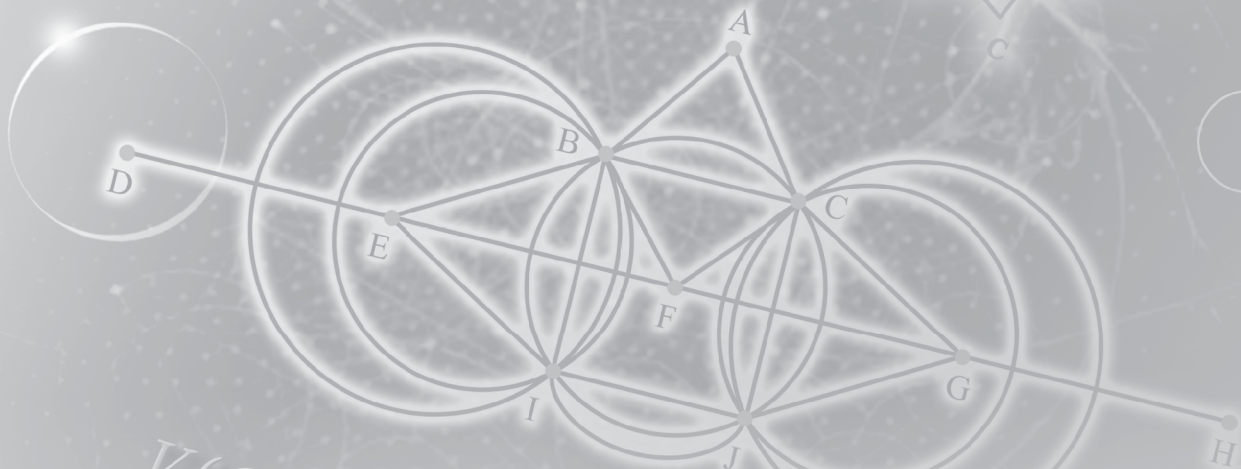


หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน

สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

# แผนการจัดการเรียนรู้ ทฤษฎีกราฟ



**โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์  
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์  
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษากาญจนบุรี**



371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา  
ส 691 ผ แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟ หลักสูตรระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความ  
สามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กรุงเทพฯ : 2551  
62 หน้า  
ISBN 978-974-559-550-7  
1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร  
2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง

**แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟ หลักสูตรระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ  
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**

สิ่งพิมพ์ สกศ.                      อันดับที่ 5 /2552  
พิมพ์ครั้งที่ 1                      พฤศจิกายน 2551  
จำนวน                              1,000 เล่ม  
จัดพิมพ์เผยแพร่                สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนารการเรียนรู้  
  สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา  
  99/20 ถนนสุขุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300  
  โทรศัพท์ 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530  
  โทรสาร 0-2243-1129, 0-2668-7329  
  Web site: [http:// www.onec.go.th](http://www.onec.go.th) และ [http:// www.thaigifted.org](http://www.thaigifted.org)  
ผู้พิมพ์                              บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด  
  580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1  
  ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230  
  โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753



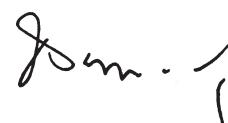
## คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ่งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสรา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป



(รองศาสตราจารย์ชงทอง จันทรางศุ)  
เลขาธิการสภาการศึกษา



## คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตร การศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพนั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขึ้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ่งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียน ในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัยและอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน



**ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน  
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**

ระดับ	เนื้อหา	จำนวน คาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบ เขียนแผนการจัดการเรียนรู้	
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		7. ตรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึกและมหาวิทยาลัยราชวูช
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวิทยาลัยราชวูช
<b>รวม</b>		200		
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวิทยาลัยราชวูช
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินทิเกรต	40	โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย จ.สตูล
	<b>รวม</b>		200	
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ)</li> <li>▪ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ)</li> <li>▪ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ)</li> </ul>		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
<b>รวม</b>		100		



# สารบัญ

เรื่อง	หน้า
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น</b>	<b>1</b>
ใบความรู้ที่ 1 ที่มาและความสำคัญของทฤษฎีกราฟ	4
แบบฝึกทักษะที่ 1	7
แบบฝึกทักษะที่ 2	8
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น</b>	<b>10</b>
ใบความรู้ที่ 2 กราฟ	13
ใบความรู้ที่ 3 เส้นหลายชั้น	16
ใบความรู้ที่ 4 จุดประชิด	20
ใบความรู้ที่ 5 กราฟเชิงเดียว กราฟหลายเชิง	21
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (ดีกรีของจุดยอด)</b>	<b>23</b>
ใบกิจกรรมที่ 1 ปัญหาชวนคิด	30
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (แนวเดิน)</b>	<b>33</b>
ใบความรู้ที่ 6 แนวเดิน กราฟเชื่อมโยง	35
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (กราฟออยเลอร์)</b>	<b>37</b>
ใบความรู้ที่ 7 กราฟออยเลอร์	40
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (การประยุกต์ของกราฟ)</b>	<b>45</b>
ใบความรู้ที่ 8	48
ใบความรู้ที่ 9	49
ใบความรู้ที่ 10	50
ใบความรู้ที่ 11	51
ใบความรู้ที่ 12	52
ใบความรู้ที่ 13	53



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 คาบ

### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจความสำคัญของทฤษฎีกราฟในฐานะตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) ที่สำคัญในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และปัญหาด้านอื่นๆ ตลอดจนกระตุ้นความสนใจเรียนของนักเรียนด้วยปัญหาชวนคิด และตัวอย่างการประยุกต์ปัญหาอื่น ๆ

### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 มีความรู้ ความเข้าใจความสำคัญของทฤษฎีกราฟในฐานะตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สำคัญในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหาอื่นๆ
- 1.2 สามารถแก้ปัญหาวนคิดที่เกี่ยวกับกราฟได้
- 1.3 สามารถสื่อสาร / นำมาเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ซึ่งกันและกันได้

### 2. แนวความคิดหลัก

ประวัติและความสำคัญของทฤษฎีกราฟ จะทำให้เกิดความรู้และความเข้าใจในเนื้อหาวิชาและสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์สามารถนำมาแก้ปัญหาได้

### 3. เนื้อหาสาระ

- ที่มาและความสำคัญของทฤษฎีกราฟ
- การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟ

### 4. กระบวนการจัดการการเรียนรู้

#### กิจกรรมการเรียนรู้

#### คาบที่ 1

1. ครูให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นเรื่องคณิตศาสตร์มีความจำเป็นต่อชีวิตประจำวันอย่างไรบ้าง
2. ครูแจกใบความรู้ที่ 1 ให้นักเรียนทุกคนและให้นักเรียนอ่านประมาณ 20 นาที แล้วให้นักเรียนเข้ากลุ่มๆ ละ 5 คน อภิปรายกันในหัวข้อที่อ่านจากใบความรู้ที่ 1 นักเรียนได้ความรู้และข้อสรุปอะไรบ้าง



3. ครูใช้การถามตอบโดยสุ่มเรียกตัวแทนกลุ่มต่างๆ แล้วบันทึกคำตอบของแต่ละกลุ่มตอบบนกระดาน แล้วครูสรุปปัญหาที่นักเรียนทำกิจกรรมจากการอ่าน

4. ให้นักเรียนสรุปใบความรู้ที่ 1 และทำแบบฝึกทักษะที่ 1

5. ใช้การถามตอบให้นักเรียนช่วยกันหาข้อสรุปที่ถูกต้อง ครบถ้วน

6. จากใบความรู้ที่ 1 และแบบฝึกทักษะที่ 1 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปให้ได้ว่า “ ปัญหาใดทำให้เกิดทฤษฎีกราฟ ”

## คาบที่ 2

7. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มๆ ละ 4 - 5 คน แล้วครูแจกแบบฝึกทักษะที่ 2 ให้นักเรียนช่วยกันทำ ครูสุ่มกลุ่มและตัวแทนกลุ่มออกมาสรุปบนกระดาน

8. นักเรียนและครูช่วยกันสรุปแบบฝึกทักษะที่ 2 ซึ่งมีหลายแบบ เช่น ตัวอย่างที่ 1

แบบที่ 1  $C \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{4} D \xrightarrow{5} B \xrightarrow{6} C$

แบบที่ 2  $C \xrightarrow{1} A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} A \xrightarrow{4} D \xrightarrow{5} B \xrightarrow{6} C$

แบบที่ 3  $C \xrightarrow{6} B \xrightarrow{5} D \xrightarrow{4} A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} A \xrightarrow{1} C$

## 5. แหล่งการเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 1
- แบบฝึกทักษะที่ 1 และ 2

## 6. กระบวนการวัดและประเมินผล

สิ่งที่วัด	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	<ul style="list-style-type: none"> <li>• สังเกตจากการตอบคำถาม</li> </ul>	แบบฝึกทักษะ	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ทำถูกต้องอย่างน้อย 90%</li> </ul>
2. ด้านทักษะ	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• ทำถูกต้องอย่างน้อย 90%</li> </ul>
3. ด้านคุณลักษณะ	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. สังเกตจากการตอบคำถาม</li> <li>2. รับความคิดเห็นของผู้อื่น</li> </ol>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• ผ่านระดับดี 90%</li> </ul>





7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

$$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots$$



## ใบความรู้ที่ 1

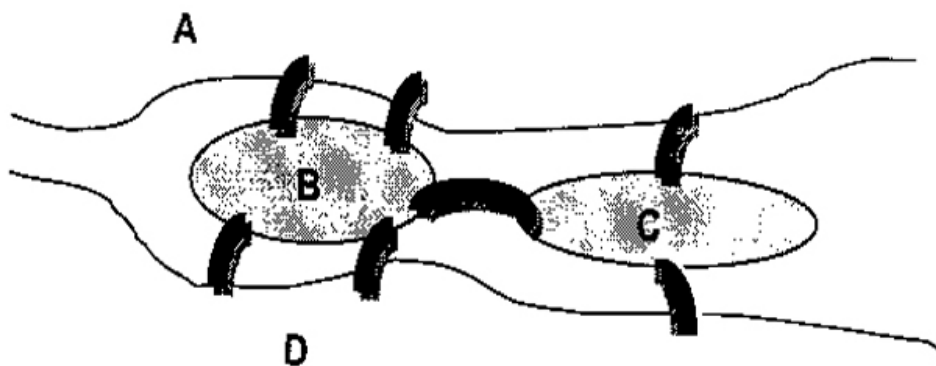
### ที่มาและความสำคัญของทฤษฎีกราฟ

ในปัจจุบัน ได้มีการนำความรู้ที่พัฒนาอย่างเป็นระบบมาช่วยในการแก้ปัญหาต่างๆ มากมาย ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์ ปัญหาด้านธุรกิจ ปัญหาด้านสังคม เป็นต้น ซึ่งคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่สามารถนำมาช่วยในการแก้ปัญหาได้ โดยการนำปัญหาดังกล่าวมาสร้างเป็น **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์** (mathematical model) แล้วนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นมาวิเคราะห์และศึกษาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการแก้ปัญหาดังกล่าวจะเป็นไปอย่างถูกต้องสมเหตุสมผล และก่อให้เกิดประโยชน์อื่นๆ อีกมากมาย

การนำปัญหาต่างๆ มาสร้างให้อยู่ในรูปตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นทำได้มากมายหลายวิธีและมีอยู่วิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันมากคือ การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในลักษณะแผนภาพ (diagram) และเรียกแผนภาพที่ประกอบด้วยจุดและเส้นว่า **กราฟ (graph)** ตัวอย่างปัญหาดังกล่าวได้แก่ ปัญหาเกี่ยวกับการสร้างเครือข่ายของศูนย์บริการทางโทรศัพท์ ปัญหาการออกแบบอาคารต่างๆ เป็นต้น ดังนั้นจึงมีการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟเพื่อแสวงหาข้อเท็จจริงต่างๆ ซึ่งนำไปสู่การแก้ปัญหาดังกล่าว

ทฤษฎีกราฟเริ่มต้นจากความพยายามในการตอบปัญหาปริศนา (puzzle) ต่างๆ และมีอยู่ปริศนาหนึ่งซึ่งเป็นที่รู้จักกันเป็นอย่างดีสำหรับผู้ที่ศึกษาทฤษฎีกราฟ นั่นคือ **ปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก** (The konigsberg Bridges Problem) ซึ่งปริศนากล่าวว่า

ในเมืองคอนิกส์เบิร์ก มีเกาะ 2 เกาะ และมีสะพานอยู่ 7 สะพาน ซึ่งเชื่อมเกาะ 2 เกาะนี้ ไปยังฝั่งของแม่น้ำพรีเกิล (Pregel River) ดังรูป



โดยแทนเกาะด้วย B และ C และแทนฝั่งด้วย A และ D

ปัญหาที่นำมาศึกษากันก็คือ เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเริ่มต้น ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งแล้วเดินข้ามสะพานทุกสะพานเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมาตำแหน่งเดิม



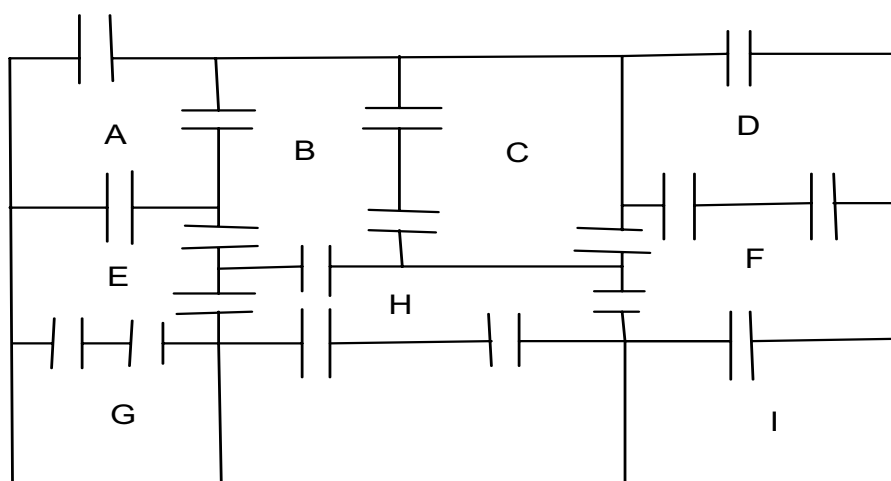
ปริศานานี้ไม่มีผู้ใดตอบได้จนกระทั่งปี ค.ศ. 1736 เลอเนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonherd Euler) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ได้ตีพิมพ์บทความตอบปริศานี้นี้ว่า เป็นไปไม่ได้

ปัญหาดังกล่าวได้รับการยกย่องว่าเป็นจุดเริ่มต้นที่ทำให้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ และผู้ที่แก้ปัญหาดังกล่าวได้คือ ออยเลอร์ ซึ่งต่อมาได้รับการยกย่องว่าเป็น บิดาของทฤษฎีกราฟ นี้

ต่อมาเคอร์ชอฟ (Kirchhoff ค.ศ.1824 – 1887) และเคลีย์ (Cayley ค.ศ. 1821 – 1895) ได้ขยายทฤษฎีกราฟให้กว้างขวางยิ่งขึ้น กล่าวคือ เคอร์ชอฟแก้ปัญหาคircuit ที่เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า จึงทำให้เกิดการขยายความรู้เบื้องต้น และทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับต้นไม้ (Tree) ซึ่งต้นไม้นี้เป็นกราฟชนิดหนึ่ง ส่วนเคลีย์ได้ศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับต้นไม้เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาคircuit ของสารเคมีบางชนิด นอกจากนี้ยังมีปัญหาที่เกี่ยวข้องกับกราฟอีกจำนวนมากมาย เช่น ปัญหาที่ตั้งขึ้นโดยฮามิลตัน (Hamilton ค.ศ. 1805 – 1865) และปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียงสี่สีในแผนที่ (The Four Color Problem) ซึ่งปัญหานี้เป็นปัญหาที่มีชื่อเสียงมากที่สุดในทฤษฎีกราฟ

แนวการตอบคำถามของออยเลอร์นี้ สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าว ได้อีกเช่น

- 1) ปัญหาบุรุษไปรษณีย์จีน (The Chinese Postman Problem) ปัญหานี้มีอยู่ว่า ถ้ามีถนนสายต่างๆ และทราบความยาวของถนนแต่ละสาย บุรุษไปรษณีย์จะต้องเดินทางทั่วทุกถนนเพื่อจ่ายไปรษณีย์ภัณฑ์ทั้งหมด บุรุษไปรษณีย์จะเดินทางให้ทั่วอย่างไรจึงจะทำให้ผลรวมของระยะทางมีค่าต่ำที่สุด และหลังจากที่จ่ายไปรษณีย์ภัณฑ์ทั้งหมดแล้วจะต้องกลับมาอยู่ที่จุดเริ่มต้น
- 2) ปัญหาการเดินทางชมห้องต่างๆ ในบ้าน ถ้ารูป คือแปลนบ้านที่ประกอบด้วยห้อง 9 ห้อง โดยมีประตูเชื่อมระหว่างห้องต่างๆ และประตูที่เชื่อมระหว่างห้องกับบริเวณข้างนอก



$$u = u_0, c_1, u_2, c_2, u_3, c_3, \dots$$



3) ปัญหาการออกแบบหน้าปิดคอมพิวเตอร์ (Designing And Efficient Computer Drum) ต้องการ  
ทำหน้าปิดรูปวงแหวนสำหรับบันทึกข้อมูลในรูปความดันกระแสไฟฟ้า 2 สถานะ สถานะหนึ่งเป็น 0  
อีกสถานะหนึ่งเป็น 1 โดยแบ่งพื้นที่วงกลมออกเป็นช่องเล็กๆ เท่าๆ กัน แต่ละช่องจะบรรจุสัญลักษณ์  
กระแสไฟฟ้า (ตัวนำหรือฉนวน) อย่างใดอย่างหนึ่ง ช่องบรรจุตัวนำจะทำสัญลักษณ์เป็น 1 (กระแสไฟฟ้า  
ไหลผ่านได้) ส่วนช่องบรรจุฉนวนจะให้สัญลักษณ์เป็น 0 (กระแสไฟฟ้าไหลผ่านไม่ได้)

4) ปัญหาสาธารณูปโภค (Utilities Problem) การวางแผนเพื่อวางท่อน้ำ ท่อก๊าซ ท่อไฟฟ้า เป็นต้น

5) การหาจำนวนไอโซเมอร์แบบโครงสร้างในสารประกอบพวกอัลเคนส์ (Enumerative Isomers Alkanes)

6) เกมส์การท่องเที่ยว ( Around the World ) ในปี ค.ศ. 1859 นักคณิตศาสตร์ชื่อ เซอร์วิลเลียม  
ฮามิลตัน ( Sir William Hamilton ค.ศ. 1805 – 1865 ) ได้ตั้งเกมส์ขึ้นมา โดยใช้วัสดุของแข็งทำเป็นรูป  
จำลอง 12 หน้า ( Dodecahedron ) ซึ่งมีจุดทั้งหมด 20 จุด และมีเส้นทั้งหมด 30 เส้น โดยที่ทุกจุดมีเส้นมา  
พบกัน 3 เส้น และให้จุดแต่ละจุดแทนเมืองสำคัญต่างๆ ของโลก 20 แห่ง ปัญหาเกมส์นี้ก็คือ  
ให้หาเส้นทางท่องเที่ยวโดยแวะเมืองต่างๆ เพียงครั้งเดียว และให้กลับมาที่เดิมและมีเงื่อนไขว่าจะเดินทาง  
จากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่งได้ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างเมืองทั้งสองนั้น

7) ปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียงสี่สี ( The Four Color Problem ) ปัญหานี้เป็นปัญหาการระบายสี  
แผนที่ประเทศต่างๆ บนระนาบ โดยมีเงื่อนไขว่าจะต้องระบายสีให้ประเทศที่มีพรมแดนติดกันมีสีต่างกัน  
ปัญหาก็คือ ต้องการหาจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการระบายสีของแผนที่แล้วให้ได้ตามเงื่อนไข



## แบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่อง ที่มาและความสำคัญของทฤษฎีกราฟ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง มีความรู้ความเข้าใจถึงประวัติและความสำคัญของทฤษฎีกราฟ

1. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 1 ที่มาและความสำคัญของทฤษฎีกราฟ

2. เมื่อศึกษาใบความรู้ที่ 1 เสร็จแล้วให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 ทฤษฎีกราฟเป็นผลงานของใคร และชาติใด.....

2.2 ทฤษฎีกราฟเคอร์ชอฟ (Kirchhoff ค.ศ.1824 – 1887) ได้ประยุกต์มาใช้แก้ปัญหาใด.....

2.3 ทฤษฎีกราฟใช้แก้ปัญหาอะไรบ้างให้นักเรียนยกตัวอย่างมา 5 ตัวอย่าง

$$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots$$



### แบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model)

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่างที่ 1.1 มีเมืองอยู่ 4 เมืองคือ A , B , C และ D โดยที่ มีถนน 2 สายเชื่อมเมือง A และ B มีถนน 1 สายเชื่อมเมือง A และ C มีถนน 1 สายเชื่อมเมือง A และ D มีถนน 1 สายเชื่อมเมือง B และ D มีถนน 1 สายเชื่อมเมือง B และ C

ปัญหา จะขับรถออกจากเมือง C โดยให้ผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาถึงเมือง C ได้หรือไม่

วิธีทำ ให้จุด A , B , C และ D แทนเมืองแต่ละเมือง โดยที่เส้นที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุดแทนถนนที่เชื่อมเมืองทั้งสองนั้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

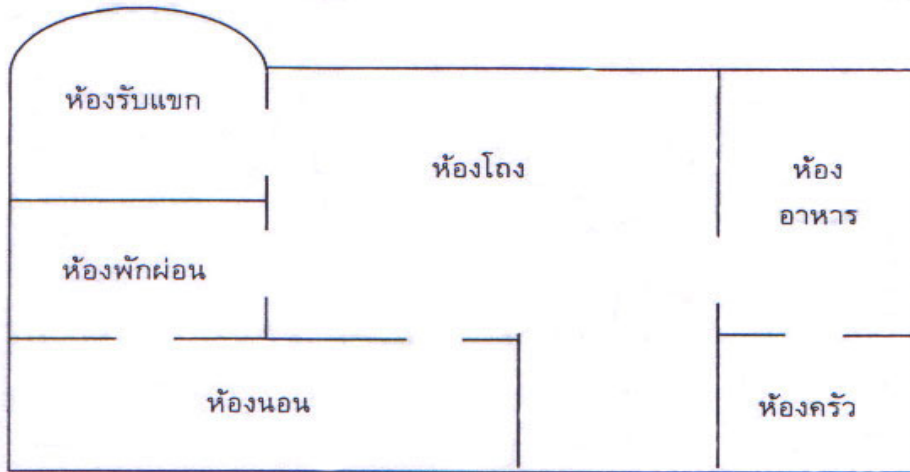
.....

.....

.....



ตัวอย่างที่ 1.2 ในการออกแบบชั้นล่างของบ้านหลังหนึ่ง สถาปนิกได้ออกแบบไว้ดังนี้



วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5  
เวลา 2 คาบ

## ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้นักเรียน เขียนกราฟเมื่อกำหนดจุด (vertex) และเส้น (edge) และบอกเส้นหลายชั้น (multigraph edges) กราฟเชิงเดียว (simple graph) กราฟหลายเชิง (multigraph) วงวน (loop) และจุดประชิด (adjacent point) จากกราฟ

## 1. จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักเรียน

- 1.1 เขียนกราฟเมื่อกำหนดจุด (vertex) และเส้น (edge) ได้
- 1.2 บอก วงวน (loop) เส้นหลายชั้น (multigraph edges) กราฟเชิงเดียว (simple graph) กราฟหลายเชิง (multigraph) และจุดประชิด (adjacent) จากกราฟได้

## 2. แนวความคิดหลัก

ในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟนั้นจะเกี่ยวข้องกับจุดและเส้น โดยที่เส้นนั้นเป็นเส้นที่เชื่อมจุด 2 จุด โดยไม่สนใจว่าเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง

## 3. เนื้อหาสาระ

นิยามกราฟ จุดยอด จุดประชิดกัน วงวน เส้นหลายชั้น กราฟเชิงเดียว กราฟหลายเชิง

## 4. กระบวนการจัดการการเรียนรู้

## กิจกรรมการเรียนรู้

## คาบที่ 1

1. ครูให้ใบความรู้ที่ 2 นักเรียนแต่ละคนศึกษาบทนิยาม กราฟ

## บทนิยาม

กราฟ  $G$  ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด (vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์  $V(G)$
2. เซตของเส้นเชื่อม (edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดแทนด้วยสัญลักษณ์  $E(G)$





2. ครูให้ใบความรู้ที่ 3 นักเรียนแต่ละคนศึกษาบทนิยามเส้นขนาน

**บทนิยาม**

เส้นเชื่อมตั้งแต่ 2 เส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดคู่เดียวกันเรียกว่า **เส้นหลายชั้น** (multigraph edges) หรือเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) เส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียวเรียกว่า **วงวน** (loop)

3. ให้นักเรียนหาเส้นทางเชื่อมระหว่างอำเภอในจังหวัดของนักเรียนและให้ลงจุดยอดและเส้นเชื่อม โดยอาศัยข้อมูลใบความรู้ 2 และใบความรู้ 3 พิจารณาว่า มีเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และวงวน (loop) หรือไม่

**คาบที่ 2**

4. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน ศึกษาใบความรู้ที่ 4

**บทนิยาม**

จุดยอด U และจุดยอด V ของกราฟเป็น **จุดยอดประชิด** ( adjacent vertices ) ก็ต่อเมื่อ มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง

เส้นเชื่อม e ของกราฟเกิดกับ ( incident ) จุดยอด V ถ้าจุดยอด V เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม e

5. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.1 หน้า 57 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2

**คาบที่ 3**

6. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 5

**บทนิยาม**

1. กราฟที่ไม่มีวงวน และไม่มีเส้นหลายชั้น เรียกว่า **กราฟเชิงเดียว** ( simple graph )
2. กราฟที่มีวงวน หรือเส้นหลายชั้น เรียกว่า **กราฟหลายเชิง** ( multi graph )

7. นักเรียนและครูช่วยกันสรุปสมบัติเบื้องต้นของกราฟ ซึ่งได้แก่ เส้นหลายชั้น วงวน จุดยอดประชิดเส้นหลายชั้น กราฟเชิงเดียว กราฟหลายเชิง เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนมีความคิดแก้ปัญหาที่หลากหลาย ครูเน้นย้ำว่านักเรียนสามารถใช้วิธีการแก้ปัญหาแตกต่างกันได้หลายวิธี



5. แหล่งการเรียนรู้ ห้องสมุด หนังสือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

สิ่งที่วัด	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	● สังเกตการตอบ คำถาม	● คำถาม	● ตอบถูกต้องอย่างน้อย 90%
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจสอบผลงาน 2. สังเกต	1. ใบงาน 2. แบบตรวจสอบผลงาน	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90% 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90%
3. ด้านคุณลักษณะ	● สังเกต	● แบบสังเกต	● ผ่านระดับดี 90%

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

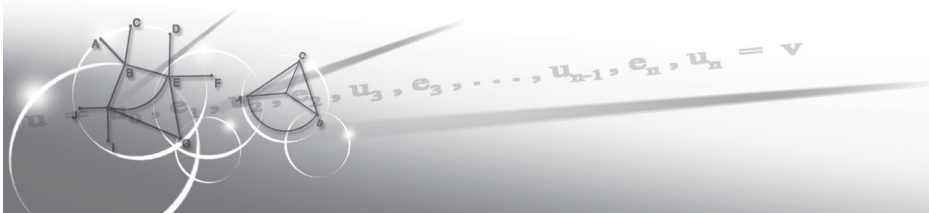
.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....



## ใบความรู้ที่ 2

### กราฟ

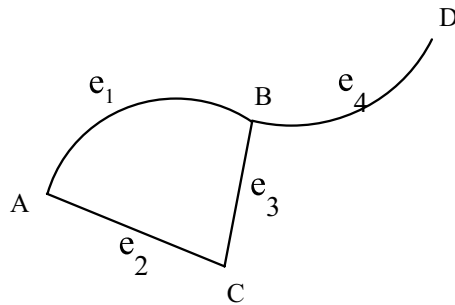
#### บทนิยาม

กราฟ  $G$  ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด ( vertex ) แทนด้วยสัญลักษณ์  $V(G)$
2. เซตของเส้นเชื่อม ( edge ) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดแทนด้วยสัญลักษณ์  $E(G)$

ข้อสังเกต  $V(G) \neq \phi$  แต่  $E(G)$  อาจเป็นเซตว่างได้

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดกราฟ  $G$  ดังรูป



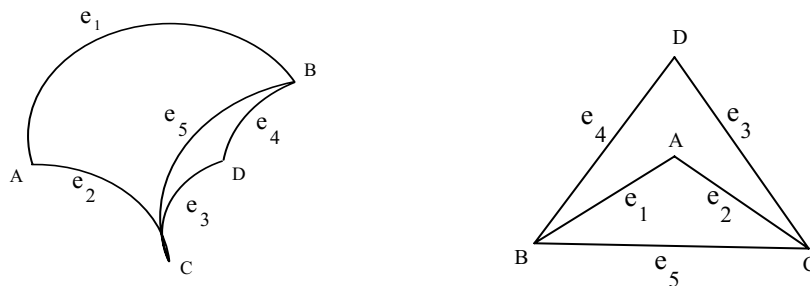
จากกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$V(G) = \{ A, B, C, D \}$$

$$E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$$

#### หมายเหตุ :

1. ในการเขียนแผนภาพของกราฟนั้น จะกำหนดตำแหน่งของจุดยอด ณ ตำแหน่งใดก็ได้ และจะลากเส้นเชื่อมของกราฟเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้งมีความยาวเป็นเท่าใดก็ได้ เช่น กราฟต่อไปนี้ถือว่าเป็นกราฟเดียวกัน

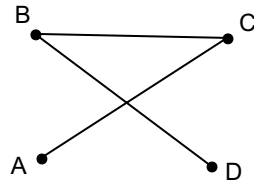


รูปที่ 1

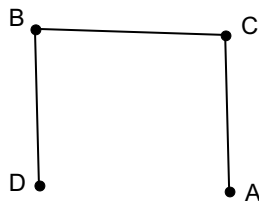
$$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots$$



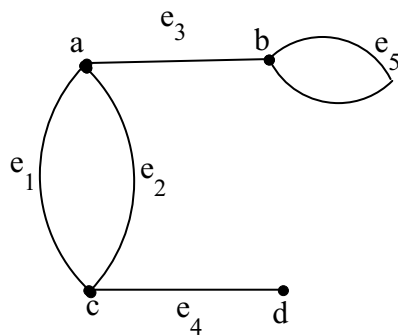
2. เส้นเชื่อมสองเส้นของกราฟ อาจลากตัดกันได้โดยที่จุดตัดของเส้นทั้งสองไม่ถือว่าเป็นจุดยอดของกราฟ เช่น กราฟ



สามารถเขียนใหม่โดยไม่มีเส้นเชื่อมตัดกันได้ดังนี้



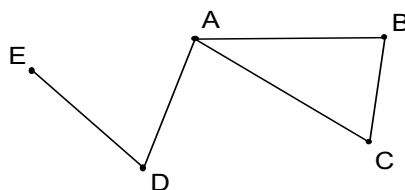
กำหนดกราฟดังรูป



รูปที่ 2

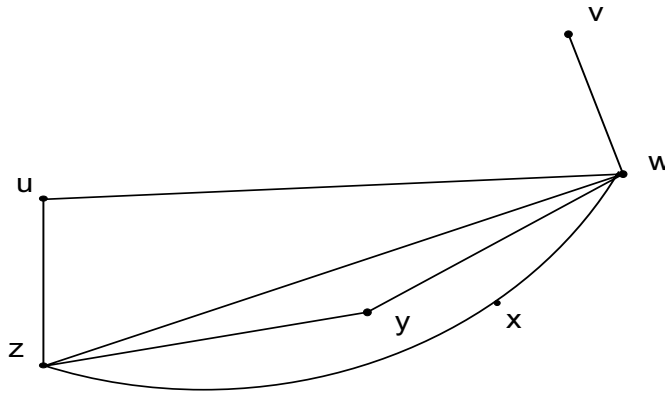
จากรูปที่ 2 จะเห็นว่า  $e_1$  และ  $e_2$  เป็นเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดคู่เดียวกัน คือ จุดยอด a และจุดยอด c เส้น  $e_3$  เป็นเส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอด b เพียงจุดเดียว

ตัวอย่างที่ 2.2 ให้  $G$  เป็นกราฟซึ่งประกอบด้วย เซตของจุดคือ  $V = \{ A, B, C, D, E \}$  และเซตของคู่อันดับที่ไม่เป็นอันดับของ  $V$   $E = \{ AB, AC, AD, BC, DE \}$  ดังนั้น ลักษณะของกราฟ  $G$  จะเป็นดังนี้

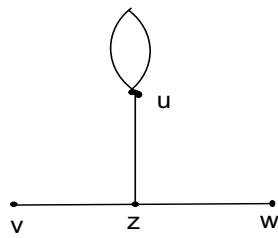


ตัวอย่างที่ 2.3 จงเขียนกราฟ  $G$  ซึ่งประกอบด้วย เซตของจุดคือ  $V = \{ u, v, w, x, y, z \}$  และเซตของเส้นคือ  $E = \{ uw, uz, vw, wx, wy, wz, xz, yz \}$

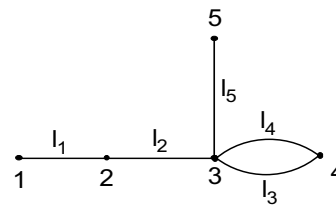
วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ สามารถเขียนกราฟ  $G$  ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 2.4 จากกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเขียนเซตของจุด และเซตของเส้น



รูป ก



รูป ข

วิธีทำ รูป ก เซตของจุด คือ  $\{ u, v, w, z \}$  เซตของเส้น คือ  $\{ uu, uz, vz, zw \}$

รูป ข เซตของจุด คือ  $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$  เซตของเส้น คือ  $\{ l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \}$

### สนใจมากๆ จะได้เข้าใจ

1. คำว่า  $AB$  เป็นคู่ที่ไม่เป็นอันดับแสดงว่า จะเขียน  $AB$  หรือ  $BA$  ก็คือสิ่งเดียวกัน ( การเรียงลำดับไม่มีความหมาย )
2. เรียกสมาชิกใน  $E$  ว่า เส้น หรือ ด้าน เช่น สมาชิก  $AB$  เรียกว่า เส้น  $AB$  หรือ ด้าน  $AB$  สมาชิก  $BC$  เรียกว่า เส้น  $BC$  หรือ ด้าน  $BC$
3. ต่อไปนี้ จะเรียกเซตของคู่ที่ไม่เป็นอันดับของจุดย่อว่า เซตของเส้น

$$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots$$



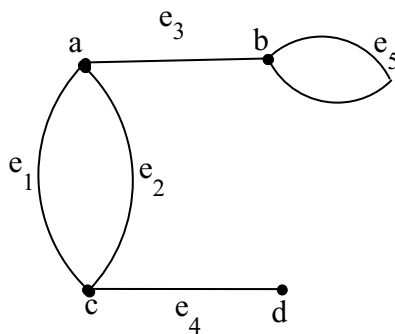
### ใบความรู้ที่ 3

#### เส้นหลายชั้น

##### บทนิยาม

เส้นเชื่อมตั้งแต่ 2 เส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดคู่เดียวกันเรียกว่า **เส้นหลายชั้น** (multiple edges) หรือ **เส้นเชื่อมขนาน** (parallel edges) เส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียวเรียกว่า **วงวน** (loop)

กำหนดกราฟดังรูปที่ 2



จะเห็นว่า เส้นเชื่อม  $e_1$  และ  $e_2$  เป็นเส้นเชื่อมขนาน เส้นเชื่อม  $e_5$  เป็นวงวน

ในกรณีที่กราฟไม่มีเส้นเชื่อมขนาน สามารถใช้สัญลักษณ์  $AB$  เพื่อแทนเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด  $A$  และ  $B$  เช่น กราฟในตัวอย่างที่ 2.1 ใบความรู้ที่ 2 สามารถเขียนเซตของเส้นเชื่อม  $E(G)$

ได้ใหม่เป็น  $E(G) = \{AB, AC, BC, BD\}$

**ตัวอย่างที่ 2.5** สมมติว่ามีตำแหน่งงาน 4 ตำแหน่งคือ  $A, B, C$  และ  $D$  และมีผู้สมัครงาน 4 คน คือ  $ก, ข, ค$  และ  $ง$  โดยที่แต่ละคนมีความสามารถทำงานในตำแหน่งต่างๆ ดังนี้

- วิธีทำ**
- ก มีความสามารถทำงานในตำแหน่งงาน  $A$
  - ข มีความสามารถทำงานในตำแหน่งงาน  $A, B$  และ  $D$
  - ค มีความสามารถทำงานในตำแหน่งงาน  $C$  และ  $D$
  - ง มีความสามารถทำงานในตำแหน่งงาน  $A$  และ  $B$

ต้องการมอบหมายงานให้กับผู้สมัครทั้งสิ้น โดยที่แต่ละคนได้ทำงานตามความสามารถในตำแหน่งงานเพียงตำแหน่ง 1 ตำแหน่ง

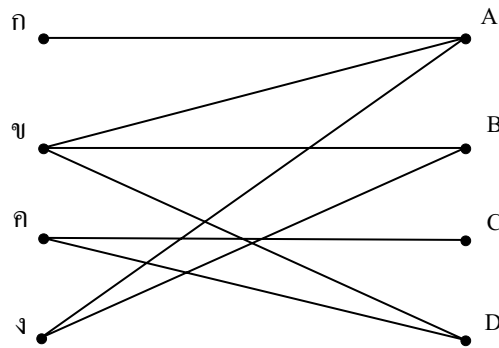


จำลองปัญหานี้ด้วยกราฟ  $G$  โดยที่

$$V(G) = \{ A, B, C, D, ก, ข, ค, ง \} \text{ และ}$$

$$E(G) = \{ กA, ขA, ขB, ขD, คC, คD, งA, งB \}$$

แสดงแผนภาพของกราฟ  $G$  ได้ดังรูป



รูปที่ 3

ดังนั้น การมอบหมายงานให้กับผู้สมัครทั้งสองคนเป็นดังนี้

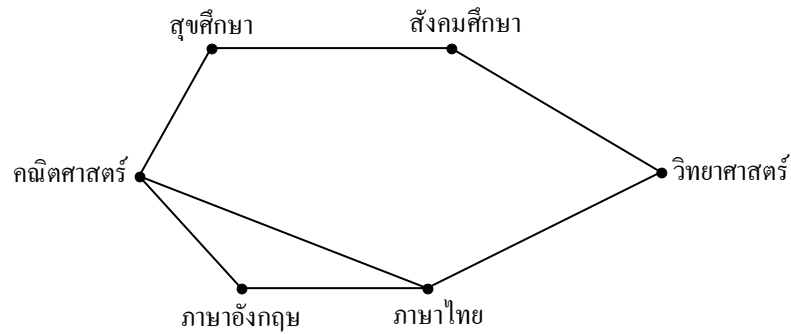
- ก ทำงานในตำแหน่งงาน A
- ข ทำงานในตำแหน่งงาน D
- ค ทำงานในตำแหน่งงาน C
- ง ทำงานในตำแหน่งงาน B

**ตัวอย่างที่ 2.6** ในการจัดตารางสอบของ 6 วิชา คือ วิชาคณิตศาสตร์ วิชาภาษาอังกฤษ วิชาภาษาไทย วิชาวิทยาศาสตร์ วิชาสังคมศึกษา และวิชาสุขศึกษา โดยที่ทราบว่า

- มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิชาภาษาอังกฤษ
  - มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิชาภาษาไทย
  - มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิชาสุขศึกษา
  - มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาสุขศึกษาและวิชาสังคมศึกษา
  - มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาสังคมศึกษาและวิชาวิทยาศาสตร์
  - มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาวิทยาศาสตร์และวิชาภาษาไทย
  - มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาภาษาอังกฤษและวิชาภาษาไทย
- จะสามารถจัดตารางสอบทั้งหกวิชา โดยใช้เวลา 3 คาบ ได้อย่างไร

**วิธีทำ** จำลองปัญหาด้วยกราฟ โดยให้จุดยอดแทนวิชา และจุดยอดสองจุดมีเส้นเชื่อมก็ต่อเมื่อนักเรียนบางคนเรียนทั้งสองวิชา ดังรูป



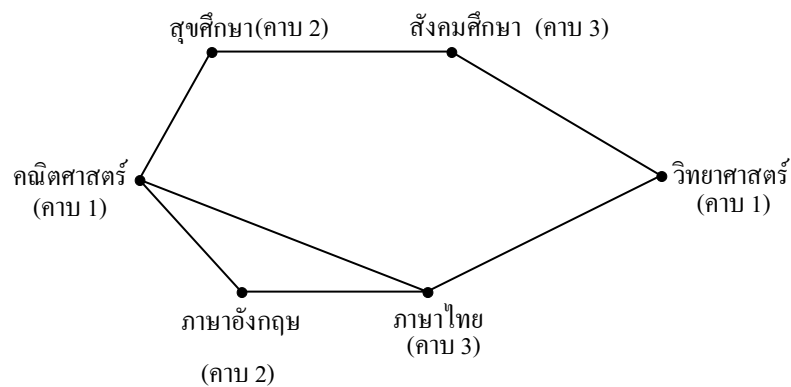


รูปที่ 4

จากแผนภาพของกราฟ แสดงว่าจัดสอบวิชาคณิตศาสตร์ วิชาภาษาไทยและวิชาภาษาอังกฤษ ในคาบเวลาเดียวกันไม่ได้ แต่วิชาคณิตศาสตร์และวิชาสังคมศึกษา หรือวิชาคณิตศาสตร์และวิชาวิทยาศาสตร์ สามารถจัดสอบในคาบเวลาเดียวกันได้

ดังนั้น การจัดเวลาในแต่ละวิชากระทำดังนี้

ถ้าจุดยอด 2 จุดมีเส้นเชื่อมจะจัดสอบในคาบเวลาต่างกัน



ตัวอย่างหนึ่งในการจัดสอบวิชาทั้งหกวิชา เป็นดังนี้

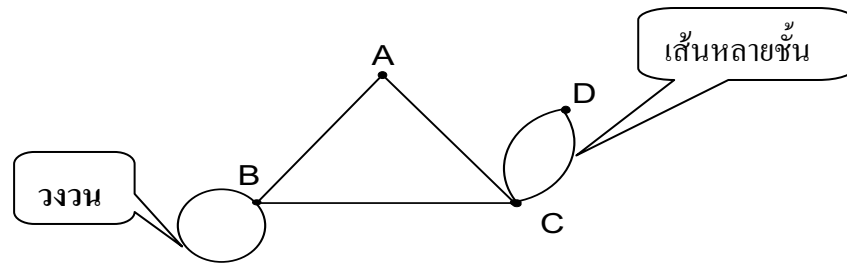
คาบที่	สอบวิชา
1	คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์
2	สุขศึกษา ภาษาอังกฤษ
3	สังคมศึกษา ภาษาไทย

นักเรียนลองจัดตารางสอบทั้ง 6 วิชา ในรูปแบบอื่นๆ โดยใช้เวลา 3 คาบ

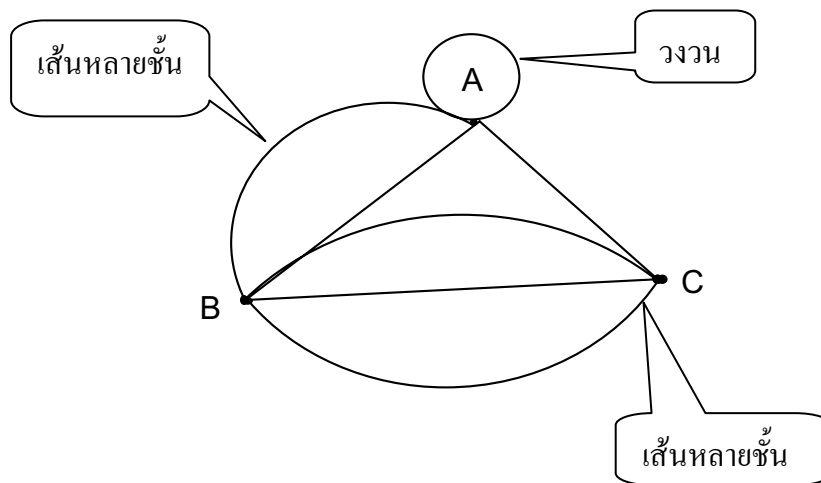




ตัวอย่างที่ 2.7 จากรูปจงหาวงวนและเส้นหลายชั้น



รูป ก



รูป ข



## ใบความรู้ที่ 4

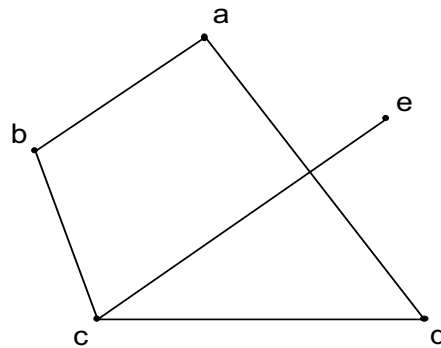
### จุดประชิด

#### บทนิยาม

จุดยอด  $u$  และ จุดยอด  $v$  ของกราฟเป็น **จุดยอดประชิด** ( adjacent vertices ) ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง

เส้นเชื่อม  $e$  ของกราฟเกิดกับ ( incident ) จุดยอด  $V$  ถ้าจุดยอด  $V$  เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม  $e$

ตัวอย่างที่ 2.8 กำหนดกราฟดังนี้



จะเห็นว่า

จุดยอด  $a$  และจุดยอด  $b$  เป็นจุดยอดประชิด      จุดยอด  $a$  และจุดยอด  $d$  เป็นจุดยอดประชิด

จุดยอด  $b$  และจุดยอด  $c$  เป็นจุดยอดประชิด      จุดยอด  $c$  และจุดยอด  $d$  เป็นจุดยอดประชิด

จุดยอด  $c$  และจุดยอด  $e$  เป็นจุดยอดประชิด      จุดยอด  $a$  และจุดยอด  $e$  ไม่เป็นจุดยอดประชิด

และจุดยอด  $a$  และจุดยอด  $c$  ไม่เป็นจุดยอดประชิด

และจะเห็นว่า

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $a$  คือ  $ab$  และ  $ad$       เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $b$  คือ  $ba$  และ  $bc$

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $c$  คือ  $cb$ ,  $ce$  และ  $ed$       เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $d$  คือ  $da$  และ  $dc$

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $e$  คือ  $ec$

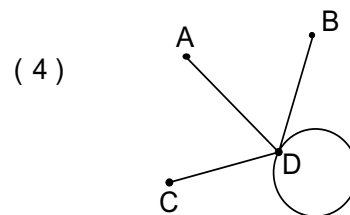
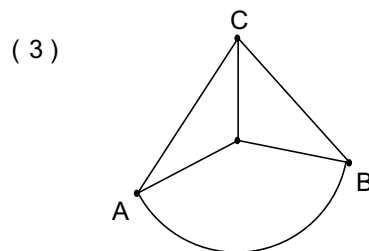
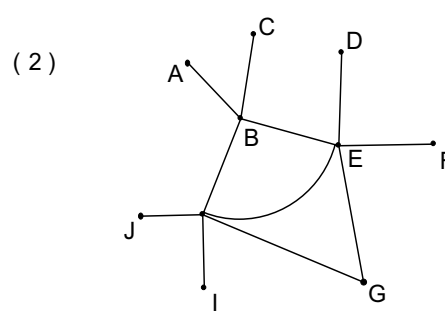
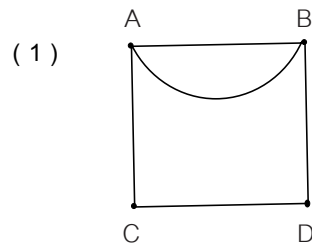


## ใบความรู้ที่ 5 กราฟเชิงเดียว กราฟหลายเชิง

### บทนิยาม

- กราฟที่ไม่มีวงวน และไม่มีเส้นหลายชั้น เรียกว่า **กราฟเชิงเดียว** ( simple graph )
- กราฟที่มีวงวน หรือเส้นหลายชั้น เรียกว่า **กราฟหลายเชิง** ( multi graph )

ตัวอย่างที่ 2.9 จงตรวจสอบดูว่า กราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟเชิงเดียวหรือกราฟหลายเชิง



วิธีทำ ข้อ (1) เป็นกราฟหลายเชิง เพราะมีเส้นหลายชั้นระหว่างจุด A และ B

ข้อ (2) เป็นกราฟเชิงเดียว เพราะไม่มีวงวน และระหว่าง 2 จุดที่มีเส้นเชื่อมก็จะมีเส้นเชื่อมเพียงเส้นเดียว

ข้อ (3) เป็นกราฟเชิงเดียว เพราะไม่มีวงวน และระหว่าง 2 จุดที่มีเส้นเชื่อมก็จะมีเส้นเชื่อมเพียงเส้นเดียว

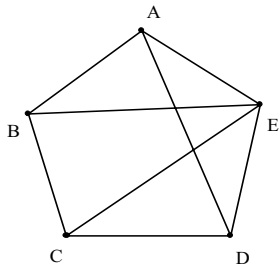
ข้อ (4) เป็นกราฟหลายเชิง เพราะมีวงวนที่จุด D



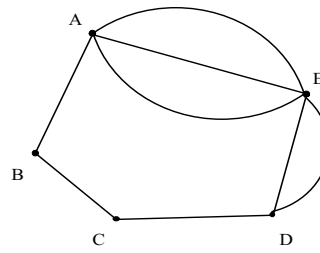
ตัวอย่างที่ 2.10 จงยกตัวอย่างกราฟ  $G_1, G_2, G_3$  และ  $G_4$  ซึ่งแต่ละกราฟต้องมีจุด 5 จุด มีเส้น 8 เส้น และมีลักษณะดังนี้

- $G_1$  เป็นกราฟเชิงเดียว
- $G_2$  เป็นกราฟหลายเชิงไม่มีวงวน
- $G_3$  เป็นกราฟหลายเชิงที่ไม่มีเส้นหลายชั้น
- $G_4$  เป็นกราฟหลายเชิงที่มีวงวนและเส้นหลายชั้น

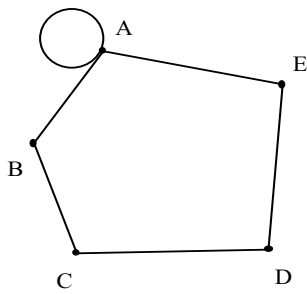
วิธีทำ



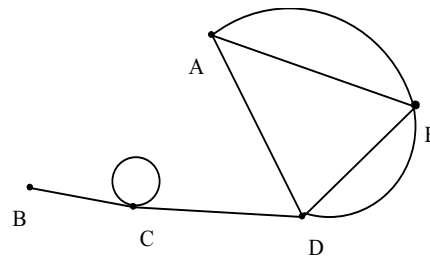
กราฟ  $G_1$



กราฟ  $G_2$



กราฟ  $G_3$



กราฟ  $G_4$



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (ดีกรีของจุดยอด)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 คาบ

#### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

เพื่อให้นักเรียนสร้างความเข้าใจความหมายของดีกรี ( degree ) ของจุดในกราฟ ตลอดจนสร้างความเข้าใจความหมายจุดคู่ ( even point ) และจุดคี่ ( odd point )

#### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 สามารถหาดีกรี ( degree ) ของจุดในกราฟได้
- 1.2 สามารถหาจุดคู่ ( even point ) และจุดคี่ ( odd point ) ได้

#### 2. แนวความคิดหลัก

เข้าใจความหมายของดีกรี ( degree ) ของจุดในกราฟ ตลอดจนสร้างความเข้าใจความหมายจุดคู่ ( even point ) และจุดคี่ ( odd point ) ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาได้

#### 3. เนื้อหาสาระ

- 3.1 ความหมายของดีกรี ( degree ) ของจุดในกราฟ
- 3.2 ความหมายจุดคู่ ( even point ) และจุดคี่ ( odd point )

#### 4. กระบวนการจัดการการเรียนรู้

##### กิจกรรมการเรียนรู้

- 4.1 ครูกระตุ้นความสนใจเรียนด้วยปัญหาชวนคิด ประมาณ 10 นาที โดย
  - 1) แบ่งกลุ่มนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยๆ กลุ่มละ 4 – 5 คน
  - 2) ครูแจกใบกิจกรรมที่ 1 เมื่อนักเรียนอ่านแล้วปฏิบัติตามขั้นตอนในการแก้ปัญหา ครูซักถามและให้นักเรียนแสดงความคิดเห็น ตลอดจนจูงใจให้นักเรียนอยากแก้ปัญหา
    - ปัญหานี้เกี่ยวกับอะไร
    - นักเรียนรู้จักการเดินสี่เหลี่ยมหรือไม่
    - นักเรียนลองเล่าให้ฟังว่าปัญหานี้ว่าอย่างไร
    - จากปัญหา การจับคู่เดินราตามเงื่อนไขที่กำหนด ผู้หญิงผู้ชายสามารถจับคู่เดินราอย่างไร ใครคู่กับใครได้บ้าง เป็นต้น



- 3) ให้นักเรียนแต่ละคนคิดวางแผนแก้ปัญหาด้วยตนเอง โดยไม่ต้องปรึกษาคณะอื่น
- 4) หลังจากคิดเป็นรายบุคคลแล้ว ให้นักเรียนร่วมกันในกลุ่มแก้ปัญหา โดยครูชี้ชวนให้นักเรียนใช้การเขียนภาพหรือกราฟประกอบการวางแผนแก้ปัญหา
- 5) ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันวางแผนแก้ปัญหา
- 6) ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันลงมือแก้ปัญหตามแผนที่วางไว้
- 7) ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันตรวจสอบการรู้คิดเกี่ยวกับกระบวนการคิดของตนเอง และการแก้ปัญหา ของกลุ่มตน ด้วยการตั้งคำถามตนเองหรือสมาชิกในกลุ่มเช่น

- เราเข้าใจปัญหาชัดเจนและถูกต้องเพียงใด
- แผนในการแก้ปัญหาที่ใช้นั้นสามารถแก้ปัญหได้หรือไม่
- ลงมือแก้ปัญหตามแผนที่วางไว้หรือไม่
- มีวิธีหรือแผนอื่นอีกหรือไม่ในการแก้ปัญหานี้
- อะไรเป็นอุปสรรคหรือปัจจัยที่ช่วยในการแก้ปัญหานี้

4.2 ครูให้นักเรียนร่วมแสดงความคิดเห็นและแนวคิด

4.3 ครูสรุปแนวคิดเกี่ยวกับปัญหาชวนคิดข้างต้นอีกครั้งหลังจากนักเรียนแสดงความคิดเห็นเสร็จแล้ว เพื่อให้นักเรียนทั้งชั้นเข้าใจตรงกัน ข้อสรุปมีดังนี้

- สิ่งที่ต้องการหาได้แก่ ผู้ชายทั้ง 5 คนดังกล่าวมีคู่แต่งงานกันทุกคนหรือไม่
- สิ่งที่ต้องพิจารณาในการหาผลเฉลย ได้แก่ คนที่จะแต่งงาน ซึ่งมีผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง

5 คน เงื่อนไขในการจับคู่แต่งงาน

- วิธีหรือแผนในการแก้ปัญหา มีดังนี้ สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟที่สอดคล้องตามสถานการณ์ปัญหา โดยให้จุดแทนคนที่แต่งงาน จุดทางซ้ายมือแทนผู้ชายแต่ละคน จุดทางด้านขวามือแทนผู้หญิงแต่ละคน และเส้นเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด แสดงว่า 2 คนนั้นเป็นคู่ที่ต้องแต่งงานกัน พิจารณาจากตัวแบบที่ได้แล้วตอบคำถามของปัญหา

4.4 ครูให้นักเรียนตั้งข้อสังเกตที่ได้จากปัญหาชวนคิด เกี่ยวกับจำนวนเส้นที่ตกกระทบกับจุดในกราฟ เพื่อให้ทราบแนวคิดของนักเรียนและนำเข้าสู่บทนิยามของดีกรีของจุดในกราฟ

4.5 ครูอธิบายสรุปและเขียนบทนิยามดีกรีของจุดในกราฟ จุดคู่ จุดคี่

**บทนิยาม** ถ้า  $v_i$  เป็นจุดปลายของเส้น  $e_j$  เราจะกล่าวว่า  $V_i$  ตกกระทบ (incident) กับ  $e_j$   
หรือ  $e_j$  ตกกระทบ กับ  $V_i$

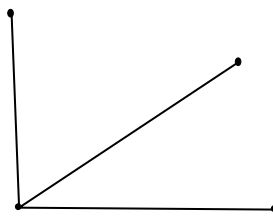


**บทนิยาม** จุดที่อยู่ในกราฟ จะกล่าวว่ามี **ดีกรี (degree)** เท่ากับ  $n$  ก็ต่อเมื่อ จุดดังกล่าวเป็นจุดที่มีเส้นตก  
กระทบ  $n$  เส้น ใช้สัญลักษณ์  $\text{deg } v$  แทนดีกรีของจุดยอด  $v$

**ทฤษฎีบท** ผลรวมของดีกรีของจุดยอดของทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม  
ในกราฟ

**ตัวอย่างที่ 3.1**

(1)

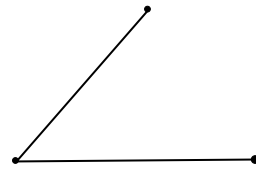


A

จุด A มีดีกรีเท่ากับ 3 เพราะมีเส้นที่ตกกระทบจำนวน 3 เส้น

$$\text{deg } A = 3$$

(2)

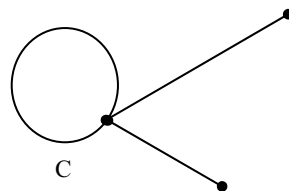


B

จุด B มีดีกรีเท่ากับ 2 เพราะมีเส้นที่ตกกระทบจำนวน 2 เส้น

$$\text{deg } B = 2$$

(3)



C

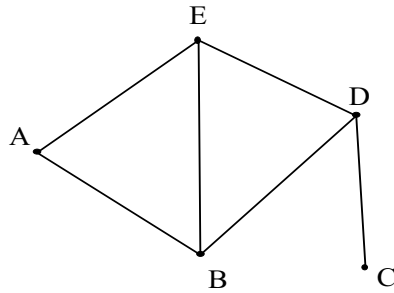
จุด C มีดีกรีเท่ากับ 4 เพราะมีเส้นที่ตกกระทบ 1 เส้น และมีวงวน 1 วง

$$\text{deg } C = 4$$

$$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots$$



## ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาดีกรีของแต่ละจุดในกราฟ



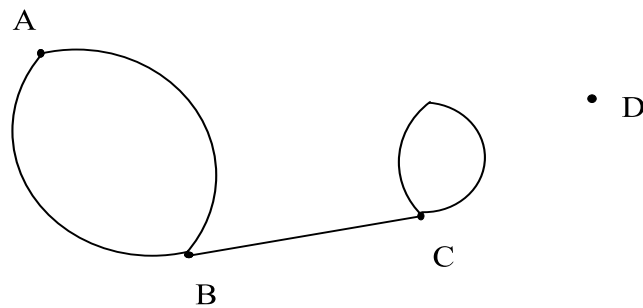
วิธีทำ

จุด A มีดีกรีเท่ากับ 2  
 จุด B มีดีกรีเท่ากับ 3  
 จุด C มีดีกรีเท่ากับ 1  
 จุด D มีดีกรีเท่ากับ 3  
 จุด E มีดีกรีเท่ากับ 3

$$\text{ผลบวกของดีกรี} = 2 + 3 + 1 + 3 + 3 = 12$$

$$\text{จำนวนเส้นเชื่อม} = 6$$

## ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาดีกรีของแต่ละจุดในกราฟ



วิธีทำ

จุด A มีดีกรีเท่ากับ 2                      จุด B มีดีกรีเท่ากับ 3  
 จุด C มีดีกรีเท่ากับ 3                      จุด D มีดีกรีเท่ากับ 0

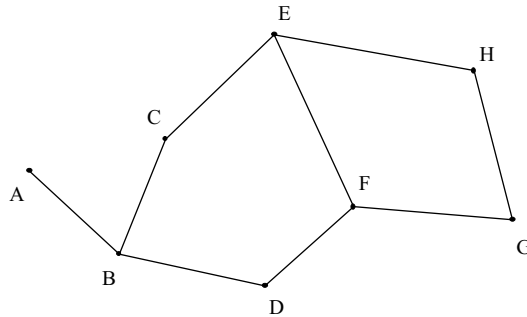
ผลบวกของดีกรี =  $2 + 3 + 3 = 8$   
 จำนวนเส้นเชื่อม = 4

**บทนิยาม** จุดคู่ (even point) คือ จุดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคู่  
 จุดคี่ (odd point) คือ จุดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่





ตัวอย่างที่ 3.4 จงพิจารณาจุดแต่ละจุดในกราฟว่าจุดใดเป็นจุดคู่ จุดใดเป็นจุดคี่



วิธีทำ

จุดที่เป็นจุดคู่	จุดที่เป็นจุดคี่
จุด D มีดีกรีเท่ากับ 2	จุด A มีดีกรีเท่ากับ 1
จุด F มีดีกรีเท่ากับ 4	จุด B มีดีกรีเท่ากับ 3
จุด H มีดีกรีเท่ากับ 2	จุด C มีดีกรีเท่ากับ 3
จุด G มีดีกรีเท่ากับ 2	จุด E มีดีกรีเท่ากับ 3

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟที่มีผลรวมของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับ 22

วิธีทำ สมมติว่ากราฟมีเส้นเชื่อม  $n$  เส้น

จากทฤษฎีผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

$$\text{ดังนั้น} \quad 22 = 2n$$

$$\text{นั่นคือ} \quad n = 11$$

สรุปได้ว่า กราฟนั้นมีเส้นเชื่อม 11 เส้น

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหาจำนวนจุดยอดของกราฟที่มีเส้นเชื่อม 15 เส้น และมีจุดยอด 3 จุด ที่มีดีกรี 4 ส่วนจุดยอดที่เหลือมีดีกรี 3

วิธีทำ ให้  $n$  เป็นจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 3

$$\text{ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟคือ } (3)(4) + 3n$$

จากทฤษฎีบทผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

$$\text{ดังนั้น} \quad (3)(4) + 3n = 2(15)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad n = 6$$

ดังนั้น จำนวนจุดยอดทั้งหมดของกราฟคือ  $3 + 6 = 9$  จุด



**ตัวอย่างที่ 3.7** จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ว่าจะมีกราฟที่มีจุดยอด 4 จุด และดีกรีของจุดยอดคือ 1, 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

**วิธีทำ** สมมติว่ามีกราฟที่มีจุดยอด 4 จุด และดีกรีของจุดยอดเท่ากับ 1, 1, 2 และ 3  
ดังนั้น ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดคือ  $1 + 1 + 2 + 3 = 7$   
ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับทฤษฎี  
ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่จะมีกราฟดังกล่าว

**ทฤษฎีบท** ทุกกราฟจะมีจุดยอดที่เป็นจำนวนคู่

**พิสูจน์** ให้  $G$  เป็นกราฟ

ถ้า  $G$  ไม่มีจุดยอดคี่ นั่นคือ  $G$  มีจำนวนจุดยอดที่เป็นศูนย์ จึงได้ว่า  $G$  มีจำนวนจุดยอดที่เป็นจำนวนคู่

$G$  มีจำนวนจุดยอดที่เป็นจำนวนคู่

ต่อไปสมมติว่ากราฟ  $G$  มีจุดยอดคี่  $k$  จุด คือ  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$

และมีจุดยอดคู่  $n$  จุด คือ  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  จากทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$(\deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \dots + \deg v_k) + (\deg u_1 + \deg u_2 + \deg u_3 + \dots + \deg u_n) = 2q$$

เมื่อ  $q$  คือจำนวนเส้นเชื่อมของ  $G$

$$\text{ดังนั้น } \deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \dots + \deg v_k = 2q - (\deg u_1 + \deg u_2 + \deg u_3 + \dots + \deg u_n)$$

เนื่องจาก  $\deg u_1, \deg u_2, \deg u_3, \dots, \deg u_n$  ต่างก็เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น  $2q - (\deg u_1 + \deg u_2 + \deg u_3 + \dots + \deg u_n)$  เป็นจำนวนคู่

แต่  $2q$  เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ  $\deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \dots + \deg v_k$  เป็นจำนวนคู่

แต่เนื่องจาก  $\deg v_1, \deg v_2, \deg v_3, \dots, \deg v_k$  เป็นจำนวนคี่

เพราะฉะนั้น  $k$  จะต้องเป็นจำนวนคี่ จึงจะทำให้  $\deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \dots + \deg v_k$

สรุปได้ว่าไม่มีกราฟที่มีสมบัติดังกล่าว

**ตัวอย่างที่ 3.8** ถ้าในห้องประชุมแห่งหนึ่งมีผู้เข้าร่วมประชุมทั้งหมด 23 คน เป็นไปได้หรือไม่ว่าผู้เข้าร่วมประชุมแต่ละคนจับมือทักทายผู้เข้าร่วมประชุมคนอื่นอีก 7 คนเท่านั้น

**วิธีทำ** แปลงปัญหาดังกล่าวเป็นกราฟ โดยให้จุดยอดแทนผู้เข้าร่วมประชุม และเส้นเชื่อมแทนการจับมือทักทายของผู้เข้าร่วมประชุม

จะได้ว่า กราฟนี้มีจุดยอด 23 จุด และจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรี 7

นั่นคือ กราฟมีจุดยอดที่เป็นจำนวน 23 จุด ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับทฤษฎีบท ทุกกราฟ

จะมีจุดยอดที่เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่ผู้เข้าร่วมประชุมแต่ละคนจับมือกับคนอื่นเพียง 7 คนเท่านั้น



**ตัวอย่างที่ 3.9** จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จังหวัดหนึ่งซึ่งมี 5 อำเภอ โดยมี 3 อำเภอ ซึ่งแต่ละอำเภอมียอดถนน เชื่อมกับอำเภออื่นเพียง 3 สาย มี 1 อำเภอที่มีถนนเชื่อมกับอำเภออื่นเพียง 2 สาย และมี 1 อำเภอ มีถนนเชื่อมกับอำเภออื่นที่เหลือทุกอำเภอ

**วิธีทำ** แปลงปัญหาดังกล่าวเป็นกราฟ โดยให้จุดยอดแทนอำเภอ และเส้นเชื่อมแทนถนนที่เชื่อมระหว่างสองอำเภอใดๆ

นั่นคือ กราฟนี้มีจุดยอด 5 จุด และมีดีกรี 3, 3, 3, 2, 4 จะได้ว่า กราฟมีจุดยอดที่เป็นจำนวน 3 จุด ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับทฤษฎีบท ทุกกราฟที่มีจุดคี่เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่จังหวัดหนึ่งที่มี 5 อำเภอ จะมี 3 อำเภอซึ่งแต่ละอำเภอ มีถนนเชื่อมกับอำเภออื่นเพียง 3 สาย มี 1 อำเภอ ที่มีถนนเชื่อมกับอำเภออื่นเพียง 2 สาย และมี 1 อำเภอมีถนนเชื่อมกับอำเภออื่นที่เหลือทุกอำเภอ

4.6 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.2 หน้า 66 - 68 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ของสสวท.

5. แหล่งการเรียนรู้ ห้องสมุด หนังสือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

**6. กระบวนการวัดและประเมินผล**

สิ่งที่วัด	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ใบกิจกรรม 2. สังเกต	1. แบบรายงานผล 2. สังเกตการตอบคำถาม	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90% 2. ตอบถูกต้องอย่างน้อย 90%
2. ด้านทักษะ		● แบบตรวจผลงาน	● ผ่านระดับดี 90%
3. ด้านคุณลักษณะ		1. สังเกตการตอบคำถาม 2. สังเกตการรับฟังความคิดเห็นคนอื่น	

**7. บันทึกหลังสอน**

.....

.....

.....

**8. กิจกรรมเสนอแนะ**

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....





### แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม

กิจกรรมที่ \_\_\_\_\_

ชื่อกิจกรรม ปัญหาการสื่อสาร

กลุ่มที่ \_\_\_\_\_

สมาชิกในกลุ่มประกอบด้วย

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

4. \_\_\_\_\_

5. \_\_\_\_\_

#### 1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

1.1 สิ่งที่ต้องการหา ได้แก่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.2 ให้เขียนเล่าปัญหาสั้นๆ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

#### 2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา

วิธี / แนวทางที่จะใช้แก้ปัญหา ได้แก่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (แนวเดิน)  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5  
เวลา 1 คาบ

### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจและสามารถหาแนวเดิน (walk) กราฟเชื่อมโยงได้

#### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาแนวเดิน (walk) กราฟเชื่อมโยง (connected graph)

#### 2. แนวความคิดหลัก

ในชีวิตประจำวันคนเราต้องเดินทางไปตามสถานที่ต่างๆ การเดินทางนี้สามารถเขียนเป็นกราฟได้ เรียกว่า แนวเดิน

#### 3. เนื้อหาสาระ

**บทนิยาม** ให้  $u$  และ  $v$  เป็นจุดยอดของกราฟ

**แนวเดิน  $u - v$  ( $u - v$  walk)** คือ ลำดับจำกัดของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกัน

$$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$$

โดยเริ่มต้นที่จุดยอด  $u$  และสิ้นสุดที่จุดยอด  $v$  และแต่ละเส้นเชื่อม  $e_i$  จะเกิดกับจุดยอด  $u_{i-1}$

และ  $u_i$  เมื่อ  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

**บทนิยาม** กราฟ  $G$  เรียกว่า กราฟเชื่อมโยง (connected graph) ก็ต่อเมื่อ สำหรับจุดยอด  $u$  และ  $v$  ที่เป็นจุดยอดต่างกัน ในกราฟ  $G$  มีแนวเดิน  $u - v$

#### 4. กระบวนการจัดการการเรียนรู้

##### กิจกรรมการเรียนรู้

- 4.1 ครูพูดคุยกับนักเรียนเรื่องเส้นทางมาโรงเรียนของนักเรียนและระยะทางการเดินทาง
- 4.2 ให้นักเรียนเขียนกราฟเส้นทางมาโรงเรียนและระยะทางการเดินทาง
- 4.3 ครูแจกใบความรู้ให้นักเรียนศึกษา



4.4 ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มๆ ละ 4 – 5 คน โดยในกลุ่มเดียวกันควรอยู่อำเภอเดียวกัน แล้วนำกราฟที่เขียนในข้อ 4.2 มาพิจารณาว่า การนำเสนอเส้นทางที่ใช้และให้นักเรียนอภิปรายว่าการนำเสนออย่างไรจึงจะง่าย

4.5 ครูสรุปว่าการนำเสนอโดยกราฟเป็นวิธีหนึ่งเข้าใจได้ง่าย

## 5. แหล่งการเรียนรู้

## 6. กระบวนการวัดและประเมินผล

สิ่งที่วัด	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. การตอบปัญหา 2. การนำเสนอการแก้ปัญหา		1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90% 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90%
2. ด้านทักษะ	● ตรวจสอบผลงาน		● ทำถูกต้องอย่างน้อย 90%
3. ด้านคุณลักษณะ	● การทำงานร่วมกับผู้อื่น		● ผ่านระดับดี 90%

## 7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

## 8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....





## ใบความรู้ที่ 6 แวนเดิน กราฟเชื่อมโยง

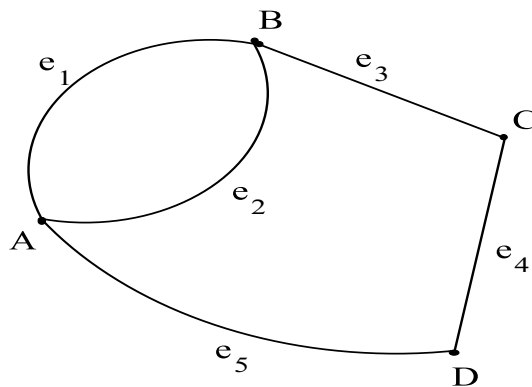
**บทนิยาม** ให้  $u$  และ  $v$  เป็นจุดยอดของกราฟ

**แวนเดิน  $u - v$  ( $u - v$  walk)** คือ ลำดับจำกัดของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกัน

$$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$$

โดยเริ่มต้นที่จุดยอด  $u$  และสิ้นสุดที่จุดยอด  $v$  และแต่ละเส้นเชื่อม  $e_i$  จะเกิดกับจุดยอด  $u_{i-1}$  และ  $u_i$  เมื่อ  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

**ตัวอย่างที่ 4.1** กำหนดกราฟดังรูป

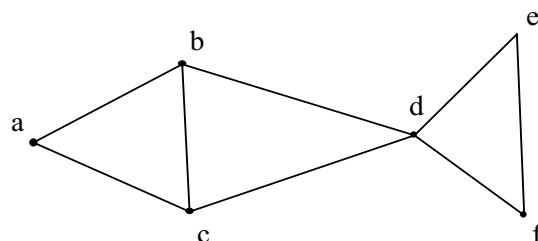


$A, e_1, B, e_3, C, e_4, D$  เป็นแวนเดิน  $A - D$

$B, e_2, A, e_1, B, e_3, C, e_4, D$  เป็นแวนเดิน  $B - D$

$B, e_3, C, e_4, D$  เป็นแวนเดิน  $B - D$

**ตัวอย่างที่ 4.2** กำหนดกราฟดังรูป



$a, ac, c, cd, d, df, f$  เป็นแวนเดิน  $a - f$

**หมายเหตุ** สำหรับกราฟใดๆ ที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและไม่มีวงวน อาจเขียนแวนเดินด้วยลำดับของจุดยอด

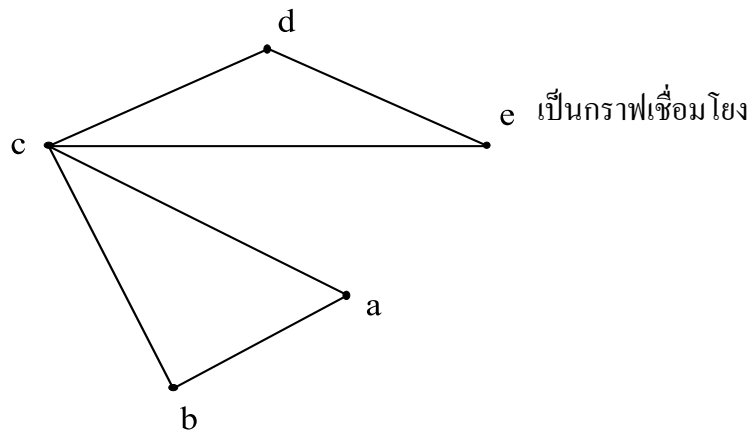
$$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots$$



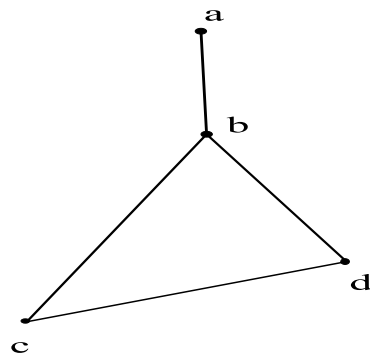
**บทนิยาม** กราฟ  $G$  เรียกว่า กราฟเชื่อมโยง (connected graph) ก็ต่อเมื่อ สำหรับจุดยอด  $u$  และ  $v$  ที่เป็นจุดยอดต่างกันในกราฟ  $G$  มีแนวจีน  $u - v$

ตัวอย่างที่ 4.3

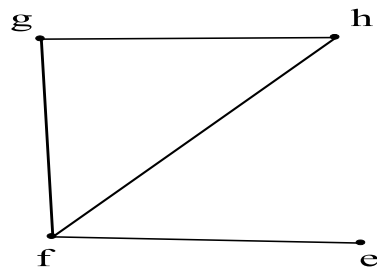
(1)



(2)



ไม่เป็นกราฟเชื่อม โยงเพราะว่าไม่มี  
แนวจีน  $b - g$  ( ยังมีจุดยอดอื่นๆ อีกที่  
ไม่มีแนวจีนแต่หาจุดยอดเพียงคู่เดียวที่  
ไม่มีแนวจีนก็เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า  
ไม่เป็นกราฟเชื่อม โยง )



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (กราฟออยเลอร์)  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5  
เวลา 2 คาบ

### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถบอกได้ว่ากราฟที่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ (Eulerian graph) หรือไม่เป็นกราฟออยเลอร์ ถ้าเป็นกราฟออยเลอร์สามารถหาวงจร (circuit) ได้

### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 สามารถหาวงจร (circuit) ของกราฟได้
- 1.2 สามารถบอกได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟออยเลอร์ (Eulerian graph)

### 2. แนวความคิดหลัก

ในการเดินทางหรือวางแผนการทำงานหลายๆ อย่างสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยกราฟออยเลอร์

### 3. เนื้อหาสาระ

#### บทนิยาม

**วงจร (circuit)** คือ แนวเดินที่เส้นเชื่อมทั้งหมดแตกต่างกัน โดยมีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน

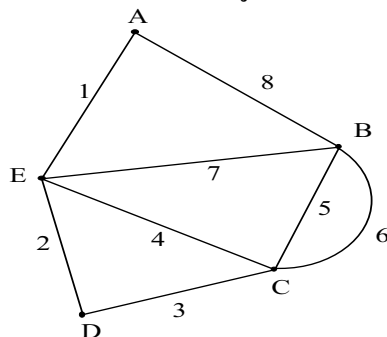
**วงจรออยเลอร์ (Euler circuit)** คือ วงจรที่ผ่านจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟกราฟที่มีวงจรออยเลอร์ เรียกว่า **กราฟออยเลอร์ (Eulerian graph)**

### 4. กระบวนการจัดการการเรียนรู้

#### กิจกรรมการเรียนรู้

- 4.1 ครูทบทวนแนวคิดโดยการยกตัวอย่าง ดังนี้

จงหาแนวเดินของกราฟ G จากรูป



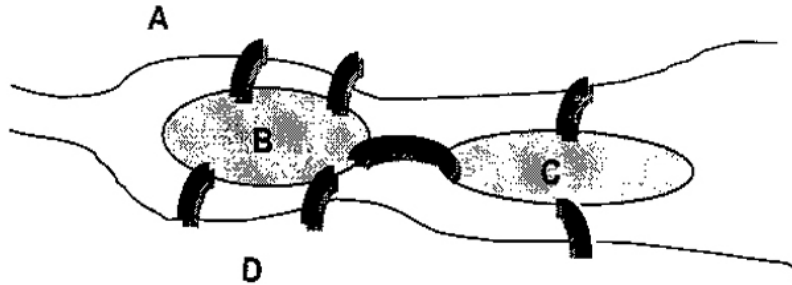
1. แนวเดินจาก A ถึง B
2. แนวเดินจาก A ถึง C
3. แนวเดินจาก A ถึง E

**วิธีทำ** แนวเดินจาก A ถึง B คือ A 8 B หรือ A 1 E 7 B  
แนวเดินจาก A ถึง C คือ A 1 E 2 D 3 C  
แนวเดินจาก A ถึง E คือ A 1 E

หมายเหตุ สามารถมีคำตอบอีกหลายวิธี

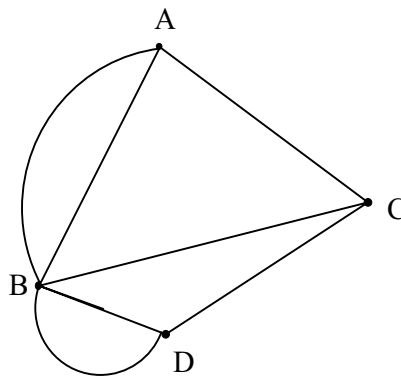


4.2 ครูและนักเรียนทบทวนประวัติของ เลอโอนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิส ได้แก้ปัญหามีชื่อว่า “ ปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก ” (Konigsberg Bridges Problem) เป็นปัญหาที่กล่าวถึงสะพาน 7 สะพาน ในเมืองคอนิกส์เบิร์ก สะพานเหล่านี้ใช้เชื่อมเกาะสองเกาะและแผ่นดิน



ปัญหานี้มีคำถามว่า “ เป็นไปได้หรือไม่ว่า ถ้าเริ่มต้น ณ ที่แห่งหนึ่ง ( บนแผ่นดิน ) แล้วเดินข้ามสะพานทั้งเจ็ดสะพาน โดยผ่านสะพานแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้นแล้วกลับมายังจุดเริ่มต้นได้ ”

ออยเลอร์ได้แปลงปัญหาดังกล่าวเป็นกราฟ โดยให้แผ่นดินแทนด้วยจุดยอดและสะพานแทนด้วยเส้นเชื่อมของกราฟ ดังรูป



ปัญหาข้างต้นเป็นปัญหาเช่นเดียวกับการใช้ดินสอลากผ่านไปตามเส้นเชื่อมของรูปกราฟ โดยเริ่มต้น ณ จุดยอดใดจุดยอดหนึ่งแล้วลากไปตามเส้นเชื่อมของกราฟจนครบทุกเส้น โดยไม่ยกดินสอและลากผ่านเส้นเชื่อมแต่ละเส้นเพียงครั้งเดียวแล้วให้ไปสิ้นสุด ณ จุดเริ่มต้น

ปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก แปลงเป็นปัญหาเรื่องของกราฟได้ว่า กราฟในรูปมีแนวเดินซึ่งผ่านเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟแต่ละเส้นเพียงครั้งเดียวหรือไม่

4.3 ครูแจกใบความรู้ให้นักเรียนทุกคนเพื่อศึกษา

4.4 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.4 หน้า 80 – 83 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

4.5 ครูสุ่มนักเรียนออกมาทำแบบฝึกบนกระดานและอธิบายให้นักเรียนในห้อง



5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้ ใบความรู้

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

สิ่งที่วัด	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	1. ตรวจใบงาน 2. ทดสอบ	1. ใบงาน 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90% 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90%
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	● ทำถูกต้องอย่างน้อย 90%
3. ด้านคุณลักษณะ	● สังเกต	● แบบสังเกต	● ผ่านระดับดี 90%

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....



## ใบความรู้ที่ 7

### กราฟออยเลอร์

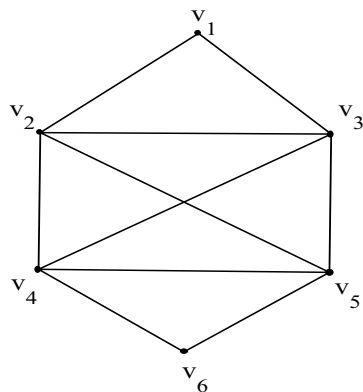
#### บทนิยาม

**วงจร (circuit)** คือ แนวเดินที่เส้นเชื่อมทั้งหมดแตกต่างกัน โดยมีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน

**วงจรรออยเลอร์ (Euler circuit)** คือ วงจรที่ผ่านจุดยอดทุกจุดและเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟ  
กราฟที่มีวงจรรออยเลอร์ เรียกว่า **กราฟออยเลอร์ (Eulerian graph)**

**หมายเหตุ :** จากนิยามสังเกตว่า กราฟออยเลอร์จะเป็นกราฟเชื่อมโยงเสมอ เพราะว่า ถ้า  $u$  และ  $v$  เป็นจุดยอดสองจุดที่แตกต่างกันบนกราฟออยเลอร์ แล้วส่วนของวงจรรออยเลอร์ที่เชื่อม  $u$  และ  $v$  จะเป็นแนวเดิน  $u - v$

**ตัวอย่างที่ 5.1** จงพิจารณาว่ากราฟ  $G$  เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่



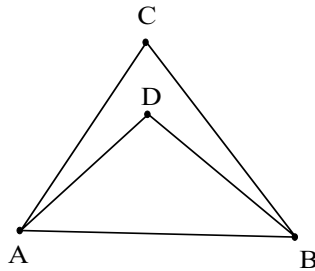
**วิธีทำ** เนื่องจากกราฟ  $G$  มีแนวเดิน  $v_2, v_3, v_5, v_6, v_4, v_5, v_2, v_4, v_3, v_1, v_2$  ซึ่งเป็นวงจรรออยเลอร์ ดังนั้น กราฟ  $G$  เป็นกราฟออยเลอร์

**ข้อสังเกต** นอกจากวงจรรออยเลอร์ที่กล่าวมาแล้ว ยังมีวงจรรออยเลอร์อื่นๆ ในกราฟ  $G$  อีกเช่น

1. วงจร  $v_3, v_2, v_5, v_6, v_4, v_5, v_3, v_1, v_2, v_4, v_3$
2. วงจร  $v_6, v_5, v_3, v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_4, v_6$



ตัวอย่างที่ 5.2 จงพิจารณาว่ากราฟต่อไปนี้ เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่



**วิธีทำ** การจะพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่นั้น จะต้องพิจารณาว่ากราฟที่กำหนดให้มีวงจรออยเลอร์หรือไม่

สังเกตว่าแนวคิดที่เป็นวงจรออยเลอร์ต้องมีคุณสมบัติสามประการ ดังนี้

1. แนวเดินนั้นผ่านเส้นเชื่อมของกราฟทุกเส้นของกราฟ
2. แนวเดินนั้นไม่ผ่านเส้นเชื่อมใดเกินหนึ่งครั้ง
3. มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน

เมื่อนักเรียนได้ทดลองพยายามสร้างแนวเดินให้มีคุณสมบัติครบทั้งสามข้อในกราฟที่กำหนด จะพบว่าไม่สามารถทำได้ แต่จะให้เหตุผลอย่างไรเพื่อยืนยันว่า กราฟนี้ไม่มีวงจรออยเลอร์ เราจะใช้แนวคิดเกี่ยวกับดีกรีของจุดยอดเพื่อช่วยอธิบายว่า กราฟนี้ไม่มีวงจรออยเลอร์ได้ดังนี้

พิจารณากราฟที่มีวงจรออยเลอร์ จากบทนิยามของวงจรออยเลอร์ วงจรนั้นจะต้องผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟโดยไม่ผ่านเส้นเชื่อมใดเกินหนึ่งครั้ง

ต่อไปจะสมมติเสมือนว่า เราเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้นของวงจรออยเลอร์ แล้วเดินทางไปตามเส้นเชื่อมแต่ละเส้นในวงจรมานั้น สังเกตว่าทุกครั้งที่เดินทางผ่านเข้าไปยังจุดยอดใดที่ยังไม่ใช่จุดสิ้นสุดของวงจร เราต้องเดินออกจากจุดนั้นด้วย

แสดงว่าจำนวนครั้งที่เดินผ่านเข้าไปยังจุดยอดแต่ละจุดจะต้องเท่ากับจำนวนครั้งที่ออกจากจุดยอดนั้น ดังนั้น จุดยอดที่ไม่ใช่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของวงจรต้องมีดีกรีเป็นจำนวนคู่

พิจารณาที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของวงจร เราเริ่มต้นเดินออกจากจุดยอดนั้น และอาจเดินทางผ่านกลับมายังจุดยอดนี้ได้อีก

ถ้ายังไม่สิ้นสุดการเดินทางเราต้องเดินออกจากจุดยอดนั้น จนกระทั่งกลับมาสิ้นสุดที่จุดยอดนี้อีกครั้ง แสดงว่าดีกรีของจุดยอดที่เป็นจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของวงจรต้องเป็นจำนวนคู่ด้วย

สรุปว่า ถ้ากราฟ  $G$  เป็นกราฟออยเลอร์แล้ว จุดยอดทุกจุดของ  $G$  ต้องมีดีกรีเป็นจำนวนคู่

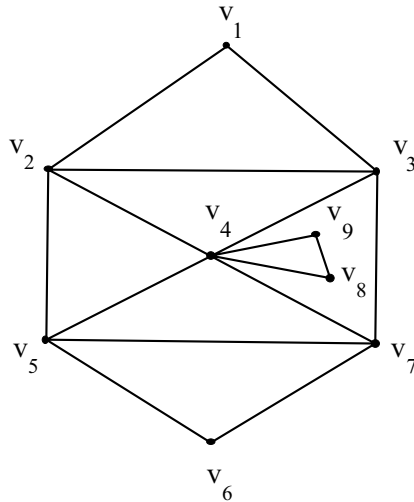
ดังนั้น ถ้ากราฟ  $G$  มีจุดยอดซึ่งมีดีกรีเป็นจำนวนคี่แล้ว กราฟ  $G$  ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

จากที่กล่าวข้างต้น ทำให้สรุปได้โดยง่ายว่า กราฟในตัวอย่างที่ 5.2 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะมีจุดยอด  $A$  และ  $B$  ที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่



การให้เหตุผลในตัวอย่างที่ 5.2 สามารถใช้ได้กับกราฟทั่วไป ทำให้สรุปได้ว่ากราฟออยเลอร์มีจุดยอดทุกจุดเป็นจุดยอดคู่เสมอ

**ตัวอย่างที่ 5.3** กำหนดกราฟเชื่อมโยง  $G$  ซึ่งจุดยอดทุกจุดเป็นจุดยอดคู่ ดังรูป  
จงแสดงวิธีหาวงจรออยเลอร์ในกราฟนี้



1. เริ่มต้น  $I$  จุดยอดใดจุดยอดหนึ่งของกราฟ  $G$  เช่น ให้  $v_1$  เป็นจุดเริ่มต้นสร้างวงจร  $C_1$  ซึ่งแทนด้วยลำดับของจุดยอด  $v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_3, v_1$
2. พิจารณาว่าวงจร  $C_1$  ผ่านเส้นเชื่อมครบทุกเส้นหรือไม่ ถ้าไม่จะเลือกจุดยอดบนวงจร  $C_1$  ที่มีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอดนั้นซึ่งไม่อยู่บนวงจร  $C_1$  เช่น เลือกจุดยอด  $v_3$  จะได้แนวเดิน  $P_1$  ซึ่งประกอบด้วยลำดับของจุดยอด  $v_3, v_2, v_4, v_9, v_8, v_4, v_3$  และแนวเดิน  $P_1$  เป็นวงจร
3. นำวงจร  $P_1$  ไปต่อกับวงจร  $C_1$  จะได้วงจร  $C_2$  ซึ่งแทนด้วยลำดับของจุดยอดดังนี้  $v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_3, v_2, v_4, v_9, v_8, v_4, v_3, v_1$
4. พิจารณาว่า  $C_2$  ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นของกราฟหรือไม่ ถ้าไม่จะต้องสร้างแนวเดิน  $P_2$  โดยเลือก  $v_4$  เป็นจุดเริ่มต้น โดยที่มีเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $v_4$  ซึ่งไม่อยู่ใน  $C_2$  จะได้วงจร  $P_2$  ซึ่งแทนด้วยลำดับของจุดยอด  $v_4, v_5, v_7, v_4$
5. สร้างวงจร  $C_3$  โดยนำวงจร  $P_2$  ไปต่อกับวงจร  $C_2$  จะได้วงจรซึ่งแทนด้วยลำดับของจุดยอด  $v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_3, v_2, v_4, v_9, v_8, v_4, v_5, v_7, v_4, v_3, v_1$  ซึ่งวงจร  $C_3$  จะเป็นวงจรออยเลอร์ของกราฟ  $G$  สำหรับกราฟใดๆ ที่จุดยอดทุกจุดเป็นจุดยอดคู่ จะสามารถสร้างวงจรออยเลอร์ได้โดยใช้แนวคิดเดียวกับการสร้างวงจรออยเลอร์ของกราฟ  $G$  ในตัวอย่างที่ 5.3

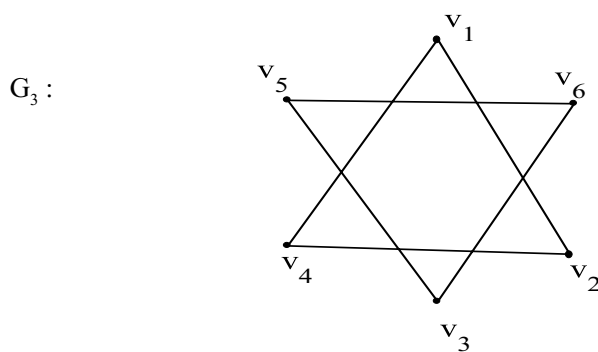
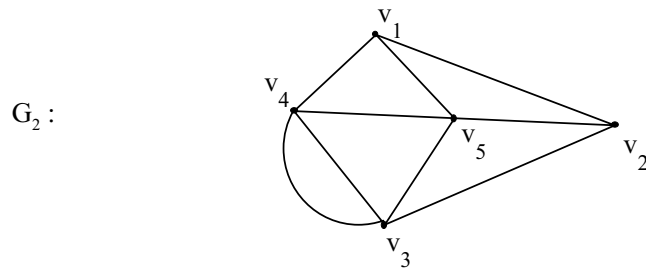
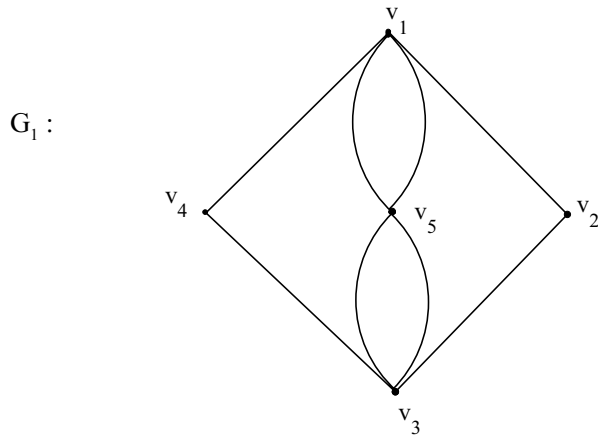




**ทฤษฎีบท** กำหนดให้  $G$  เป็นกราฟเชื่อมโย  
 $G$  จะเป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อจุดยอดทุกจุดของ  $G$  เป็นจุดยอดคู่

จากทฤษฎีบท จะทำให้สามารถตรวจสอบว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่ได้โดยง่าย

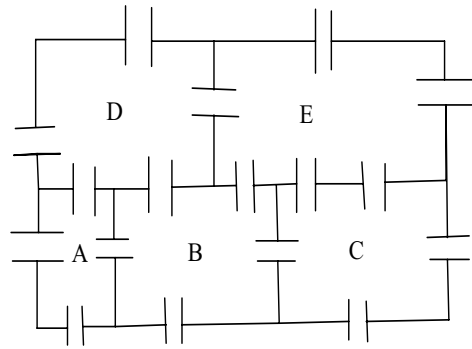
**ตัวอย่างที่ 5.4** จงพิจารณาว่ากราฟ  $G_1, G_2$  และ  $G_3$  เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่ ถ้าเป็น จงหาวงจรออยเลอร์



**วิธีทำ** กราฟ  $G_1$  เป็น กราฟออยเลอร์เพราะจุดยอดทุกจุดของ  $G_1$  เป็นจุดยอดคู่ และมีวงจรออยเลอร์ซึ่งแทนด้วยลำดับของจุดยอดดังนี้  $v_1, v_2, v_3, v_5, v_3, v_4, v_1, v_5, v_1$   
 กราฟ  $G_2$  ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะมีจุดยอด  $v_2$  ซึ่งมี  $\deg v_2 = 3$   
 กราฟ  $G_3$  ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ  $G_3$  ไม่เป็นกราฟเชื่อมโย

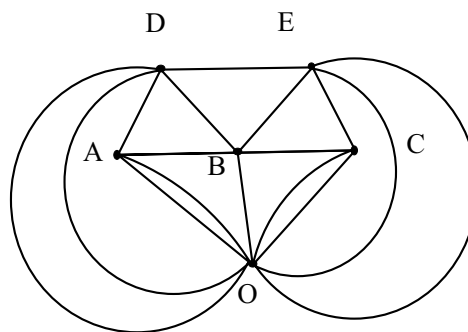


ตัวอย่างที่ 5.5 กำหนดให้รูปด้านล่าง เป็นแผนผังของบ้านหลังหนึ่ง ซึ่งมีทางเดินระหว่างห้องแต่ละห้อง และด้านนอกของตัวบ้าน เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเดินจากที่ใดที่หนึ่งในบ้านหรือด้านนอกของตัวบ้านผ่าน ประตูต่างๆ แต่ละประตูเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาที่เดิม



#### วิธีทำ

แปลงปัญหานี้เป็นกราฟโดยกำหนดให้ จุดยอด  $A, B, C, D, E$  แทนห้อง  $A, B, C, D, E$  และให้จุดยอด  $O$  แทนบริเวณนอกของบ้าน เส้นเชื่อมแต่ละเส้น แทนทางเดินระหว่างห้อง หรือทางเดินระหว่างห้องกับด้านนอกของตัวบ้านจะได้กราฟ  $G$  ดังรูป



จะเห็นว่า กราฟ  $G$  มีจุดยอด  $B, D, E$  และ  $O$  เป็นจุดยอดคี่

ดังนั้น  $G$  ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

นั่นคือ เราไม่สามารถเดินจากที่ใดที่หนึ่งในบ้านหรือด้านนอกของตัวบ้าน

ผ่านประตูต่างๆ เพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาที่เดิมได้



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ( การประยุกต์ของกราฟ )  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5  
เวลา 4 คาบ

### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถนำทฤษฎีกราฟไปใช้แก้ปัญหาได้

#### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

มีความรู้ ความเข้าใจ และนำทฤษฎีกราฟไปประยุกต์แก้ปัญหาได้

#### 2. แนวความคิดหลัก

ทฤษฎีกราฟ มีประโยชน์ในการแก้ปัญหา

#### 3. เนื้อหาสาระ

##### บทนิยาม

ค่าน้ำหนัก ( weight ) ของเส้นเชื่อม  $e$  ในกราฟ คือ จำนวนที่ไม่เป็นลบที่กำหนดไว้บนเส้นเชื่อม  $e$  กราฟถ่วงน้ำหนัก ( weighted graph ) คือ กราฟที่เส้นเชื่อมทุกเส้นมีค่าน้ำหนัก

##### บทนิยาม

วิถี ( path ) คือ แนวเดินในกราฟที่จุดยอดทั้งหมดแตกต่างกัน

วิถีที่สั้นที่สุด จากจุดยอด  $A$  ถึงจุดยอด  $Z$  ในกราฟถ่วงน้ำหนัก คือ วิถี  $A - Z$  ที่ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้นในวิถี  $A - Z$  น้อยที่สุด

##### บทนิยาม

วัฏจักร ( cycle ) คือ วงจรที่ไม่มีจุดยอดซ้ำกัน ยกเว้นจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย

ต้นไม้ ( tree ) คือ กราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร



**บทนิยาม**

กราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ  $G$  คือ กราฟที่ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมใน  $G$  กล่าวคือ กราฟ  $H$  เป็นกราฟย่อยของกราฟ  $G$  ถ้า  $V(H) \subset V(G)$  และ  $E(H) \subset E(G)$

**บทนิยาม**

ต้นไม้แผ่ทั่ว (spanning tree) คือ ต้นไม้ซึ่งเป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง  $G$  ที่บรรจุจุดยอดทุกจุดของ  $G$

**บทนิยาม**

ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด (minimal spanning tree) คือ ต้นไม้แผ่ทั่วที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของแต่ละเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

**4. กระบวนการจัดการการเรียนรู้****กิจกรรมการเรียนรู้**

- 4.1 ครูกระตุ้น นักเรียนให้เห็นความสำคัญของทฤษฎีกราฟในการนำไปแก้ปัญหา
- 4.2 ครูใ้ใบความรู้ที่ 8 และใบความรู้ที่ 9 ให้นักเรียนศึกษา
- 4.3 ครูสรุปใบความรู้ที่ 8 และใบความรู้ที่ 9 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2.5 ข้อ 1 ในหนังสือแบบเรียน
- 4.4 ครูให้นักเรียนเข้ากลุ่มๆ ละ 4 – 5 คน ศึกษาใบความรู้ที่ 10 และใบความรู้ที่ 11
- 4.5 ให้แต่ละกลุ่มมาอธิบายถึงเนื้อหาที่ได้ศึกษา ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป
- 4.6 ครูให้นักเรียนเข้ากลุ่มๆ ละ 4 – 5 คน ศึกษาใบความรู้ที่ 12 และใบความรู้ที่ 13
- 4.7 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาในใบความรู้ที่ 12 และใบความรู้ที่ 13
- 4.8 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.5 ข้อ 2 ในหนังสือแบบเรียน
- 4.9 ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ

**5. สื่อการเรียนการสอน / แหล่งการเรียนรู้ ใบความรู้ แบบฝึกทักษะ**

## 6. กระบวนการวัดและประเมินผล

สิ่งที่วัด	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
1. ด้านความรู้	<ul style="list-style-type: none"> <li>● สังเกตการตอบคำถาม</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>● ทำถูกต้องอย่างน้อย 90%</li> </ul>
2. ด้านทักษะ	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ตรวจผลงาน</li> <li>2. สังเกต</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แบบตรวจผลงาน</li> <li>2. แบบสังเกต</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● ทำถูกต้องอย่างน้อย 90%</li> </ul>
3. ด้านคุณลักษณะ	<ul style="list-style-type: none"> <li>● สังเกต</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● แบบสังเกต</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● ผ่านระดับดี 90%</li> </ul>

## 7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



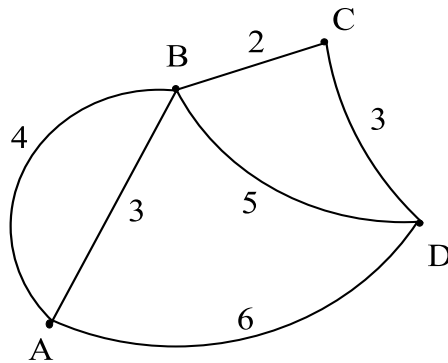
## ใบความรู้ที่ 8

### บทนิยาม

ค่าน้ำหนัก (weight) ของเส้นเชื่อม  $e$  ในกราฟ คือ จำนวนที่ไม่เป็นลบที่กำหนดไว้บนเส้นเชื่อม  $e$

กราฟถ่วงน้ำหนัก (weighted graph) คือ กราฟที่เส้นเชื่อมทุกเส้นมีค่าน้ำหนัก

### ตัวอย่างที่ 6.1



จำนวนที่กำหนดไว้บนเส้นเชื่อมดังกล่าว เรียกว่า **ค่าน้ำหนัก** ของเส้นเชื่อมนั้น และกราฟที่มีลักษณะดังรูป เรียกว่า **กราฟถ่วงน้ำหนัก**



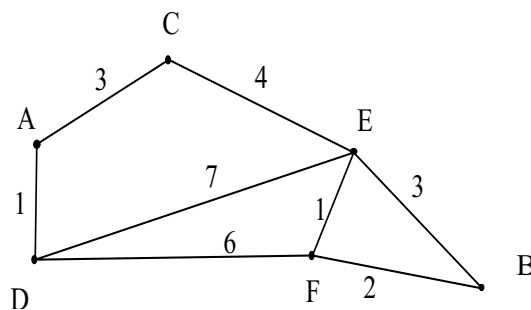
## ใบความรู้ที่ 9

### บทนิยาม

วิถี (path) คือ แนวเดินในกราฟที่จุดยอดทั้งหมดแตกต่างกัน

วิถีที่สั้นที่สุด จากจุดยอด A ถึงจุดยอด Z ในกราฟถ่วงน้ำหนัก คือ วิถี A-Z ที่ผลรวมของค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทุกเส้นในวิถี A-Z น้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 6.2 พิจารณากราฟถ่วงน้ำหนัก ดังรูป



ให้จุดแทนเมือง เส้นเชื่อมแทนถนน และค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมแทนระยะทางระหว่างเมือง ( หน่วยกิโลเมตร ) ต้องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากเมือง A ไปยังเมือง B สังเกตว่าในกรณีนี้เราไม่เลือกถนนที่ซ้ำกัน และไม่ผ่านเมืองใดเกินหนึ่งครั้ง เพราะเส้นทางดังกล่าวจะไม่ให้ระยะทางที่สั้นที่สุด

ก่อนอื่นเราหาเส้นทางจากเมือง A ไปยังเมือง B ทั้งหมดที่ไม่ผ่านเมืองซ้ำกันดังนี้

เส้นทางที่ 1 A, C, E, B

ระยะทางจากเมือง A ไปยังเมือง B ยาว  $3 + 4 + 3 = 10$  กิโลเมตร

เส้นทางที่ 2 A, C, E, F, B

ระยะทางจากเมือง A ไปยังเมือง B ยาว  $3 + 4 + 1 + 2 = 10$  กิโลเมตร

เส้นทางที่ 3 A, D, E, B

ระยะทางจากเมือง A ไปยังเมือง B ยาว  $1 + 7 + 3 = 11$  กิโลเมตร

เส้นทางที่ 4 A, D, E, F, B

ระยะทางจากเมือง A ไปยังเมือง B ยาว  $1 + 7 + 1 + 2 = 11$  กิโลเมตร

เส้นทางที่ 5 A, D, F, B

ระยะทางจากเมือง A ไปยังเมือง B ยาว  $1 + 6 + 2 = 9$  กิโลเมตร

เส้นทางที่ 6 A, D, F, E, B

ระยะทางจากเมือง A ไปยังเมือง B ยาว  $1 + 6 + 1 + 3 = 11$  กิโลเมตร

เส้นทางทั้ง 5 เรียกว่า วิถี

เส้นทางที่ 5 คือ A, D, F, B มีผลรวมระยะทางจากเมือง A ไปยังเมือง B เท่ากับ 9 กิโลเมตร

เป็นระยะทางที่สั้นที่สุด เรียกระยะทางที่สั้นที่สุดว่า วิถีที่สั้นที่สุด

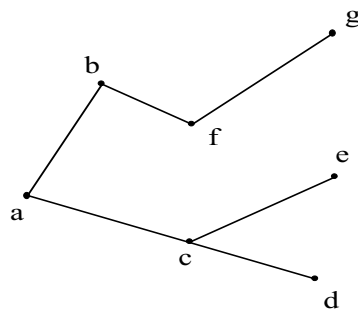


## ใบความรู้ที่ 10

### บทนิยาม

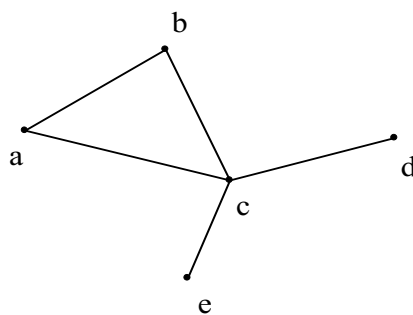
วัฏจักร (cycle) คือ วงจรที่ไม่มีจุดยอดซ้ำกัน ยกเว้นจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย  
ต้นไม้ (tree) คือ กราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

ตัวอย่างที่ 6.3 กำหนดกราฟ  $G$  ดังรูป



จะเห็นว่า กราฟ  $G$  เป็นกราฟเชื่อมโยงและไม่มีวัฏจักร  
ดังนั้น กราฟ  $G$  เป็นต้นไม้

ตัวอย่างที่ 6.4 กำหนดกราฟ  $G$  ดังรูป



จะเห็นว่า กราฟ  $G$  มี วัฏจักร คือ  $a, b, c, a$   
ดังนั้น กราฟ  $G$  ไม่เป็นต้นไม้



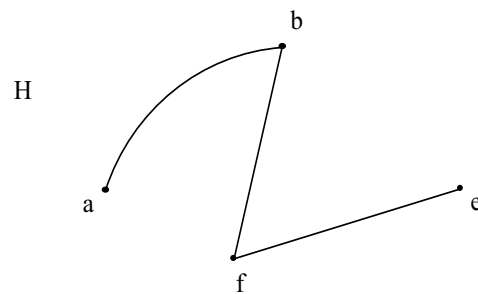
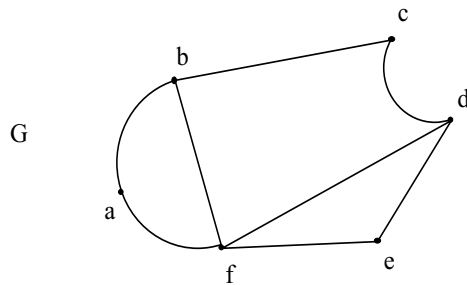


## ใบความรู้ที่ 11

### บทนิยาม

กราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ  $G$  คือ กราฟที่ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมใน  $G$  กล่าวคือ กราฟ  $H$  เป็นกราฟย่อยของกราฟ  $G$  ถ้า  $V(H) \subset V(G)$  และ  $E(H) \subset E(G)$

ตัวอย่างที่ 6.5 กำหนดกราฟ  $G$  และกราฟ  $H$  ดังรูป



จากรูป  $V(G) = \{ a, b, c, d, e, f \}$

$E(G) = \{ ab, af, bf, bc, cd, fd, fe, ed \}$

$V(H) = \{ a, b, e, f \}$

$E(H) = \{ ab, bf, fe \}$

จะเห็นว่า  $V(H) \subset V(G)$  และ  $E(H) \subset E(G)$

ดังนั้น กราฟ  $H$  เป็นกราฟย่อยของกราฟ  $G$

$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots$

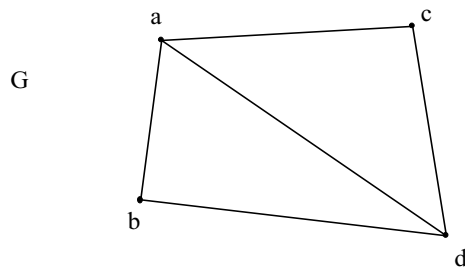


## ใบความรู้ที่ 12

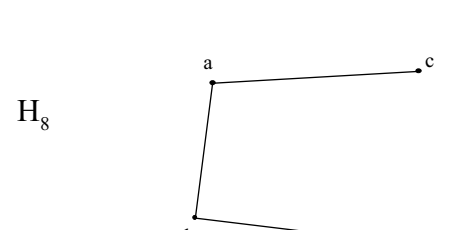
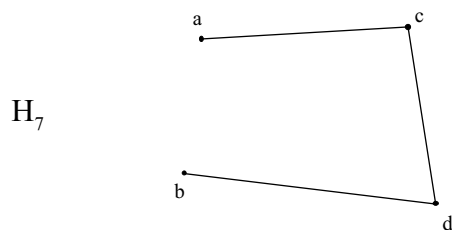
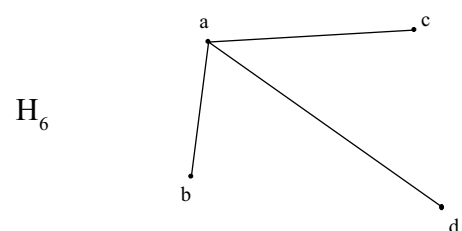
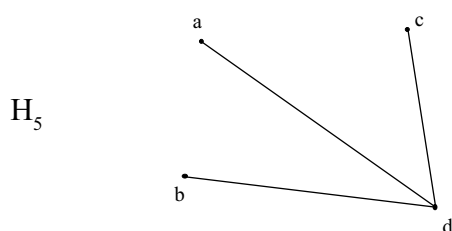
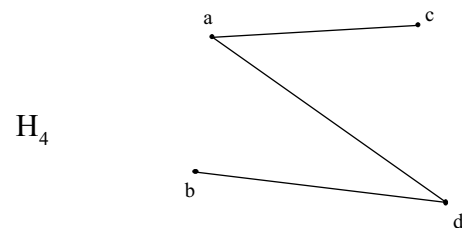
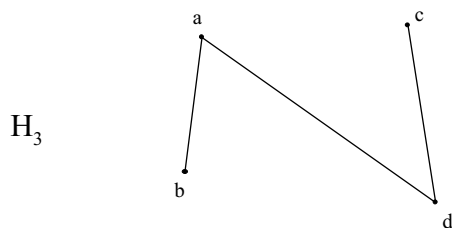
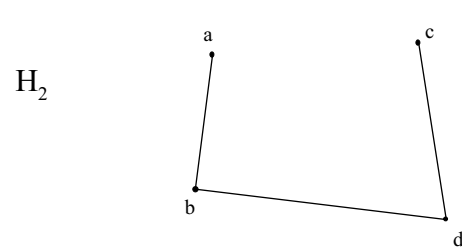
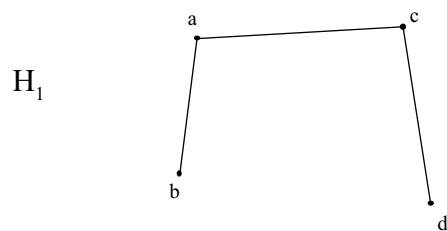
## บทนิยาม

**ต้นไม้แผ่ทั่ว (spanning tree)** คือ ต้นไม้ซึ่งเป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง  $G$  ที่บรรจุจุดยอดทุกจุดของ  $G$

ตัวอย่างที่ 6.6 กำหนดกราฟ  $G$  ดังรูป



ต้นไม้แผ่ทั่วของ  $G$  ได้แก่ กราฟ  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8$

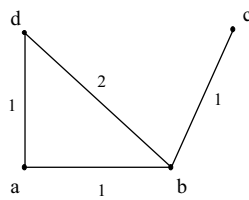


## ใบความรู้ที่ 13

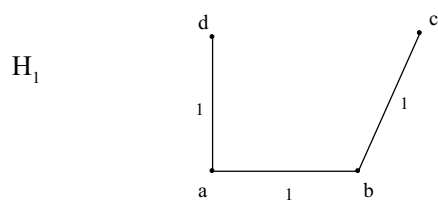
### บทนิยาม

**ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด** (minimal spanning tree) คือ ต้นไม้แผ่ทั่วที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักของแต่ละเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

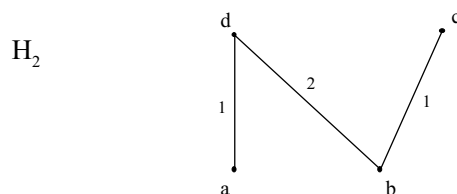
ตัวอย่างที่ 6.7 กำหนดกราฟถ่วงน้ำหนัก ดังรูป จงหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด



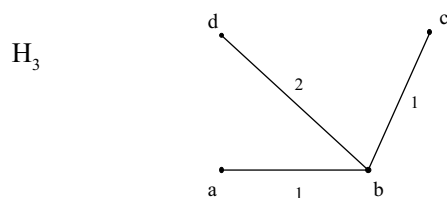
วิธีทำ หาต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟที่กำหนดให้ทั้งหมด ดังนี้



ผลรวมค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทั้งหมดของ  $H_1$  คือ  $1+1+1 = 3$



ผลรวมค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทั้งหมดของ  $H_2$  คือ  $1+2+1 = 4$



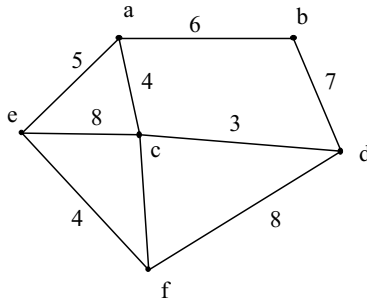
ผลรวมค่าน้ำหนักของเส้นเชื่อมทั้งหมดของ  $H_3$  คือ  $1+2+1 = 4$

ดังนั้น กราฟ  $H_1$  เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

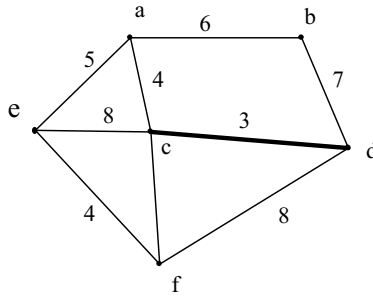


การหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด โดยการหาต้นไม้แผ่ทั่วทั้งหมดแล้วคำนวณหาผลรวมของค่าน้ำหนักของแต่ละเส้นเชื่อม หลังจากนั้นเลือกต้นไม้แผ่ทั่วที่ทำให้ผลรวมค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ดังแสดงในตัวอย่างที่ 6.7 นั้นไม่สะดวกและเสียเวลามาก ขั้นตอนวิธีการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดมีหลายวิธี

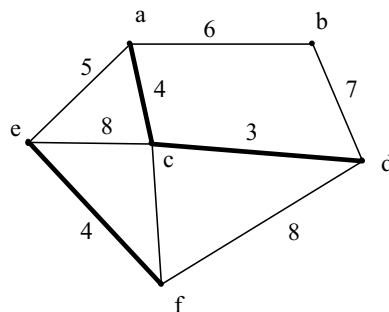
ตัวอย่างที่ 6.8 กำหนดกราฟถ่วงน้ำหนัก ดังรูป จงหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด



ขั้นที่ 1 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด ในที่นี้คือ เส้นเชื่อม cd มีน้ำหนักเท่ากับ 3



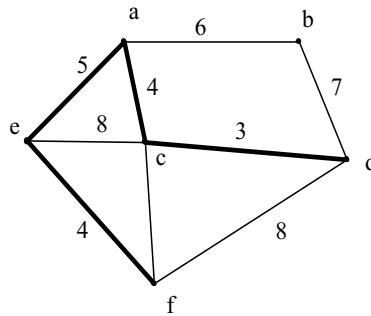
ขั้นที่ 2 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดจากเส้นเชื่อมที่เหลือและไม่ทำให้เกิดวัฏจักร ในที่นี้คือ เส้นเชื่อม ac และ ef ซึ่งมีน้ำหนักเท่ากับ 4 จะเห็นว่า เส้นเชื่อม cd , ac และ ef ไม่เป็นวัฏจักร



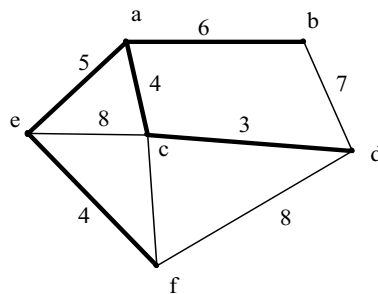
ขั้นตอนต่อไป ทำเช่นเดียวกับขั้นตอนที่ 2 จนกระทั่งได้ต้นไม้แผ่ทั่ว



ขั้นที่ 3 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักเท่ากับ 5 โดยเลือกเส้นเชื่อม ea หรือ cf เส้นใดเส้นหนึ่ง เพราะถ้าเลือกทั้งสองเส้นจะทำให้เกิดวัฏจักรในที่นี้เลือก ea



ขั้นที่ 4 เลือกเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักเท่ากับ 6 ในที่นี้คือ เส้นเชื่อม ab



จากขั้นที่ 1 ถึงขั้นที่ 4 จะได้ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดและผลรวมค่าน้ำหนักของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด คือ  $3 + 4 + 4 + 5 + 6 = 22$

$$u = u_0, e_1, u_2, e_2, u_3, e_3, \dots$$



## ผู้ดำเนินการ

### ที่ปรึกษา :

รศ.ชงทอง จันทรางศุ	เลขธิการสภาการศึกษา
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	รองเลขธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.ลำอาง หิริญญูระ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

### ผู้เรียบเรียง :

นางสาวสุวรรณ กาหยี	โรงเรียนบูรณะรำลึก	จังหวัดตรัง
--------------------	--------------------	-------------

### ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อาริสรา รัตนเพชร	หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร	
อาจารย์เอ็ดสัวัฒน์ คำมณี	
อาจารย์สุจิตา มณีชัย	
คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ	จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬารัตนาธิปไตย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพิงพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

### ผู้พิจารณารายงาน :

นายบัณฑิต ฝอยทอง	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ
------------------	----------------------------------

### ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นายวิช ตาแก้ว	หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา	ประจำกลุ่มงานฯ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ	ประจำกลุ่มงานฯ

### บรรณาธิการ :

นายวิช ตาแก้ว
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

### บรรณาธิการร่วม :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา
--------------------------

### เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา
-----------------------

