x จากสมการ $\ln x^2 - \ln x = \ln 18 - \ln 6$

วิธีทำ จาก $\ln x^2 - \ln x = \ln 18 - \ln 6$

จะได้ $\ln\left(\frac{x^2}{x}\right) = \ln\left(\frac{18}{6}\right)$

$x = 3$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $e^{\ln\sqrt{2}}$

วิธีทำ ให้ $M = e^{\ln\sqrt{2}}$

ใส่ลอการิทึมฐาน e ทั้งสองข้าง จะได้ $\ln M = \ln e^{\ln\sqrt{2}}$

$= (\ln\sqrt{2})(\ln e) = (\ln\sqrt{2})(1) = \ln\sqrt{2}$

ดังนั้น $M = \sqrt{2}$

ตัวอย่าง จงหาแมนทิสซา และแคแรกเทอร์ริสติกของ $\log 5710$

วิธีทำ เพราะว่า $\log 5710 = \log(5.71 \times 10^3)$

$= \log 5.71 + \log 10^3$

$= \log 5.71 + 3$

ดังนั้น แมนทิสซาของ $\log 5710 =$ $\log 5.17$ และแคแรกเทอร์ริสติกคือ 3

ตัวอย่าง

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598

จงหาค่าของ

1) $\log 214$ 2) $\log 22800$ 3) $\log 0.209$ 4) $\log 0.000217$

วิธีทำ 1) $\log 214 = \log(2.14 \times 10^2)$

$= \log 2.14 + \log 10^2$

$= \log 2.14 + 2$

$= 0.3304 + 2$

$= 2.3304$

2) $\log 22800 = \log(2.28 \times 10^4)$

$= \log 2.28 + \log 10^4$

$= 0.3579 + 4$

$= 4.3579$

3) $\log 0.209 = \log(2.09 \times 10^{-1})$

$= \log 2.09 + \log 10^{-1}$

$= 0.3201 + (-1)$

$= -0.6799$

4) $\log 0.000217 = \log\left(2.17 \times 10^{-4}\right)$

$= \log 2.17 + \log 10^{-4}$

$= 0.3365 + (-4)$

$= -3.6635$

ตัวอย่าง จำนวน 225^{36} เป็นจำนวนที่มีตัวเลขกี่หลัก

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\log 225^{36} &= 36 \log 225 \\
&= 36\log\left(2.25\times 10^2\right) \\
&= 36(\log 2.25 + \log 10^2) \\
&= 36(0.3522 + 2) \\
&= 36\times 2.3522 \\
&= 84.6792
\end{aligned}$$

จะได้ค่าแคแรกเทอร์ริสติกของ $\log 225^{36}$ เป็น 84 นั่นคือ 225^{36} เป็นจำนวนที่มีตัวเลข 85 หลัก

แอนติลอการิทึม(antilogarithm) ของ log N

แอนติลอการิทึมของ log N คือการหาค่า N เมื่อทราบค่า log N

$$\boxed{\text{anti}\log A = N \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \log N = A}$$

เนื่องจาก $\log N = \log N_0 + n$ เมื่อ $0 \le \log N_0 < 1$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น เมื่อกำหนด $\log N$ ใดๆ มาให้ จึงเขียน $\log N$ ให้อยู่ในรูป $\log N = \lambda + n$ เมื่อ $0 \le \lambda < 1$ และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้วหา $\log N_0$ ที่เท่ากับ λ จากนั้นจึงอาศัยสมบัติของลอการิทึมหาค่า N ได้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\log 6.37 = 0.8041$ และ $\log N = 4.8041$ จงหาค่า N

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}
\log N &= 4.8041 \\
&= 0.8041 + 4
\end{aligned}$$

และ $\log 6.37 = 0.8041$

จะได้

$$\begin{aligned}
\log N &= \log 6.37 + 4\log 10 \\
&= \log 6.37 + \log 10^4 \\
&= \log(6.37\times 10^4)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
N &= 6.37\times 10{,}000 \\
&= 63{,}700
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\log 5.37 = 0.7300$ และ $\log N = -9.2700$ จงหาค่า N

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}
\log N &= -9.2700 \\
&= -9 - 0.2700 \\
&= -9 - 0.2700 + 1 - 1 \\
&= -9 - 1 + 0.7300 \\
&= -10 + 0.7300 \\
&= \log 10^{-10} + \log 5.37 \\
&= \log(5.37\times 10^{-10})
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
N &= 5.37\times 0.0000000001 \\
&= 0.000000000537
\end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะที่ 1.6

1. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าประมาณถึงทศนิยมตำแหน่งที่สี่ของ $\sqrt[10]{8}$

2. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าประมาณของ $\sqrt[6]{6.9344}$

3. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าของ antilog 4.5237

4. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าของ antilog (-2.4584)

5. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าประมาณถึงทศนิยมตำแหน่งที่สี่ ของ $\dfrac{\left(275\times\dfrac{1}{63}\right)^5}{\sqrt[4]{35\times 2.983}}$

6. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าของ x จากสมการ $12^{2-5x}\cdot 8^{x+3}=16$

7. จากค่าในตารางลอการิทึม จงหาค่าของ x จากสมการ $5^{x}=2^{-y}$ และ $5^{2+y}=2^{2-x}$

7. การแก้สมการและอสมการเอกซ์โปเนนเชียล

หลักการ การแก้สมการและอสมการเอกซ์โปเนนเชียล

1. ถ้า $a^m = a^n$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว m = n
2. ถ้า $a^n = b^n$ เมื่อ $a \neq b$ แล้ว n = 0
3. ถ้า $a > 1$ และ $a^m > a^n$ แล้ว m > n
4. ถ้า $0 < a < 1$ และ $a^m > a^n$ แล้ว m < n
5. ต้องพยายามทำฐานให้เท่ากัน หรือ เลขชี้กำลังเหมือนกันให้ได้
6. ในกรณีที่ ฐานไม่เหมือนกัน แต่เลขชี้กำลังเท่ากัน ให้ใช้สมบัติดังนี้

   ถ้า $a^x > b^x$ โดยที่ $a > b > 0$ และ $a, b \neq 1$ จะได้ว่า

   1) $a^x > b^x \leftrightarrow x > 0$
   2) $a^x < b^x \leftrightarrow x < 0$
   3) $a^x = b^x \leftrightarrow x = 0$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ x จากสมการ $2^{x^2-3x-4} = 1$

วิธีทำ จากสมการ $2^{x^2-3x-4} = 1$

เพราะว่า $2^0 = 1$

ดังนั้น $2^{x^2-3x-4} = 2^0$

จะได้ $x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = -1$ หรือ 4

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $8^{2x-12} = 9^{3x-18}$

วิธีทำ จากสมการ $8^{2x-12} = 9^{3x-18}$

$(2^3)^{2x-12} = (3^2)^{3x-18}$

$2^{6x-36} = 3^{6x-36}$

จะได้ $6x - 36 = 0$

ดังนั้น $x = 6$

ตัวอย่าง จงหาช่วงคำตอบของอสมการ $2^{x-3} > 3^{x-3}$

วิธีทำ จาก $2^{x-3} > 3^{x-3}$

เพราะว่า $2 < 3$ ดังนั้น $x - 3 < 0$

นั่นคือ $x < 3$

ดังนั้น ช่วงคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, 3)$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $13^{x^2-5x+1} = \frac{1}{169}$

วิธีทำ จาก $13^{x^2-5x+1} = \frac{1}{169}$

จะได้ $13^{x^2-5x+1} = (13)^{-2}$

ดังนั้น $x^2 - 5x + 1 = -2$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_x(3x^{\log_5 x} + 4) = 2\log_5 x$

วิธีทำ จาก $\log_x(3x^{\log_5 x} + 4) = 2\log_5 x$

ให้ $m = \log_5 x$ จะได้ว่า $\log_x(3x^m + 4) = 2m$

โดยนิยามจะได้ $3x^m + 4 = x^{2m}$

หรือ $x^{2m} - 3x^m - 4 = 0$

$$(x^m - 4)(x^m + 1) = 0$$

$$x^m = 4, -1$$

เพราะว่า $x > 0$ ดังนั้น $x^m \neq -1$

แทนค่า $m = \log_5 x$ จะได้ $x^{\log_5 x} = 4$

ใส่ ลอการิทึมฐาน 5 ทั้งสองข้างของสมการ

$$\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5 4$$

$$(\log_5 x)^2 = \log_5 4$$

$$\log_5 x = \pm\sqrt{\log_5 4}$$

$$x = 5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$$

เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{5^{\sqrt{\log_5 4}}, 5^{-\sqrt{\log_5 4}}\right\}$

แบบฝึกทักษะที่ 1.7

1. จากค่าในตาราง จงหาค่าของ x จากสมการ $12^{2-5x} \cdot 8^{x+3} = 16$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2. จากค่าในตาราง จงหาค่าของ x จากสมการ $5^{x} = 2^{-y}$ และ $5^{2+y} = 2^{2-x}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3. จงหาช่วงคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x+8} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+12}$ ……………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) $3^{2x-5} < 3^{5x-6}$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3) $5^{3x-2} > 2^{3x-2}$

4) $5^{3x+2} < 7^{3x+2}$

5) $8^{x} + 18^{x} - 2 \cdot 27^{x} > 0$

6) $9^{x} - 10 \cdot 3^{x} + 9 \le 0$

8. สมการลอการิทึม

สมการลอการิทึมเป็นสมการที่มีตัวแปรติดค่าลอการิทึมอยู่ด้วย ดังนั้นการแก้สมการลอการิทึมก็คือการหาเซตคำตอบของตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการนั่นเอง

การแก้สมการ logarithm

หลักการ
1. $\log_a M = \log_a N$ ก็ต่อเมื่อ M = N
2. ต้องพยายามทำฐานของ log ให้เหมือนกันให้ได้
3. $\log_a M = \log_b M$ และ $a \neq b$ แล้ว จะได้ว่า M = 1
4. **แก้สมการได้แล้วต้องตรวจคำตอบเสมอ**

ตัวอย่าง จงหาค่า x จากสมการ $\log_4\left(\log_3\left(\log_2\left(x^2-2x\right)\right)\right)=0$

วิธีทำ จาก

$$\log_4\left(\log_3\left(\log_2\left(x^2-2x\right)\right)\right)=0$$
$$\log_3\log_2\left(x^2-2x\right)=4^0=1$$
$$\log_2\left(x^2-2x\right)=3^1=3$$
$$x^2-2x=2^3=8$$
$$x^2-2x-8=0$$
$$(x+2)(x-4)=0$$
$$x=-2,4$$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^{\log x}>10$

วิธีทำ จาก $x^{\log x}>10$

ใส่ลอการิทึมฐานสิบทั้งสองข้างของสมการ

$$\log x^{\log x}>\log 10$$
$$\log^2 x>1$$
$$(\log x-1)(\log x+1)>1$$

จะได้ $\log x>1$ หรือ $\log x<-1$

นั่นคือ $x>10$ หรือ $0<x<\frac{1}{10}$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\log^2 x+\log x+1=\dfrac{7}{\log\frac{x}{10}}$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $\left(\log\frac{x}{10}\right)\left(\log^2 x+\log x+1\right)=7$

$$(\log x-1)(\log^2 x+\log x+1)=7$$
$$\log^3 x-1=7$$
$$\log^3 x-8=0$$
$$(\log x-2)(\log^2 x+2\log x+4)=0$$
$$\log x=2,\quad x=10^2=100$$

แบบฝึกทักษะที่ 1.8

จงแก้สมการ

1. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=1$ ……………………………………………………………...

…….

…….

…….

…….

…….

…….

2. $\log_4 \log_3 \log_2\left(x^2-2x\right)=0$ ……………………………………………………………………......

…….

…….

…….

…….

…….

…….

3. $\log_4 \log_3 \log_2\left(x^2-2x\right)=0$ ……………………………………………………………………......

…….

…….

…….

…….

…….

…….

4. $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$ ………………………………………………………………………………..

…….

…….

…….

…….

…….

…….

5. $5^{\log_3 x} + 3^{\log_5 x} = 10$ ……………………………………………………………………………

6. $\log_{100} x = 1 - \log\sqrt{10^{\log x} + 15}$ ……………………………………………………………

7. $x^{\log x} = 100x$ ……………………………………………………………………………

8. $\log(3x^2 12) - \log(x^2 - 4) = \log x^2$ ……………………………………………………………

9. $\sqrt{\log x} + \log\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………

10. $\log_{3\sqrt{x}} x + \log_{3x} \sqrt{x} = 0$ ……………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

11. $\log\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \frac{1}{2}\log 16 - \sqrt{x+0.25}\,\log 4$ ……………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

12. $5^{\log x} = 3^{\log x}$ ……………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

13. $\log_3 x - 4\log_x 3 + 3 = 0$ ……………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

14. $3\log\sqrt[3]{x} = \log(3x-4)$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

15. จงหาค่าของ $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} A} + \dfrac{2}{\log_{\frac{2}{3}} A} + \dfrac{3}{\log_{\frac{3}{4}} A} + \dfrac{4}{\log_{2} A}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

16. ถ้า $\dfrac{\log x^2}{a^2-b^2} = \dfrac{\log y^2}{b^2-c^2} = \dfrac{\log z^2}{c^2-a^2}$ แล้ว จงหาค่าของ $\sqrt{xyz}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

17. จงแก้สมการ $\log_2\left[2\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right)\right]=1$

18. จงแก้สมการ $\log\left(2^x+x-4\right)=x\left(1-\log 5\right)$

19. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_x\left(x^2+1\right)>2$

20. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_4 \log_3 \log_2 7^{\log_7\left(x^2+2x\right)} = 0$

………

………

………

………

………

………

………

………

21. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_x \dfrac{x+3}{x-1} > 1$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

22. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_{0.25}(x-1)+\log_{0.25}(x+1) > \log_{0.25} 3$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

23. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2+\log_2 \sqrt{x+1} > 1-\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4-x^2}$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

24. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_{\frac{1}{2}}(x+8)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3) > \log_{\frac{1}{2}} 3x$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

25. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $25 > 5^{\log_5(4-3x)}$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

26. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_2(4-3x) \le -3$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

27. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_4(3-4x) \ge -1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกทักษะ โจทย์อย่างยาก

1. กำหนด $A \times 2^{3\log_2 6} = 648$ จงหาค่าของ $\dfrac{2^{3\log_2 6}}{A}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2. จงเขียนเซตคำตอบของสมการ $\log_{0.5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

3. กำหนด $A = \left\{x \,\middle|\, \log_4 \log_2 \log_3 (2x-1) = \dfrac{1}{2}\right\}$ และ $B = \{y \mid (1-\log 2)\log_5 y = \log 3 - \log(y-2)\}$

จงหาค่าของ $x + y$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

4. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(2.25)^{\log_2(x^2-3x-10)} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4)}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

5. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(8-x)^{\log_2^2(8-x)} \le 2^{3x-4}$

6. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_{100} x = 1 - \log\sqrt{10^{\log x} + 15}$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log 5 + \log(4^{x-2} + 1) - \log 2^{x-2} = 1$

8. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2y-5}} = 7\sqrt{2}$

9. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3 x)^2 = 1$

10. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(0.4)^{(\log x)^2+1} = (6.25)^{2-\log x^3}$

โจทย์ ENT' ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. จงหาค่า x จาก $\left(4\sqrt{7}\right)^{10x-8} = (112)^{7x+8}$
2. กำหนดให้ $7^{-(x-3y)} = 49$ และ $5^{x+3} + 5^{3y+1} = 50$ จงหาค่าของ $\frac{x}{4}$
3. ค่าของ x ที่เป็นคำตอบของสมการ $2\left(81^{x}\right) = 36^{x} + 3\left(16^{x}\right)$ สอดคล้องกับข้อใด
   1. $(0,1)$ 2. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 3. $(-2,0)$ 4. $\left(\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}\right)$
4. $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^{x}$ จงหาค่า x
5. กำหนดระบบสมการ $2^{2x} \cdot 3^{-y} = 24$ และ $x - 2y = 2$ แล้วค่าของ x และ y ตามลำดับคือข้อใด
   1. $\frac{6\log 2}{4\log 2 - \log 3}, \frac{\log 3 - \log 2}{4\log 2 - \log 3}$
   2. $\frac{2\log 3 - 6\log 2}{\log 3 - 4\log 2}, \frac{\log 2}{\log 3 - 4\log 2}$
   3. $\frac{10\log 2 - 2\log 3}{4\log 2 - \log 3}, \frac{\log 2}{4\log 2 - \log 3}$
   4. $\frac{4\log 3 - 10\log 2}{\log 3 - 4\log 2}, \frac{\log 3 - \log 2}{\log 3 - 4\log 2}$
6. จงแก้อสมการ $9^{x} - 10.3^{x} + 9 \le 0$
7. ถ้า A และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ 1 และ 2 ตามลำดับ
   1. $\log\left(\frac{1}{2^{x}+x-1}\right) = x(\log 5 - 1)$
   2. $\log_2\left(9^{x-1}+7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูก
   1. $n(A \cap B) = 2$ 2. $n(A - B) = 1$ 3. $n(B - A) = 0$ 4. $n(A \cup B) = 2$
8. ถ้า $\log_b a$ เป็นคำตอบของสมการ $\log_6 2^{x+3} - \log_6\left(3^{x} - 2\right) = x$ แล้วจงหารากที่สองของ ab
   1. $2\sqrt{2}$ 2. $2\sqrt{3}$ 3. $3\sqrt{2}$ 4. 4
9. จาก $\log_x\left(4x^{\log_5 x} + 5\right) = 2\log_5 x$ จงหาค่าของ x
10. จงหาผลคูณของคำตอบสมการ $3\log_2 x = \log_x 8 + \log_x\left(3 - x^{\log_2 x}\right)$
    1. $\frac{1}{100}$ 2. $\frac{1}{10}$ 3. 1 4. 10
11. กำหนดสมการ $\log_{\frac{x}{3}} 3 = (\log_3 x)^2 + \log_3 3x$ จงหาค่าของ x
12. จงหาค่าของ $\frac{x}{y}$ จากสมการ $\log\left(5 \cdot 7^{x} + 50 - 5 \cdot 7^{3y}\right) = 2 - \log 2$
13. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

    $\log(x-3y) - \log(3x-7y) = \log y - \log(x-y)$ จงหาค่าของ $\frac{x}{y}$

17. กำหนดให้ $s = \{x \in R / 2^x \log_2 x + 8 > 2^{x+1} + \log_2 x^4\}$ เซต s มีจำนวนสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มซึ่งน้อยกว่า 20 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 14 2. 15 3. 16 4. 17

18. เซตคำตอบของอสมการ $x^{\log x} < 100x$ เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,90)$ 2. $\left(\frac{1}{2},120\right)$ 3. $\left(\frac{1}{20},110\right)$ 4. $[1,130)$

19. ผลบวกข้อจำนวนเต็มทั้งหมด ซึ่งสอดคล้องอสมการ $x^{1+\log_{0.5} x} > \frac{x}{16}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

20. ถ้า a และ b เป็นคำตอบของสมการ $3^{3x} = \frac{10}{3} - 3^{-3x}$ แล้ว $\log(|a|+|b|)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\log 2 + \log 3$ 2. $\log 2 - \log 3$

3. $(\log 2)(\log 3)$ 4. $\frac{\log 2}{\log 3}$

ตารางค่าลอการิทึม

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	7237	7250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
5.5	7408	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7757	7774
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8242	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8561	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8765	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9476	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ดร.อำรุง จันทวานิช	เลขาธิการสภาการศึกษา
ดร.สิริพร บุญญานันต์	รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	ที่ปรึกษาด้านระบบการศึกษา สกศ.
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้เรียบเรียง :

นายบัญญัติ ศรีประเสริฐ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ นครศรีธรรมราช

ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร
อาจารย์เอธัสวัฒน์ คำมณี
อาจารย์สุธิตา มณีชัย
คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้พิจารณารายงาน : นางสาวสุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา	หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
นายรวิช ตาแก้ว	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ

บรรณาธิการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : http://www.onec.go.th
http://www.thaigifted.org