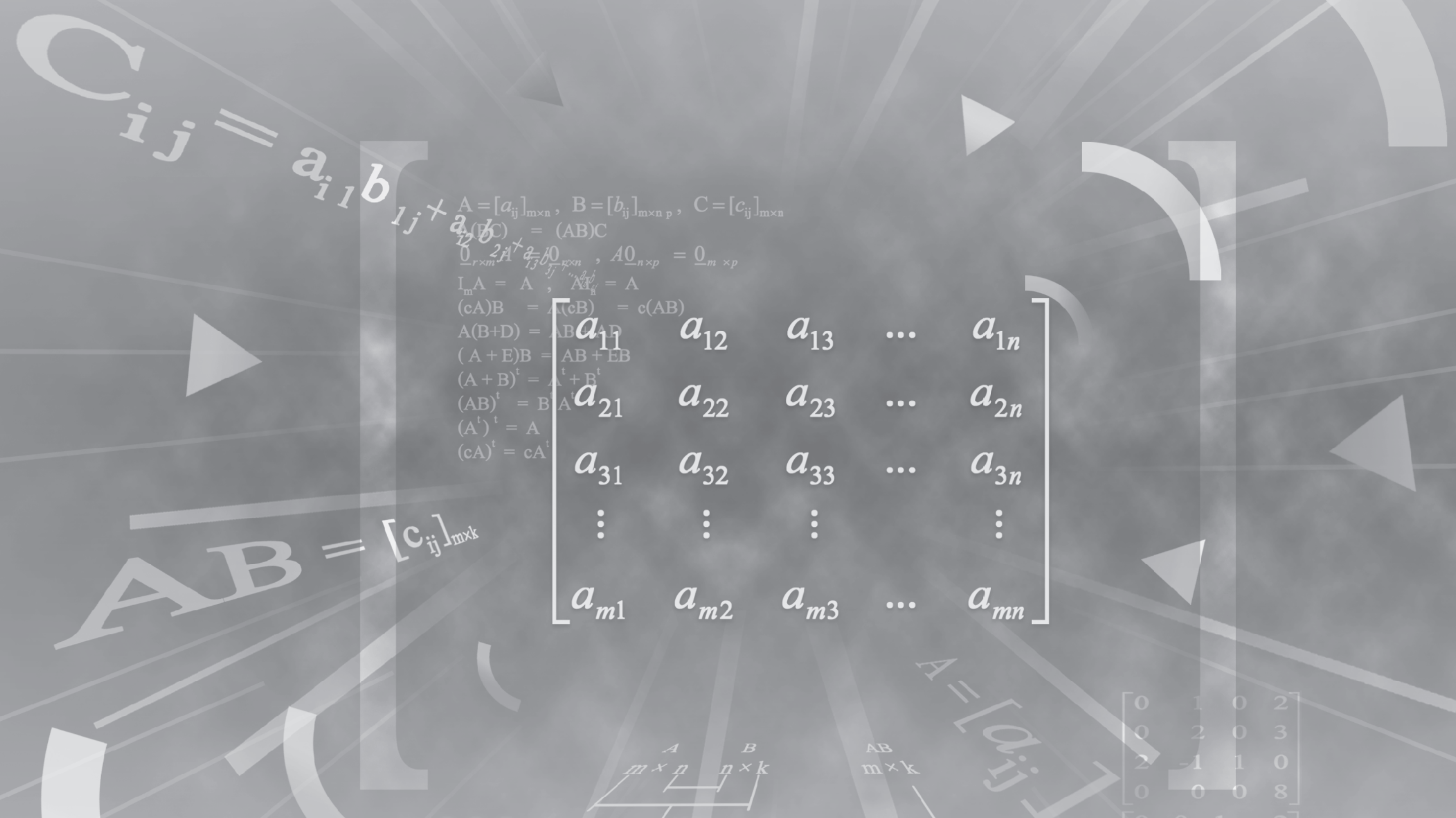
หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

# แผนการจัดการเรียนรู้
# เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์




**โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์**
**ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์**
**ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้**

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา

ส 691 ผ แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์

หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กรุงเทพฯ : 2551

62 หน้า

ISBN 978-974-559-377-0

1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร

2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง


**แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์ หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**


**สิ่งพิมพ์ สกศ.** อันดับที่ 65 /2551

**พิมพ์ครั้งที่ 1** กรกฎาคม 2551

**จำนวน** 1,000 เล่ม

**จัดพิมพ์เผยแพร่** สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร 0-2243-1129, 0-2668-7329
Web site: http:// www.onec.go.th และ http:// www.thaigifted.org

**ผู้พิมพ์** บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด
580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1
ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230
โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753

# คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามาถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน จากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

(นายอำรุง จันทวานิช)
เลขาธิการสภาการศึกษา

# คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตร การศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไปหรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียนในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสมและมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน

## ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
## ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

| ระดับ | | เนื้อหา | จำนวนคาบ | โรงเรียนที่รับผิดชอบเขียนแผนการจัดการเรียนรู้ |
|---|---|---|---|---|
| มัธยมศึกษาปีที่ 4 | ภาคเรียนที่ 1 | 1. เซต | 10 | โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล |
| | | 2. การให้เหตุผล | 6 | โรงเรียนพุนพินพิทยาคม |
| | | 3. ตรรกศาสตร์ | 24 | โรงเรียนพุนพินพิทยาคม |
| | | 4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น | 38 | โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย |
| | ภาคเรียนที่ 2 | 5. เรขาคณิตวิเคราะห์ | 38 | โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ |
| | | 6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน | 30 | โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ |
| | | 7. ตรีโกณมิติ | 48 | โรงเรียนบูรณะรำลึก และมหาวชิราวุธ |
| | | 8. กำหนดการเชิงเส้น | 6 | โรงเรียนมหาวชิราวุธ |
| **รวม** | | | 200 | |
| มัธยมศึกษาปีที่ 5 | ภาคเรียนที่ 1 | 9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม | 27 | โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ |
| | | 10. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์ | 20 | โรงเรียนสุราษฎร์ธานี |
| | | 11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ | 36 | โรงเรียนพุนพินพิทยาคม |
| | | 12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม | 24 | โรงเรียนมหาวชิราวุธ |
| | ภาคเรียนที่ 2 | 13. ทฤษฎีกราฟ | 15 | โรงเรียนบูรณะรำลึก |
| | | 14. ลำดับและอนุกรม | 38 | โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย |
| | | 15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรต | 40 | โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล |
| **รวม** | | | 200 | |
| มัธยมศึกษาปีที่ 6 | ภาคเรียนที่ 1 | 16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ | 30 | โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ |
| | | 17. ความน่าจะเป็น | 20 | โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย |
| | | 18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล | 50 | |
| | | ■ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ) | | โรงเรียนบูรณะรำลึก |
| | | ■ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ) | | โรงเรียนสุราษฎร์ธานี |
| | | ■ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ) | | โรงเรียนพุนพินพิทยาคม |
| **รวม** | | | 100 | |

# สารบัญ

# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง **เมทริกซ์และสัญลักษณ์ของเมทริกซ์** มัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

**ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเมทริกซ์

**1. จุดประสงค์การเรียนรู้**

1.1 บอกมิติของเมทริกซ์และเขียนเมทริกซ์ในรูปทั่วไปได้
1.2 บอกตำแหน่งของสมาชิกใดๆ ได้
1.3 เขียนสมาชิกของเมทริกซ์ที่อยู่ในตำแหน่งที่กำหนดให้ได้
1.4 หาทรานสโพสของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้
1.5 บอกได้ว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้คู่ใดเท่ากันบ้าง
1.6 ใช้สมบัติเกี่ยวกับการเท่ากันของเมทริกซ์หาค่าของตัวแปรได้

**2. แนวคิดหลัก**

การแสดงข้อมูลต่างๆ เราสามารถนำเสนอในรูปเมทริกซ์ได้

**3. เนื้อหาสาระ**

**บทนิยาม** เมทริกซ์ คือ ชุดของจำนวน mn ตัว ( m ,n เป็นจำนวนเต็มบวก ) เขียนเรียงกัน m แถว n หลัก ภายใต้เครื่องหมายวงเล็บในรูป

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรือ เขียนเป็น $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

เรียก $a_{ij}$ ว่าเป็นสมาชิก( element ) ในแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์

เรียก เมทริกซ์ที่มี m แถว n หลัก ว่าเป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และเรียก $m \times n$ ว่าเป็นมิติของเมทริกซ์

**บทนิยาม**

ให้ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ , $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ เมทริกซ์ A เท่ากับ เมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ เขียนแทน A เท่ากับ B ด้วย $A = B$

**4. กระบวนการจัดการเรียนรู้**

4.1 แจ้งจุดประสงค์ให้นักเรียนทราบว่า หลังจากเรียนคาบนี้แล้วนักเรียนต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับ สัญลักษณ์ของเมทริกซ์ การเขียนเมทริกซ์ มิติของเมทริกซ์ การเท่ากันของเมทริกซ์

4.2 สนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับการนำเสนอข้อมูลต่างๆ ที่นักเรียนคุ้นเคย เช่น

สรุปจำนวนนักเรียนที่สอบเข้ามหาวิทยาลัยในคณะต่างๆ ของจังหวัดหนึ่งดังนี้

| | แพทย์ | วิศวกรรมศาสตร์ | ทันตแพทย์ | วิทยาศาสตร์ |
|---|---|---|---|---|
| โรงเรียนที่ 1 | 15 | 25 | 8 | 18 |
| โรงเรียนที่ 2 | 10 | 15 | 5 | 15 |
| โรงเรียนที่ 3 | 9 | 10 | 7 | 13 |

ถ้าตัดข้อความบนสุดและซ้ายสุดออกเหลือเฉพาะตัวเลข แล้วปิดล้อมด้วยเครื่องหมายวงเล็บ จะเรียกรูปแบบนี้ว่าเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 15 & 25 & 8 & 18 \\ 10 & 15 & 5 & 15 \\ 9 & 10 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

4.3 แจกเอกสารประกอบการเรียน ให้นักเรียนศึกษาในเอกสารหน้า 22 ถึงหน้า 26 ซึ่งเป็นความรู้เกี่ยวกับ

- ❖ สัญลักษณ์ของเมทริกซ์
- ❖ การเขียนเมทริกซ์
- ❖ เมทริกซ์ชนิดต่างๆ
- ❖ การเท่ากันของเมทริกซ์
- ❖ ทรานสโพสเมทริกซ์

4.4 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสาร

**5. แหล่งการเรียนรู้**

- ❖ เอกสารประกอบการเรียน
- ❖ หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมเล่ม 2 ของ สสวท.

**6. กระบวนการวัดผลประเมินผล**

6.1 สังเกตการตอบคำถาม

6.2 ตรวจแบบฝึกหัดในเอกสาร

**7. บันทึกหลังสอน**

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

**8. กิจกรรมเสนอแนะ**

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง **การบวก การลบเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง** มัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

---

**ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ การบวก-ลบเมทริกซ์ และการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

**1. จุดประสงค์การเรียนรู้**

1.1 หาผลบวกและผลลบของเมทริกซ์ได้

1.2 บอกสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์ได้

1.3 นำสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์ไปใช้ได้

1.4 หาผลคูณของเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงได้

1.5 บอกสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงได้

1.6 นำสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงไปใช้ได้

**2. แนวคิดหลัก**

❖ การบวกและการลบเมทริกซ์ต้องเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากัน และในการบวกลบให้นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวก-ลบกัน

❖ ผลคูณระหว่างจำนวนจริงกับเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ ซึ่งได้จากการนำจำนวนจริงไปคูณสมาชิกแต่ละตัวของเมทริกซ์

**3. เนื้อหาสาระ**

3.1 การบวกเมทริกซ์

**บทนิยาม**

ให้ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ , $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ เมทริกซ์ A บวกกับเมทริกซ์ B คือเมทริกซ์ $A=[c_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ สำหรับทุกๆ $i=1,2,3,\ldots,m$ และ $j=1,2,3,\ldots,n$ เขียนแทน A บวก B ด้วย $A+B$

3.2 การหาผลคูณของเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

**บทนิยาม**
ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นค่าคงตัว ผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A คือเมทริกซ์ $[b_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $b_{ij} = ca_{ij}$ สำหรับทุกๆ i = 1 , 2 , 3 , … , m และ j = 1 , 2 , 3 , … , n เขียนแทนผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A ด้วย cA

3.3 สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง
สำหรับเมทริกซ์ A , B , C , $\underline{o}$ ที่มีมิติ $m \times n$ มีสมบัติดังต่อไปนี้

3.3.1 A + B มีมิติ $m \times n$
3.3.2 A + B = B + A
3.3.3 (A + B) + C = A + (B + C)
3.3.4 A + $\underline{o}$ = $\underline{o}$ + A = A
3.3.5 A + (-A) = (–A) + A = $\underline{o}$
3.3.6 c( A + B ) = cA + cB เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
3.3.7 ( c+d) A = cA + dA เมื่อ c , d เป็นค่าคงตัว
3.3.8 (cd)A = c(dA) เมื่อ c , d เป็นค่าคงตัว
3.3.9 IA = AI = A , $\underline{o}$ A = A$\underline{o}$ = $\underline{o}$

**4. กระบวนการจัดการเรียนรู้**

4.1 แจ้งจุดประสงค์ให้นักเรียนทราบว่า หลังจากเรียนคาบนี้แล้วนักเรียนต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับ การบวก การลบ และการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

4.2 ให้นักเรียนพิจารณาข้อมูลที่เกี่ยวกับชีวิตประจำวันของร้านขายน้ำสองพี่น้องแห่งหนึ่งดังนี้

| | **ร้านพี่** | | **ร้านน้อง** | |
|---|---|---|---|---|
| | **เสาร์** | **อาทิตย์** | **เสาร์** | **อาทิตย์** |
| ชาเย็น (บาท) | 150 | 170 | 210 | 250 |
| กาแฟเย็น (บาท) | 180 | 150 | 200 | 280 |
| โอวัลตินเย็น (บาท) | 200 | 190 | 250 | 290 |

ให้นักเรียนพิจารณาว่าในแต่ละวัน สองพี่น้องขายได้ยอดขายแต่ละอย่างรวมกันได้เท่าไร
ถ้าเราเขียนในรูปเมทริกซ์ โดยใช้

เมทริกซ์ A แทนข้อมูลการขายของพี่ ดังนี้ $A = \begin{bmatrix} 150 & 170 \\ 180 & 150 \\ 200 & 190 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ B แทนข้อมูลการขายของน้อง ดังนี้ $B = \begin{bmatrix} 210 & 250 \\ 200 & 280 \\ 250 & 290 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ C แทนข้อมูลการขายของทั้งสองคน ดังนี้ $C = \begin{bmatrix} 150+210 & 170+250 \\ 180+200 & 150+280 \\ 200+250 & 190+290 \end{bmatrix}$

จะได้ผลลัพธ์ $C = \begin{bmatrix} 360 & 420 \\ 380 & 430 \\ 450 & 480 \end{bmatrix}$

4.3 ครู – นักเรียนช่วยกันหาข้อสรุปในการบวกเมทริกซ์

4.4 ให้นักเรียนฝึกหาการบวกเมทริกซ์ในตัวอย่างที่ 6 ( เอกสารการสอนหน้า 27 )

4.5 ครูให้นิยามการลบเมทริกซ์ ( เอกสารการสอนหน้า 28 ) แล้วให้นักเรียนฝึกทำตัวอย่างที่ 7

4.6 ครูให้นิยามการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง ( เอกสารการสอนหน้า 29 ) แล้วให้นักเรียนฝึกทำตัวอย่างที่ 8

4.7 นักเรียนช่วยกันแสดงวิธีหาสมบัติเกี่ยวกับการบวก และ การคูณ บางข้อ

4.8 นักเรียนนำสมบัติที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาโจทย์

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -8 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ B ที่ทำให้ $2(A+B) = B + \frac{1}{2}A$

**5. แหล่งการเรียนรู้**

- ❖ เอกสารประกอบการเรียน
- ❖ หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมเล่ม 2 ของ สสวท.

**6. กระบวนการวัดผลประเมินผล**

6.1 สังเกตการตอบคำถาม

6.2 ตรวจแบบฝึกหัดในเอกสาร

6.3 ทดสอบย่อย

**7. บันทึกหลังสอน**

……………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………

**8. กิจกรรมเสนอแนะสอน**

……………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง **การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์** มัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

**ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

**1. จุดประสงค์การเรียนรู้**

1.1 บอกได้ว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้ 2 เมทริกซ์ใดๆ คูณกันได้หรือไม่
1.2 หาผลคูณของ 2 เมทริกซ์ใดๆ ที่สามารถคูณกันได้
1.3 บอกสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ได้
1.4 นำสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ไปใช้ได้

**2. แนวคิดหลัก**

กำหนด A และ B เป็นเมทริกซ์ จะหา $A \times B$ ได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B

**3. เนื้อหาสาระ**

3.1 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

**บทนิยาม**

ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ , $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ แล้ว $AB = [c_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ
$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$AB = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & b_{3j} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & b_{mj} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}$$

3.2 สมบัติของเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับการคูณ มีดังนี้

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ , $B = [b_{ij}]_{m\times n\ p}$ , $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ แล้ว

3.2.1 $A(BC) = (AB)C$

3.2.2 $\underline{0}_{r\times m}A = \underline{0}_{r\times n}$ , $A\underline{0}_{n\times p} = \underline{0}_{m\times p}$

3.2.3 $I_mA = A$ , $AI_n = A$

3.2.4 $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

3.2.5 $A(B+D) = AB + AD$ เมื่อ D เป็น $n \times p$ เมทริกซ์

3.2.6 $(A + E)B = AB + EB$ เมื่อ E เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

3.2.7 $(A + B)^t = A^t + B^t$ เมื่อ F เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

3.2.8 $(AB)^t = B^t A^t$

3.2.9 $(A^t)^t = A$

3.2.10 $(cA)^t = cA^t$

**4. กระบวนการจัดการเรียนรู้**

4.1 แจ้งจุดประสงค์ให้นักเรียนทราบว่า หลังจากเรียนคาบนี้แล้วนักเรียนต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับ การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ และนำสมบัติเกี่ยวกับการคูณไปใช้ได้

4.2 แจกเอกสารประกอบการเรียนหน้า 30 - 35 ให้นักเรียนพิจารณาและฝึกทำในตัวอย่างที่ 9

4.3 ให้นักเรียนฝึกหาผลคูณในตัวอย่างที่ 10 , 11 , 12 และ 13

4.4 จากผลในตัวอย่างที่ 10 และ 13 ให้นักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

4.5 นำสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ไปใช้แก้ปัญหา

**5. แหล่งการเรียนรู้**

- ❖ เอกสารประกอบการเรียน
- ❖ หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมเล่ม 2 ของ สสวท.

**6. กระบวนการวัดผลประเมินผล**

6.1 สังเกตการตอบคำถาม

6.2 ตรวจแบบฝึกหัดในเอกสาร

6.3 ทดสอบย่อย

**7. บันทึกหลังสอน**

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

**8. กิจกรรมเสนอแนะ**

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง **การหาอินเวอร์สของเมทริกซ์มิติ $2 \times 2$** มัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 1 ชั่วโมง

---

**ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ การหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

**1. จุดประสงค์การเรียนรู้**

การหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์มิติ $2 \times 2$ ได้

**2. แนวคิดหลัก**

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

**3. เนื้อหาสาระ**

3.1 เมทริกซ์เอกลักษณ์

> **บทนิยาม** สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จะให้ $I_n = A = [i_{jk}]_{m\times n}$ มีสมาชิกดังนี้
>
> $$i_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } j = k \\ 0 & \text{เมื่อ } j \neq k \end{cases}$$
>
> และเรียก $I_n$ ว่าเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n \times n$

3.2 อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

> **บทนิยาม** ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ถ้า B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ที่มีสมบัติว่า $AB = BA = I_n$ แล้วเรียก B ว่าเป็นตัวผกผันการคูณของ A และเขียนแทน B ด้วย $A^{-1}$

3.3 ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

3.4 สมบัติเกี่ยวกับอินเวอร์สของเมทริกซ์

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ $2 \times 2$

3.4.1 $(A^{-1})^{-1} = A$

3.4.2 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.4.3 $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$

3.4.4 $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$

**4. กระบวนการจัดการเรียนรู้**

4.1 สนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับเอกลักษณ์ในเรื่องจำนวนจริง แล้วอธิบายเอกลักษณ์การคูณของเมทริกซ์ ตามเอกสารหน้า 36

4.2 ทบทวนสมบัติเกี่ยวกับอินเวอร์สการคูณ คือ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

4.3 แบ่งนักเรียนเป็น 5 กลุ่ม ให้หาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A ในตัวอย่างที่ 14 หน้า 36 กลุ่มละ 1 ข้อ โดยใช้วิธีสมมุติ $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ แล้วใช้สมบัติของอินเวอร์ส $AA^{-1} = I$ หาค่า $x_1, x_2, x_3, x_4$

4.4 ให้ตัวแทนกลุ่มมาเสนองานหน้าห้อง (สุ่ม 2 – 3 กลุ่ม)

4.5 ให้กลุ่มที่ได้ข้อ 2 จากโจทย์ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แสดงวิธีหา

$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ แล้วครูสรุปปิดท้ายว่า ที่ได้คือ สูตรลัดในการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ $2 \times 2$

4.6 ให้นักเรียนทำแบบฝึกในตัวอย่างที่ 15 , 16 ใช้เอกสารหน้า 37

4.7 ครู – นักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติเกี่ยวกับอินเวอร์สของเมทริกซ์

**5. แหล่งการเรียนรู้**

- เอกสารประกอบการเรียน
- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมเล่ม 2 ของ สสวท.

**6. กระบวนการวัดผลประเมินผล**

6.1 สังเกตการตอบคำถาม

6.2 ตรวจแบบฝึกหัดในเอกสาร

6.3 ทดสอบย่อย

**7. บันทึกหลังสอน**

…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………

**8. กิจกรรมเสนอแนะ**

…………………………………………………………………………………………………………....
.............……………………………………………………………………………………………………
.............……………………………………………………………………………………………………

# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง **ดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์มิติ $2\times2$** มัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

**ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** มีความรู้ความเข้าใจ และหาดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ มิติ $2\times2$

**1. จุดประสงค์การเรียนรู้**

1.1 หาดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ มิติ $2\times2$ ได้
1.2 บอกสมบัติของดีเทอร์มินันท์ได้
1.3 นำสมบัติของดีเทอร์มินันท์ไปใช้แก้ปัญหาได้

**2. แนวคิดหลัก**

กำหนด A เป็นเมทริกซ์ มิติ $2\times2$ โดยที่ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว det(A) = ad - bc

**3. เนื้อหาสาระ**

3.1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้วดีเทอร์มินันท์ของ A ใช้สัญลักษณ์ det (A) หรือ $|A|$ หรือ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ โดยที่ det(A) = ad – bc

3.2 สมบัติของดีเทอร์มินันท์

3.2.1 ถ้า A = B แล้ว det(A) = det(B)
3.2.2 ถ้า det(A) = det(B) แล้วไม่สามารถสรุปได้ว่า A = B
3.2.3 $\det(A^t) = \det(A)$
3.2.4 det(AB) = det(A) det(B)
3.2.5 $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
3.2.6 $\det(cA) = c^n\det(A)$
3.2.7 $\det(A^n) = (\det(A))^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

**4. กระบวนการจัดการเรียนรู้**

4.1 ครูบอกนิยามของเมทริกซ์ มิติ $2\times2$

**บทนิยาม** ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้วดีเทอร์มินันท์ของ A ใช้สัญลักษณ์ det (A) หรือ $|A|$ หรือ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ โดยที่ det(A) = ad – bc

4.2 แจกเอกสารประกอบการเรียน หน้า 38 นักเรียนทำแบบฝึกหัด

4.3 ให้นักเรียนสังเกตผลลัพธ์ที่ได้จากแบบฝึกแล้วช่วยกันสรุปสมบัติของดีเทอร์มินันท์

4.3.1 ถ้า A = B แล้ว det(A) = det(B)

4.3.2 ถ้า det(A) = det(B) แล้วไม่สามารถสรุปได้ว่า A = B

4.3.3 $\det(A^t) = \det(A)$

4.3.4 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

4.3.5 $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

4.3.6 $\det(cA) = c^n \det(A)$

4.3.7 $\det(A^n) = (\det(A))^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

4.4 นำสมบัติที่ได้ไปใช้แก้ปัญหา

4.5 ทำแบบฝึกหัดหน้า 39 เพิ่มเติมเป็นการบ้าน

**5. แหล่งการเรียนรู้**

- ❖ เอกสารประกอบการเรียน
- ❖ หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมเล่ม 2 ของ สสวท.

**6. กระบวนการวัดผลประเมินผล**

6.1 สังเกตการตอบคำถาม

6.2 ตรวจแบบฝึกหัดในเอกสาร

6.3 ทดสอบย่อย

**7. บันทึกหลังสอน**

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………....

**8. กิจกรรมเสนอแนะ**

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง **ดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์มิติ $n \times n$** มัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

**ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** มีความรู้ความเข้าใจ และหาดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ มิติ $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$

## 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 หาดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ มิติ $n \times n$ เมื่อ $n > 2$ ได้

1.2 บอกสมบัติของดีเทอร์มินันท์ได้

1.3 นำสมบัติของดีเทอร์มินันท์ไปใช้แก้ปัญหาได้

## 2. แนวคิดหลัก

กำหนด A เป็นเมทริกซ์ มิติ $n \times n$ เมื่อ $n > 2$ จะต้องหาโดยวิธีกระจายโคแฟคเตอร์

## 3. เนื้อหาสาระ

3.1 ไมเนอร์ของเมทริกซ์ A

> **บทนิยาม** ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ แล้วไมเนอร์ (Minor) ของ A ใช้สัญลักษณ์ $M_{ij}(A)$ คือดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i หลักที่ j ของ A ออก

3.2 โคแฟคเตอร์ของเมทริกซ์ A

> **บทนิยาม** ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ แล้วตัวประกอบร่วม (Cofactor) ของ $a_{ij}$ แทนด้วย $C_{ij}(A)$ คือผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ $M_{ij}(A)$

3.3 ดีเทอร์มินันท์ของ **A**

> **บทนิยาม** ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ดีเทอร์มินันท์ของ A คือ $a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A) + \ldots + a_{1n}C_{1n}(A)$

**4. กระบวนการจัดการเรียนรู้**

4.1 ทบทวนการดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ มิติ $2\times2$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้วดีเทอร์มินันท์ของ A ใช้สัญลักษณ์ det (A) หรือ $|A|$ หรือ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ โดยที่ det(A) = ad – bc

4.2 แจกเอกสารประกอบการเรียน หน้า 38-43 ครูบอกนิยามการหาไมเนอร์ของสมาชิกใดๆ โคแฟคเตอร์สมาชิกใดๆ และค่าดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ A มิติ $2\times2$

4.3 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหน้า 38-39

4.4 ให้นักเรียนฝึกหาไมเนอร์ของสมาชิกใดๆ ของ A หน้า 40

4.5 ให้นักเรียนฝึกหาโคแฟคเตอร์สมาชิกใดๆของ A หน้า 41

4.6 ให้นักเรียนฝึกหาค่าดีเทอร์มินันท์ของ A หน้า 42

4.7 ศึกษาและนำสมบัติของดีเทอร์มินันท์หน้า 43-45 ไปใช้แก้ปัญหาโจทย์

4.8 ฝึกทำแบบฝึกหัดหน้า 46

**5. แหล่งการเรียนรู้**

- เอกสารประกอบการเรียน
- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมเล่ม 2 ของ สสวท.

**6. กระบวนการวัดผลประเมินผล**

6.1 สังเกตการตอบคำถาม

6.2 ตรวจแบบฝึกหัดในเอกสาร

6.3 ทดสอบย่อย

**7. บันทึกหลังสอน**

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

**8. กิจกรรมเสนอแนะ**

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง **อินเวอร์สของเมทริกซ์มิติ n×n** มัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

**ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** มีความรู้ความเข้าใจ และหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ มิติ n×n

## 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หาอินเวอร์สของเมทริกซ์ มิติ n×n เมื่อ $n \geq 2$ ได้

## 2. แนวคิดหลัก

กำหนด A เป็นเมทริกซ์ มิติ n×n เมื่อ $n \geq 2$ และ adj(A) คือแอดจอยต์ของเมทริกซ์ A จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj\,(A)$

## 3. เนื้อหาสาระ

3.1 โคแฟคเตอร์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A ( Cofactor Matrix ) แทนด้วย cof(A) คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนสมาชิก $a_{ij}$ ใดๆของ A ด้วย โคแฟคเตอร์ $C_{ij}$ ของเมทริกซ์ A ดังนี้

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ $\text{cof}\,(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}$

3.2 แอดจอยต์เมทริกซ์ ( Adjoint Matrix ) ของ A ใช้สัญลักษณ์ adj(A) คือเมทริกซ์ที่เป็นทรานสโพสของ cof (A)

3.3 ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ และ $\det(A) \neq 0$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj\,(A)$

## 4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 บอกนิยาม โคแฟคเตอร์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A ( Cofactor Matrix ) แทนด้วย cof(A) คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนสมาชิก $a_{ij}$ ใดๆ ของ A ด้วย โคแฟคเตอร์ $C_{ij}$ ของเมทริกซ์ A ดังนี้

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ $\text{cof}\,(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}$

ให้นักเรียนฝึกหา cof(A) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

4.2 จากเมทริกซ์ A ใน 4.1 ให้นักเรียนหาแอดจอยด์เมทริกซ์ ( Adjoint Matrix ) ของ A ใช้สัญลักษณ์ adj(A) คือเมทริกซ์ที่เป็นทรานสโพสของ cof (A)

4.3 บอกนิยามอินเวอร์สของ A คือ $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj\ (A)$ ให้นักเรียนหาอินเวอร์ส

4.4 แจกเอกสารหน้า 47-48 นักเรียนฝึกทำแบบฝึกหัด

**5. แหล่งการเรียนรู้**

- เอกสารประกอบการเรียน
- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมเล่ม 2 ของ สสวท.

**6. กระบวนการวัดผลประเมินผล**

6.1 สังเกตการตอบคำถาม

6.2 ตรวจแบบฝึกหัดในเอกสาร

6.3 ทดสอบย่อย

**7. บันทึกหลังสอน**

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**8. กิจกรรมเสนอแนะ**

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง **ระบบสมการเชิงเส้น** มัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 5 ชั่วโมง

**ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง** วิเคราะห์และหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้

## 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎคราเมอร์ได้

1.2 หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การกระทำทางแถว ( Row operation )ได้

## 2. แนวคิดหลัก

คำตอบของสมการเชิงเส้นคือค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริง และในการหาคำตอบของสมการสามารถทำได้หลายวิธี

## 3. เนื้อหาสาระ

3.1 ระบบสมการเชิงเส้น และ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

**บทนิยาม** ให้ a , b , c , d , e , f เป็นจำนวนจริงใดๆที่ a , b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ c , d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียก $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ ว่าเป็นระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

คำตอบของระบบสมการนี้คือค่าของ x และ y ที่ทำให้สมการเป็นจริง

**บทนิยาม** ให้ $a_1 , a_2 , a_3 ,\ldots, a_n$ b เป็นจำนวนจริงใดๆที่ $a_1 , a_2 , a_3 ,\ldots, a_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกสมการ $a_1x_1 + a_2 x_2 + a_3x_3 +\ldots+ a_n x_n = b$ เป็นสมการเชิงเส้น n ตัวแปร โดยที่ $x_1 , x_2 , x_3 ,\ldots x_n$ เป็นตัวแปร

3.2 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎคราเมอร์

เมื่อกำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร โดยที่ AX = B เป็นสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการนี้

ให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้วคำตอบของระบบสมการนี้คือ

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}\ ,\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

เมื่อ $A_i$ คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วย $b_i$ ทุก $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

3.3 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การกระทำทางแถว

เปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

**บทนิยาม** กำหนดสมการเชิงเส้น m สมการ และ n ตัวแปร

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

เมทริกซ์แต่งเติม ( augmented matrix ) ของระบบสมการนี้คือ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

**บทนิยาม** ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ เรียกการดำเนินการต่อไปนี้ว่าเป็นการดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์ A

1. สลับที่แถวที่ i และ j ของ A เขียนแทนด้วั $R_{ij}$
2. คูณแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย $cR_i$
3. เปลี่ยนแถวที่ i ของ A โดยนำค่าคงที่ c คูณแถวที่ j แล้วนำไปบวกกับแถวที่ i เขียนแทนด้วย $R_i + cR_j$

**บทนิยาม** ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการตามแถวแล้วจะกล่าวว่า B สมมูลแบบแถว ( row equivalent ) กับ A เขียนแทน B สมมูลแบบแถวกับ A ด้วย $A \sim B$

**4. กระบวนการจัดการเรียนรู้**

4.1 ทบทวนการหาคำตอบของสมการเชิงเส้นโดยวิธีกำจัดตัวแปร 3 ตัวอย่างคือ ( 1 คาบ )

**ตัวอย่างที่ 1** จงแก้ระบบสมการ

$$x + y + z = 6$$

$$x + y - z = 0$$

$$x + 2y + z = 8$$

**ตัวอย่างที่ 2** จงแก้ระบบสมการ

$$x + 2y + z = 5$$

$$x + 3y + 2z = 8$$

$$x + 4y + 3z = 11$$

**ตัวอย่างที่ 3** จงแก้ระบบสมการ

$$x + y + 2z = 3$$

$$x + 3y + 2z = 9$$

$$x - y + 2z = -1$$

แล้วให้นักเรียนพิจารณาจำนวนคำตอบของทั้ง 3 สมการ ซึ่งจะสรุปได้ดังนี้
ถ้าแบ่งระบบสมการเชิงเส้นตามจำนวนคำตอบของระบบสมการ จะสามารถแบ่งได้ 3 แบบ ดังนี้

1. ระบบสมการที่มีคำตอบเดียว ( ตัวอย่างที่ 1 )
2. ระบบสมการที่มีคำตอบนับไม่ถ้วน (ตัวอย่างที่ 2 )
3. ระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ ( ตัวอย่างที่ 3 )

4.2 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ( สสวท. ) แบบฝึกหัด 1.1

4.3 ฝึกให้นักเรียนมีทักษะในการเปลี่ยนจากระบบสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม และในทางกลับกัน ให้เปลี่ยนจากเมทริกซ์แต่งเติมเป็นระบบสมการ เช่น ( 2 คาบ )

จากระบบสมการ

$$x + y + 2z = 3$$

$$x + 3y + 2z = 9$$

$$x - y + 2z = -1$$

เขียนเป็นเมทริกซ์แต่งเติมได้คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

และถ้ามีเมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

เขียนเป็นสมการดังนี้

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - t &= 1 \\ 2x - 2y - z - 2t &= 5 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 2 \\ x + 3y + z + 2t &= 4 \end{aligned}$$

4.4 ยกตัวอย่างการหาคำตอบของสมการเชิงเส้น โดยวิธีนำอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์คูณทั้งสองข้าง เช่น

จากสมการ

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

4.5 ให้นักเรียนฝึกหาคำตอบตามเอกสารประกอบการเรียนหน้า 49

4.6 ฝึกให้นักเรียนหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎคราเมอร์ เมื่อกำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร โดยที่ AX = B เป็นสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการนี้

ให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้วคำตอบของระบบสมการนี้คือ

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \;,\; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \;,\; \ldots \;,\; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

เมื่อ $A_i$ คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วย B ทุก $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ เช่น จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 8 \end{aligned}$$

4.7 ให้นักเรียนฝึกหาคำตอบตามเอกสารประกอบการเรียนหน้า 50 โดยใช้กฎคราเมอร์

4.8 ฝึกให้นักเรียนหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการทางแถว ( 2 คาบ ) ตามเอกสารหน้า 50-54

**5. แหล่งการเรียนรู้**

5.1 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมเล่ม 2 ของ สสวท.

5.2 เอกสารประกอบการเรียน

**6. กระบวนการวัดผลประเมินผล**

6.1 สังเกตการตอบคำถาม

6.2 ตรวจแบบฝึกหัดที่

6.3 ทดสอบท้ายบท

**7. บันทึกหลังสอน**

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

**8. กิจกรรมเสนอแนะ**

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

# เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์

## 1. ลักษณะของเมทริกซ์

ถ้านำจำนวนมาเขียนเรียงกันเป็นแถวๆ ละเท่าๆ กัน แล้วปิดล้อมด้วยเครื่องหมายวงเล็บเล็กหรือวงเล็บใหญ่ เช่น

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ เป็นต้น

**เราเรียกสัญลักษณ์เหล่านี้ว่า เมทริกซ์**

การเรียกชื่อเมทริกซ์นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ เช่น เมทริกซ์ A เมทริกซ์ B และเรียกแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ว่าเป็นสมาชิกของเมทริกซ์

สมาชิกที่เรียงกันตามแนวนอน เรียกว่าสมาชิกในแถว (row) ของเมทริกซ์

สมาชิกที่เรียงกันตามแนวตั้ง เรียกว่าสมาชิกในหลัก (column) ของเมทริกซ์

เมทริกซ์ที่มี m แถว n หลัก เรียกว่ามีมิติ $m \times n$ (อ่านว่า m คูณ n) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$ มีมิติ $3 \times 2$ หรือเป็น $3 \times 2$ เมทริกซ์

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$ มีมิติ $3 \times 1$ หรือเป็น $3 \times 1$ เมทริกซ์

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ มีมิติ $3 \times 3$ หรือเป็น $3 \times 3$ เมทริกซ์

## 2. การเขียนรูปทั่วไปของเมทริกซ์

โดยทั่วไปนิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กแทนสมาชิกของเมทริกซ์ และเพื่อบอกตำแหน่งว่าอยู่แถวใด และหลักใด จึงเขียนตัว subscript ตรงมุมล่างขวา เช่น

$a_{11}$ แทนสมาชิกของเมทริกซ์ A ที่อยู่ตำแหน่ง แถวที่ 1 และหลักที่ 1

$a_{23}$ แทนสมาชิกของเมทริกซ์ A ที่อยู่ตำแหน่ง แถวที่ 2 และหลักที่ 3

$a_{34}$ แทนสมาชิกของเมทริกซ์ A ที่อยู่ตำแหน่ง แถวที่ 3 และหลักที่ 4

ดังนั้น ถ้า A เป็นเมทริกซ์มีมิติ m x n เขียนเป็นรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรือ เขียนเป็น $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

**ตัวอย่างที่ 1** กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 9 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

จงหา

(1) มิติของ A คือ

……………..………………………

(2) $a_{12}$ =

………………………………………

(3) $a_{32}$ =

…………………………………….

(4) $2a_{24} + 3a_{22}$ =

………………………………………

……………………………………..

(5) $a_{41}\ a_{34}$ =

…..…………………………………

…………………………………….

**ตัวอย่างที่ 2** กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

จงหา

(1) มิติของ A คือ

……………………..…………………

(2) มิติของ B คือ

…………………..…………………

(3) มิติของ B คือ

…………………..…………………

(4) $a_{12}\ b_{21}$

..……………………………………

..……………………………………

(5) $a_{32}\ b_{23} + a_{13}b_{21} + a_{11}b_{22}$

..……………………………………

..……………………………………

(6) $a_{32}\ b_{23}c_{11} + a_{13}b_{21}c_{22} + a_{11}b_{22}c_{33}$

..……………………………………

..……………………………………

**ตัวอย่างที่ 3** จงเขียนเมทริกซ์

$A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ โดยที่ $a_{ij}$ = ij เมื่อ

i = 1 , 2 , 3 , 4 และ

j = 1 , 2 , 3 , 4

……………………………………………...

……………………………………………...

……………………………………………...

……………………………………………...

**3. เมทริกซ์ชนิดต่างๆ**

3.1 เมทริกซ์แถว (row matrix) คือเมทริกซ์ที่มีเพียง 1 แถว และจะมีกี่หลักก็ได้ มีมิติเป็น $1\times n$ เช่น

$\begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix}$ มีมิติ $1\times 2$

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ มีมิติ $1\times 3$

$\begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$ มีมิติ $1\times 1$ เป็นต้น

3.2 เมทริกซ์หลัก ( column matrix ) คือเมทริกซ์ที่มีเพียง 1 หลัก และจะมีกี่แถวก็ได้ มีมิติเป็น $n\times 1$ เช่น

$\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ มีมิติ $2\times 1$

$\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ มีมิติ $3\times 1$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ มีมิติ $4\times 1$ เป็นต้น

3.3 เมทริกซ์ศูนย์ ( Zero matrix ) คือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ และจะมีกี่แถวหรือกี่หลักก็ได้

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นต้น

3.4 เมทริกซ์จัตุรัส ( square matrix ) คือเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก และมีมิติเป็น $n\times n$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น $2\times 2$ อาจเขียนเมทริกซ์ A เป็น $A_{2\times 2}$
2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น $n\times n$ อาจเขียนเมทริกซ์ A เป็น $A_{n\times n}$
3. สมาชิกในแนวทแยงหลัก คือสมาชิกในแนวเส้นทแยงจากมุมบนซ้ายไปล่างขวา

เช่น $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ สมาชิกในแนวทแยงหลักของ A คือ 4 , 7

$B = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ สมาชิกในแนวทแยงหลักของ B คือ 1 , 8 , 6

**4. การเท่ากันของเมทริกซ์**

> **นิยาม** ให้ $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $\mathrm{A} = [b_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว A = B ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ ทุกๆ ค่าของ i และ j

**ตัวอย่างที่ 4** กำหนดให้

4.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{16} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & (-2)^2 \\ -1 & 3^0 \end{bmatrix}$ , $c = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{16} \\ \sqrt[3]{-1} & \log 10 \end{bmatrix}$ , $D = \begin{bmatrix} \log_2 4 & \sqrt[3]{64} \\ \log \frac{1}{10} & \sin 90^{\circ} \end{bmatrix}$

จะพบว่า A = B = C = D เพราะว่า สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากันทุกตัว ดังนี้

ตำแหน่ง แถวที่ 1 หลักที่ 1 คือ $2 = \sqrt{4} = \log_2 4$

ตำแหน่ง แถวที่ 1 หลักที่ 2 คือ $\sqrt{16} = (-2)^2 = \sqrt[3]{64}$

ตำแหน่ง แถวที่ 2 หลักที่ 1 คือ $-1 = \sqrt[3]{-1} = \log \frac{1}{10}$

ตำแหน่ง แถวที่ 2 หลักที่ 2 คือ $1 = 3^0 = \log 10 = \sin 90^{\circ}$

4.2 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ เพราะสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 3 ไม่เท่ากัน

4.3 จงหา a และ b ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} a+b & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \end{bmatrix}$

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

**5. ทรานสโพสเมทริกซ์ ( Transpose of Matrix )**

ทรานสโพสเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย “ $A^t$ ” คือ เมทริกซ์ที่เกิดจากการเอาสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 1 ของ A มาเขียนเป็นหลักที่ 1 และเอาสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 2 ของ A มาเขียนเป็นหลักที่ 2 และทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนหมด เช่น

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

**ตัวอย่างที่ 5** จงสร้างเมทริกซ์ A ให้มีมิติเป็น $2\times3$ , $3\times4$ , $4\times2$ แล้วหา $A^t$

..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................
..............................................................................................................................

## 6. การบวกเมทริกซ์

> **นิยาม** ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [a_{ij}]_{m\times n}$ จะได้ว่า $A+B = [c_{ij}]_{m\times n}$ โดยที่
> $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

จากนิยามสรุปได้ว่า ในการบวกเมทริกซ์จะเกิดขึ้นได้เมื่อมีเงื่อนไข 2 ประการคือ

1. เมทริกซ์ ทั้งสองต้องมีมิติเท่ากัน
2. นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมา บวกกัน

**ตัวอย่างที่ 6** กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

จงหา

1. $(A + B) + C$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

2. $A + (B + C)$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

3. $(A + B)^t$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

4. $A^t$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

5. $B^t$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

6. $A^t + B^t$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

## 7. การลบเมทริกซ์

> **นิยาม** ให้ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ จะได้ว่า $A-B=[c_{ij}]_{m\times n}$ โดยที่
> $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

จากนิยามสรุปได้ว่า ในการลบเมทริกซ์จะเกิดขึ้นได้เมื่อมีเงื่อนไข 2 ประการคือ

1. เมทริกซ์ ทั้งสองต้องมีมิติเท่ากัน
2. นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาลบกัน

**ตัวอย่างที่ 7** กำหนด $A=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 7\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 9\\ 0 & -8 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & -5 & 9\\ 4 & 2 & -5\end{bmatrix}$

จงหา

1. $(A-B)-C$

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

2. $A-(B-C)$

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

3. $(A-B)^t$

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

4. $A^t$

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

5. $B^t$

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

6. $A^t-B^t$

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

.......................................................................................................................................

## 8. การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

| |
|---|
| **นิยาม** ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ $cA = [c\ \ a_{ij}]_{m\times n}$ |

จากนิยามสรุปได้ว่าในการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงใด ให้นำจำนวนจริงนั้นคูณสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์นั้น

**ตัวอย่างที่ 8** กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

จงหา

1. 2A

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2. 3B

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

3. 4C

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

4. 2A + 3B

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

5. –5 (4C )

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

6. $2A^t - 3B^t$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

**9. การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์**

ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m\times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n\times k$ ผลคูณของ A กับ B เขียนแทนด้วย AB จะเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น $m\times k$ ซึ่งสมาชิกแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ AB ได้จากการนำสมาชิกแถวที่ i ของ A คูณกับสมาชิกสมนัยหลักที่ j ของ B จนครบทุกคู่แล้วนำผลคูณมาบวกกัน

**ดังนั้น**

**ถ้ากำหนด** $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ $A=[b_{ij}]_{m\times k}$ จะได้ว่า $AB = [c_{ij}]_{m\times k}$

โดยที่

$$\boxed{C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots a_{in}b_{nj}}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & b_{1j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & b_{2j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & b_{3j} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & b_{mj} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & c_{ij} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}$$

**ข้อสังเกต** ผลคูณของ AB จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B และมิติของ AB จะมีจำนวนแถวเท่ากับแถวของ A และมีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของ B

A B AB

$m\times n$ $n\times k$ $m\times k$

**ตัวอย่างที่ 9** กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

จงหา AB

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

**ตัวอย่างที่ 10** กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ถ้าหาได้จงหาเมทริกซ์หรือจำนวนต่อไปนี้

1. D + E

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

2. D – E

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

3. $2A^t + C$

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

4. $D^t - E^t$

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

5. $(D - E)^t$

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

6. AB

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

7. BA

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

8. (3E)D

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

9. (AB)C

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

10. A(BC)

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

11. $(DA)^t$

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

12. $(C^t B) A^t$

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**ตัวอย่างที่ 11** กำหนดให้ A , B , C , D และ E เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติดังนี้

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| $4\times5$ | $4\times5$ | $5\times2$ | $4\times2$ | $5\times4$ |

จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ที่แสดงต่อไปนี้นิยามหรือไม่ ถ้านิยามจงหามิติของเมทริกซ์ในข้อนั้นด้วย

1. AB ………………………………………………………………..
2. BA ………………………………………………………………..
3. A + B ………………………………………………………………..
4. AC + D ………………………………………………………………..
5. AE + B ………………………………………………………………..
6. E ( A + B ) ………………………………………………………………..
7. EAC ………………………………………………………………..
8. $E^t C$ ………………………………………………………………..
9. $(A^t + E)D$ ………………………………………………………………..

**ตัวอย่างที่ 12** จงหาค่า a , b , c , d ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….

**ตัวอย่างที่ 13** กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

จงหาเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $A^2$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2. $B^2$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3. $(AB)^t$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4. $B^tA^t$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

5. A(B+C)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

6. AB +AC

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

7. (A+B) (A–B)

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

8. $A^2 - B^2$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

9. (A+B) (A+B)

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

10. $A^2+2AB + B^2$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

จากตัวอย่างข้างบนสรุปสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ได้ดังนี้

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

**10. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix )** คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวทแยงหลักเป็น 1 ส่วนสมาชิกตัวอื่นๆ เป็น 0 เช่น

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยทั่วไปถ้าเป็นเมทริกซ์ $n \times n$ จะได้ดังนี้

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**11. การหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์**

ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A แทนด้วย $A^{-1}$

โดยที่ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

**ตัวอย่างที่ 14** จงหา $A^{-1}$ เมื่อกำหนด A ต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

**ตัวอย่างที่ 15** กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
2. $B^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
3. $(A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
4. $(B^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
5. $AB = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
6. $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
7. $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
8. $A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
9. $A^{t} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
10. $(A^{-1})^{t} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
11. $(A^{t})^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
12. $3A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
13. $(3A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
14. $\frac{1}{3}A^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$
15. $(kA)^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

จากตัวอย่างสรุปสมบัติบางอย่างได้ดังนี้

1. ………………………………………
2. ………………………………………
3. ………………………………………
4. ………………………………………
5. ………………………………………

**ตัวอย่างที่ 16** จงหาเมทริกซ์ A หรือ B ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

2. $B \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

## 12. ดีเทอร์มินันท์ ( Determinant )

บทนิยาม ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ค่าดีเทอร์มินันท์ของ A เขียนแทนด้วย det (A) หรือ $|A|$ หาได้ดังนี้

1. ถ้า A เป็น $1 \times 1$ เมทริกซ์ ซึ่ง $A = [a]$ จะได้ $\det(A) = a$
2. ถ้า A เป็น $2 \times 2$ เมทริกซ์ ซึ่ง $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = ad - bc$

**ตัวอย่างที่ 17** กำหนด $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ , $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ

1. $A^t = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
2. $B^t = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
3. $C^t = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
4. $A^{-1} = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
5. $B^{-1} = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
6. $C^{-1} = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
7. $\det(A) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
8. $\det(B) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
9. $\det(C) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
10. $\det(A^t) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
11. $\det(B^t) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
12. $\det(C^t) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
13. $\det(AB) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
14. $\det(ABC) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
15. $\det(A)\det(B) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
16. $\det(A)\det(B)\det(C) = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
17. $\det(AB)^t = \begin{bmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$

**จากตัวอย่างข้างบนได้ข้อสรุปบางอย่างดังนี้**

1. ถ้า A = B แล้ว ………………………..
2. ถ้า det (A) = det (B) แล้ว …………

   ………………………………………..
3. $\det(A^t)$ = ……………………………..
4. $\det(ABC)$ = …………………………..
5. $\det(A^{-1})$ = ……………………………
6. ถ้า A มีมิติเป็น $2 \times 2$ และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว $\det(cA)$ =

   ………………………………………..
7. ถ้า A มีมิติเป็น $n \times n$ และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว $\det(cA)$ =

   ……………………………………….
8. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $\det(A^n)$ = ………………………………………

## แบบฝึกหัด

จงใช้สมบัติของดีเทอร์มินันท์หาค่าต่อไปนี้

1. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ , $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) det (A) =…………………………………......

(2) det (B) =…………………………………... .

(3) det (C) =………………………………….....

(4) det (ABC ) = ……………………………

…………………………………………………..

(5) det ($A^tB^tC^t$ ) = ………………………...

…………………………………………………..

(6) det ($4A^tBC^t$ ) = ………………………..

…………………………………………………...

(7) det ($A^2 B^3 C^2$ ) =………………………

…………………………………………………...

2. ถ้า $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$

…………………………………………………...

…………………………………………………...

…………………………………………………...

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & y \end{bmatrix}$ และ

det ( AB + B ) = –64 จงหา $B^{-1}$

…………………………………………………...

…………………………………………………...

…………………………………………………...

…………………………………………………...

4. กำหนด $A = \begin{bmatrix} \sin 2x & \sin 3x \\ \cos 2x & \cos 3x \end{bmatrix}$ ,

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ถ้า x สอดคล้องกับ

det ($A^2$ ) +det ( –A) + det ( 2I) = 6

จงหา x

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

5. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

จงหา det $( AB + AC )^t$

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

6. ให้ x เป็นจำนวนเต็ม $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$

และ det (A) = 3 , det ($BA + BA^{-1}$ ) = 1

จงหา det (B)

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

**ดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ $n \times n$**

ในการหาดีเทอร์มินันท์ของ $n \times n$ นักเรียนต้องรู้เกี่ยวกับ ไมเนอร์ของสมาชิกใดๆ และโคแฟคเตอร์ของสมาชิกใดๆ ของเมทริกซ์ดังนี้

❖ ไมเนอร์ ( Minor ) ของสมาชิก $a_{ij}$ ใดๆ คือค่าดีเทอร์มินันท์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออกไป เขียนแทนด้วย $M_{ij}$

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

ไมเนอร์ของ $a_{11}$ คือ $M_{11}(A) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ =………………………………………………...……

ไมเนอร์ของ $a_{21}$ คือ $M_{21}(A) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ =……………………………………………………..

ไมเนอร์ของ $a_{31}$ คือ $M_{31}(A) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ =……………………………………………………..

(1) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, จงหา $M_{21}(A)$ =……………………………………….………

(2) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, จงหา $M_{23}(A)$ =………………………………………………..

(3) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, จงหา $M_{31}(A)$ =…………………………….…………...……..

(4) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, จงหา $M_{21}(A)$ =…………………………………………………..

(5) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, จงหา $M_{22}(A)$ =……………………………………..…..……..

(6) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, จงหาไมเนอร์ของ-1 =…………………………………...…..……

(7) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, จงหา ไมเนอร์ของ 4 =………………………….….…...…..

❖ โคแฟคเตอร์ (Cofactor) ของสมาชิกใดๆ แทนด้วย $C_{ij}(A)$ คือผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ กับไมเนอร์ (Minor) ของสมาชิกตัวนั้น ดังนั้น

โคแฟคเตอร์ของสมาชิก $a_{ij}$ แทนด้วย $C_{ij}(A)$ โดยที่ $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ , $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

โคแฟคเตอร์ของ $a_{11} = C_{11}(A) = (-1)^{1+1}M_{11}(A) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

โคแฟคเตอร์ของ $a_{21} = C_{21}(A) = (-1)^{2+1} M_{21}(A) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$

โคแฟคเตอร์ของ $a_{22} = C_{22}(A) = (-1)^{2+2} M_{22}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$

❖ การหาดีเทอร์มินันท์ ให้ทำตามขั้นตอนดังนี้

1. เลือกแถวใดแถวหนึ่งไว้ 1 แถว ( หรือหลักใดหลักหนึ่ง)
2. หาโคแฟคเตอร์ของสมาชิกทุกตัวในแถวนั้น ( หรือหลักนั้น )
3. นำสมาชิกทุกตัวในแถวนั้นคูณกับโคแฟคเตอร์ของตัวนั้น แล้วนำผลคูณทุกคู่มารวมกัน ผลที่ได้คือค่าดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์

เช่น กำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ หาดีเทอร์มินันท์ได้ดังนี้

ถ้าเลือกแถวที่ 1 $\det(A) = a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A)$

ถ้าเลือกแถวที่ 2 $\det(A) = a_{21}C_{21}(A) + a_{22}C_{22}(A) + a_{23}C_{23}(A)$

ถ้าเลือกหลักที่ 3 $\det(A) = a_{13}C_{13}(A) + a_{23}C_{23}(A) + a_{33}C_{33}(A)$

(1) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, จงหา $\det(A)$

……………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………………

(2) กำหนด $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, จงหา det (A)

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

(3) กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, จงหา det (A)

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

จากผลที่ได้จากข้อ 3 จะได้หลักในการหาดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์มิติ $3 \times 3$ ดังนี้

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

(4) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, จงหา det (A)

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

❖ **สรุปการหา ดีเทอร์มินันท์ ( Determinant ) ของเมทริกซ์ได้ดังนี้**

**นิยาม** กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ที่มีขนาด $n \times n$ ค่าดีเทอร์มินันท์ของ A เขียนแทนด้วย det A หรือ $|A|$ ซึ่งหาได้ดังนี้

**1. เมทริกซ์ขนาด $1 \times 1$**

กำหนด $A = [a]$ จะได้ว่า $\det A = |a| = a$

**2. เมทริกซ์ขนาด $2 \times 2$**

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ โดยที่ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ เป็นจำนวนจริง แล้ว

ดีเทอร์มินันท์ของ A = $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

**3. เมทริกซ์ขนาด $3 \times 3$**

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ให้เพิ่มหลักที่ 1 หลักที่ 2 ต่อท้ายหลักที่ 3 ดังนี้

$$\det A = \begin{array}{|ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

**ตัวอย่างที่ 18** จงหา det ( A ) เมื่อกำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**4. เมทริกซ์ขนาด $n \times n$ การหา det ให้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้**

ขั้นที่ 1 เลือกแถวหรือ หลัก มาเพียง 1 แถว หรือ 1 หลัก

ขั้นที่ 2 หา cofactors ของสมาชิกต่างๆ ในแถวหรือ หลักที่เลือกมา

ขั้นที่ 3 หาผลรวมของผลคูณของสมาชิก กับ cofactors

**สรุปสมบัติของเมทริกซ์ และดีเทอร์มินันท์**

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$
5. $AB$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $BA$
6. $A(BC) = (AB)C$
7. $A.I = I.A = A$
8. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน
9. $k(A+B) = kA + kB,\ k \in R$
10. $(k_1 . k_2)A = k_1(k_2A) = k_2(k_1A)$
11. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A,\ k_1, k_2 \in R$
12. $k(AB) = (kA)B = A(kB),\ k \in R$
13. $0A = \underline{0} = A0$
14. $A(B+C) = AB + AC$
15. $(A^t)^t = A$
16. $(A+B)^t = A^t + B^t$
17. $(AB)^t = B^tA^t,\ (kA)^t = kA^t,\ k \in R$
18. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1},\ (A^n)^t = (A^t)^n$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน
19. $(A^{-1})^{-1} = A,\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
    เมื่อ A , B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน
20. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}.A^{-1},\ k \neq 0$, เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน
21. $\det(AB) = \det(A) . \det(B)$
22. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},\ \det(A) \neq 0$
23. $\det(A^t) = \det(A)$
24. $\det(kA) = k^n \det(A)$, n คือมิติของ A
25. $\det(A^n) = [\det A]^n$
26. ถ้า $\det(A) = \det(B)$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ $A = B$
27. ถ้าสมาชิกของเมทริกซ์ A มีแถวใดแถวหนึ่ง หรือ หลักใดหลักหนึ่งเป็นศูนย์ทั้งหมด
    จะได้ $\det(A) = 0$

    เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$
28. ถ้าสมาชิกของเมทริกซ์ A มีสองแถวใดๆ หรือสอง หลักใดๆ เหมือนกัน
    จะได้ $\det(A) = 0$

    เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 10 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \end{vmatrix}$
29. ถ้าเมทริกซ์ A ที่กำหนดให้มีสมาชิกในสามเหลี่ยมบน หรือสามเหลี่ยมล่าง เป็นศูนย์หมด จะได้ det(A) เท่ากับ ผลคูณของสมาชิกในเส้นทแยงมุมหลัก ( Main Diagonal )

    เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times 6 = 24$

30. ถ้าสมาชิกในสองแถวใดๆ หรือ สองหลักใดๆ เป็น c เท่าของกันและกันจะมีค่าดีเทอร์มินันท์เท่ากับศูนย์

เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$ ( แถวที่ 2 เป็น 5 เท่า ของ แถวที่ 1 )

31. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่ง หรือหลักคู่ใดคู่หนึ่งของเมทริกซ์ A จะได้ว่า det B = -det A เช่น

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ สลับที่หลักที่ 1 กับ หลักที่ 2

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้ $|B| = -|A|$

32. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำค่าคงที่ c คูณแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง ของเมทริกซ์ A จะได้ว่า det B = c det A เช่น

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ เอา 2 คูณแถว 1

จะได้ $|B| = 2\,|A|$

33. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการนำค่าคงที่ c คูณแถวใดหรือหลักใด แล้วนำไปบวกกับแถวหรือหลักอีกอันหนึ่ง จะได้ว่า det B = det A เช่น $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ และ

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 11 & 5 & 10 \end{vmatrix}$ นำ 2 คูณแถวที่ 2 แล้วบวกแถว ที่ 3 จะได้ $|B| = |A|$

## แบบฝึกหัด

1. จงหาดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -2 & -5 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & \frac{1}{5} \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

2. จงหา x , y , z ที่ทำให้สมการเป็นจริง

1. $\begin{vmatrix} x^2 & 6 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 9$

2. $\begin{vmatrix} z & 2 & 2 \\ 0 & z & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{8}{3}$

3. $\begin{vmatrix} a & 2x & 1 \\ x & 0 & 0 \\ b & 5x & 1 \end{vmatrix} = -48$

4. $\begin{vmatrix} y & 5 \\ 10 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & y \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} x & 9 \\ 9 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 31 \\ -2 & x \end{vmatrix}$

3. จงหาค่าของ

1. $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ y & 4 & 5 \\ z & 5 & 6 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$

**13. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์**

**นิยาม** $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ เรียก $A^{-1}$ คืออินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A

**หมายเหตุ** 1. A เป็น Singular Matrix ( เมทริกซ์เอกฐาน ) เมื่อ A ไม่สามารถหาอินเวอร์สได้ [ det A = 0 ]

2. A เป็น Non - Singular Matrix ( เมทริกซ์ไม่เอกฐาน ) เมื่อ A สามารถหาอินเวอร์สได้ [ det A $\neq$ 0 ]

**13.1 เมทริกซ์ขนาด 1 × 1**

$A = [a]$ แล้ว $A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$ เมื่อ $a \neq 0$

**13.2 เมทริกซ์ขนาด 2 × 2**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \det A \neq 0$$

**13.3 เมทริกซ์ขนาด n × n**

การหาอินเวอร์สของเมทริกซ์มิติ n x n เมื่อ $n \geq 3$ นักเรียนต้องรู้จักเกี่ยวกับโคแฟคเตอร์เมทริกซ์ และแอดจอยท์เมทริกซ์ของเมทริกซ์เสียก่อน

**(1) โคแฟคเตอร์เมทริกซ์ของเมทริกซ์**

โคแฟคเตอร์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนสมาชิก $a_{ij}$ ใดๆ ของเมทริกซ์ A ด้วย โคแฟคเตอร์ของสมาชิกตัวนั้น $C_{ij}(A)$ และใช้สัญลักษณ์ cof (A) แทนโคแฟคเตอร์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A

เช่น ถ้ากำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ $\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}$

**จงหาโคแฟคเตอร์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A เมื่อ** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

**(2) แอดจอยท์เมทริกซ์ของเมทริกซ์**

แอดจอยท์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A แทนด้วย adj (A) คือทรานสโพสของโคแฟคเตอร์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A

adj (A) = ( cof (A) )$^t$

เช่น ถ้ากำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ $a\text{dj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^t$

**จงหาแอดจอยท์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A**

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**การหาอินเวอร์สของ $n \times n$ เมทริกซ์ หาได้ดังนี้**

| |
|---|
| ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.adj\,(A)$ |

**ตัวอย่างที่ 19** จงหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ A เมื่อกำหนด A ต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………...

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………...

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

2. จงเปลี่ยนสมการต่อไปนี้เป็นสมการเมทริกซ์

$4x + 3y + 2z = 5$

$3x - y - z = 6$

$-x + 2y + z = 1$

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

การแก้สมการโดยใช้อินเวอร์สให้ทำตามขั้นตอนดังนี้

1. เปลี่ยนจากสมการเชิงเส้นเป็นสมการเมทริกซ์
2. นำอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์คูณทั้งสองข้าง
3. ใช้คุณสมบัติการเท่ากันของเมทริกซ์หาค่าของตัวแปรที่ต้องการ

**ตัวอย่างที่ 20** จงหาคำตอบของสมการ

1. $2x - y = 4$

$x + y = 2$

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

1. $4x + 3y + 2z = 5$

$3x - y - z = 6$

$-x + 2y + z = 1$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

2. $2x + y - z = 5$

$3x - y - 2z = -3$

$x - 3y - 3z = -2$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

**วิธีที่ 2 ใช้วิธีการดำเนินการทางแถว**

วิธีการหาผลลัพธ์ของระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้การดำเนินทางแถวนี้ เหมือนกับการแก้สมการแบบธรรมดา เพียงแต่นำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าคงตัวมาเขียนเป็นเมทริกซ์ และเรียกเมทริกซ์นี้ว่า เมทริกซ์แต่งเติมแล้ว ( augmented matrix )

เช่น จากระบบสมการ

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมแล้ว คือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_2 & c_1 & \vdots & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \vdots & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \vdots & d_3 \end{bmatrix}$$

เมื่อได้เมทริกซ์แต่งเติมแล้ว นำเมทริกซ์ดังกล่าวมาปรับแต่งโดยใช้ขบวนการทางแถวเพื่อให้อยู่ในรูปที่สามารถหาค่าได้ และเพื่อให้นักเรียนได้เห็นภาพพจน์การแก้สมการด้วยวิธีเดิม เปรียบเทียบกับการดำเนินการทางแถวของเมทริกซ์ควบคู่กันไป ขอให้ดูจากตัวอย่างข้างล่างนี้

เช่น จงแก้สมการระบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ 5x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

**วิธีทำ** ระบบสมการ เมทริกซ์

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ 5x + y + 2z &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

นำแถว 2 บวกกับแถว 3 จะได้

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ 7x + 3z &= 2 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

เอา – 7 คูณแถว 1 แล้ว บวกกับแถว 3

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ -11z &= -5 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 \end{array}\right]$$

เอา $-\frac{1}{11}$ คูณ แถว 3 จะได้

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ z &= \frac{5}{11} \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{11} \end{array}\right]$$

เอา –1 คูณแถว 3 แล้วนำไปบวกกับแถว 2 จะได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{11} \\ 2x - y &= \frac{17}{11} \\ z &= \frac{5}{11} \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{11} \\ 2 & -1 & 0 & \frac{17}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{11} \end{array}\right]$$

เอา –2 คูณแถวที่ 1 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{11} \\ -\ y &= \frac{15}{11} \\ z &= \frac{5}{11} \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{15}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{11} \end{array}\right]$$

เอา –1 คูณแถวที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{11} \\ y &= -\frac{15}{11} \\ z &= \frac{5}{11} \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{11} \end{array}\right]$$

นั่นคือ $x = -\frac{1}{11}$ , $y = -\frac{5}{11}$ , $z = \frac{5}{11}$

**สรุปการกระทำทางแถวสามารถทำได้ดังนี้**

1. คูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ได้
2. คูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยจำนวนจริง k แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่งได้
3. เอา 2 แถวใดๆบวกกันได้
4. สลับระหว่างสองแถวใดๆได้

**หมายเหตุ** พยายามปรับให้มีเลข 1 แถวละ 1 ตัว และหลักละ 1 ตัว หรือให้สมาชิกในแนวเส้นทแยงหลักเป็น 1 ส่วนตัวอื่นให้เป็นศูนย์ทั้งหมด

**ตัวอย่างที่ 21** จงหาคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 5 \\ 3x - 2y + 2z &= -3 \\ x - 3y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

**ตัวอย่างที่ 22** จงหาคำตอบของสมการ

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + z &= 3 \\
x + 2y + z &= 1 \\
-x + 4y &= -2
\end{aligned}
$$

# ผู้ดำเนินการ

**ที่ปรึกษา :**

ดร.อำรุง จันทวานิช เลขาธิการสภาการศึกษา
ดร.สิริพร บุญญานันต์ รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์ ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล ที่ปรึกษาด้านระบบการศึกษา สกศ.
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

**ผู้เรียบเรียง :**

นางสุวรรณา ช่วยอยู่ โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี

**ผู้ตรวจทาน :**

รองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร
อาจารย์เอรัสวัฒน์ คำมณี
อาจารย์สุธิตา มณีชัย
คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

**ผู้พิจารณารายงาน :**

นายสมชาย ศรีวรางกูล โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

**ผู้รับผิดชอบโครงการ :**

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
นายรวิช ตาแก้ว นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ

**บรรณาธิการ :**

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

**เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :**

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

**เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า**
**หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว**
**โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป**


กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : http://www.onec.go.th
http://www.thaigifted.org