หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้
จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม

โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
ส 691 ผ แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
กรุงเทพฯ : 2551
101 หน้า
ISBN 978-974-559-418-0
1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร
2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สิ่งพิมพ์ สกศ. อันดับที่ 81 /2551
พิมพ์ครั้งที่ 1 สิงหาคม 2551
จำนวน 1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่ สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร 0-2243-1129, 0-2668-7329
Web site: http:// www.onec.go.th และ http:// www.thaigifted.org
ผู้พิมพ์ บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด
580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1
ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230
โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753

คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามาถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลง เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า องค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

อำรุง

(นายอำรุง จันทวานิช)

เลขาธิการสภาการศึกษา

$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = 1 \cdot i^r$

คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ใน มาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตร การศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียนในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน

ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ระดับ		เนื้อหา	จำนวนคาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบเขียนแผนการจัดการเรียนรู้
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		7. ตรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึก และมหาวชิราวุธ
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด	40	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	
		▪ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ)		โรงเรียนบูรณะรำลึก
		▪ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ)		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		▪ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ)		โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
รวม			100	

สารบัญ

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง **จำนวนเชิงซ้อน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

การบวก การคูณ จำนวนเชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีทักษะในการบวก การคูณ จำนวนเชิงซ้อน

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกได้ว่าคู่อันดับ (a,b) เป็นจำนวนเชิงซ้อน
2. หาค่าตัวแปรเมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่เท่ากันให้
3. สามารถ บวก คูณ จำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่อันดับ (a,b) ได้

2. แนวความคิดหลัก

การศึกษาจำนวนเชิงซ้อนในรูปของคู่อันดับ (a,b) เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ มีการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน และการสร้างจำนวนเชิงซ้อนขึ้นใหม่โดยการนำจำนวนเชิงซ้อนมาบวก และคูณกัน

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนซึ่งเขียนในรูปของคู่อันดับ (a,b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ มีการเท่ากัน การบวก และ การคูณ ของจำนวนเชิงซ้อนเป็นดังนี้

ให้ (a,b), (c,d) เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน (a,b) = (c,d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d
2. การบวกจำนวนเชิงซ้อน (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)
3. การคูณจำนวนเชิงซ้อน (a,b)(c,d) = (ac-bd , ad+bc)

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงและแผนภูมิระบบจำนวนเชิงซ้อน
2. ให้นักเรียนหาค่า x จากสมการ $x^2 = -1$
3. ครูชี้แนะว่าต้องกำหนดระบบจำนวนเชิงซ้อนขึ้นเพื่อตอบปัญหา
4. แบ่งกลุ่มนักเรียนแบบคละความสามารถ กลุ่มละ 4 คน
5. ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มศึกษา และช่วยกันอภิปรายจากเอกสารประกอบการเรียนที่ 1

6. ครู และ นักเรียนช่วยกันสรุปผลที่ได้จากเอกสารประกอบการเรียนที่ 1

7. ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มจับคู่กันเป็น 2 คู่และให้คู่หนึ่งช่วยกันทำเอกสารฝึกหัดที่ 1.1 และอีกคู่หนึ่งช่วยกันทำเอกสารฝึกหัดที่ 1.2

8. ให้นักเรียนในกลุ่มสลับเอกสารฝึกหัดเพื่อตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการทำโจทย์

9. ครูสุ่มเรียกนักเรียนจากกลุ่มต่างกันช่วยกันเฉลยคำตอบเอกสารฝึกหัดทั้ง 2

10. ให้นักเรียนในกลุ่มทั้ง 4 คนช่วยกันศึกษาใบกิจกรรมที่ 2

11. ครูซักถามนักเรียนถึงข้อสรุปที่ได้ จากใบกิจกรรมที่ 2 พร้อมทั้งสรุปเป็นนิยาม

12. ให้นักเรียนในกลุ่มช่วยกันฝึกทำแบบฝึกทักษะที่ 1

13. ครูสุ่มเรียกนักเรียนจากกลุ่มต่างๆ เฉลยคำตอบแบบฝึกทักษะที่ 1

14. ครูซักถามนักเรียนเพื่อสรุปให้ได้เนื้อหาที่เรียน และให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

15. ทดสอบเป็นรายบุคคล (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

5. แหล่งการเรียนรู้/สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 1
2. เอกสารฝึกหัดที่ 1.1 และ 1.2
3. แบบฝึกทักษะที่ 1

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน 2. ดูจากผลการทำเอกสารฝึกหัด 3. ตรวจแบบฝึกทักษะ 4. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....

จำนวนเชิงซ้อน (complex number)

จุดประสงค์ บอกความหมายจำนวนเชิงซ้อน การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน สามารถบวกและคูณจำนวนเชิงซ้อนได้

เอกสารประกอบการเรียนที่ 1

กิจกรรมที่ 1 ให้นักเรียนพิจารณาข้อกำหนดต่อไปนี้

กำหนดจำนวนเชิงซ้อนดังนี้ (2,1), $(-1,\sqrt{2})$, $(\sqrt{3}+2,1)$, (3,0), (0,-5) แต่ $(-2,\sqrt{-9})$, $(1,-\sqrt{-3})$, $(-\sqrt{2},-3i)$ ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สรุปนิยาม จำนวนเชิงซ้อนคือ ……………………………………………………………………………

ตัวอย่าง กาเครื่องหมาย / หน้าข้อที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน กาเครื่องหมาย x หน้าข้อที่ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน (เมื่อกำหนดให้ ตัวแปร x ที่ใช้เป็นจำนวนจริง และ i เป็นจำนวนเชิงซ้อน)

1. (2,1)	2. $(-2,\sqrt{-9})$	3. (0,3)
4. $(\sqrt{3}, 0)$	5. $(-\sqrt{x}, 0)$	6. $(\sqrt{\lvert x\rvert}, x)$
7. (0,-5)	8. $(-\sqrt{3},-\sqrt{-3})$	9. $(-1, \sqrt{2})$
10. $(\sqrt{5},\sqrt{-2})$	11. (i, -1)	12. (2i,i)
13. $(-\lvert x\rvert, 0)$	14. $(\sqrt{x},\lvert x\rvert)$	15. $(2, \sqrt{2x})$

บทนิยาม

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนซึ่งเขียนในรูปของคู่อันดับ (a,b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ มีการเท่ากัน การบวก และการคูณ ของจำนวนเชิงซ้อนเป็นดังนี้

ให้ (a,b), (c,d) เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน (a,b) = (c,d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d
2. การบวกจำนวนเชิงซ้อน (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)
3. การคูณจำนวนเชิงซ้อน (a,b)(c,d) = (ac-bd , ad+bc)

เอกสารฝึกหัดที่ 1.1

การบวก การคูณ จำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง จงทำเป็นผลสำเร็จ

1. (2,3) + (-1,5)

   จาก (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)

   ดังนั้น (2,3) + (-1,5) = (2-1,3+5) = (1,8)

2. (2,3)(-1,5)

   จาก (a,b)(c,d) = (ac-bd , ad+bc)

   ดังนั้น (2,3)(-1,5) = $\left(2\times(-1)-3\times 5\ ,\ 2\times 5+3\times(-1)\right)$

   = (–2–15 , 10–3)

   = (-17 , 7)

3. (5,3) + (4,-2) = ……………………………………………………………..……………..

4. (3 , -1)(1 , -2) = ……………………………………………………………………………

5. (1 , -3)(-2 ,6) = ……………………………………………………………………………

6. $(0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1)$ = ...

7. (2,3)(-5,2) + (-4,3) = (–10 –6 , 4–15) + (-4,3)

   = ………………..……………………………….……....…………………..

8. (2 ,2) + (– 4 ,3)(6 , 2) = ……………………………………………………………………………

   = …………………………………………………………………………….

9. $(-1\ ,\ 3)^2$ = (-1 , 3)(-1 ,3)

   = …………………………………………………………………………….

10. $(2\ ,\ -4) + (6\ ,\ -1)^2$ = …………………………………………………………………………….

    = ……………………………………………………………………………..

เอกสารฝึกหัดที่ 1.2

1. จงหา a+b เมื่อ (a,b) = (4 ,-5)
   จากการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ a = 4 และ b = -5

2. จงหาจำนวนจริง x,y เมื่อ (2x+y ,2) = (4 , x-y)
   จากการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้

   2x + y = 4 ……………… (1)

   x - y = 2 ………………. (2)

   จะได้ x = ……… , y = ………..

ตัวอย่าง

1. จงหา (a,b) เมื่อกำหนด (a,b)(7,1) = (1,0)
   จากการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน และการคูณจำนวนเชิงซ้อน

   (a,b)(7,1) = (1,0)

   (7a – b , a+7b) = (1,0)

   ได้ 7a – b = 1 ……………… (1)

   a + 7b = 0 ……………… (2)

   (a,b) = ………………….

2. จงหาจำนวนเชิงซ้อน (x,y) ที่ทำให้ (x,y)(3,-7) = (27,53)
   จาก (x,y)(3,-7) = (27,53)

   ……………….= (27,53)

   ได้สมการ ……………………………………….

   ……………………………………….

   (x,y) = ………………………………..

กิจกรรมที่ 2 ให้นักเรียนหาผลบวกและผลคูณ และพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้

1. จงทำเป็นผลสำเร็จ

1. (2,0) + (3,0)	11. (1,0)(4,0) ....
2. (5,0) + (-1,0)	12. (8,0)(-3,0) ....
3. (4,0) + (2,0)	13. ($\sqrt{3}$,0)($\sqrt{3}$,0)....................
4. (-1,0) + (7,0)	14. (2,0)(2 ,0) ....
5. (3,0) + (5,0)	15. (2 $\sqrt{3}$,0)(2 $\sqrt{3}$,0).................
6. (4,0) + (-3,0)	16. (-3,0)(0,0) ....
7. (2,0)+ (2,0)	17. (8 ,0)(2,0) ....
8. (3,0) + ($\sqrt{2}$ +1,0)	18. ($\sqrt{2}$ -1,0)($\sqrt{2}$ +1,0) ....
9. (3,0)+ (2,0)	19. (-4,0)(-4,0) ....
10. (2 $\sqrt{2}$,0)+(2,0)	20. (21,0)(1,0) ....

ข้อสังเกต

1. จากการบวก

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$a + b = a+b$$

2. จากการคูณ

$$(a,0). (b,0) = (ab,0)$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$a \times b = ab$$

จึงสรุปได้เป็นบทนิยามดังนี้

บทนิยาม x ,y เป็นจำนวนจริง (x,y) เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. $y = 0$ จะได้ $(x,0)$ คือ **จำนวนจริง x**
2. $y \neq 0$ จะได้ (x,y) เรียก จำนวนเชิงซ้อน (x,y) , $y \neq 0$ ว่า **จำนวนจินตภาพ**
3. $y \neq 0$ และ $x = 0$ จะได้ $(0,y)$ เรียกจำนวนเชิงซ้อน $(0,y)$ ว่า **จำนวนจินตภาพแท้**
4. เรียก x ว่า**ส่วนจริง** (real part) เรียก y ว่า **ส่วนจินตภาพ** (imaginary part)

ตัวอย่าง

1. จงหาส่วนจริง ส่วนจินตภาพ ของ

1.1 $(2,-3)^2 + (1,4)$

จาก $(2,-3)^2 + (1,4) = (2,-3)(2,-3) + (1,4)$

$= (4-9, -6-6) + (1,4)$

$= (-5+1, -12+4)$

$= (-4, -8)$

ส่วนจริง คือ -4 ส่วนจินตภาพ -8

ข้อสังเกต

ก่อนที่จะสรุปได้ผลเป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพ จะต้องทำจำนวนให้เป็นผลสำเร็จก่อน

1.2 $(\sqrt{2}+2, 3)(2-\sqrt{2}, 1) + (4,2)^2$

จาก $(\sqrt{2}+2, 3)(2-\sqrt{2}, 1) + (4,2)^2$

$= \left((4-2)-3, (\sqrt{2}+2-3(2-\sqrt{2}))\right) + (16-4, 8+8)$

$= \left(2-3, -2\sqrt{2}-4\right) + (12, 16)$

$= (-1+12, -2\sqrt{2}+12)$

ส่วนจริง คือ ……………… ส่วนจินตภาพ คือ …………………

1.3 $(-2,-3)^2 + (5,4)$

จาก $(-2,-3)^2 + (5,4)$ = ……………………………………………………

= ……………………………………………………

= ……………………………………………………

= ……………………………………………………

ส่วนจริง คือ ……………… ส่วนจินตภาพ คือ…………………

แบบฝึกทักษะที่ 1

1. จงหาจำนวนจริง x , y ที่สอดคล้องกับสมการ

1.1 $(x - y , x + y) = (2,6)$

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

1.2 $(x + 2y , 3) = (3 , 2x - y)$

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

1.3 $(x+2 , 7) + (y , 3x-y) = (-2 , 4)$

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

1.4 $(x,y)(4,3) = (2 , -1)$

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

2. จงหาส่วนจริง และส่วนจินตภาพของ

2.1 $(3 , -4) + (6 , 2)$

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

ส่วนจริง คือ ………..…

ส่วนจินตภาพ คือ …………..

2.2 $(-2 , -1)(5 , -3)$

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

ส่วนจริง คือ ……………

ส่วนจินตภาพ คือ …………..…

2.3 $(1 , 2) + (2 , 3) + (3 , 4)$

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

ส่วนจริง คือ ………..…

ส่วนจินตภาพ คือ ……………

2.4 $5(2 , -3)(1 , -2)$

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

ส่วนจริง คือ ……………

ส่วนจินตภาพ คือ ……………

2.5 $[(1 , \sqrt{2})+(4 , 2)](-2 , 1)$

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

…………………………………………….

ส่วนจริง คือ ……………

ส่วนจินตภาพ คือ ……………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง **จำนวนเชิงซ้อน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป a + bi
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจในการนำจำนวนเชิงซ้อนในรูป a + bi ใช้ในการบวก การคูณ

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนจำนวนเชิงซ้อน (a,b) ในรูป a + bi และ เขียนจำนวนเชิงซ้อน a + bi ในรูป (a,b)
2. สามารถหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน ในรูป a + bi
3. นำการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนในรูป a + bi มาใช้ได้
4. บอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดในรูป a + bi

2. แนวความคิดหลัก

การเรียนรู้ความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปของคู่อันดับ (a,b) กับ a + bi เมื่อนำจำนวนเชิงซ้อนในรูป a + bi ไปใช้ใน การเท่ากัน การบวก การคูณ จะช่วยให้การศึกษาในเรื่องนี้ง่ายขึ้น

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม

1. จำนวนเชิงซ้อน (0,1) เขียนแทนด้วย i เรียก i ว่าส่วนจินตภาพ
2. จำนวนเชิงซ้อน (0,b) เขียนแทนด้วย bi
3. จำนวนเชิงซ้อน (a,b) เขียนแทนด้วย a + bi
4. จำนวนเชิงซ้อน a + bi และ c+di
   - 4.1 $(a + bi) = (c + di)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
   - 4.2 $(a + bi) + (c + di) = (a , b) + (c , d) = (a + c , b + d) = (a+c) + (b + d) i$
   - 4.3 $(a+bi) (c+di) = (a , b) (c ,d) = (ac - bd , ad+bc) = (ac - bd)+(ad+bc)i$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างจำนวนเชิงซ้อนต่างๆเช่น (9,0) , (-3, $\sqrt{2}$) , 4 , 3 + i , (-1 , 4) –3+2i , (2 + 3i) -4i , (1 , 1) , -$\sqrt{3}$, ฯลฯ ให้นักเรียนจำแนกว่าจำนวนใดบ้างเป็นจำนวนเชิงซ้อน จำนวนใดไม่เป็น ครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและหาข้อสรุปนิยาม จำนวนเชิงซ้อน

2. แบ่งกลุ่มนักเรียนกลุ่มละ 4 คน แบบคละความสามารถ

3. แต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาเอกสารประกอบการเรียนที่ 2 โดยให้นักเรียนแบ่งงานกันทำในกลุ่ม และร่วมกันอภิปราย และสรุปตามเอกสาร

4. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$ การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน การบวก และการคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$

5. ครูให้นักเรียนสรุปค่าของ i^n

6. ให้นักเรียนในกลุ่มจับคู่กันฝึกทำโจทย์ตัวอย่างจากในเอกสารประกอบการเรียน

7. เมื่อนักเรียนทำโจทย์เสร็จแล้ว ให้สลับคู่กันตรวจ

8. ครูให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

9. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำแบบฝึกทักษะที่ 2

10. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2

11. ให้นักเรียนทำการบ้านแบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 1 ส่งในวันรุ่งขึ้น

12. ให้นักเรียนเตรียมตัวทดสอบเป็นรายบุคคลประมาณ 10 นาที (2 ข้อ) ในคาบต่อไป

5. แหล่งการเรียนรู้/ สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 2
2. แบบฝึกทักษะที่ 2
3. แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 1
4. สืบค้นทางอินเทอร์เน็ต

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. ดูผลจากการถามตอบ 2. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน 3. ดูจากผลการทำเอกสารประกอบการเรียน 4. ตรวจแบบฝึกทักษะ 5. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

ครูควรแทรกคุณธรรมจริยธรรม และเศรษฐกิจพอเพียงในแง่ของคณิตศาสตร์ เขียนไว้ในบันทึกหลังสอน

จุดประสงค์ สามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป a+bi และนำไปใช้ได้

เอกสารประกอบการเรียนที่ 2

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป a+bi

กำหนดให้ (0,1) = i

1. จงหาค่า (0,1)(0,1) =..

$i^2 = -1$

2. จงหาค่าของ

2.1. (3,0)(0,1) = 3i =(0,3)　　2.2 (5,0)(0,1) = ...

2.3 (-2,0)(0,1) = ...　　2.4 (7,0)(0,1) = ...

ดังนั้น (b,0)(0,1) = ...

b.i = ...

3. จงหาค่าของ

3.1 (5,0)+(0,4) = (5,4) = 5 + 4i　　3.2 (-2,0)+(0,2) = ...

3.3 (7,0)+(0,-1)= ....　　3.4 (3,0)+(0,3) = ...

3.5 (2,0)+(0, 2)=.....................　　3.6 (4,0)+(0,1) =......................

(a,0) + (0,b) = ...

a + bi = ……………………….

สรุป

1. จำนวนเชิงซ้อน (0,1) เขียนแทนด้วย i
2. จำนวนเชิงซ้อน (0,b) เขียนแทนด้วย bi
3. จำนวนเชิงซ้อน (a,b) เขียนแทนด้วย a + bi

ตัวอย่าง จงเขียนจำนวนเหล่านี้ในรูป a + bi

จาก (a,b) = a +bi

1. (3,0) = 3	2. (0,3) = 3i	3. (6,2) = 6 + 2i
4. (0,-4) =..............	5. (0, 2) =..............	6. (0,5) =..............
7. (4,0) =...............	8. (4,-1) =..............	9. (-1,-1) =..............
10. (-2,2) =..............	11. (3, 3) =..............	12. (7,-2) =..............
13. (6,-3) =..............	14. (2,-1) =..............	15. (8,3) =..............

เมื่อสามารถเขียนในรูป $a + bi$ แล้ว การนำไปใช้ในรูปการเท่ากัน การบวก และการคูณโดยพิจารณาดังนี้

1. $(a + bi) = (c + di)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
2. $(a + bi) + (c + di) = (a , b) + (c , d) = (a + c , b + d) = (a+c) + (b + d) i$

ซึ่งเมื่อพิจารณาจากการบวก $a + bi + c + di$ จะบวกส่วนจริงด้วยส่วนจริง และบวกส่วนจินตภาพด้วยส่วนจินตภาพ ดังนั้นผลลัพธ์จึงเป็น $(a+c) + (b + d) i$ และ

3. $(a+bi) (c+di) = (a , b) (c ,d) = (ac-bd , ad+bc) = (ac-bd)+(ad+bc) i$

ซึ่งเมื่อพิจารณาจากการคูณ

$$\begin{aligned}(a + bi) (c + di) &= ac + bci + adi+bdi^2 \\ &= ac + bci + adi - bd \\ &= (ac - bd) + (ad+bc)i\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

1. $(2+i)(2-i) = 4 + 2i - 2i - i^2$
   $= 4 + 2i - 2i + 1$
   $= 5$
2. $(1 + i)(3 - i) = 3 + 3i - i - i^2$
   $= 3 + 3i - i + 1$
   $= 4 + 2i$
3. $(3+i)(3i) =$ ....
   ....
4. $(2\sqrt{2}, 0)(1+3i) =$ ....
   ....
5. $(3+2i)i =$ ....
   ....
   ....
6. $3(2i+1)(i-4) = 3(2i^2 + i - 8i - 4)$
   $= 3(-2 - 7i - 4)$
   $= -18 - 21i$
7. $(2-i)(1+3i) =$ ....
   ....
8. $(4+i)(-i - 3) =$ ....
   ....
9. $(7i - 5)(2-i) =$ ....
   ....
10. $[(5-2i)(i+1)] + (2,-3) =$ ....
    ....

ตัวอย่าง จงหาค่า x , y จาก

1. $8 - 9yi = 4x - 2i$

วิธีทำ จาก $(a + bi) = (c + di)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ดังนั้น $4x = 8$ และ $9y = 2$

$x = 2$ และ $y = \frac{2}{9}$

2. $(2x – 3y - 6) + (x - 4y)i = 0$

จะได้ $2x - 3y - 6 = 0$ และ $x - 4y = 0$

x = ……….. y = …………..

หน่วยจินตภาพ

กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $(0, a) = ai$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ เรียก i ว่าส่วนจินตภาพและ $i^2 = –1$ และพิจารณาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนี้

$i = i$, $i^5 = i$, $i^9 = i$, $i^{13} = i$, $i^{17} = i$, $i^{21} = i$, $i^{25} = i$

$i^2 = –1$, $i^6 = –1$, $i^{10} = –1$, $i^{14} = –1$, $i^{18} = –1$, $i^{22} = –1$, $i^{26} = –1$

$i^3 = –i$, $i^7 = –i$, $i^{11} = –i$, $i^{15} = –i$, $i^{19} = –i$, $i^{23} = –i$, $i^{27} = –i$

$i^4 = 1$, $i^8 = 1$, $i^{12} = 1$, $i^{16} = 1$, $i^{20} = 1$, $i^{24} = 1$, $i^{28} = 1$

จะเห็นได้ว่าค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะมีค่าเพียง 4 ค่า คือค่า i , -1 , -i และ 1 ซึ่งขึ้นกับค่าของ n ถ้าหาร n ด้วย 4 ได้ผลลัพธ์ k และ เศษ r

$n = 4k + r$

จะได้ $i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = 1 \cdot i^r$

ถ้า $r = 1$ แล้ว $i^n = i^r =$ ถ้า $r = 2$ แล้ว $i^n = i^r = –1$

ถ้า $r = 3$ แล้ว $i^n = i^r = –i$ ถ้า $r = 0$ แล้ว $i^n = i^r = 1$

จงหาค่าของ

1. $i^{51} = i^{3} = -i$ 2. $(-i)^{30} = (-i)^{2} = i^{2}$ 3. i^{101} = ...

4. i^{75} =.......... .... 5. i^{92} =.......... .... 6. i^{174} =.......... ....

7. $(-i)^{64}$ =.......... .... 8. $(-i)^{413}$ =.......... .... 9. $(-i)^{3123}$ =.......... ....

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

1. $(3-3i)^2 = 9 - 18i + 9i^2 = 9 - 18i - 9 = -18i$
2. $(1+i)^2$ = ... 3. $(2+2i)^2$ =..
4. $(2i-2)^2$ = ………………………………. 5. $(5-5i)^2$ = ……………………….…………….….…

*สังเกตได้ว่า..

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

1. $(1+i)^{20} = \left((1+i)^2\right)^{10} = (1+2i+i^2)^{10} = (1+2i-1)^{10} = (2i)^{10} = 1024\, i^2 = -1024$
2. $(1+i)^7 = (1+i)^6.(1+i) = \left((1+i)^2\right)^3.(1+i) =$ ……………….………………………………..
3. $(2-2i)^6 =$ ………………………………………………………………….………………………...
4. $(2-2i)^{11} =$ …………………………………………………………………………………..………

3. จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
1. (0,3)(0,2) = ...…… 2. (0,2)(0,-5) = ...
3. (0,4)(0,-6) = ...…… 4. (0,1)(0,-2) = ...
5. (2i)(2i) = ...…… 6. (i)(-2i) = ...
7. (7i)(2i) = …................ 8. (-2i)(-3i) = ...

** สังเกตได้ว่า ……………………………………………………………………………….….…………

---

* สรุป จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่า เมื่อจำนวนเชิงซ้อน a+bi โดยที่ a = b เมื่อนำมายกกำลังสองแล้ว a^2 กับ b^2 จะลบกันหมดเสมอ

**สังเกตได้ว่า จำนวนจินตภาพแท้สองจำนวนคูณกันผลคูณย่อมได้เป็นจำนวนจริงเสมอ (0,b)(0,d) = (-bd,0) = –bd

แบบฝึกทักษะที่ 2

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ และจงพิจารณาว่าจากการบวก มีสมบัติการบวก สมบัติการคูณใดบ้าง กำหนด $z_1 = (1,-3)$, $z_2 = (-2,1)$ และ $z_3 = (1,1)$

1.1 $z_1 + z_2 =$ ....

1.2 $z_2 + z_1 =$ ....

1.3 $(z_1 + z_2) + z_3 =$ ....

1.4 $z_1 + (z_2 + z_3) =$ ....

1.5 $z_1(z_2+z_3) =$ ....

1.6 $z_1.z_2 + z_1.z_3 =$ ....

1.7 $z_1.z_2 =$ ....

1.8 $z_2.z_1 =$ ....

1.9 $z_1.(z_2.z_3) =$ ....

1.10 $(z_1.z_2).z_3 =$ ....

2. ในระบบจำนวนเชิงซ้อนจะมีสมบัติเกี่ยวกับการบวก และการคูณ เช่นเดียวกับจำนวนจริง จากข้อ 1 จงสรุปสมบัติการบวก และสมบัติการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

....

....

....

....

....

3. จงทำเป็นผลสำเร็จ

3.1 $(3 + 7i) + (2 - i)(3 + i)$ ....

....

3.2 $(6 + 4i)+(3i - 7) +(5 - 2i)$ ....

....

3.3 $i(12 - 4i)(3 + i)$ ....

....

3.4 $(2i - 3)(5 - i) + (3 - 2i)(4 + 4i)$ ....

....

4. จงหาค่าของ

4.1 $(3+4i)^2 =$ ....

4.2 $(2- i)^2 =$ ....

4.3 $[(2+i)+(3+i)]^2 =$ ....

4.4 $(2 - 2i)^4 =$ ....

4.5 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 =$ ....

4.6 $\left(\sqrt{3} - \sqrt{3}i\right)^7 =$ ....

4.7 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{12} =$ ....

5. จงหา $x + yi$ เมื่อ $(3 - i)(x + yi)(3+i) = (1, 3i^{14})$

แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 1

1. กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $a = (3,-2)$ และ $b = (2,-3)$ จงหา $a^2 - b^2$

2. จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ

   1. $(5 - 2\sqrt{3}i) - (3 + 2\sqrt{3}i)$
   2. $\frac{3 - 3\sqrt{3}i}{3} - \frac{6 - \sqrt{48}i}{3} + \frac{15 - \sqrt{75}i}{5}$
   3. $(2,-3) \cdot (-1,-1) \cdot (3 - 4i)$
   4. $i^{34} + i^{19} - 2i^{63} + i^{72}$
   5. $\left((1,1)(1,-1)\right)^{15}$

3. จงหาค่า a , b จากสมการ

   1. $a - bi = 6 + 2i$
   2. $(a + 2b) - (2a - b)i = 8 - i$
   3. $a^2 - b^2i - a - 2bi = 8 - i$
   4. $-8i^3 = (a^2 - 2a)i$
   5. $(3 + 2i)^2 = a + 2 + bi + 3i$

4. จงหาส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน $3i^{10} - 15i^{17} - i^{81}$

5. กำหนด $Z_1 = -\sqrt{3}(\sqrt{21}i) + 3i^{16}$, $Z_2 = (2i^{10}, 6\sqrt{7}i^{8})$, $Z_3 = 2i^8 - 4i^3$
   จงหาผลสำเร็จของ $(Z_1 + Z_2).Z_3$ ในรูป (a,b)

6. ส่วนจริง และส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน $(1 + \sqrt{3}i)^6 (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{22}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง **จำนวนเชิงซ้อน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

สมบัติการบวก การคูณ ของจำนวนเชิงซ้อน
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำสมบัติการบวก การคูณ จำนวนเชิงซ้อนไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกเอกลักษณ์การบวก และ เอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อนได้
2. สามารถหาอินเวอร์สการบวก และ อินเวอร์สการคูณ ของจำนวนเชิงซ้อน (a,b) ได้
3. นำอินเวอร์สการบวกมาใช้ในการลบจำนวนเชิงซ้อน

2. แนวความคิดหลัก

สมบัติการบวก การคูณ ของจำนวนเชิงซ้อน มีสมบัติปิดการบวก การคูณ การสลับที่การบวก สลับที่การคูณ เอกลักษณ์การบวก เอกลักษณ์การคูณ อินเวอร์สการบวก และอินเวอร์สการคูณ ซึ่งนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการลบ และการหารจำนวนเชิงซ้อน

3. เนื้อหาสาระ

1. เอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนเชิงซ้อน (a,b) คือ จำนวนเชิงซ้อน (0,0)
2. เอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน (a,b) คือ จำนวนเชิงซ้อน (1,0)
3. อินเวอร์สการบวกของ (a,b) คือจำนวนเชิงซ้อน (–a,–b)
4. อินเวอร์สการคูณของ (a,b) โดยที่ $(a,b) \neq (0,0)$ คือ จำนวนเชิงซ้อน $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

การลบจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม การลบจำนวนเชิงซ้อน กำหนด (a,b) ,(c,d) เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$(a,b) - (c,d) = (a,b) + (-c,-d)$$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูใช้การถามตอบให้นักเรียนบอกสมบัติการบวกในระบบจำนวนจริง และเงื่อนไขของสมบัติ
2. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม คละความสามารถ กลุ่มละ 4 คนศึกษาเอกสารประกอบการเรียนที่ 3 โดยการอภิปรายเปรียบเทียบกับสมบัติในระบบจำนวนจริง และศึกษาตามเอกสาร
3. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติการบวก การคูณ ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

4. ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างจากเอกสารและฝึกทำโจทย์ตามตัวอย่าง
5. ครูเฉลยคำตอบ และใช้การถามตอบสรุป จากโจทย์ที่นักเรียนได้ฝึกทำแล้ว
6. ให้นักเรียนในกลุ่มช่วยกันฝึกทำแบบฝึกทักษะที่ 3
7. สุ่มเรียกนักเรียนจากกลุ่มต่างๆ ออกมาเฉลยคำตอบบนกระดาน ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง
8. ทดสอบรายบุคคล 2 ข้อ ใช้เวลาประมาณ 10 นาที

5. แหล่งการเรียนรู้/สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 3
2. แบบฝึกทักษะที่ 3
3. การสืบค้นทางอินเทอร์เน็ต

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. ดูผลจากการถามตอบ	
2. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน	
3. ดูจากผลการทำเอกสารประกอบการเรียน	
4. ตรวจแบบฝึกทักษะ	
5. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....

จุดประสงค์ สามารถหาเอกลักษณ์ การบวกและการคูณ อินเวอร์สการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนได้

เอกสารประกอบการเรียนที่ 3

การหาเอกลักษณ์ การบวก และ การคูณ

จากระบบจำนวน เอกลักษณ์ของการกระทำใดๆ ในระบบจำนวน หมายถึง จำนวนที่กระทำกับจำนวนใดๆ แล้วได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเดิม

ดังนั้นเมื่อ (x,y) เป็นเอกลักษณ์การบวกในเซตของจำนวนเชิงซ้อน แล้วจะมีจำนวนเชิงซ้อน (x,y) เพียงจำนวนเดียวที่ (a,b) + (x,y) = (a,b) = (x,y) + (a,b)

ตัวอย่าง จงหา (x,y) ที่ทำให้ (a,b) + (x,y) = (a,b) = (x,y) + (a,b)

(a,b) + (x,y) = (a,b) และ (x,y) + (a,b) = (a,b)

(a+x ,b+y) = (a,b)

a+x = a , b+y = b

x = …….. , y = …………..

ดังนั้น เอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนเชิงซ้อน คือ …………………

เมื่อ (x,y) เป็นเอกลักษณ์การคูณในเซตของจำนวนเชิงซ้อน แล้ว จะมีจำนวนเชิงซ้อน (x,y) เพียงจำนวนเดียวที่ (a,b) (x,y) = (a,b) = (x,y) (a,b)

กิจกรรมที่ 1 ให้นักเรียนหาผลลัพธ์จากโจทย์ และสรุปหาเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน

1. จงหาจำนวนเชิงซ้อน (x,y) ที่ (a,b)(x,y) = (a,b) = (x,y)(a,b)

(a,b)(x,y) = (a,b) และ (x,y)(a,b) = (a,b)

(ax–by,ay+bx) = (a,b)

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

ดังนั้น (x,y) = ………………………………

เรียกจำนวนที่คูณกับจำนวนใดๆ แล้วได้จำนวนนั้นว่า เอกลักษณ์การคูณ

ดังนั้นในระบบจำนวนเชิงซ้อน เอกลักษณ์การคูณคือ......................

การหาอินเวอร์ส การบวก และการคูณ

จากความหมายของ อินเวอร์สของการกระทำใดๆ ของจำนวนใดๆ หมายถึงจำนวนที่กระทำกับจำนวนใดๆ แล้วได้ผลลัพธ์เป็นเอกลักษณ์ของการกระทำนั้น

เมื่อ (x,y) เป็นอินเวอร์สการบวกของ จำนวนเชิงซ้อน (a,b) จะมีจำนวนเชิงซ้อน (x,y) เพียงจำนวนเดียวที่ (a,b) + (x,y) = (0,0) = (x,y) + (a,b)

2. จงหาจำนวนเชิงซ้อน (x,y) ที่ทำให้ (a,b) + (x,y) = (0,0) = (x,y) + (a,b)

(a,b) + (x,y) = (0,0) และ (x,y) + (a,b) = (0,0)

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

ดังนั้น (x,y) = ………………………………

เรียกจำนวนที่บวกกับจำนวน (a,b) ใดๆ แล้วได้เป็นเอกลักษณ์การบวกว่า
อินเวอร์สการบวกของ (a,b)

ดังนั้น ในระบบจำนวนเชิงซ้อน อินเวอร์สการบวกของ ของ (a,b) คือ..

เมื่อ (x,y) เป็นอินเวอร์สการคูณของ จำนวนเชิงซ้อน (a,b) จะมีจำนวนเชิงซ้อน (x,y) เพียงจำนวนเดียวที่ (a,b)(x,y) = (1,0) = (x,y)(a,b)

3. จงหาจำนวนเชิงซ้อน (x,y) ที่ทำให้ (a,b)(x,y) = (1,0) = (x,y) (a,b)

(a,b)(x,y) = (1,0) และ (x,y)(a,b) = (1,0)

(ax–by,ay+bx) = (1,0)

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

ดังนั้น (x,y) = ………………………………

เรียกจำนวนที่คูณกับจำนวน (a,b) ใดๆ แล้วได้เป็นเอกลัษณ์การคูณว่า อินเวอร์สการคูณของ (a,b)

ดังนั้น ในระบบจำนวนเชิงซ้อน อินเวอร์สการคูณ ของ (a,b) คือ......................................

สรุปได้ว่า

(a,b) เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แล้ว

1. เอกลักษณ์การบวกของ (a,b) คือ (0,0)
2. เอกลักษณ์การคูณของ (a,b) คือ (1,0)
3. อินเวอร์สการบวกของ (a,b) คือ (-a, -b)
4. อินเวอร์การคูณของ (a,b) คือ $\left(\frac{a}{a^2+b^2}\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ หรือ $\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)$

ตัวอย่าง

1. จงหาอินเวอร์สการบวกของ $(3 - 2i)^2$

วิธีทำ ต้องทำให้เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นผลสำเร็จในรูป (a,b) หรือ (a+bi) ก่อน

$(3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

จาก อินเวอร์สการบวกของ a+bi คือ – a – bi

อินเวอร์สการบวกของ $(3 - 2i)^2$ คือ -5 + 12i

2. จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ อินเวอร์สการบวกของ $(3 + 2i)(i + 2)i + (1 +i)^2$

$(3 + 2i)(i + 2)i + (1 +i)^2 = (3 + i)(2+ i) + (1 +2i - 1)$

$= (4 + ai)$

อินเวอร์สการบวกของ 4 + ai คือ -4 -ai

ส่วนจริง คือ -4 ส่วนจินตภาพ คือ -9

ตัวอย่าง จงหาอินเวอร์สการคูณของ

1. 3 - i

อินเวอร์สการคูณของ (a + bi) คือ $\frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

อินเวอร์สการคูณของ 3 – i คือ $\frac{3+i}{3^2+(-1)^2} = \frac{3+i}{10}$

2. 3 + 2i + (1 -i)(2i -3)

ผลสำเร็จของ 3 + 2i + (1 -i)(2i -3) คือ …………………….………..………….

= …………………..……………………..

อินเวอร์สการคูณของ (a + bi) คือ …………………………..……………..

อินเวอร์สการคูณของ 3 + 2i + (1 -i)(2i -3) คือ …………………...……………..

การลบจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม การลบจำนวนเชิงซ้อน กำหนด (a,b) , (c,d) เป็นจำนวนเชิงซ้อน (a,b) - (c,d) = (a,b) + (–c,–d)

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

1. (3,2) - (1,4) = (3,2) + (–1,–4) = (3–1,2–4) = (2,–2)

2. (3,-2) - (4,-2) =……………………………………………………………......................................

3. (2 + 3i) - (i- 2) = 2 + 3i - i +2 = 4 + 2i

4. (4i+ 2) - (3,-1) = …………………………………………………………......................................

แบบฝึกทักษะที่ 3

1. จงหาอินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $(a + bi)$

   1. $(3 – 7i)(2 – i)$
      ....
      ....
      อินเวอร์สการบวก คือ ....
   2. $(2 + 3i)(2 – i)$
      ....
      ....
      อินเวอร์สการบวก คือ ....
   3. $(6 – 3i)^2$
      ....
      ....
      อินเวอร์สการบวก คือ ....
   4. $-2i(1+5i) + (2 - 5i)$
      ....
      ....
      อินเวอร์สการบวก คือ........................

2. จงหาผลลบของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1. $(5 - 6i) – (2 + 3i)$
      ....
      ....
   2. $(1 - i) – 2i – (3\ \ 5i)$
      ....
      ....
   3. $(\sqrt{3} + i) - (2 + \sqrt{2}i)$
      ....
      ....
   4. $3i^7 - 10i^8 – 5i^6 – i^{73}$
      ....
      ....

3. จงหาอินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1. $(2 + 3i)(1 - i)$
      ....
      ....
      อินเวอร์สการคูณ คือ…………………
   2. $(3 + \sqrt{3}i)(2 - 3i)$
      ....
      ....
      อินเวอร์สการคูณ คือ………………
   3. $(1 + i)^6(4i)$
      ....
      ....
      อินเวอร์สการคูณ คือ ....
   4. $\left(i^{32} + i^{127}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}i\right)$
      ....
      ....
      อินเวอร์สการคูณ คือ………………..

4. กำหนด $Z = x + yi$ โดยที่ $Z(2 – 3i) = 5 + 3i$ จงหาอินเวอร์สการคูณของ Z
....
....
....

5. จงหาค่า i^n
   เมื่อ $n \div 4$ ลงตัว i^n = ………………………………
   เมื่อ $n \div 4$ เหลือเศษ 1 i^n = ………………………………
   เมื่อ $n \div 4$ เหลือเศษ 2 i^n = ………………………………
   เมื่อ $n \div 4$ เหลือเศษ 3 i^n = ………………………………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง **จำนวนเชิงซ้อน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

การหารจำนวนเชิงซ้อน
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีทักษะในการหารจำนวนเชิงซ้อน

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ใช้อินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อนในการหารจำนวนเชิงซ้อนได้
2. หาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน (a,b) หรือ a + bi ที่กำหนดให้ได้
3. บอกสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้
4. สามารถหารจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้

2. แนวความคิดหลัก

เรียนรู้การหารจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้อินเวอร์สการคูณของตัวหาร และการใช้สังยุคของตัวหารคูณทั้งเศษและส่วน

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม การหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน คือการคูณจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวตั้งด้วยอินเวอร์สการคูณของตัวหาร

ถ้า Z_1, Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$, $z_2 \neq 0$

บทนิยาม (a,b) เป็นจำนวนเชิงซ้อน มี (a,-b) เพียงจำนวนเดียว เป็นสังยุคของ (a,b)

$Z = (a,b)$ แล้ว $\overline{Z} = (a,-b)$

จำนวนที่นำมาคูณกันอยู่ในรูปของ (a , b) กับ (a , –b) เมื่อคูณกันแล้วจะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง เรียก (a,b) กับ (a,-b) ว่าเป็น สังยุค (conjugate) ซึ่งกันและกัน

และ $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจริง

บทนิยาม การหารจำนวนเชิงซ้อน คือการคูณทั้งเศษและส่วนด้วยสังยุคของตัวหาร

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูกำหนดจำนวนเชิงซ้อนบนกระดาน (1 , 4) , (-2 , 3) , 1 – 3i , 3i -6 สุ่มเรียกนักเรียนหาอินเวอร์สการคูณของจำนวนที่กำหนด
2. ครูใช้การถามตอบเพื่อเป็นการทบทวนเรื่องเศษส่วนในระบบจำนวนจริงและการทำส่วนให้เท่ากับ 1

3. ให้นักเรียนเปรียบเทียบระหว่างเศษส่วนที่เป็นจำนวนจริง และเศษส่วนที่มีส่วนเป็นจำนวนเชิงซ้อน ให้นักเรียนสรุปได้ว่าเศษส่วนในจำนวนเชิงซ้อนหมายถึงตัวส่วนเป็นตัวหารในระบบจำนวนเชิงซ้อน

4. ครูอธิบายเอกสารประกอบการเรียนที่ 4 พร้อมทั้งใช้การถามตอบให้นักเรียนได้ทำตัวอย่างในเอกสารจนครบทุกข้อ

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหารจำนวนเชิงซ้อน และให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

6. ให้นักเรียนจับคู่กันช่วยกันทำแบบฝึกทักษะที่ 4

7. สุ่มเรียกนักเรียนเฉลยวิธีทำของแบบฝึกทักษะที่ 4 บนกระดาน โดยที่ครูและเพื่อนนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

8. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปขั้นตอนการหารจำนวนเชิงซ้อนทั้ง 2 วิธี

9. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มๆ ละ 4 คน ทำแบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 2 โดยแบ่งงานกันทำ และนำเสนอให้กับเพื่อนนักเรียน

10. ทดสอบรายบุคคล

5. แหล่งการเรียนรู้/สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 4
2. แบบฝึกทักษะที่ 4
3. แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 2
4. การสืบค้นทางอินเทอร์เน็ต

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. ดูผลจากการถามตอบ	
2. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน	
3. ดูจากผลการทำเอกสารประกอบการเรียน	
4. ตรวจแบบฝึกหัดทักษะ	
5. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....

จุดประสงค์ สามารถหารจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้อินเวอร์สการคูณ และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

เอกสารประกอบการเรียนที่ 4

การหารจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง จงหาอินเวอร์สการคูณของ

1. (1,4)

   อินเวอร์สการคูณของ (1,4) คือ $\frac{1}{17}-\frac{4}{17}i$

2. (-2,3)

   อินเวอร์สการคูณของ (-2,3) คือ

3. (1 - 3i)

   อินเวอร์สการคูณของ (1– 3i) คือ

ตัวอย่าง จงทำเป็นผลสำเร็จ

1. $\frac{1}{1+4i}$

วิธีทำ 1

$$\frac{1}{1+4i} = (1+4i)^{-1}$$

$$= \frac{1}{17} - \frac{4i}{17}$$

วิธีทำ 2

$$\frac{1}{1+4i} = \frac{1}{1+4i} \times \frac{1-4i}{1-4i}$$

$$= \frac{1-4i}{17}$$

$$= \frac{1}{17} - \frac{4i}{17}$$

2. $\frac{2}{(-2,3)} =$

3. $\frac{-2}{(1,-3)} =$

จากตัวอย่างทั้งสองจะสังเกตเห็นว่าเมื่อคูณแล้วผลลัพธ์จะมีส่วนเป็นจำนวนจริง 1 จึงไม่ต้องเขียนในรูปที่มีส่วน และจากการคูณของส่วนที่มีผลลัพธ์เป็น 1 จำนวนที่นำมาคูณนั้นอยู่ในรูปที่เป็น อินเวอร์สการคูณซึ่งกันและกัน และเมื่อส่วนเป็น 1 จึงไม่มีตัวหารที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วจึงสรุปเป็นวิธีการหาร คือการคูณเศษด้วยอินเวอร์สการคูณของส่วน

ตัวอย่าง

1. จงทำเป็นผลสำเร็จ $\dfrac{(3,2)}{(1,4)}$

อินเวอร์สการคูณของ (1,4) คือ $(\frac{1}{17}, \frac{-4}{17})$

วิธีทำ

$$\frac{(3,2)}{(1,4)} = (3,2)(1,4)^{-1}$$
$$= (3,2)(\frac{1}{17}, \frac{-4}{17})$$
$$= \frac{1}{17}(3,2)(1,-4)$$
$$= \frac{1}{17}(11,-10)$$
$$= (\frac{11}{17}),(\frac{-10}{17})$$

หมายเหตุ จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จะเป็นลักษณะที่เอาเศษ คูณ กับ อินเวอร์สการคูณของส่วน

บทนิยาม การหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน คือการคูณจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวตั้งด้วยอินเวอร์สการคูณของตัวหาร

ถ้า Z_1, Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \quad , z_2 \neq 0$

2. จงทำเป็นผลสำเร็จ $\dfrac{5+3i}{2+3i}$

อินเวอร์สการคูณของ $2+3i$ คือ $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

$$\frac{5+3i}{2+3i} = (5+3i)(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i) = \frac{10}{13} + \frac{6}{13}i - \frac{15}{13}i + \frac{9}{13} = \frac{19}{13} - \frac{9}{13}i$$

3. จงทำเป็นผลสำเร็จ $\dfrac{2+3i-5i+1}{(2i-3)-(4+i)}$

$$\frac{2+3i-5i+1}{(2i-3)-(4+i)} = \frac{3-2i}{i-7}$$

อินเวอร์สการคูณของ $i-7$ คือ $-\frac{7}{50} - \frac{i}{50}$

$$\frac{2+3i-5i+1}{(2i-3)-(4+i)} = \frac{3-2i}{i-7} = (3-2i)(-\frac{7}{50} - \frac{i}{50})$$

= ……………………………..

= ……………………………..

4. จงทำเป็นผลสำเร็จ $\frac{3-2i}{5+4i}$

อินเวอร์สการคูณของ 5+4i คือ ……………………………………..…..

$\frac{3-2i}{5+4i}$ = ………………………………………

= ………………………………………

5. จงทำเป็นผลสำเร็จ $\frac{(1-2i)(2-i)}{(1+2i)^2}$

$\frac{(1-2i)(2-i)}{(1+2i)^2}$ = ……………………………………..….

อินเวอร์สการคูณของ …………. คือ …………………………………

$\frac{(1-2i)(2-i)}{(1+2i)^2}$ = ...

= ……………………………...

= ……………………………...

ตัวอย่าง จงหาผลคูณของ

1. (3,5)(3,-5) = (9+25 , 15-15) = (34 , 0) = 34
2. (2,-2)(2,2) = (4+4 , 4-4) = (8 , 0) = 8
3. (-6,3)(-6,-3) = ……………………………………………………..…………..……...
4. (2,1)(2,-1) = ...……………………………………..………....................
5. $(1, 1-\sqrt{2})(1, -1+\sqrt{2})$ = ………………………………………………..
6. (4-5i)(4+5i) = ……………………………………………….......................................
7. (2+i)(2-i) = ……………………………………………………..................…………..
8. (3- 2i)(3+ 2i) = ………………………………………………......................................
9. (4,-1)(4,1) = ………………………………..………………….............................
10. (-2,-3)(-2,3) = ………………………………………..……....................................

สังเกตได้ว่า* ………………………………………………………………………………..

* จำนวนที่นำมาคูณกันอยู่ในรูปของ (a , b) กับ (a , –b) เมื่อคูณกันแล้วจะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง เรียก (a,b) กับ (a,-b) ว่าเป็น สังยุค (conjugate) ซึ่งกันและกันและ $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจริง

บทนิยาม (a,b) เป็นจำนวนเชิงซ้อน มี (a,-b) เพียงจำนวนเดียว เป็นสังยุคของ (a,b)

$Z = (a,b)$ แล้ว $\overline{Z} = (a,-b)$

จะเห็นได้ว่าจำนวนที่เป็นสังยุคกัน เมื่อคูณกัน จะมีผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง ดังนั้นในการหารจำนวนเชิงซ้อน จะมีวิธีการหารอีกวิธีหนึ่ง คือการทำตัวหาร หรือส่วนให้เป็นจำนวนจริง โดยการเอาสังยุคของตัวหารคูณทั้งตัวหาร และตัวตั้ง

ตัวอย่าง

1. จงทำเป็นผลสำเร็จ $\dfrac{3+2\sqrt{5}i}{2i^{150}+i^{179}}$

วิธีทำ จากโจทย์ทำให้เป็นรูปอย่างง่ายก่อน และ จากการที่นำสังยุคมาคูณกันได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง จึงนำสังยุคของส่วนมาคูณทั้งเศษ และส่วน

วิธีที่ 1 $\dfrac{3+2\sqrt{5}i}{2i^{150}+i^{179}} = \dfrac{3+2\sqrt{5}i}{-2-i}$

$$= \frac{3+2\sqrt{5}i}{-2-i} \times \frac{-2+i}{-2+i}$$

$$= \frac{-6-4\sqrt{5}i+3i-2\sqrt{5}}{(-2)^2-i^2}$$

$$= \frac{-6-2\sqrt{5}+(3-4\sqrt{5})i}{5}$$

วิธีที่ 2 $\dfrac{(3+2\sqrt{5})}{2i^{150}+i^{179}} = \dfrac{(3,2\sqrt{5})}{(-2,-i)}$

$$= \frac{3+2\sqrt{5}i}{2i^{150}+i^{179}} = \frac{3+2\sqrt{5}i}{-2-i}$$

$$= \frac{(3,2\sqrt{5})}{(-2,-i)} \times \frac{(-2,i)}{(-2,-i)}$$

$$= \left(\frac{-6-2\sqrt{5}}{5}, \frac{3-4\sqrt{5}}{5}\right)$$

2. จงทำเป็นผลสำเร็จ $\frac{2-3i^{13}}{6-\sqrt{5}i}$

วิธีที่ 1 $\frac{2-3i^{13}}{6-\sqrt{5}i} = \frac{2-3i}{6-\sqrt{5}i}$

$= \frac{2-3i}{6-\sqrt{5}i} \times \frac{6+\sqrt{5}i}{6+\sqrt{5}i}$

= ....

....

วิธีที่ 2 $\frac{2-3i^{13}}{6-\sqrt{5}i}$ = ...

= ....

= ....

= ....

แบบฝึกทักษะที่ 4

1. กำหนดให้ $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - 3i$ จงหา[1]

1. $\overline{z_1 + z_2}$ ……………………………………….
2. $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ ………………………………………….
3. $\overline{z_1 - z_2}$ ……………………………………….
4. $\overline{z_1} - \overline{z_2}$ ………………………………………….
5. $\overline{z_1 \cdot z_2}$ ……………………………………….
6. $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ………………………………………….
7. $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}$ ……………………………………….
8. $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$ ………………………………….
9. $\overline{z_1^{-1}}$ ……………………………………….
10. $\left(\overline{z_1}\right)^{-1}$ ………………………………………….
11. $\overline{\overline{z_1}}$ ……………………………………….
12. $\overline{\overline{z_2}}$ ………………………………………….

2. จงทำเป็นผลสำเร็จ

1. $\dfrac{2 + i^{14}}{i^{75} + i^{10}}$

……………………………………….

……………………………………….

2. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{25}$

……………………………………….

……………………………………….

3. จงหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $\dfrac{2+i}{1-i} + \dfrac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2+i} - \dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$

……….

……….

4. จงหาอินเวอร์สการคูณของ $\dfrac{1 - i - (2+i)^2}{-3i}$

……….

……….

5. จงหาอินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน $2i + \dfrac{3+4i}{1+i+\dfrac{3+4i}{1+i}}$

[1] จากผลลัพธ์ในข้อ 1 นี้ จะเป็นสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน สามารถนำไปใช้ได้

แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 2

1. จงหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

(1) $(\sqrt{2}i - 3) - (\sqrt{2}i + 3)$

…………………………………………………

…………………………………………………

(2) $(1 + 1)^{13}$

…………………………………………………

…………………………………………………

(3) $(2+3i)^3 - (2-3i)^3$

…………………………………………………

…………………………………………………

(4) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6$

…………………………………………………

…………………………………………………

(5) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$

…………………………………………………

…………………………………………………

2. จงเขียน $\left(\frac{1+2i}{2+i}\right)^3$ ในรูป a + bi

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

3. จงหาอินเวอร์สการคูณของ

(1) $2 + i - \frac{(1+2i)^2}{1-i}$

…………………………………………………

…………………………………………………

(2) $\frac{10}{(1+i)(2+i)}$

…………………………………………………

…………………………………………………

(3) $\frac{10}{(1+i)(2+i)(3+i)}$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

(4) $1 - \frac{2}{1 - \frac{2}{1+i}}$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

(5) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

(6) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{102}$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

(7) $\iota^{56} + \iota^{121} + \iota^{30} + \iota^{403} + \iota^{46} + 2\iota^{17}$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

(8) $\frac{1}{3-2\iota} + \frac{2}{1+4\iota}$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

4. ค่าของ $(1 + i)^{-1} + (1 - i)^{-2}$

....

....

....

....

5. จงทำเป็นผลสำเร็จ

$$\frac{1+i}{1-i}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$$

....

....

....

....

6. จงขียนในรูป $a + bi$

$$1+\cfrac{i}{1+\cfrac{i}{1+\cfrac{i}{1+i}}}$$

....

....

....

....

....

....

7. จงหาอินเวอร์สการคูณของ $\frac{2-\sqrt{2}i}{2+\sqrt{2}i}$

....

....

....

....

8. จงหาค่าของ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+2}$

....

....

....

....

....

9. อินเวอร์สการบวกของ จำนวนเชิงซ้อน

$$\frac{2i-1}{1+i\left(\frac{i}{1+i\left(\frac{i}{1+i}\right)}\right)}$$ ในรูป $a + bi$

....

....

....

....

10. กำหนด z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$(z_1).(z_2)= 25$ และ $z_1 + z_2 = 6$ จงหา z_1 , z_2

....

....

....

....

11. กำหนด $z = \cfrac{(1+i)^4}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{i}{1+i}}}$ จงหา $\bar{z}$

....

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

กราฟ และ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจในการเขียนกราฟ และหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนจุด และ เวกเตอร์ แทนจำนวนเชิงซ้อนในระนาบเชิงซ้อน
2. หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
3. บอกสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
4. นำสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้ในการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

2. แนวความคิดหลัก

การเรียนรู้ในเรื่องกราฟของจำนวนเชิงซ้อนจะนำไปสู่การหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน และการเรียนรู้สมบัติของค่าสัมบูรณ์จะช่วยในการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้ง่ายขึ้น

3. เนื้อหาสาระ

กราฟ และค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

กราฟของจำนวนเชิงซ้อนมี 2 แบบ

1. แทนด้วยจุดในระนาบเชิงซ้อน
2. แทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (0,0) และมีจุดสิ้นสุดที่ (a,b) ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ค่าสัมบูรณ์ (absolute value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน (a,b) เขียนแทนด้วย $|a+bi|$ โดยที่ $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ทฤษฎีบท ให้ z , z_1 , z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้

1. $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
3. $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$
4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
5. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
6. $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$
7. $|z_1-z_2| \geq |z_1|-|z_2|$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูซักถามความรู้เกี่ยวกับกราฟของคู่อันดับ
2. ให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อนกับกราฟของคู่อันดับโดยตอบคำถาม จำนวนเชิงซ้อนคือจำนวนที่มีลักษณะอย่างไร กราฟของคู่อันดับเขียนได้อย่างไร แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อน
3. แบ่งกลุ่มนักเรียนแบบคละความสามารถ กลุ่มละ 4 คน แล้วให้แต่ละคนศึกษาเอกสารประกอบการเรียนที่ 5.1
4. นักเรียนในกลุ่มแต่ละคนศึกษา เอกสารประกอบการเรียนที่ 5.2 แล้วฝึกทำตัวอย่างที่ 1 โดยแบ่งกันทำคนละ 2 ข้อจากโจทย์ข้อ 5 – 11 ภายในเวลาที่กำหนด
5. นักเรียนแต่ละกลุ่มนำคำตอบของแต่ละคนในกลุ่มมาเปรียบเทียบกันและร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปเป็นสมบัติของค่าสัมบูรณ์
6. ให้กลุ่มนักเรียน 1 กลุ่ม หรือ 2 กลุ่ม ออกมารายงานผลที่สรุปได้ เรื่องสมบัติของค่าสัมบูรณ์
7. เมื่อสรุปได้ถูกต้องให้นักเรียนศึกษาและฝึกการใช้สมบัติค่าสัมบูรณ์ จากเอกสารประกอบการเรียนที่ 5.3
8. เมื่อนักเรียนเข้าใจแล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 5 ส่งกลุ่มละ 1 ชุด
9. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเสริมเป็นการบ้านส่งเป็นรายบุคคล
10. ทดสอบการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนเป็นรายบุคคล จำนวน 2 ข้อ (เก็บเป็นคะแนน F_2 คะแนน 2 คะแนน)

5. แหล่งการเรียนรู้/ สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 5.1 - 5.3
2. แบบฝึกทักษะที่ 5
3. แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 3

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	**การประเมินผล**
1. ดูผลจากการถามตอบ 2. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน 3. ดูจากผลการทำเอกสารประกอบการเรียน 4. ตรวจแบบฝึกทักษะ 5. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....

จุดประสงค์ สามารถเขียนกราฟ และหาค่าสัมบูรณ์ ของจำนวนเชิงซ้อนได้

เอกสารประกอบการเรียนที่ 5.1

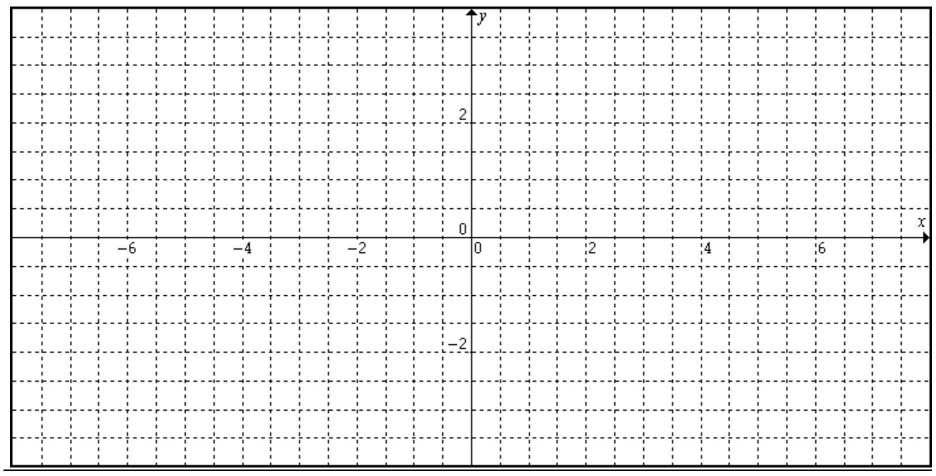
กราฟ และค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

กราฟของจำนวนเชิงซ้อนมี 2 แบบ

1. แทนด้วยจุดในระนาบเชิงซ้อน
2. แทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (0,0) และมีจุดสิ้นสุดที่ (a,b)

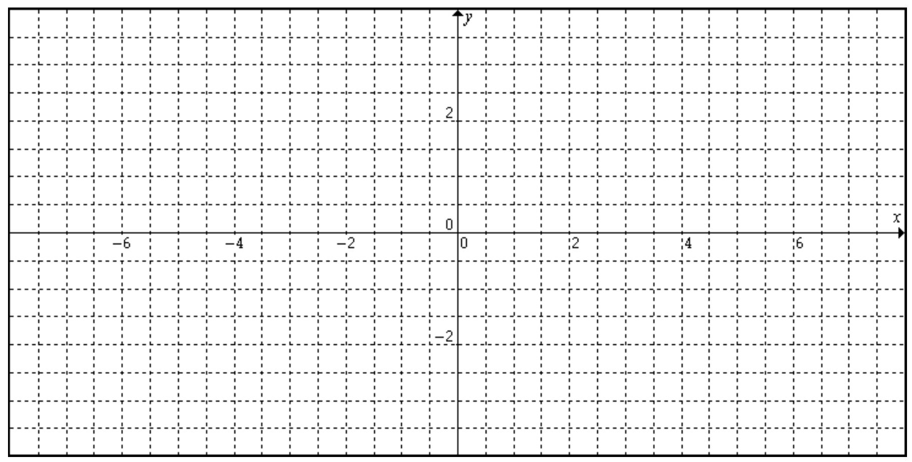
ตัวอย่าง จงเขียนจุดแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ในระนาบเชิงซ้อน

(2,3) , (–3,1) , (–2,–3) , (4,2) , (0,–1) , (–2,0) , 1+ i , –2–3i , –4–2i , 3+4i, 3i , $\sqrt{2}$



ตัวอย่าง จงเขียนเวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ในระนาบเชิงซ้อน

4 + 6i , i (4 + 6i) , i (4 -6i) , i (4 +i)



เอกสารประกอบการเรียนที่ 5.2

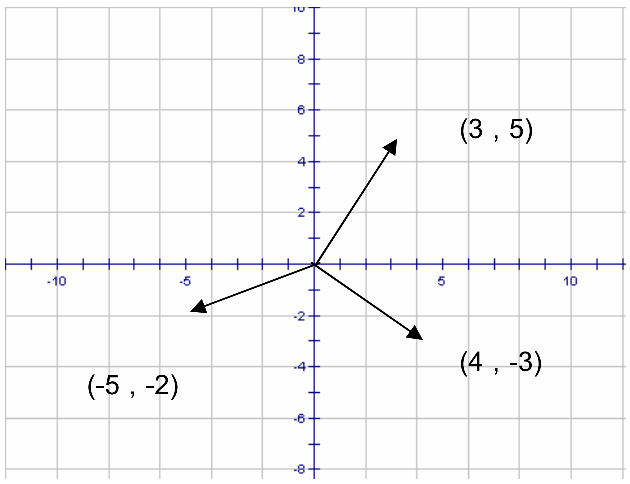
ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ในกรณีที่แทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดในระนาบ หมายถึงระยะทางระหว่างจุดที่แทนจำนวนเชิงซ้อนนั้นกับจุดเริ่มต้น (0,0) หรือ

ในกรณีที่แทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยเวกเตอร์หมายถึงความยาวของเวกเตอร์

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟ และหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

1. $3 + 5i$ 2. $4 - 3i$ 3. $-5 - 2i$



จากกราฟ และความหมายของค่าสัมบูรณ์ จะได้ระยะระหว่างจุดดังนี้

จากสูตร $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ แล้ว $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $3 + 5i$ คือระยะระหว่างจุด (3,5) กับ (0,0) นั่นเอง

$$|3+5i| = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2}$$

หรือ เมื่อเขียนจำนวนเชิงซ้อน $3 + 5i$ ในรูปของเวกเตอร์ จะได้เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$
ซึ่งค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $3 + 5i$ คือ ความยาวของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ซึ่งเท่ากับ $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ หน่วย

ดังนั้น $|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ หน่วย และ $|-5-2i| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ หน่วย

บทนิยาม ค่าสัมบูรณ์ (absolute value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน (a,b)
เขียนแทนด้วย $|a+bi|$ โดยที่ $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

ตัวอย่าง กำหนด $Z_1 = 2 - i$, $Z_2 = 3 + i$ จงหา

1. $\left|Z_1^2\right| = \left|4 - 4i + i^2\right| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$
2. $\left|Z_1\right|^2 = \left(\sqrt{2^2 + (-1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$
3. $\left|Z_2\right| = |3 + i| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$
4. $\left|-Z_2\right| = |-(3+i)| = |-3 - i| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

จากจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดในตัวอย่าง จงหา

5. $\left|(Z_2)^{-1}\right|$
6. $\left|\overline{Z_2}\right|$
7. $\left|Z_2\right|^{-1}$
8. $Z_1 \cdot \overline{Z_1}$
9. $\left|(Z_1)(Z_2)\right|$
10. $\left|Z_1\right| \cdot \left|Z_2\right|$
11. $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|$
12. $\dfrac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|}$

จากตัวอย่างข้างต้นจะสังเกตได้ว่ามีผลลัพธ์มีค่าเท่ากันเป็นคู่ๆ ถ้าเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนเป็นจำนวนอื่นๆ ผลลัพธ์แต่ละคู่ที่เท่ากันจะยังคงเท่ากัน จึงสรุปได้เป็น สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

สรุปสมบัติที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนมีดังนี้

…….....

…….....

…….....

…….....

…….....

เอกสารประกอบการเรียนที่ 5.3

ทฤษฎีบท ให้ z, z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้

1. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$
5. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
7. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
8. $|z^n| = |z|^n$

จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะช่วยในการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง จงหาค่าสัมบูรณ์ของ z เมื่อกำหนด z ดังนี้

1. $(1+2i)^4 \, i(5-i)$

$$\left|(1+2i)^4 \, i(5-i)\right| = \left|(1+2i)^4\right| |i| |5-i|$$
$$= |1+2i|^4 |5-i|$$
$$= \left(\sqrt{5}\right)^4 \sqrt{26}$$
$$= 25\sqrt{26}$$

2. $\frac{2+3i}{1-2i}$

$$\left|\frac{2+3i}{1-2i}\right| = \frac{|2+3i|}{|1-2i|}$$
$$= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$$

3. $1+\frac{2+i}{1+3i}$

เนื่องจากไม่มีสมบัติของค่าสัมบูรณ์ในรูปการบวกจึงต้องทำเป็นผลสำเร็จก่อน

$$1+\frac{2+i}{1+3i} = \frac{1+3i+2+i}{1+3i} = \frac{3+4i}{1+3i}$$

ดังนั้น $\left|1+\frac{2+i}{1+3i}\right| = \left|\frac{3+4i}{1+3i}\right| = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

4. (2-i) (1+3i) (2 – 4i)

$|(2-i)(1+3i)(2-4i)|$ = ……………………………………………….

= ……………………………………………….

= ……………………………………………….

5. $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(-1+i)^4}{-1-\sqrt{3}i}$

$\left|\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(-1+i)^4}{-1-\sqrt{3}i}\right|$ = ……………………………………………….

= ……………………………………………….

= ……………………………………………….

6. $(-3+4i)^2.(12+5i)^{-1}$

$\left|(-3+4i)^2.(12+5i)^{-1}\right|$ = ……………………………………………….

= ……………………………………………….

= ……………………………………………….

7. $\dfrac{3+4i}{2-i}-\dfrac{2+i}{3i-2}$

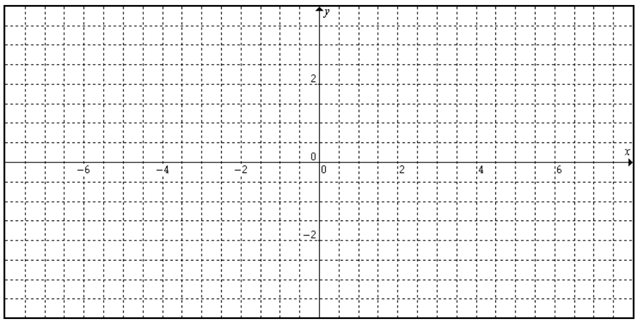
$\left|\dfrac{3+4i}{2-i}-\dfrac{2+i}{3i-2}\right|$ = ……………………………………………….

= ……………………………………………….

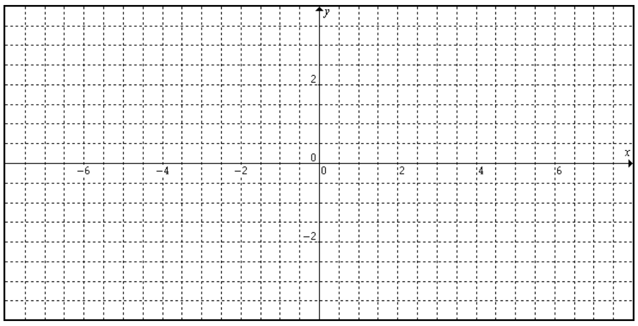
= ……………………………………………….

แบบฝึกทักษะที่ 5

1. จงเขียนจุดแทนจำนวน 3+2i , 5+i และผลบวกของสองจำนวนนี้ในระนาบเชิงซ้อน



2. จงเขียนเวกเตอร์ในข้อ (1) และหาผลบวกของจำนวนทั้งสองโดยวิธีเวกเตอร์



3. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

3.1 -5+12i

....

....

3.2 $\left(\sqrt{5}+2\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\left(-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)$

....

....

3.3 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^5$

....

....

3.4 $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}+2}{1-\mathrm{i}}$

....

....

แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 3

1. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. $3 + 4i$
2. $3 - 2i$
3. $(1 + i)(2 - i)$
4. $i(2+i) + (1+i)$
5. $6(3-2i) + (2 - i)$
6. $7i$
7. i^3
8. i^{1000}
9. $-10i$
10. $\dfrac{1}{2-i}$
11. $\dfrac{2+i}{3+i}$
12. $\dfrac{3-4i}{-3-i}$
13. $\dfrac{(1+3i)^2}{4i(1-3i)}$
14. $\dfrac{1}{4-3i} + \dfrac{5+3i}{2-i}$
15. $-2(1-i)^2(1+3i)$
16. $\left(\dfrac{1+7i}{1-i}\right)^7$

2. จงหาค่า $|Z|$ จาก

1. $z = (1+i)(1+3i)(3+i)(3-4i)$
2. $Z^3 = -4i^{100} + 3i^{51}$
3. $z^2 = \dfrac{2+i}{2-i} + \dfrac{3+4i}{1+2i}$
4. $z = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$
5. $z = \dfrac{3}{1+i} - \dfrac{4}{4-2i} + \dfrac{2}{1-i}$
6. $z = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+i}}}$

3. ถ้า $\bar{z} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ และ $\bar{w} = 3 + 4i$ จงหาค่าของ

3.1 $|z \cdot w|$ 3.2 $|z^2 \cdot w^3|$

3.3 $\left|\frac{z^5}{w^2}\right|$ 3.4 $|(z \cdot w)^4|$

4. จงหาค่าสัมบูรณ์ของอินเวอร์สการคูณของ z เมื่อ

1. $z = \frac{8-3i}{3+2i}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2. $z = \frac{(5-2i)(8+15i)(8-6i)}{(4-3i)(12+5i)}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

5. จงหา $|z|$ เมื่อ $z^2 = \frac{-10}{-2i(1+i)(1-2i)(1+3i)}$

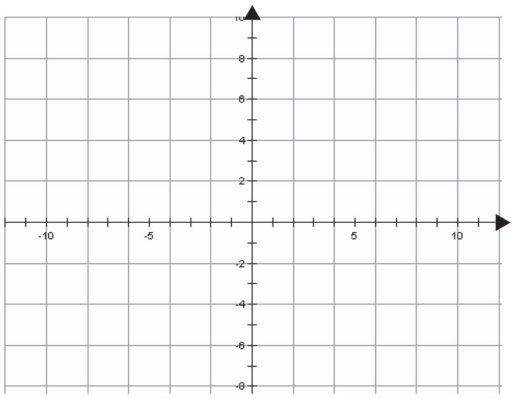
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

6. กำหนด $z = a+bi$ จงแสดงให้เห็นว่าสมการ $|3z+i| = |z+3i|$ เป็นกราฟรูปใดในระบบจำนวนจริง



…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง **จำนวนเชิงซ้อน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีทักษะใน การคูณ การหาร จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. สามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้
2. หาผลคูณผลหารของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปเชิงขั้วได้
3. ใช้การคูณจำนวนเชิงซ้อน หากำลัง n ของจำนวนเชิงซ้อนได้

2. แนวความคิดหลัก

การคูณ การหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วจะช่วยให้การคูณ การหาร สะดวกขึ้นง่ายต่อการทำความเข้าใจและสามารถนำไปใช้ในกรณีที่ต้องการหากำลัง n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n มีค่ามาก

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$z = a+bi$ จะได้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$

โดยที่ $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ และ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ทฤษฎีบท z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

ทฤษฎีบท

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการเรียนที่ 6.1 (ส่วนที่เป็นเนื้อหา)
2. ครูใช้การถามตอบให้นักเรียนสรุปจากเอกสารที่ศึกษา
3. ครูใช้การถามตอบอธิบายตัวอย่างที่ 1 – 2 จากเอกสารประกอบการเรียนที่ 6.1 และให้นักเรียนฝึกต่อจนถึง ตัวอย่างที่ 6.2
4. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปและตรวจคำตอบจากตัวอย่างที่นักเรียนได้ฝึกทำ
5. นักเรียนแต่ละคนฝึกทำแบบฝึกทักษะที่ 6.1 แล้วจับคู่กันตรวจสอบคำตอบ
6. ครูใช้การถามตอบให้นักเรียนสรุปการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
7. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนแบบคละความสามารถกลุ่มละ 4 คน ในแต่ละกลุ่มแบ่งเป็น 2 คู่ แต่ละคู่ ศึกษาเอกสารประกอบการเรียนที่ 6.2 และ 6.3 (คู่ละ 1 เรื่อง)
8. เมื่อนักเรียนทำเสร็จเรียบร้อย ให้รวมกลุ่มกัน 4 คน(เดิม) อภิปราย และแลกเปลี่ยนกันตรวจสอบคำตอบ
9. ครูให้นักเรียนสอบถามข้อสงสัย
10. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำแบบฝึกทักษะที่ 6.2 และ 6.3 ส่งให้ตรวจ กลุ่มละ 1 ชุด
11. ทดสอบการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนเป็นรายบุคคล จำนวน 3 ข้อ (เก็บเป็นคะแนน F_2 คะแนน 3 คะแนน)

5. แหล่งการเรียนรู้/สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 6.1, 6.2 และ 6.3
2. แบบฝึกทักษะที่ 6.1, 6.2 และ 6.3
3. การสืบค้นทางอินเทอร์เน็ต

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	**การประเมินผล**
1. ดูผลจากการถามตอบ	
2. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน	
3. ดูจากผลการทำเอกสารประกอบการเรียน	
4. ตรวจแบบฝึกทักษะ	
5. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....

จุดประสงค์ สามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว ได้

เอกสารประกอบการเรียนที่ 6.1

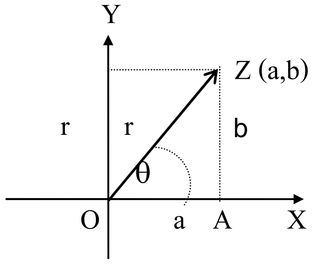
จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Polar Form)

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนนอกจากจะเขียนในรูป a + bi แล้ว ยังเขียนได้ในรูป ที่เวกเตอร์ ที่แทนจำนวนเชิงซ้อนนั้น ทำมุมกับแกน x เรียกจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Polar form) หรือ Trigonometric form

ให้นักเรียนพิจารณา

1. จากกราฟของจำนวนเชิงซ้อน ในระนาบเชิงซ้อน

กำหนด $z = a + bi = (a,b)$, $a > 0$, $b > 0$



ให้ θ เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดที่เวกเตอร์ทำกับแกน x ทางด้านบวก ในทิศทางบวก (จากแกน X ทางด้านบวกวัดทวนเข็มนาฬิกาไปยังเวกเตอร์ที่แทนจำนวนเชิงซ้อนนั้น)

เรียก θ ว่า **แอมปลิจูด (amplitude)** หรือ **อาร์กิวเมนต์ (argument)** ของ z

จาก z ในกราฟ จงหาพิกัด ของ z ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ $r = |\overline{OZ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก AOZ

$\frac{a}{r} = \cos\theta$ และ $\frac{b}{r} = \sin\theta$

$a = r\cos\theta$ และ $b = r\sin\theta$

$z = a+bi = r\cos\theta + i\, r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $Z = a + bi$ สามารถเขียนในรูป $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ โดยที่ $\tan\theta = \frac{b}{a}$

เรียก $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ว่า **จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Polar form)** ของ a + bi

แต่ $\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$ $\sin\theta = \sin(\theta + 2k\pi)$, k เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน a + bi ด้วย

บทนิยาม z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$z = a+bi$ จะได้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$

โดยที่ $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ และ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ตัวอย่าง จงเขียน z ที่กำหนดในรูปเชิงขั้ว

1. $z = 1+\sqrt{3}i$

   จาก $z = 1+\sqrt{3}i$ แล้ว $a = 1$, $b = \sqrt{3}$

   และ $\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$ จะได้ $\theta = 60^{o}$

   $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

   ดังนั้น $1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos 60^{o} + i\sin 60^{o}\right)$

2. $z = -1 + \sqrt{3}\ i$

   $z = -1 + \sqrt{3}\ i$ ได้ $a = -1$, $b = \sqrt{3}$

   $\tan\theta = \dfrac{b}{a} = -\sqrt{3}$ ดังนั้น $\theta = 120^{o}$

   $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

   $z = -1 + \sqrt{3}\ i = 2\left(\cos 120^{o} + i\sin 120^{o}\right)$

3. $z = -1- \sqrt{3}\,i$

   $z = -1 - \sqrt{3}\ i$ ได้ a =…… , b = ………….

   $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ = …………. ดังนั้น θ = …………..

   $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ = ………………………………………………...

   $z = -1 - \sqrt{3}\ i$ = …………………………………………………

4. $z = 1 - \sqrt{3}\,i$

   $z = 1 - \sqrt{3}\ i$ ได้ a =…… , b = ………….

   $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ = …………. ดังนั้น θ = …………..

   $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ = …………………………………………………

   $z = 1 - \sqrt{3}\ i$ = …………………………………………………..

5. $z = -3 + 3i$

$z = -3 + 3i$ ได้ a =…… , b = …………

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ = ………… ดังนั้น θ = …………..

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ =…………………………………………………

$z = -3 - 3i$ = ……………………………………………...…

6. $z = \frac{1+i}{1-i}$

$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$

$z = i$ ได้ a =…… , b = …………

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ = ………… ดังนั้น θ = …………..

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ =…………………………………………………

$z = i$ = ……………………………………………………...…

7. $z = -4i$

$z = -4i$ ได้ a =…… , b = …………

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ = ………… ดังนั้น θ = …………..

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ =…………………………………………………

$z = -4i$ = ……………………………………………………….

ตัวอย่าง

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $\sqrt{3}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$ ในรูป a + bi

$$\sqrt{3}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $5(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$ ในรูป a + bi

$5(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$ = ………………………………………..

แบบฝึกทักษะที่ 6.1

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปเชิงขั้ว

   1. $-2+2\sqrt{3}i$

   2. $-5\sqrt{3}-5i$

   3. $(2-i)(2+i)$

   4. $\frac{1-i}{1+i}$

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดในรูป $a + bi$

   1. $2(\cos 120^{\circ} + i\sin 120^{\circ})$

   2. $\sqrt{2}(\cos 135^{\circ} - i\sin 135^{\circ})$

   3. $\cos(-60^{\circ}) + i\sin(-60^{\circ})$

   4. $2\sqrt{2}(\cos 225^{\circ} - i\sin(-315^{\circ})$

จุดประสงค์ สามารถคูณ หารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้

เอกสารประกอบการเรียนที่ 6.2

การคูณ และ การหาร จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

กำหนด $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

1. จงหา z_1z_2

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2))$$
$$= r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

2. จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}\frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

= …………………………………………………………………………..

= ………………………………………………..……………………….

สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad , \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

ตัวอย่าง

1. กำหนด $z_1 = 4\left(\cos 20^o + i\sin 20^o\right)$, $z_2 = 3\left(\cos 25^o + i\sin 25^o\right)$ จงหา z_1z_2

วิธีทำ จาก $z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$

$$= 4\cdot 3\left(\cos\left(20^o + 25^o\right) + i\sin\left(20^o + 25^o\right)\right)$$
$$= 12\left(\cos 45^o + i\sin 45^o\right)$$

2. จงหาค่าของ $\dfrac{8\left(\cos 540^o + i\sin 540^o\right)}{2\left(\cos 225^o + i\sin 225^o\right)}$

วิธีทำ จาก $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)$

$$\frac{8\left(\cos 540^o + i\sin 540^o\right)}{2\left(\cos 225^o + i\sin 225^o\right)} = \frac{8}{2}\left(\cos\left(540^o - 225^o\right) + i\sin\left(540^o - 225^o\right)\right)$$
$$= 4\ (\cos 315^o + i\sin 315^o)$$

3. จงหาค่าของ $(2(\cos 18^o + i\sin 18^o))(5(\cos 42^o + i\sin 42^o)$ ในรูป $a + bi$

จาก $z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$

$(2(\cos 18^o + i\sin 18^o))(5(\cos 42^o + i\sin 42^o)$

= ……………………………………………

= ……………………………………………

4. จงหาค่าของ $\dfrac{4\sqrt{2}\left(\cos 45^o - i\sin 225^o\right)}{2(\cos 315^o + i\sin 315^o)}$

$$\frac{4\sqrt{2}\left(\cos 45^o - i\sin 225^o\right)}{2(\cos 315^o + i\sin 315^o)} = \frac{4\sqrt{2}\left(\cos 45^o + i\sin 45^o\right)}{2\left(\cos 315^o + i\sin 315^o\right)}$$

= ……………………………………….

= ……………………………………….

แบบฝึกทักษะที่ 6.2

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป a+bi

   1.1 $\left(4\left(\cos 150^{o}+i\sin 150^{o}\right)\right)\left(\cos 180^{o}+i\sin 180^{o}\right)$

....

....

....

....

   1.2 $\left(\frac{1}{2}\left(\cos 330^{o}+i\sin 330^{o}\right)\right)\left(2\left(\cos\left(-30^{o}\right)+i\sin\left(-30^{o}\right)\right)\right)$

....

....

....

....

2. จงหาค่าของ $\dfrac{2\left(\cos 150^{o}+i\sin 150^{o}\right)}{4\sqrt{2}\left(\cos 315^{o}-i\sin 45^{o}\right)}$

....

....

....

....

3. กำหนด $z=\cos(-30^{o})+i\sin(-30^{o})$ จงหา

   3.1 z^2 = (z)(z) = ...

   3.2 z^3. =..

   3.3 z^4. =..

จุดประสงค์ สามารถหากำลัง n และรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

เอกสารประกอบการเรียนที่ 6.3

การหากำลังที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

จากการคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วจะทำได้สะดวกและรวดเร็ว จึงนำมาใช้กับการยกกำลังของจำนวนเชิงซ้อนด้วย จำนวนเต็มบวก

กำหนด $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$
\begin{aligned}
z^2 &= r \cdot r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= r^2\big(\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)\big) \\
&= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\
z^3 &= \big(r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\big)\big(r\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)\big) \\
&= r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \\
z^4 &= r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) \\
z^n &= \text{..}
\end{aligned}
$$

> **ทฤษฎีบท** ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้
> $$z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\left(\sqrt{3}+i\right)^7$

วิธีทำ จาก $z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{3}+i\right) &= 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) \\
\left(\sqrt{3}+i\right)^7 &= 2^7\big(\cos(7\times 30^\circ) + i\sin(7\times 30^\circ)\big) \\
&= 2^7\big(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ\big)
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{100}$

วิธีทำ จาก $z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) &= \left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right) \\
\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{100} &= (\cos 3000^\circ + i\sin 3000^\circ) \\
&= \text{..} \\
&= \text{..}
\end{aligned}
$$

แบบฝึกทักษะที่ 6.3

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป a +bi

1.1 $(1-i)^{10}$

1+i ในรูปเชิงขั้ว คือ ………………………………………………………………………...…...

จาก $z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$

ดังนั้น $(1-i)^{10}$ = ……………………………………………………………………………...

= ……………………………………………………………………………………

1.2 $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^5$

$(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$ ในรูปเชิงขั้ว คือ ……………………………………………………………..…….

จาก $z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$

ดังนั้น $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^5$ = ……………………………………………………………………….....

= ……………………………………………………………...……………….

1.3 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ ในรูปเชิงขั้ว คือ ……………………………………………………………………

จาก $z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$

ดังนั้น $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8$ = ……………………………………………………………………........

= ……………………………………………………………………...…….

1.4 $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12}$

$\left(-1+\sqrt{3}i\right)$ ในรูปเชิงขั้ว คือ ……………………………………...………………………………….

จาก $z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$

ดังนั้น $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12}$ = ……………………………………..……………………………………..….

= ……………………………………………...……………………………….

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 1 ชั่วโมง

การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีทักษะใน การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

สามารถหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้

2. แนวความคิดหลัก

การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วจะช่วยให้การหารากที่ n สะดวกขึ้นง่ายต่อการทำความเข้าใจและสามารถนำไปใช้กับการหารากที่ n ของจำนวนจริง ในกรณีที่ n มีค่าสูงๆ

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม x ,z เป็นจำนวนเชิงซ้อน n เป็นจำนวนเต็มบวก

x เป็นรากที่ n ของ z ก็ต่อเมื่อ $x^n = z$

จากบทนิยาม จะได้ว่าคำตอบของสมการ $x^n = z$ คือ รากที่ n ของ z นั่นเอง ซึ่งจะหารากที่ n ของ z ได้จากทฤษฎีบท (ในชั้นนี้ไม่มีการพิสูจน์)

ทฤษฎีบท ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ x_p เป็นรากที่ n ของ z แล้ว

$$x_p = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right)$$

$r = |z|$ และ $p = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$ และ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$

ตัวอย่าง 1. จงหารากที่ 2 ของ 16 (cos 60^o + i sin 60^o)

วิธีทำ จาก $x_p = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right)$

รากที่สองของ z จะมี 2 ค่า คือ

$$x_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2(0)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2(0)\pi}{n})\right)$$

$$x_2 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2(1)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2(1)\pi}{n})\right)$$

รากที่ 2 ของ 16 (cos 60^o + i sin 60^o) คือ

$$x_1 = 16^{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{60^o}{2}) + i\sin(\frac{60^o}{2})\right)$$

$$= 4(\cos30^o + i\sin30^o)$$

$$x_2 = 16^{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{60^o+360^o}{2}) + i\sin(\frac{60^o+360^o}{2})\right)$$

$$= 4(\cos210^o + i\sin210^o)$$

ดังนั้น รากที่ 2 ของ 16 (cos 60^o + i sin 60^o) คือ

$4(\cos30^o + i\sin30^o)$ หรือ $4(\cos210^o + i\sin210^o)$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูแสดงที่มาของสูตรในการหารากที่ n บนกระดาน แล้วใช้การถามตอบให้นักเรียนพิจารณาลักษณะของสูตร ค่าที่จะใช้แทนค่า
2. ครูใช้การถามตอบประกอบคำอธิบายตัวอย่างที่ 1 ในเอกสารประกอบการเรียนที่ 7
3. ให้นักเรียนฝึกตัวอย่างที่ 2 แล้วสุ่มเรียกนักเรียน (ที่ทำได้) ออกมาแสดงวิธีทำบนกระดาน
4. ครูใช้การถามตอบให้นักเรียนเปรียบเทียบ พิจารณาผลที่ได้ จากการทำตัวอย่างทั้ง 2 ข้อ
5. สุ่มเรียกนักเรียนให้สรุปผลจากการพิจารณาจนนักเรียนเข้าใจวิธีการ
6. ให้นักเรียนฝึกทำตัวอย่างที่ 3 แล้วสุ่มเรียกนักเรียนออกมาแสดงวิธีทำ และนำเสนอวิธีการคิด
7. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปและตรวจคำตอบจากตัวอย่างที่นักเรียนทำ
8. นักเรียนแต่ละคนฝึกทำแบบฝึกทักษะที่ 7 แล้วจับคู่กันตรวจสอบคำตอบ
9. ครูใช้การถามตอบให้นักเรียนสรุปการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

10 ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนแบบคละความสามารถกลุ่มละ 4 คน

11. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำแบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 4 ส่งให้ตรวจ กลุ่มละ 1 ชุด

5. แหล่งการเรียนรู้/สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 7
2. แบบฝึกทักษะที่ 7
3. แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 4

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. ดูผลจากการถามตอบ	
2. ดูจากผลการทำเอกสารประกอบการเรียน	
3. ตรวจแบบฝึกทักษะ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....
....
....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....
....
....
....
....

จุดประสงค์ สามารถหากำลัง n และรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

เอกสารประกอบการเรียนที่ 7

การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม x ,z เป็นจำนวนเชิงซ้อน n เป็นจำนวนเต็มบวก

x เป็นรากที่ n ของ z ก็ต่อเมื่อ $x^n = z$

จากบทนิยาม จะได้ว่าคำตอบของสมการ $x^n = z$ คือ รากที่ n ของ z นั่นเอง ซึ่งจะหารากที่ n ของ z ได้จากทฤษฎีบท (ในชั้นนี้ไม่มีการพิสูจน์)

ทฤษฎีบท ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ x_p เป็นรากที่ n ของ z แล้ว

$$x_p = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right)$$

$r = |z|$ และ $p = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$ และ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$

ตัวอย่าง 1. จงหารากที่ 2 ของ $16(\cos 60^{o} + i\sin 60^{o})$

วิธีทำ จาก $x_p = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right)$

รากที่สองของ z จะมี 2 ค่า คือ

$$x_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2(0)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2(0)\pi}{n})\right)$$

$$x_2 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2(1)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2(1)\pi}{n})\right)$$

รากที่ 2 ของ $16(\cos 60^{o} + i\sin 60^{o})$ คือ

$$x_1 = 16^{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{60^{o}}{2}) + i\sin(\frac{60^{o}}{2})\right)$$

$$= 4(\cos30^{o}+i\sin30^{o})$$

$$x_2 = 16^{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{60^{o}+360^{o}}{2}) + i\sin(\frac{60^{o}+360^{o}}{2})\right)$$

$$= 4(\cos210^{o}+i\sin210^{o})$$

ดังนั้น รากที่ 2 ของ $16(\cos 60^{o} + i\sin 60^{o})$ คือ

$4(\cos30^{o}+i\sin30^{o})$ หรือ $4(\cos210^{o}+i\sin210^{o})$

2. จงหารากที่ 3 ของ $4(\cos 120^{\circ} + i \sin 120^{\circ})$

วิธีทำ x_p เป็นรากที่สามของ z จะได้

$$x_p = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right), k = 0,1,2$$

รากที่สามของ z จะมี 3 ค่า คือ $x_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2(0)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2(0)\pi}{n})\right)$

$$x_2 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2(1)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2(1)\pi}{n})\right)$$

$$x_3 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2(2)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2(2)\pi}{n})\right)$$

รากที่ 3 ของ $4(\cos 120^{\circ} + i \sin 120^{\circ})$ คือ

$$x_1 = 4^{\frac{1}{3}}\left(\cos(\frac{120^{\circ}}{3}) + i\sin(\frac{120^{\circ}}{3})\right) = \sqrt[3]{4}(\cos 40^{\circ} + i\sin 40^{\circ})$$

$$x_2 = 4^{\frac{1}{3}}\left(\cos(\frac{120^{\circ}+360^{\circ}}{3}) + i\sin(\frac{120^{\circ}+360^{\circ}}{3})\right) = \sqrt[3]{4}(\cos 160^{\circ} + i\sin 160^{\circ})$$

$$x_3 = 4^{\frac{1}{3}}\left(\cos(\frac{120^{\circ}+720^{\circ}}{3}) + i\sin(\frac{120^{\circ}+720^{\circ}}{3})\right) = \sqrt[3]{4}(\cos 280^{\circ} + i\sin 280^{\circ})$$

ดังนั้น รากที่ 3 ของ $4(\cos 120^{\circ} + i \sin 120^{\circ})$ คือ $\sqrt[3]{4}(\cos 40^{\circ} + i\sin 40^{\circ})$

หรือ $\sqrt[3]{4}(\cos 160^{\circ} + i\sin 160^{\circ})$ หรือ $\sqrt[3]{4}(\cos 280^{\circ} + i\sin 280^{\circ})$

3. จงหารากที่ 4 ของ -81

$$z = -81 = 81\left(\cos 180^{\circ} + i\sin 180^{\circ}\right)$$

ถ้า x_p เป็นรากที่ 4 ของ z จะได้

$$x_p = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right), k = 0,1,2,3$$

รากที่ 4 ของ $81\left(\cos 180^{\circ} + i\sin 180^{\circ}\right)$ คือ

$$x_1 = 81^{\frac{1}{4}}\left(\cos(\frac{180^{\circ}}{4}) + i\sin(\frac{180^{\circ}}{4})\right) = 3(\cos 45^{\circ} + i\sin 45^{\circ})$$

x_2 = ……………………………………...……………………………………

x_3 = ……………………………………………………………………………..

x_4 = ……………………………………………………………………………..

แบบฝึกทักษะที่ 7

1. จงหารากที่สามของ -64

   $z = -64$ ในรูปเชิงขั้วคือ ……………………………………………………………………………………..

   x_p เป็นรากที่สามของ z จะได้ $x_p = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right)$, k = 0,1,2

   รากที่ 3 ของ –64 คือ

   x_1 = ……………………………………………………………………………………………….....

   x_2 = ……………………………………………………………………………………………...........

   x_3 = ……………………………………………………………………………………………... ……

2. จงหารากที่ 4 ของ 81i

   $z = 81i$ ในรูปเชิงขั้วคือ ………………………………………………………………………………......

   ถ้า x_p เป็นรากที่ 4 ของ z จะได้

   $$x_p = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right),\ k = 0,1,2,3$$

   รากที่ 4 ของ 81i คือ

   x_1 = ……………………………………………………………………………………………...………

   x_2 = ……………………………………………………………………………………………..

   x_3 = ……………………………………………………………………………………………..

   x_4 = ……………………………………………………………………………………………...

3. จงหารากที่ 4 ของ $-8-8\sqrt{3}\ i$

   $z = -8-8\sqrt{3}\ i$ ในรูปเชิงขั้วคือ ……………………………………………………….……………...

   ถ้า x_p เป็นรากที่ 4 ของ z จะได้

   $$x_p = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right),\ k = 0,1,2,3$$

   รากที่ 4 ของ $-8-8\sqrt{3}\ i$ คือ

   x_1 = ……………………………………………………………………………...……………

   x_2 = ……………………………………………………………………………………...…….

   x_3 = ……………………………………………………………………………………………...

   x_4 = ……………………………………………………………………………………………....

แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 4

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป a + bi

1.1 $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{40}$

....

....

....

1.2 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)^{20}$

....

....

....

1.3 $\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}}\right)^{10}$

....

....

....

1.4 $2(\cos 30^{\circ}+\mathrm{i}\sin 30^{\circ})^{-20}$

....

....

....

2. จงหาผลสำเร็จของ $\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{6}(1-\mathrm{i})^{3}}{(-1+\mathrm{i})^{4}}$ ในรูป a+bi

....

....

....

3. จงหาค่าของ $[8(\cos(-120^{\circ})+\mathrm{i}\sin(-120^{\circ})][(\cos 30^{\circ}-\mathrm{i}\sin 30^{\circ})]$

....

....

....

4. ถ้า $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $z_2 = 3\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

5. ถ้า $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ จงหา $\left(z_1^{\,6}\right)\left(z_2^{\,10}\right)$

6. จงเขียน $\dfrac{\left(2(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)\right)\left(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ\right)}{(\cos 45^\circ + i\sin 135^\circ)^8}$ ในรูป a +bi

7. จงหารากที่ 2 ของ

7.1 $1 + \sqrt{3}\,i$

7.2 $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

8. จงหารากที่ 4 ของ $-1 + i$

9. $z_1 = 16\,(\cos 590^\circ + i\sin 590^\circ)$, $z_2 = (\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)$ จงหา

รากที่ 4 ของ $\frac{z_1}{z_2}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง **สมการพหุนาม** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีทักษะในการแก้สมการพหุนามกำลังสอง เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. สามารถแก้สมการพหุนามที่อยู่ในรูป $x^2 + c = 0$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้
2. สามารถแก้สมการพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้

2. แนวความคิดหลัก

การแก้สมการพหุนาม เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน คำตอบที่ได้ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น คำตอบของสมการในระบบจำนวนเชิงซ้อน จะมีคำตอบอย่างน้อย 1 ค่า

3. เนื้อหาสาระ

1. สมการพหุนามที่อยู่ในรูป $x^2+c = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

   ใช้หลัก $(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$

2. สมการพหุนามกำลังสองที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

   การแก้สมการกำลังสองในรูปแบบนี้จะใช้วิธีการแก้สมการโดยการใช้สูตร

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   ค่าของ x ขึ้นอยู่กับ $b^2 - 4ac$

   2.1. ถ้า $b^2 - 4ac \geq 0$ จะได้ค่า x เป็นจำนวนจริง 2 หรือ 1 ค่า

   2.2. ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ จะได้ค่า x เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 ค่า ซึ่งจะหาได้จาก

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}\, i}{2a}$$

   (ซึ่งจะสังเกตได้ว่า จำนวนทั้งสองนั้นจะเป็นสังยุคซึ่งกันและกัน)

โจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ

1. จงหาค่า x จากสมการ $3x^2 + 6x + 2 = 0$
2. จงหาค่า x จากสมการ $x^2 + (1 + 2\sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} = 0$
3. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 = -12$
4. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 = -4i$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูใช้การถามตอบทบทวนการแก้สมการกำลังสอง และการแยกตัวประกอบในกรณีที่โจทย์อยู่ในลักษณะ
   1. $x^2 - c = 0$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ
   2. $x^2 + c = 0$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ
   3. $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ
2. ครูกำหนดโจทย์สมการกำลังสอง เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตจำนวนเชิงซ้อนบนกระดาน เป็นสมการกำลังสองในลักษณะตามที่ต้องการ ให้นักเรียนแต่ละแถว หรือแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมาแสดงวิธีทำบนกระดาน
3. ตรวจสอบความถูกต้องโดยให้แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมาอธิบายวิธีทำที่แสดงตัวอย่างไว้ (ควรจะเป็นคนละคนกับที่ออกมาทำก่อน)
4. ครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายเพื่อตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง
5. ครูสรุปจากตัวอย่าง และใช้การถามตอบประกอบคำอธิบายในกรณีที่เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน
6. ให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างในเอกสารประกอบการเรียนที่ 8 ไปตามลำดับ
7. ครูสรุปความถูกต้อง และขั้นตอนของการทำโจทย์อีกครั้ง
8. ให้นักเรียนจับคู่กันช่วยกันทำแบบฝึกทักษะที่ 8
9. ครูสุ่มเรียกนักเรียนเฉลยแบบฝึกทักษะที่ 8 บนกระดาน
10. ครู และ นักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง
11. ครูซักถามนักเรียนเพื่อสรุปให้ได้เนื้อหาที่เรียน และให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย
12. ทดสอบเป็นรายบุคคล (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

5. แหล่งการเรียนรู้/สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 8
2. แบบฝึกทักษะที่ 8

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. ดูผลจากการถามตอบ	
2. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน	
3. การให้ความร่วมมือในการทำโจทย์ และการอภิปราย	
4. ตรวจแบบฝึกทักษะ	
5. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....
....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....
....
....
....

จุดประสงค์ สามารถแก้สมการพหุนามกำลังสอง เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

เอกสารประกอบการเรียนที่ 8

จากทฤษฎีบทที่กล่าวไปแล้วในใบความรู้นั้น นำมาใช้ในการแก้สมการพหุนาม ในระดับนี้จะใช้กับสมการพหุนามกำลังสอง หรือมากกว่าขึ้นไป ซึ่งสมการที่มีกำลังตั้งแต่สองขึ้นไปมักจะใช้การแยกตัวประกอบในการแก้สมการ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับสมการที่ต้องการหาค่าตัวแปรนั้น

การแก้สมการกำลังสอง

1. สมการพหุนามที่อยู่ในรูป $x^2+c=0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง

1. จงหาค่า x จากสมการ $x^2+9=0$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$x^2+9 = 0$$
$$x^2-9i^2 = 0$$
$$(x+3i)(x-3i) = 0 \qquad \text{เพราะ } (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2$$
$$x = 3i\ ,\ -3i$$

2. เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงหาค่า x จากสมการ $x^2 = -16$

$$x^2 = -16$$
$$x^2+16 = 0$$

………..………..

…….

…….

3. เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงหาค่า z จากสมการ $z^2 = 8i$

จะเห็นว่าสมการ $z^2-8i = 0$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้

ให้ $z = x+yi$ โดยที่ x , y เป็นจำนวนจริง

$$(x+yi)^2 = 8i$$
$$x^2-y^2+2xyi = 8i$$
$$x^2-y^2 = 0 \qquad \text{…………} \ (1)$$
$$2xy = 8 \qquad \text{…………} \ (2)$$

แก้สมการ ได้ $x = 2, -2, 2i, -2i$ ($x = 2i, -2i$ ใช้ไม่ได้)

$y = 2, -2,$

ดังนั้น $z = 2+2i\ ,\ -2-2i$

4. จงแก้สมการ $z^2 + 32i = 0$

จะเห็นว่าสมการ $z^2 + 32i = 0$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้

ให้ $z = x + yi$ โดยที่ x , y เป็นจำนวนจริง

$$(x + yi)^2 = -32i$$

………

………

………

………

………

………

แก้สมการ ได้ x = …………………………….. y = ………………………..

ดังนั้น z = …………………………

2. สมการพหุนามกำลังสองที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

การแก้สมการกำลังสองในรูปแบบนี้จะใช้วิธีการแก้สมการโดยการใช้สูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ค่าของ x ขึ้นอยู่กับ

2.1 ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ จะได้ค่าเป็นจริง 2 ค่าที่มีค่าเท่ากัน

2.2 ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ จะได้ค่าเป็นจำนวนจริง 2

2.3 ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ จะได้ค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 ค่า ซึ่งจะหาได้จาก

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}\, i}{2a}$$

(ซึ่งจะสังเกตได้ว่า จำนวนทั้งสองนั้นจะเป็นสังยุคซึ่งกันและกัน)

ตัวอย่าง เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. จงหาค่า ตัวแปร จากสมการ $5x^2 + 2x + 1 = 0$

จากสมการกำลังสอง $5x^2 + 2x + 1 = 0$

จะได้ $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(5)(1) = 4 - 20 = -16$

ดังนั้น $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|}\, i}{2a}$

$\dfrac{-2 \pm \sqrt{|-16|}\, i}{2(5)}$ $\quad \dfrac{-2 \pm 4i}{10}$

$x = \dfrac{-1 \pm 2i}{5}$

คำตอบของสมการคือ $\dfrac{-1 + 2i}{5}$ และ $\dfrac{-1 - 2i}{5}$

2. จงแก้สมการ $x^2 - x - 5 = 0$

จากสมการ $x^2 - x - 5 = 0$

จะได้ $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-5) = 1+20 = 21$

นั่นคือ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{21}}{2}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

คำตอบของสมการคือ $\dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}$ และ $\dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}$

3. จงแก้สมการ $2x^2 + 2x + 4 = 0$

จากสมการ $2x^2 + 2x + 4 = 0$

จะได้ $b^2 - 4ac = 2^2 - (4)(2)(4) = 4 - 32 = -28$

นั่นคือ x =…………………………………..…………..

=……………………………………...……….

=……………………………...……………

คำตอบของสมการคือ …………และ ……………….….....…...

แบบฝึกทักษะที่ 8

1. จงแก้สมการ

1.1 $x^2+48=0$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

1.2 $x^2=-25$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

2. จงหาคำตอบของสมการ

2.1 $z^2 = 18i$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

2.2 $z^2=-50i$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

3. จงหารากของสมการ

3.1 $4x^2+3x+10=0$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

3.2 $5x^2+x+6=0$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

3.3 $3x^2+9x-16=0$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

3.4 $2x^2+5x+12=0$

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง **สมการพหุนาม** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีทักษะในการแก้สมการกำลัง n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2 และเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. สามารถบอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมการพหุนามได้
2. นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมการพหุนามไปใช้ในการหาคำตอบของสมการพหุนามได้
3. แก้สมการพหุนามกำลัง n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2 และเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. แนวความคิดหลัก

สมการพหุนามที่มีกำลังสูงกว่า 2 จะแก้สมการได้โดยการแยกตัวประกอบ การแยกตัวประกอบจะใช้วิธีการแยกตัวประกอบแบบใดขึ้นอยู่กับโจทย์ และ คำตอบของสมการ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะต้องมีคำตอบ n คำตอบ (นับจำนวนที่ซ้ำกันด้วย)

3. เนื้อหาสาระ

1. การแก้สมการที่ใช้การแยกตัวประกอบของสมการกำลังสอง
2. การแก้สมการที่ใช้การแยกตัวประกอบโดยใช้หลักการแจกแจง
3. การแก้สมการที่ใช้การแยกตัวประกอบโดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

โจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ

1. จงหาคำตอบของสมการเมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

   $x^4 + x^2 - 12 = 0$

2. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจินตภาพ จงหาคำตอบของสมการ

   $x^6 - x^4 - x^2 + 1 = 0$

3. จงหาผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของรากของสมการ

   $x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 6x + 15 = 0$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับสมการพหุนาม แบ่งกลุ่มนักเรียนแบบคละความสามารถ กลุ่มละ 4 คน ช่วยกันศึกษาใบความรู้ โดยอภิปรายกันในหัวข้อต่อไปนี้
    1) สมการพหุนามมีลักษณะเป็นอย่างไร
    2) นักเรียนได้ความรู้อะไรจากทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต
    3) ทฤษฎีบทเศษเหลือ ใช้ในกรณีใด มีหลักและนำไปใช้อย่างไร
    4) ผลสรุปของทฤษฎีบทตัวประกอบ
    5) วิธีการหารสังเคราะห์ และการนำไปใช้
2. ครูใช้การถามตอบ และการนำเสนอ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและสรุปผล ของการศึกษาใบความรู้
3. ให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาตัวอย่างในเอกสารประกอบการเรียนที่ 9 ไปตามลำดับ
4. ครูสรุปความถูกต้อง และขั้นตอนของการทำโจทย์อีกครั้ง
5. ให้นักเรียนจับคู่กันช่วยกันทำแบบฝึกทักษะที่ 9
6. ครูสุ่มเรียกนักเรียนเฉลยแบบฝึกทักษะที่ 9 บนกระดาน
7. ครู และ นักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง
8. ครูซักถามนักเรียนเพื่อสรุปให้ได้เนื้อหาที่เรียน และให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย
9. ทดสอบเป็นรายบุคคล (ใช้เวลาประมาณ 15 นาที)

5. แหล่งการเรียนรู้/สื่อการเรียนการสอน

1. ใบความรู้สมการพหุนาม
2. เอกสารประกอบการเรียนที่ 9
3. แบบฝึกทักษะที่ 9
4. สืบค้นจากอินเทอร์เน็ต

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. ดูผลจากการถามตอบ	
2. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน	
3. ดูจากผลการทำเอกสารประกอบการเรียน	
4. ตรวจแบบฝึกทักษะ	
5. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....

ใบความรู้
สมการพหุนาม

สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่จะใช้แก้สมการนี้เป็นสมการที่สมมูลกับสมการในรูป $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ,\ldots, a_1 , a_0$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ เรียก "สมการพหุนามกำลัง n" ซึ่งเป็นสมการที่จะหาคำตอบ หรือ รากของสมการได้เสมอ โดยอาศัยทฤษฎีบทดังนี้

> **ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต (The Fundamental Theorem of Algebra)**
> ถ้า P(x) พหุนามที่มีดีกรีมากกว่าศูนย์แล้ว สมการ P(x) = 0 จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อย 1 คำตอบ

สมการพหุนามที่ได้เรียนมาแล้วในระบบจำนวนจริง คำตอบของสมการที่ได้เป็นจำนวนจริง แต่ในระบบจำนวนเชิงซ้อน เอกภพสัมพัทธ์ของเซตคำตอบของสมการจะเป็นจำนวนเชิงซ้อน คำตอบของสมการที่ได้ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อน วิธีการแก้สมการก็จะเป็นไปตามวิธีการที่ได้เรียนมาแล้ว ซึ่งต้องใช้ทฤษฎีต่างๆ ดังนี้

ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)

เมื่อ P(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ,\ldots, a_1 , a_0$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม P(x) ด้วยพหุนาม x – c เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้วเศษเท่ากับ P(c)

ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

เมื่อ P(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ,\ldots, a_1 , a_0$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ พหุนาม P(x) นี้จะมี x – c เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ P(c) = 0 และ c จะเป็นคำตอบของสมการ P(x) = 0

ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ

เมื่อ P(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ,\ldots, a_1 , a_0$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบพหุนาม P(x) โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m \neq 0$ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 และ m เป็นตัวประกอบของ a_n และ k เป็นตัวประกอบของ a_0 จากทฤษฎีบทเศษเหลือ และทฤษฎีบทตัวประกอบ เมื่อได้ (x – c) เป็นตัวประกอบของ

พหุนาม P(x) แล้ว จะหาตัวประกอบอีกตัวหนึ่ง จะทำได้โดยการหาร พหุนาม P(x) ด้วย (x – c) แล้วจะได้ตัวประกอบอีกตัวหนึ่ง ซึ่งจะเป็นเรื่องที่ยุ่งยากในบางกรณี จึงใช้การหารสังเคราะห์ ช่วยในการหาร

สรุปขั้นตอนการหารสังเคราะห์

กำหนดให้ p(x) เป็นพหุนามกำลังมากกว่าหรือเท่ากับ 1 h(x) = x – a เป็นตัวหาร

ขั้นตอนการหารสังเคราะห์มีดังต่อไปนี้

จงแยกตัวประกอบของ $6x^3 - 19x^2 + x + 6$

1. เขียนสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ จากดีกรีมากไปดีกรีน้อย แต่ต้องเขียนทุกพจน์	6 -19 1 $\boxed{6}$
2. เลือก a จากตัวประกอบของค่าคงตัว	ตัวประกอบ $\boxed{6}$ = -1, 1, -2, 2, -3, 3
3. หา p (a) ที่ = 0 $\Rightarrow$ (x-3) หารลงตัว	$p(x) = 6x^3 - 19x^2 + x + 6$ $p(3) = 6(3)^3 - 19(3)^2 + 3 + 6$ $= 162 - 171 + 3 + 6$ $= 0$
4. ตั้งสัมประสิทธิ์อีกครั้งหนึ่ง ดึง 6 ลงมาที่ผลลัพธ์ นำ 3 คูณ 6 ได้ผลลัพธ์ 18 นำไปรวมกับตัวตั้งพจน์ถัดไป	x = 3 | 6 -19 1 6 ↓ 18 6 -1
5. นำ 3 คูณ -1 = -3 แล้ว นำไปรวมกับตัวตั้งถัดไป	x = 3 | 6 -19 1 6 18 -3 6 -1 -2
6. นำ 3 คูณ -2 = -6 แล้วนำไปรวมกับตัวตั้งถัดไป ได้ผลลัพธ์ = 0	x = 3 | 6 -19 1 6 -18 -3 -6 6 -1 -2 0
7. จำนวนที่อยู่ในตำแหน่งสุดท้ายของแถวที่ 3 คือ เศษจากการหารพหุนาม ถ้าเศษเท่ากับ 0 แสดงว่าหารลงตัว	↓ 0
8. จำนวนที่อยู่แถวที่ 3 ยกเว้นจำนวนสุดท้ายเป็นสัมประสิทธิ์ของผลลัพธ์จากการหารคือ $6x^2 - x - 2$	6 -1 -2
ดังนั้น $6x^3 - 19x^2 + x + 6 = (x - 3)(6x^2 - x - 2)$	

จุดประสงค์ สามารถแก้สมการพหุนามกำลัง n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2

เอกสารประกอบการเรียนที่ 9

สมการพหุนามที่มีกำลังสูงกว่า 2 จะแก้สมการได้โดยการแยกตัวประกอบ และการแยกตัวประกอบจะใช้วิธีการแยกตัวประกอบแบบใดขึ้นอยู่กับโจทย์ เช่น

ตัวอย่าง

1. จงแก้สมการ $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

   จากสมการ $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

   แยกตัวประกอบได้ $(x^2 - 16)(x^2 + 9) = 0$

   $(x-4)(x+4)(x-3i)(x+3i) = 0$

   $x = 4, -4, 3i, -3i$

   คำตอบของสมการคือ $4, -4, 3i, -3i$

2. จงแก้สมการ $x^4 + 25x^2 + 144 = 0$

   จากสมการ $x^4 + 25x^2 + 144 = 0$

   แยกตัวประกอบได้ ……………………………………………...…..

   ……………………………………………………..…

   x = ……………………………..…………………..

   คำตอบของสมการคือ ……………………..…………………………...

3. จงหาค่า z จากสมการ $z^4 = 16$

   จากสมการ $z^4 - 16 = 0$

   แยกตัวประกอบได้ $(z^2 - 4)(z^2 + 4) = 0$

   ……………………………………………………..

   ……………………………………………………..

   z = …………………..…………………………..

4. จงหาค่า z จากสมการ $z^4 = 81$

   จากสมการ $z^4 - 81 = 0$

   แยกตัวประกอบได้ ……………………………..……………….....…..

   ……………………………………………………

   ……………………………………………………....

   z = ……………………………………..……...

ตัวอย่าง

1. จงหาค่า x จาก $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

จาก $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ จะเห็นได้ว่าสามารถแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจงได้

$$
\begin{aligned}
2x^3 - x^2 + 2x - 1 &= 0 \\
x^2(2x-1) + (2x-1) &= 0 \\
(2x-1)(x^2+1) &= 0 \\
(2x-1)(x^2-i^2) &= 0 \\
(2x-1)(x+i)(x-i) &= 0 \\
x &= \frac{1}{2}, i, -i
\end{aligned}
$$

คำตอบของสมการคือ $\frac{1}{2}$, i , -i

2. จงหาค่า x จากสมการ $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$

จาก $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$ จะเห็นได้ว่าสามารถแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจงได้

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ.......................................

3. จงหาค่า x จากสมการ $x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = 0$

จากสมการ $x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = 0$ แยกตัวประกอบโดยใช้การหารสังเคราะห์

$$
\begin{array}{r|rrrr}
x = \quad 1 & 1 & -2 & 7 & -6 \\
 & & 1 & -1 & 6 \\
\hline
 & 1 & -1 & 6 & 0
\end{array}
$$

ดังนั้น $2x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = (x-1)\left(x^2 - x + 6\right)$

นั่นคือ $2x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = 0$

$(x-1)\left(x^2 - x + 6\right) \quad = \; 0$

จะได้ $x - 1 = 0$ หรือ $x^2 - x + 6 = 0$

$x = 1$ หรือ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{\left|(-1)^2 - 4(1)(6)\right|}\; i}{2}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$

4. จงหาค่า x จากสมการ $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

จากสมการ $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ แยกตัวประกอบโดยใช้การหารสังเคราะห์

$$
\begin{array}{l r|rrrrr}
P(-1) = 0, & x = \; -1 & 2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\
 & & & -2 & -1 & -1 & 1 \\
\hline
P\left(\frac{1}{2}\right) = 0, & x = \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & 2 & 2 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1 =$ ....

$=$ ....

นั่นคือ $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1 \quad = 0$

………

………

………

………

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ ………………………………..

แบบฝึกทักษะที่ 9

1. จงแก้สมการ

1.1 $x^4 + 5x^2 + 4$

....
....
....
....
....

1.2 $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

....
....
....
....
....

2. จงหาคำตอบของสมการ

2.1 $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$

....
....
....
....
....
....
....

2.2 $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 22x + 12 = 0$

....
....
....
....
....
....
....

3. จงแก้สมการ $x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 26x^2 - 17x - 42 = 0$

....
....
....
....
....
....

4. จงหาค่า x จาก $z^4 = -81$

....
....
....
....
....
....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

เรื่อง **สมการพหุนาม** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมการพหุนามไปใช้ในการหาสมการพหุนามได้ เมื่อกำหนดคำตอบของสมการมาให้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

สามารถหาสมการพหุนามกำลัง n เมื่อ กำหนดคำตอบของสมการให้

2. แนวความคิดหลัก

จากสมการพหุนามกำลัง n สามารถหาคำตอบของสมการได้ n ค่า และในทางที่กลับกันเมื่อกำหนดคำตอบของสมการมาให้ก็สามารถหาสมการจากคำตอบนั้นได้

3. เนื้อหาสาระ

ทฤษฎีบท

ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วสมการ $P(x) = 0$ จะมีคำตอบทั้งหมด n คำตอบ (นับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย)

ทฤษฎีบท

ถ้าสมการพหุนามกำลัง n ; $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ เมื่อ n เป็น จำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ มี $a + bi$ เป็นคำตอบของสมการ แล้ว $a - bi$ เป็นคำตอบของสมการด้วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$

โจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ

ถ้า $1 + i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^3 + ax^2 + bx + 8$ จงหาค่า $a + b$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนจับคู่กันศึกษาเอกสารประกอบการเรียนที่ 10

2. ครูใช้การถามตอบสรุป และตรวจสอบความถูกต้อง จากการศึกษาเอกสารประกอบการเรียนที่ 10 ในประเด็นต่อไปนี้

1) เมื่อมีคำตอบของสมการมาให้ สามารถสร้างสมการพหุนามโดยวิธีใด

2) คำตอบของสมการพหุนามกำลัง n จะมีกี่คำตอบ

3) ในกรณีที่มีคำตอบไม่เท่ากับ n นักเรียนจะสังเกตคำตอบได้อย่างไร และจะหาคำตอบได้อย่างไร หรือนักเรียนจะทำอย่างไรต่อไป

4) ถ้าต้องการตรวจสอบว่าคำตอบที่กำหนดเป็นคำตอบของสมการหรือไม่จะมีวิธีทำอย่างไร

3. ให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะที่ 10 ส่งเป็นแบบฝึกหัด

4. ทดสอบความเข้าใจ 1 ข้อ

5. ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 5 เพิ่มเติม

5. แหล่งการเรียนรู้/สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 10
2. แบบฝึกทักษะที่ 10
3. แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 5

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน	
2. ตรวจแบบฝึกทักษะ	
3. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....

จุดประสงค์ สามารถหาสมการพหุนามเมื่อกำหนดคำตอบของสมการให้

เอกสารประกอบการเรียนที่ 10

จากสมการพหุนามกำลัง n สามารถหาคำตอบของสมการได้ n ค่า และในทางที่กลับกันเมื่อกำหนดคำตอบของสมการมาให้ก็สามารถหาสมการจากคำตอบนั้นได้ด้วย ให้นักเรียนพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่า x จากสมการ

$$(x-2)(x+2)(x+1)\left(x-(1+\sqrt{3}i)\right)\left(x-(1-\sqrt{3}i)\right)=0$$

จะได้ $x-2=0$ | $x+2=0$ | $\left(x-(1+\sqrt{3}i)\right)=0$ | $\left(x-(1-\sqrt{3}i)\right)=0$

$x=2$ | $x=-2$ | $x=1+\sqrt{3}i$ | $x=1-\sqrt{3}i$

คำตอบของสมการ คือ 2 , -2 , $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$

ข้อสังเกต เมื่อคำตอบเท่ากับ 2 จะมี $(x-2)$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของสมการ และตัวอื่นๆ ก็เช่นกัน

ตัวอย่าง จงหาสมการพหุนามกำลังสี่ ที่มีเซตคำตอบของสมการ = $\{2,3,1-i,1+i\}$

จากคำตอบของสมการ คือ 2 , 3 , $1-i$, $1+i$

จะได้สมการพหุนามกำลังสี่ ที่มี $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-(1-i))$,$(x-(1+i))$ เป็นตัวประกอบ

นั่นคือ สมการ $(x-2)(x-3)(x-(1-i))(x-(1+i)) = 0$

$$(x^2-5x+6)(x^2-2x+1-i^2) = 0$$

$$x^4-5x^3+6x^2-2x^3+10x^2-12x+2x^2-10x+12 = 0$$

สมการพหุนามที่ต้องการคือ $x^4-7x^3+18x^2-22x+12 = 0$

หมายเหตุ

1. จากการแก้สมการพหุนาม หรือจากการสร้างสมการพหุนาม จะเห็นได้ว่า ถ้าคำตอบของสมการเป็นจำนวนจินตภาพ จะเป็นจำนวนที่เป็นสังยุค (conjugate) กันเสมอ
2. สมการพหุนามกำลัง n เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ในระดับนี้จะมีคำตอบ n จำนวนเสมอ

ทฤษฎีบท

ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วสมการ $P(x)=0$ จะมีคำตอบทั้งหมด n คำตอบ (นับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย)

ทฤษฎีบท

ถ้าสมการพหุนามกำลัง n ; $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0 = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ,..., a_1 , a_0 เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ มี $a+bi$ เป็นคำตอบของสมการ แล้ว $a-bi$ เป็นคำตอบของสมการด้วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$

ตัวอย่าง สมการพหุนาม $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a , b , c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ มี $3 + 2i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ จงหาสมการพหุนาม

วิธีทำ 1 สมการพหุนามเมื่อมี $3 + 2i$ เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

จะมี $3 - 2i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

จากคำตอบของสมการพหุนาม 2 ค่า คือ $3 + 2i$, $3 - 2i$

จะได้สมการพหุนามกำลัง 2 ดังนี้ $\big(x - (3 + 2i)\big)\big(x - (3 - 2i)\big) = 0$

$$\left((x-3)^2 - (2i)^2\right) = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 + 4$$

สมการพหุนามที่ต้องการคือ $x^2 - 6x + 13 = 0$

วิธีทำ 2 (x-(3+2i) (x-(3-2i)) = 0

x^2- ผลบวกราก x + ผลคูณราก = 0

ผลบวกราก = 3 + 2i + 3-2i = 6

ผลคูณราก = $a^2 + b^2$

= $3^2 + 2^2$

= 13

สมการพหุนามที่ต้องการ คือ $x^2 - 6x + 13 = 0$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า 2 +5i เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

$x^4 - 8x^3 + 46x^2 - 120x + 29 = 0$ และหาคำตอบที่เหลือของสมการ

วิธีทำ ถ้า 2 + 5i เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ จะต้องแสดงว่า P(2 + 5i) = 0 หรือ (x – (2 + 5i)) หาร $x^4 - 8x^3 + 46x^2 - 120x + 29$ ได้ลงตัว ในที่นี้จะแสดงด้วยการหารลงตัวและใช้การหารสังเคราะห์)

x = 2 + 5i	1	-8	46	-120	29
		2 + 5i	-37 - 20i	118 + 5i	-29
	1	-6 + 5i	9 - 20i	-2 + 5i	0

จะเห็นได้ว่าเศษที่ได้จากการหารเท่ากับ 0 แสดงว่า 2 + 5i เป็นคำตอบของสมการ จากสมการพหุนามกำลัง 4 จะมีคำตอบของสมการอีก 3 คำตอบ และเมื่อมี 2 + 5i เป็นคำตอบหนึ่งของสมการก็จะมี 2 – 5i เป็นอีกคำตอบหนึ่งของสมการ ซึ่งจะหาตัวประกอบของสมการที่เหลือได้โดยเอา 2 – 5i เป็นตัวหารต่อจากที่หารมาแล้ว

2 – 5i	1	-6 + 5i	9 - 20i	-2 + 5i
		2 – 5i	–8 + 20i	2 – 5i
	1	-4	1	0

ดังนั้น จากสมการจะแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$x^4 - 8x^3 + 46x^2 - 120x + 29 = (x - (2+5i))(x - (2-5i))(x^2 - 4x + 1)$

คำตอบที่เหลือจะได้จากสมการ $x^2 - 4x + 1 = 0$

จาก $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4 = 12$

ดังนั้น $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ =…………………..…………………..………..

คำตอบของสมการคือ ………………………………………………………….……

แบบฝึกทักษะที่ 10

1. จงหาสมการพหุนามกำลัง 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมี 3 , -4 และ $3-i$ เป็นคำตอบของสมการ

....

....

....

....

....

....

....

....

2. จงหาสมการพหุนามกำลัง 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมี $2-2\sqrt{3}i$ และ $-4i$ เป็นคำตอบของสมการ

....

....

....

....

....

....

....

3. จงแสดงว่า $-1+\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ $x^5+9x^3-8x^2-72=0$ และหารากที่เหลือของสมการ

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 5

1. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงหาค่า x จากสมการ

1. $5x^2 - 6x + 5 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

2. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

3. $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

4. $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

5. $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

6. $5x^2 - 6x + 5 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

7. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

8. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

9. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

10. $5x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 6x - 4 = 0$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

11. $125x^3 - 27 = 0$

12. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

13. $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$

14. $x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 8x + 32 = 0$

15. $x^5 - 2x^4 - x^3 + 6x - 4 = 0$

16. $x^5 + 2x^3 - x^2 - 2 = 0$

2. จงหาผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของรากของสมการ $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

3. ในระบบจำนวนจินตภาพ จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^4 + x^3 - 2x^2 + 9x - 9 = 0$

4. จงหาสมการพหุนามกำลังสี่ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมีเซตคำตอบเป็น {5i, -5i, 6,- 6}

....

....

....

....

....

5. กำหนด $1 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการพหุนาม $ax^3 + bx^2 + 2x + 12 = 0$ จงหาสมการพหุนาม

....

....

....

....

....

....

6. ถ้า $2 + \sqrt{5}$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $x^4 - 4x - 1 = 4x^3$ จงหารากที่เหลือของสมการ

....

....

....

....

....

....

7. ในระบบจำนวนเชิงซ้อน จงหาผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของรากของสมการ $z^8 - 13z^4 + 36 = 0$

....

....

....

....

....

....

8. ในระบบจำนวนเชิงซ้อนจงหาค่าของ x จากสมการ $\left(x^3 - 27\right) - \left(x^4 - 3x\right)\left(x - 3\right) = 0$

....

....

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

เรื่อง **สมการพหุนาม** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำการแก้สมการพหุนามใช้ในการหารากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2 ของจำนวนเชิงซ้อนได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หารากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2 ของจำนวนเชิงซ้อนได้

2. แนวความคิดหลัก

ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ความหมายของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนเป็นเช่นเดียวกับจำนวนจริง x เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $x^n = a$ ดังนั้นเมื่อต้องการหาค่า x ก็สามารถใช้วิธีแก้สมการได้เช่นกัน

3. เนื้อหาสาระ

1. รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2 ของจำนวนเชิงซ้อน
2. รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $a + bi$

โจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ

จงหาค่า x จากสมการ

1. $x^6 + 64i = 0$
2. $x^4 = -16$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนจับคู่กันศึกษาเอกสารประกอบการเรียนที่ 11
2. ครูใช้การถามตอบสรุป และตรวจสอบความถูกต้อง จากการศึกษาเอกสารประกอบการเรียนที่ 11
3. ให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะที่ 11 ส่งเป็นแบบฝึกหัด
4. ทดสอบความเข้าใจ 2 ข้อ
5. ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 6 เพิ่มเติม

5. แหล่งการเรียนรู้/สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการเรียนที่ 11
2. แบบฝึกทักษะที่ 11
3. แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 6

6. การวัดผล การประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการทำงานร่วมกัน	
2. ตรวจแบบฝึกทักษะ	
3. ผลจากการทดสอบ	

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....
....
....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....
....
....
....
....

จุดประสงค์ สามารถหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้

เอกสารประกอบการเรียนที่ 11

ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ความหมายของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนเป็นเช่นเดียวกับจำนวนจริง x เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $x^n = a$ ดังนั้นเมื่อต้องการหาค่า x ก็สามารถใช้วิธีแก้สมการได้เช่นกัน

ตัวอย่าง จงหาค่า x จาก

1. $x^2 + 1 = 0$

จาก $x^2 + 1 = 0$ สามารถแยกตัวประกอบได้

$x^2 + i^2 = 0$

$(x + i)(x - i) = 0$

$x = i\ , -i$

ข้อสังเกต จากโจทย์ $x^2 = -1$ ตามความหมาย จะได้ x เป็นรากที่สองของ –1 นั่นเอง

2. $x^3 + 1 = 0$

จาก $x^3 + 1 = 0$ สามารถแยกตัวประกอบได้

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x = -1\ ,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{|1-4|}i}{2}$

คำตอบของสมการ หรือ รากที่ 3 ของ -1 คือ -1 , $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

3. $x^4 - 1 = 0$

วิธีทำ 1 จาก $x^4 - 1 = 0$

สามารถแยกตัวประกอบได้

$(x^2-1)(x^2+1) = 0$

$(x^2-1)(x^2-i^2) = 0$

$(x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = 0$

$x = 1 , -1 , i , -i$

วิธีทำ 2 ใช้การหารากที่ n ในรูปเชิงขั้ว

$x^4 = 1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$

จากการหารากที่ 4 จะได้ 4 ค่าดังนี้

$x_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1$

$x_2 = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i$

$x_3 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1$

$x_4 = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ = -i$

นั่นคือ คำตอบของสมการ หรือ รากที่ 4 ของ 1 คือ 1 , –1 , i , –i

4. $x^3 + i = 0$

จาก $x^3 + i$ จัดให้อยู่ในรูปกำลัง 3 เพื่อ แยกตัวประกอบ

จะได้ $x^3 - i^3 = 0$

$(x - i)(x^2 + ix + i^2) = 0$

$x - i = 0 \qquad (x^2 + ix + i^2) = 0$

$x^2 + ix - 1 = 0$

$x = i \qquad x = \dfrac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4(1)(-1)}}{2}$

$= \dfrac{-i \pm \sqrt{3}}{2}$

คำตอบของสมการ คือ i, $\dfrac{-i + \sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{-i - \sqrt{3}}{2}$

ตัวอย่าง จงหารากที่ 2 ของ $a + bi$

ให้ $x + yi$ เป็นรากที่สองของ $a + bi$

$(x + yi)^2 = a + bi$

$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$

$x^2 - y^2 = a \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

แก้สมการได้ $x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a\right) \qquad y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)$

ในรูปทั่วไป ถ้า $x + yi$ เป็นรากที่ n ของ $a + bi$ แล้ว

$(x,y) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}\ , \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}\right)$ และ $2xy = b$

สรุปรากที่ 2 ของ $a + bi = \left(\pm\sqrt{\sqrt{\frac{r + a}{2}}}, \pm\sqrt{\sqrt{\frac{r - a}{2}}}\right)$

ตัวอย่าง 1. จงหารากที่ 2 ของ $3 + 4i$

ให้ $(x + yi)^2 = 3 + 4i$ ได้ $a = 3$, $b = 4$

จาก $x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a\right)$ และ $y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3^2 + 4^2} + 3\right) \qquad = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3^2 + 4^2} - 3\right)$

$= \frac{1}{2}(8) = 4 \qquad = \frac{1}{2}(2) = 1$

$x = \pm 2 \qquad y = \pm 1$

จาก $2xy = 4$ จะได้ x กับ y มีเครื่องหมายเหมือนกัน ดังนั้น $(x + yi) = 2 + i$, $-2 - i$

2. จงหารากที่ 2 ของ $-3-4i$

ให้ $(x+yi)^2 = -3-4i$ จะได้ $a=-3$, $b=-4$

จาก $x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)$ และ $y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}-3\right)$ $\qquad$ $= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}+3\right)$

$= \frac{1}{2}(2)$ $\qquad$ $= \frac{1}{2}(8)$

$=1$ $\qquad$ $=4$

$x = \pm 1$ $\qquad$ $y = \pm 2$

$2xy = -4$

จะได้ $x+yi = 1-2i$, $-1+2i$

3. จงหารากที่ 2 ของ $-8+6i$

ให้ $(x+yi)^2 = -8+6i$ ได้ $a=-8$, $b=6$

จาก $x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)$ และ $y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)$

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

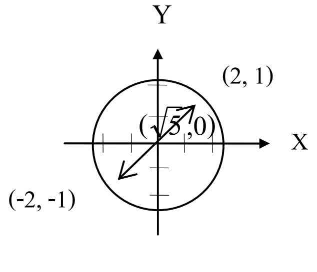
จาก $2xy = 6$ จะได้ x กับ y มีเครื่องหมายเหมือนกัน

$(x+yi) =$ ………………………………………………………………………………

หมายเหตุ เมื่อนำค่าของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนไปเขียนเป็นกราฟจะได้ดังนี้

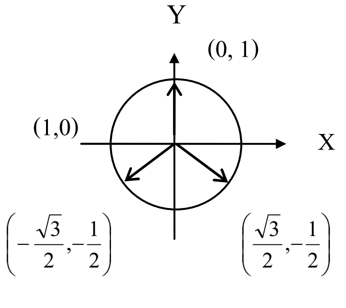
1. รากที่สองของ $3+4i$ คือ

$2+i$, $-2-i$



2. รากที่สามของ $-i$ คือ

i , $\frac{-i+\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-i-\sqrt{3}}{2}$



จากกราฟที่ได้จะเห็นได้ว่าค่าของรากที่ n จะแบ่งวงกลมที่มีความยาวรัศมีเท่ากับ $|x|$ เมื่อ x เป็นรากที่ n จำนวนเชิงซ้อนนั้น ออกเป็น n ส่วนเท่าๆ กัน

แบบฝึกทักษะที่ 11

1. จงหาค่า x จากสมการ $x^3 - i = 0$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

2. จงหาค่า x จากสมการ $x^6 - 1 = 0$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

3. จงหารากกำลังที่ 5 ของ $-3 + 3i$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

4. จงหารากกำลังที่ 2 ของ $-15 + 8i$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

5. จงหาค่า x จากสมการ $x^4 = 25 - 24i$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

แบบฝึกหัดเสริมชุดที่ 6

1. จงหารากที่ 2 ของ

   1. i

   2. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

   3. $12 - 5i$

   4. $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

2. จงหารากที่ 3 ของ

   1. 27

   2. i

   3. $64i$

   4. -125

3. จงหารากที่ 4 ของ

1. 1

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

2. -36

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

3. 9

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

4. -81

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

4. ให้ a_1, a_2 เป็นรากของสมการ $-2-2\sqrt{3}\,i$ ค่าของ $|a_1|^2+|a_2|^2$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

5. จงหาค่า x จาก สมการ $x^2+3-\sqrt{27}\ i = 0$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

6. จงหาค่า Z จากสมการ $Z^4-2+2i = 0$

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ดร.อำรุง จันทวานิช	เลขาธิการสภาการศึกษา
ดร.สิริพร บุญญานันต์	รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	ที่ปรึกษาด้านระบบการศึกษา สกศ.
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้เรียบเรียง :

นางจุรี เรืองเริงกุลฤทธิ์ โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา

ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ หัวหน้าคณะวิจัย

ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร

อาจารย์เอธัสวัฒน์ คำมณี

อาจารย์สุธิตา มณีชัย

คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้พิจารณารายงาน :

นางสาวสุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา	หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
นายรวิช ตาแก้ว	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ	นักวิชาการประจำกลุ่มงานฯ

บรรณาธิการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : http://www.onec.go.th
http://www.thaigifted.org