

หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน

สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

# แผนการจัดการเรียนรู้ ลำดับและอนุกรม

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Convergent sequence

Divergent sequence

common ratio

common difference

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\sum_{i=1}^n c = cn$$

$$\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์  
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์  
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษากาญจนบุรี



## คำนำ

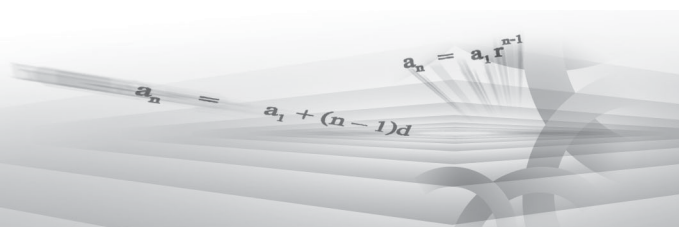
ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ่งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ลำดับและอนุกรม ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสรา รัตนพีร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

(รองศาสตราจารย์ชงทอง จันทรางศุ)  
เลขาธิการสภาการศึกษา

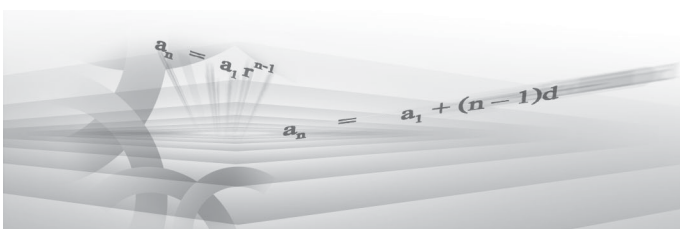


## คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

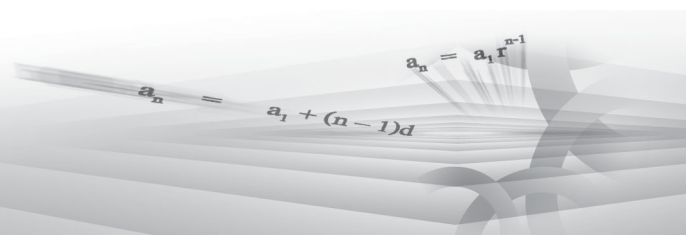
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนําร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาค ในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ชั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียน ในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน



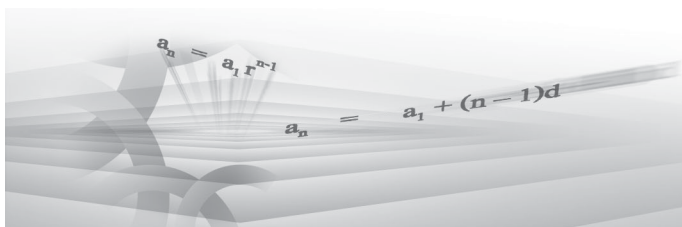
**ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน  
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**

ระดับ	เนื้อหา	จำนวน คาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบ เขียนแผนการจัดการเรียนรู้	
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาลงกรณ์ราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		7. ตรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึกและมหาวิทยาลัยราชว
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวิทยาลัยราชว
<b>รวม</b>		200		
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวิทยาลัยราชว
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และ การอินทิเกรต	40	โรงเรียนจุฬาลงกรณ์ราชวิทยาลัย จ.สตูล
	<b>รวม</b>		200	
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ)</li> <li>▪ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ)</li> <li>▪ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ)</li> </ul>		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
<b>รวม</b>		100		





เรื่อง	หน้า
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1</b>	<b>1</b>
เอกสารแนะแนวทางที่ 1.1	3
เอกสารฝึกหัดที่ 1.1	4
เอกสารแนะแนวทางที่ 1.2	5
เอกสารฝึกหัดที่ 1.2	6
เอกสารฝึกหัดที่ 1.3	7
เอกสารแนะแนวทางที่ 1.3	8
เอกสารฝึกหัดที่ 1.4	9
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2</b>	<b>10</b>
ใบความรู้ที่ 2.1	12
ใบความรู้ที่ 2.2	13
เอกสารฝึกหัดที่ 2.1	14
เอกสารฝึกหัดที่ 2.2	15
เอกสารฝึกหัดที่ 2.3	16
เอกสารฝึกหัดที่ 2.4	17
เอกสารฝึกหัดที่ 2.5	18
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3</b>	<b>19</b>
เอกสารแนะแนวทางที่ 3.1	22
เอกสารแนะแนวทางที่ 3.2	24
ใบความรู้ที่ 3.1	25
เอกสารฝึกหัดที่ 3.1	26
เอกสารฝึกหัดที่ 3.2	27
เอกสารฝึกหัดที่ 3.3	28
ใบความรู้ที่ 3.2	29
เอกสารแนะแนวทางที่ 3.3	30



เรื่อง	หน้า
เอกสารฝึกหัดที่ 3.4	32
เอกสารฝึกหัดที่ 3.5	33
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4</b>	<b>34</b>
เอกสารฝึกหัดที่ 4.1	37
ใบความรู้ที่ 4.1	38
เอกสารแนะแนวทางที่ 4.1	39
เอกสารฝึกหัดที่ 4.2	40
เอกสารแนะแนวทางที่ 4.2	41
เอกสารฝึกหัดที่ 4.3	42
ใบความรู้ที่ 4.2	43
เอกสารแนะแนวทางที่ 4.3	44
เอกสารฝึกหัดที่ 4.4	45
เอกสารแนะแนวทางที่ 4.4	46
เอกสารฝึกหัดที่ 4.5	47
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5</b>	<b>48</b>
ใบความรู้ที่ 5.1	51
ใบความรู้ที่ 5.2	52
เอกสารฝึกหัดที่ 5.1	53
เอกสารฝึกหัดที่ 5.2	54
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6</b>	<b>55</b>
ใบความรู้ที่ 6	57
เอกสารฝึกหัดที่ 6	58
<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7</b>	<b>59</b>
ใบความรู้ที่ 7.1	62
ใบความรู้ที่ 7.2	63
เอกสารฝึกหัดที่ 7.1	64
เอกสารฝึกหัดที่ 7.2	65





## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง ลำดับและอนุกรม  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
เวลา 5 ชั่วโมง

### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนสามารถเขียนลำดับแบบแจกแจง และเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด

#### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของลำดับได้
- 1.2 บอกได้ว่าลำดับที่กำหนดเป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์
- 1.3 เขียนลำดับในรูปแจกแจงเมื่อกำหนดพจน์ทั่วไปให้ได้
- 1.4 เขียนพจน์ทั่วไปของลำดับเมื่อกำหนดลำดับในรูปแจกแจงให้ได้

#### 2. แนวความคิดหลัก

- 2.1 ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก  $n$  ตัวแรก หรือ โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
- 2.2 ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก  $n$  ตัวแรก เรียกว่า ลำดับจำกัด
- 2.3 ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกว่า ลำดับอนันต์

#### 3. เนื้อหาสาระ

##### ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

**บทนิยาม** ลำดับคือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก  $n$  จำนวนแรก หรือ โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

- ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก  $n$  จำนวนแรก เรียกว่า ลำดับจำกัด  
ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกว่า ลำดับอนันต์

#### 4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

- 4.1 ทบทวนเกี่ยวกับความหมายของฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
- 4.2 ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มๆละ 4 คน ช่วยกันหาโดเมนและเรนจ์จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ ในเอกสารแนบแนวทางที่ 1.1 ครูอธิบายความหมายของลำดับ การเขียนลำดับและชนิดของลำดับ
- 4.3 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะเรื่องลำดับ จากเอกสารฝึกหัดที่ 1.1
- 4.4 ครูและนักเรียนช่วยกันหาคำตอบในเอกสารแนบแนวทางที่ 1.2 พร้อมทั้งช่วยกันสรุปการเขียนลำดับแบบแจกแจง และแสดงวิธีหาคำตอบของตัวอย่าง

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$





- 4.5 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะเรื่องลำดับ จากเอกสารฝึกหัดที่ 1.2 และ 1.3
- 4.6 ครูและนักเรียนช่วยกันหาคำตอบในเอกสารแนวทางการที่ 1.3 พร้อมทั้งช่วยกันสรุปการเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับ และแสดงวิธีหาคำตอบของตัวอย่างที่ 1 ถึง 5
- 4.7 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะเรื่องลำดับ จากเอกสารฝึกหัดที่ 1.4
- 4.8 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบเรื่องลำดับ

### 5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 ห้องสมุดโรงเรียน
- 5.2 เอกสารแนวทางการที่ 1.1 ถึง 1.3
- 5.3 เอกสารฝึกหัดที่ 1.1 ถึง 1.4
- 5.4 หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ชั้น ม. 6

### 6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจสอบเอกสารฝึกหัด 2. ทดสอบ	1. เอกสารฝึกหัด 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 % 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจสอบผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	● ผ่านระดับอย่างน้อย 90%
3. ด้านคุณลักษณะ	● สังเกต	● แบบสังเกต	● ผ่านระดับอย่างน้อย 90%

### 7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

### 8. กิจกรรมเสนอแนะ

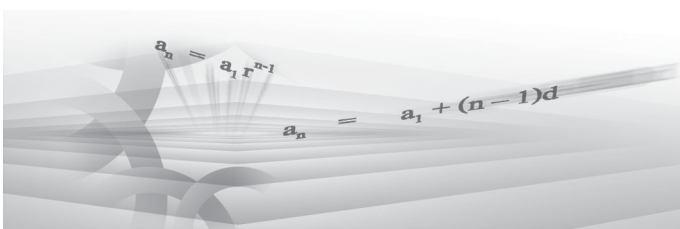
.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ .....



### เอกสารแนะแนวทางที่ 1.1

**คำชี้แจง** จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงเขียนข้อความในตารางให้สมบูรณ์

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์	เขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน	โดเมนเป็นเซตของ
1. $\{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7)\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1, 3, 5, 7\}$	1, 3, 5, 7	จำนวนเต็มบวก 4 ตัวแรก
2. $\{(1,1), (2,4), (3,27), \dots\}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$	$\{1, 4, 27, \dots\}$	1, 4, 27, ...	จำนวนเต็มบวก
3. $f(x) = x+1, x = 1,2,3,\dots,10$				
4. $f(x) = 2x-3, x = 1,2,3,4$				
5. $f(x) = x^2, x = 1,2,3,\dots,n,\dots$				
6. $f(x) = 2x^2-1, x = 1,2,3,4,5$				
7. $f(x) = x^2+2x-1, x = 1,2,3,\dots$				
8. $f(x) = x^3, x = 1,2,3,\dots$				
9. $f(x) = a_x, x = 1,2,3,\dots,n$				
10. $f(x) = a_x, x = 1,2,3,\dots,n,\dots$				

จากตารางข้างต้นนี้ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นตัวอย่างของลำดับ

ซึ่งสรุปได้ว่า ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก  $n$  ตัวแรก เรียกว่า.....

และฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกว่า.....

และอาจนิยามลำดับได้ดังนี้

**บทนิยาม** ลำดับ คือ .....

.....

.....

.....

.....

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$



## เอกสารฝึกหัดที่ 1.1

1. จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) กำหนดให้  $a_n = 2n+5$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, 12$

โดเมน คือ..... เรนจ์ คือ.....

ลำดับ คือ..... เป็นลำดับ.....

2) กำหนดให้  $a_n = \frac{n}{n+1}$

โดเมน คือ..... เรนจ์ คือ.....

ลำดับ คือ..... เป็นลำดับ.....

2. จงเขียนโดเมน เรนจ์และลำดับจากฟังก์ชันที่กำหนดให้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์	ลำดับ
1) $\{(1,5),(2,7),(3,10),(4,15)\}$			
2) $\{(x,y) \mid y = 8x+3, x = 1,2,3,\dots\}$			
3) $f(x) = 2x^2+1, x = 1,2,3,\dots, 12$			
4) $f(x) = 2 x +1, x = 1,2,3,\dots,10$			
5) $f(x) = x^5-1, x = 1,2,3, \dots$			
6) $a_n = 10^n, n = 1,2,3,\dots,10$			
7) $a_n = n^2+2n-3, n = 1,2,3,\dots$			
8) $a_n =  n^3  +  n -4$			
9) $a_n = \sqrt{n^2-1}$			
10) $a_n = \frac{2n}{n-5}$			

3. ลำดับที่กำหนดให้ในข้อต่อไปนี้ เป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ พร้อมทั้งให้เหตุผล

1)  $1, 2, 3, \dots, 10$  เป็นลำดับ.....เพราะ.....

2)  $5, 10, 15, \dots, 5n, \dots$  เป็นลำดับ.....เพราะ.....

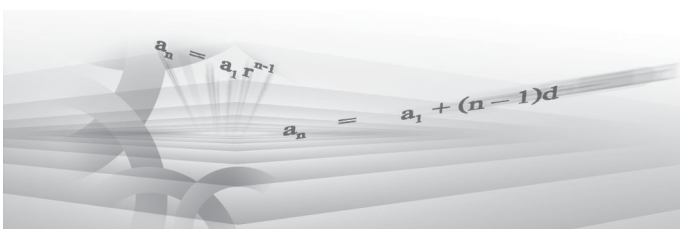
3)  $-2, -1, 0, 1, 2$  เป็นลำดับ.....เพราะ.....

4)  $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$  เป็นลำดับ.....เพราะ.....

5)  $a_n = 2^n, n = 1,2,3,\dots,100$  เป็นลำดับ.....เพราะ.....

6)  $a_n = \frac{1}{n^2}, n = 1,2,3,\dots,25$  เป็นลำดับ.....เพราะ.....

7)  $a_n = \frac{n}{n^2+2n-1}$  เป็นลำดับ.....เพราะ.....





## เอกสารแนะแนวทางที่ 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนพจน์ต่างๆ ของลำดับ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้

$a_n =$ พจน์ทั่วไป	$a_1 =$ พจน์ที่ 1	$a_2 =$ พจน์ที่ 2	$a_3 =$ พจน์ที่ 3	$a_4 =$ พจน์ที่ 4
1) $3n+1$	$3(1)+1 = 4$	$3(2)+1 = 7$	$3(3)+1 = 10$	$3(4)+1 = 13$
2) $8n-3$	$8(1)-3 = 5$	$8(2)-3 = 13$	$8(3)-3 = 21$	
3) $n^2$	$(1)^2 = 1$	$(2)^2 = 4$		
4) $2n^2-1$	$2(1)^2-1 = 1$			
5) $n^2-2n+1$				
6) $n^3$				
7) $\sqrt{n}$				
8) $\frac{1}{n}$				
9) $\frac{n}{n+1}$				
10) $\frac{n^2}{n+2}$				

สรุป การเขียนลำดับแบบแจกพจน์

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับ ต่อไปนี้

$$1) a_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$2) a_n = 2(n+1)$$

$$3) a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$4) a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน 5 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

$$1) a_n = \frac{n}{2n+1}$$

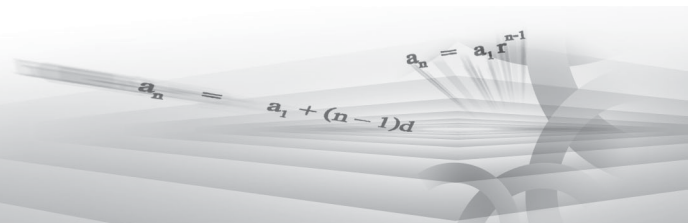
$$2) a_n = (-1)^n$$

$$3) a_n = 4n-2$$

$$4) a_n = \sin^n \theta$$

$$5) a_n = (-1)^n(2n-1)$$

$$6) a_n = n[1+(-1)^n]$$





## เอกสารฝึกหัดที่ 1.2

1. จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

$$1) a_n = 2n$$

$$2) a_n = 4n + 1$$

$$3) a_n = 2n^2$$

$$4) a_n = n^2 - 1$$

$$5) a_n = \frac{3n - 1}{2}$$

$$6) a_n = (-1)^{n+1}$$

$$7) a_n = \frac{n + 1}{2n - 1}$$

$$8) a_n = n^2 + 2n$$

2. จงเขียน 5 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

$$1) a_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

$$2) a_n = \frac{1}{n^2 + 2}$$

$$3) a_n = n + (-1)^n$$

$$4) a_n = n(n - 1)$$

$$5) a_n = 2n + 5$$

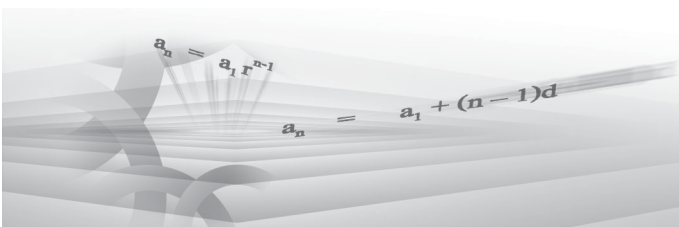
$$6) a_n = \frac{n}{n + 1}$$

$$7) a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$$

$$8) a_n = \frac{n^2 + 2n - 1}{n}$$

$$9) a_n = \frac{2n + 1}{2^n}$$

$$10) a_n = \frac{n^2 + 2n}{2n - 1}$$





### เอกสารฝึกหัดที่ 1.3

1. จงเขียน 5 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

$$1) a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$$

$$2) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

$$3) a_n = \frac{n^2 + 2n - 1}{n}$$

$$4) a_n = (-1)^{n-1} \left[ \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} \right]$$

2. จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้แล้วเขียนลำดับนี้โดยการแจงพจน์

$$1) a_n = (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{3} \right)^n$$

$$2) a_n = n \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$3) a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$4) a_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

3. จงเขียน 5 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

$$1) a_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & ; \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \\ \frac{n+1}{2} & ; \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก} \end{cases}$$

$$2) a_n = \begin{cases} 1 & ; \text{เมื่อ } n=1 \\ \frac{a_{n-1}}{2} & ; \text{เมื่อ } n \geq 2 \end{cases}$$

4. จงเขียนพจน์ทั่วไป และ 4 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

$$1) \{ (x,y) \mid y = 2x-1, x \in \mathbb{I}^+ \}$$

$$2) \{ (x,y) \mid y = \log 10^x, x \in \mathbb{I}^+ \}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$



### เอกสารแนะแนวทางที่ 1.3

คำชี้แจง จงเขียนพจน์ต่างๆ ของลำดับ จากลำดับจำกัดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ลำดับ	$a_1 =$ พจน์ที่ 1	$a_2 =$ พจน์ที่ 2	$a_3 =$ พจน์ที่ 3	$a_n =$ พจน์ทั่วไป
1) 3, 4, 5	$3 = 1 + 2$	$4 = 2 + 2$	$5 = 3 + 2$	$n + 2$
2) 2, 4, 6	$2 = 2(1)$	$4 = 2(2)$	$6 = 2(3)$	$2n$
3) 4, 7, 10	$4 = 3(1) + 1$			$3n + 1$
4) 1, 4, 9				$n^2$
5) 1, 8, 27				
6) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$				
7) 2, 6, 12				
8) 0, 3, 8				
9) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$				
10) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$				

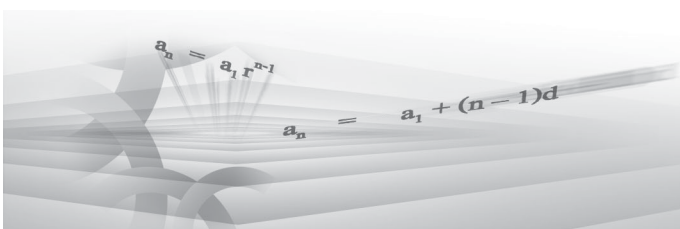
ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้  $1, 5, 13, 29, \dots$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด  $1, 3, 9, 27$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด  $0.4, 0.04, 0.004, 0.0004$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด  $21, 3, \frac{3}{7}, \frac{3}{7^2}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด  $\frac{3}{7}, \frac{5}{10}, \frac{7}{13}, \frac{9}{16}$





### เอกสารฝึกหัดที่ 1.4

จงเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

1) 1, 5, 9, 13, 17

2) 1, 8, 27, 64, 125

3) 5, 7, 9, 11, 13

4) 3, 5, 7, 9, 11

5) 3, 4, 5, 6, 7

6) 2, 4, 6, 8, 10

7) 4, 7, 10, 13, 16

8) 2, 6, 12, 20, 30

9) 5, 10, 15, 20, 25

10) 5, 1, -3, -7, -11

11) 1, -8, 27, -64

12) -4, 7, -10, 13, -16

13) 1, 3, 7, 15

14) 1, 5, 13, 29

15)  $1, -\sqrt{4}, \sqrt{9}, -\sqrt{16}$

16)  $0, \frac{2}{6}, \frac{6}{12}, \frac{12}{20}$

17)  $-1, \frac{2}{5}, \frac{3}{15}, \frac{4}{29}, \frac{5}{47}$

18) 7, 97, 997, 9997

$a_n = a_1 + (n-1)d$   
 $a_n = a_1 r^{n-1}$





## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง ลำดับและอนุกรม  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
เวลา 6 ชั่วโมง

### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนสามารถเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต และหาพจน์ต่างๆ ของลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต

### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของลำดับเลขคณิตได้
- 1.2 บอกความหมายของลำดับเรขาคณิตได้
- 1.3 เขียนพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตได้
- 1.4 หาพจน์ต่างๆ ของลำดับเลขคณิตได้
- 1.5 เขียนพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิตได้
- 1.6 หาพจน์ต่างๆ ของลำดับเรขาคณิตได้

### 2. แนวความคิดหลัก

- 2.1 ลำดับเลขคณิต คือลำดับซึ่งผลต่างได้จากพจน์ที่  $n+1$  ลบด้วยพจน์ที่  $n$  มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่า ผลต่างร่วม (common difference)
- 2.2 ลำดับเรขาคณิต คือลำดับซึ่งอัตราส่วนร่วมของพจน์ที่  $n+1$  ต่อพจน์ที่  $n$  มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (common ratio)

### 3. เนื้อหาสาระ

#### ลำดับเลขคณิต

**บทนิยาม** ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่  $n + 1$  ลบด้วยพจน์  $n$  มีค่าคงตัว เรียกค่าคงตัวนี้ว่า ผลต่างร่วม เขียนแทนด้วย  $d$

กำหนด  $a_1$  เป็นพจน์แรกของลำดับ และ  $d$  เป็นผลต่างร่วม ดังนั้นจะได้

รูปทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n-1)d$

พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ  $a_n = a_1 + (n-1)d$

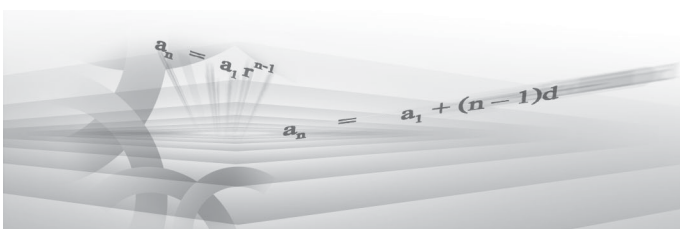
#### ลำดับเรขาคณิต

**บทนิยาม** ลำดับเรขาคณิต คือลำดับที่มีอัตราส่วนของพจน์ที่  $n + 1$  ต่อพจน์ที่  $n$  มีค่าคงตัว เรียกค่าคงตัวนี้ว่า อัตราส่วนร่วม เขียนแทนด้วย  $r$

กำหนด  $a_1$  เป็นพจน์แรกของลำดับ และ  $r$  เป็นอัตราส่วนร่วม ดังนั้นจะได้

รูปทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ  $a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots, a_1 r^{n-1}$

และพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ  $a_n = a_1 r^{n-1}$



#### 4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

- 4.1 ทบทวนความหมายของลำดับ ชนิดของลำดับ การเขียนลำดับในรูปแจกพจน์ และพจน์ทั่วไปของลำดับ
- 4.2 ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มๆ ละ 4 คน ครูแจกใบความรู้ที่ 2.1 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษา ให้นักเรียนอภิปรายและซักถามข้อสงสัย ครูอธิบายเพิ่มเติม
- 4.3 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะเรื่องลำดับเลขคณิต จากเอกสารฝึกหัดที่ 2.1 และ 2.2
- 4.4 ครูแจกใบความรู้ที่ 2.2 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษา ให้นักเรียนอภิปรายและซักถามข้อสงสัย ครูอธิบายเพิ่มเติม
- 4.5 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะเรื่องลำดับเรขาคณิต จากเอกสารฝึกหัดที่ 2.3 ถึง 2.5
- 4.6 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเกี่ยวกับลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
- 4.7 ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาเรื่องลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตเพิ่มเติมจากหนังสือคู่มือวิชาคณิตศาสตร์
- 4.8 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบเรื่องลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

#### 5. แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดโรงเรียน
2. ใบความรู้ที่ 2.1 และ 2.2
3. เอกสารฝึกหัดที่ 2.1 ถึง 2.5
4. หนังสือคู่มือวิชาคณิตศาสตร์ชั้น ม. 6

#### 6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจเอกสารฝึกหัด 2. ทดสอบ	1. เอกสารฝึกหัด 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 % 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 80 %
2. ด้านทักษะ	● ตรวจผลงาน	● แบบตรวจผลงาน	● ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	● สังเกต	● แบบสังเกต	● ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90%

#### 7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

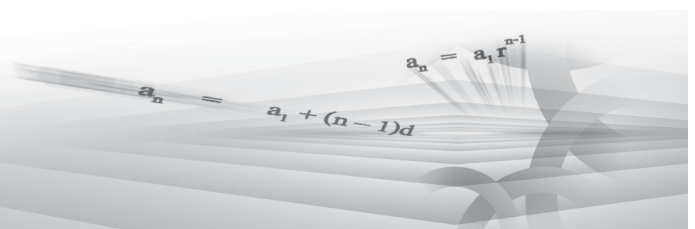
#### 8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

ลงชื่อ .....





## ใบความรู้ที่ 2.1

### ลำดับเลขคณิต

**บทนิยาม** ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่  $n + 1$  ลบด้วยพจน์  $n$  มีค่าคงตัว เรียกค่าคงตัวนี้ว่า ผลต่างร่วม เขียนแทนด้วย  $d$

กำหนด  $a_1$  เป็นพจน์แรกของลำดับ และ  $d$  เป็นผลต่างร่วม ดังนั้นจะได้

รูปทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n - 1)d$

พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ  $a_n = a_1 + (n - 1)d$

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาพจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิต  $1, 4, 7, \dots$

**วิธีทำ** เพราะว่า  $a_1 = 1, d = 3, n = 30$

$$\begin{aligned} \text{จาก } a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_{30} &= 1 + (30 - 1)3 \\ &= 1 + (29)(3) \\ &= 88 \end{aligned}$$

$\therefore$  พจน์ที่ 30 ของลำดับนี้คือ 88

**ตัวอย่างที่ 2** ลำดับเลขคณิต  $5, 9, 13, \dots, 101$  มีกี่พจน์

**วิธีทำ** เพราะว่า  $a_1 = 5, d = 4, a_n = 101$

$$\begin{aligned} \text{จาก } a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 101 &= 5 + (n - 1)(4) \\ 101 &= 5 + 4n - 4 \\ 4n &= 101 - 1 \\ n &= \frac{100}{4} = 25 \end{aligned}$$

$\therefore$  ลำดับนี้มี 25 พจน์

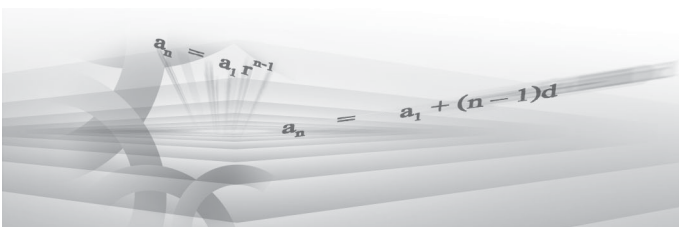
**ตัวอย่างที่ 3** จำนวนเต็มระหว่าง 100 และ 500 ที่ 9 หารลงตัวมีกี่จำนวน

**วิธีทำ** จำนวนเต็มระหว่าง 100 และ 500 ที่ 9 หารลงตัว ได้แก่  $108, 117, 126, \dots, 495$

จะได้  $a_1 = 108, d = 9, a_n = 495$  และลำดับนี้มี  $n$  พจน์

$$\begin{aligned} \text{จาก } a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 495 &= 108 + (n - 1)(9) \\ 9n &= 396 \\ n &= 44 \end{aligned}$$

$\therefore$  จำนวนเต็มระหว่าง 100 และ 500 ที่ 9 หารลงตัวมี 44 จำนวน



## ใบความรู้ที่ 2.2

### ลำดับเรขาคณิต

**บทนิยาม** ลำดับเรขาคณิต คือลำดับที่มีอัตราส่วนของพจน์ที่  $n + 1$  ต่อพจน์ที่  $n$  มีค่าคงตัว เรียกค่าคงตัวนี้ว่า อัตราส่วนร่วม เขียนแทนด้วย  $r$

กำหนด  $a_1$  เป็นพจน์แรกของลำดับ และ  $r$  เป็นอัตราส่วนร่วม ดังนั้นจะได้

รูปทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ  $a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots, a_1 r^{n-1}$

และพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ  $a_n = a_1 r^{n-1}$

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต  $1, 5, 25, 125, \dots$

**วิธีทำ** เพราะว่า  $a_1 = 1, r = 5$   
จาก  $a_n = a_1 r^{n-1}$   
 $= 1 \times 5^{n-1}$   
 $= 5^{n-1}$

**ตัวอย่างที่ 2** จงหาพจน์ที่ 6 ของลำดับเรขาคณิต  $4, 20, 100, \dots$

**วิธีทำ** เพราะว่า  $a_1 = 4, r = 5, n = 6$   
จาก  $a_n = a_1 r^{n-1}$   
 $= 4 \times 5^{6-1}$   
 $= 4 \times 5^5 = 125,000$

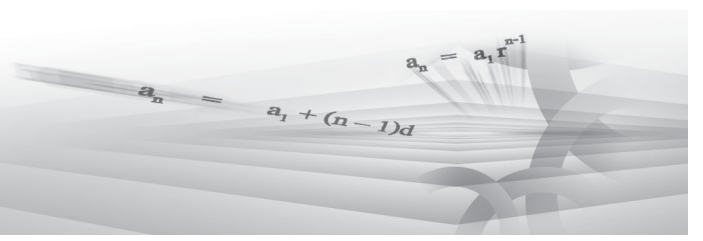
$\therefore$  พจน์ที่ 6 ของลำดับนี้ คือ 125000

**ตัวอย่างที่ 3** กำหนดลำดับเรขาคณิตซึ่งมีพจน์ที่ 4 เท่ากับ -24 และพจน์ที่ 9 เท่ากับ 768 จงหาพจน์ที่  $n$

**วิธีทำ**  $a_4 = a_1 r^3 = -24 \dots (1)$   
 $a_9 = a_1 r^8 = 768 \dots (2)$   
 $(2) \div (1); r^5 = -32 = (-2)^5$   
 $r = -2$   
แทนค่า  $r$  ใน (1) จะได้  $a_1 = 3$   
 $\therefore a_n = 3(-2)^{n-1}$

**ตัวอย่างที่ 4** ถ้าลำดับเรขาคณิตมี  $a_3 = 12, r = -2, a_n = 768$  จงหา  $n$

**วิธีทำ**  $a_3 = a_1 r^2 = a_1 (-2)^2 = 12$   
 $a_1 = 3$   
 $a_n = 3(-2)^{n-1} = 768$   
 $(-2)^{n-1} = 256 = (-2)^8$   
นั่นคือ  $n-1 = 8$  และ  $n = 9$





## เอกสารฝึกหัดที่ 2.1

1. จงหาผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

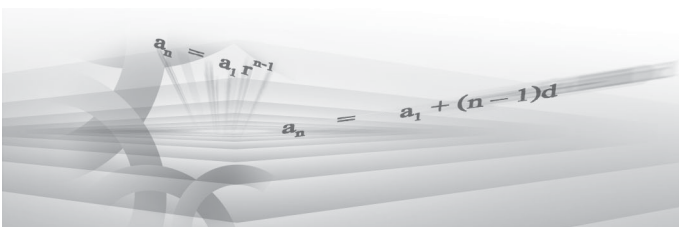
- |                         |                        |
|-------------------------|------------------------|
| 1) 4, 9, 14, ...        | 2) 5, 9, 13, ...       |
| 3) $x, -2x, -5x, \dots$ | 4) 5, 8, 11, 14, ...   |
| 5) 9, 11, 13, 15, ...   | 6) 3, 8, 13, ...       |
| 7) 5, 14, 23, ...       | 8) 105, 111, 117, ...  |
| 9) 203, 210, 217, ...   | 10) 102, 105, 108, ... |

2. จงหาพจน์ที่  $n$  ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

- |                       |                      |
|-----------------------|----------------------|
| 1) 5, 7, 9, 11, ...   | 2) 3, 5, 7, 9, ...   |
| 3) 1, 2, 3, 4, ...    | 4) 2, 6, 12, 20, ... |
| 5) 1, 18, 27, 64, ... | 6) 6, 3, 0, -3, ...  |

3. จงหาพจน์ที่กำหนดให้ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

- พจน์ที่ 10 ของลำดับเลขคณิต 1, 6, 11, 16, ...
- พจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิต 4, -1, -6, -11, ...
- พจน์ที่ 21 ของลำดับเลขคณิต 4, 9, 14, ...
- พจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิต 3, 8, 13, ...
- พจน์ที่ 9 ของลำดับเลขคณิต 5, 14, 23, ...



## เอกสารฝึกหัดที่ 2.2

1. ถ้ากำหนดลำดับเลขคณิต  $1, 4, 7, 10, \dots$  จงหา
  - 1) พจน์ที่ 30
  - 2) พจน์ทั่วไป
  - 3) 127 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับ
  
2. ถ้ากำหนดลำดับเลขคณิต  $4, 9, 14, 19, \dots$  จงหา
  - 1) พจน์ที่ 7
  - 2) พจน์ทั่วไป
  - 3) 64 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับ
  
3. จงหาค่า  $n$  จากลำดับเลขคณิตต่อไปนี้
  - 1)  $2, 5, 8, \dots$  และ  $a_n = 131$
  - 2)  $19, 14, 9, \dots$  และ  $a_n = -251$
  
4. ถ้า  $p, 5p, 6p + 9$  เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงหาค่าของ  $p$
  
5. กำหนด  $13, a, b, 30$  เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงหา  $a + b$
  
6. ลำดับเลขคณิต  $5, 14, 23, \dots, 239$  มีทั้งหมดกี่พจน์
  
7. ถ้าพจน์ที่  $n$  ของลำดับ  $3b + 2c, 5b + c, 7b, \dots$  เป็น  $17b - 5c$  แล้วจงหาค่าของ  $n$
  
8. ระหว่าง 100 และ 600 มีจำนวนที่ 6หารแล้วเหลือเศษ 3 กี่จำนวน

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

### เอกสารฝึกหัดที่ 2.3

1. จงหาอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

ข้อที่	ลำดับเรขาคณิต	อัตราส่วนร่วม	ข้อที่	ลำดับเรขาคณิต	อัตราส่วนร่วม
1)	1, 1, 1, ...		6)	2, 0.2, 0.02, 0.002, ...	
2)	-3, 3, -3, 3, ...		7)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$	
3)	1, 3, 9, 27, ...		8)	$-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$	
4)	3, -6, 12, -24, ...		9)	$\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \dots$	
5)	2, 4, 8, 16, ...		10)	k, k, k, k, ...	

2. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

1) 1, 2, 4, ...

2) -3, -6, -12, ...

3)  $10, -5, \frac{5}{2}, \dots$

4)  $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{25}{4}, \dots$

3. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิต

1, 2, 4, ...

4. จงหาพจน์ที่ 6 ของลำดับเรขาคณิต

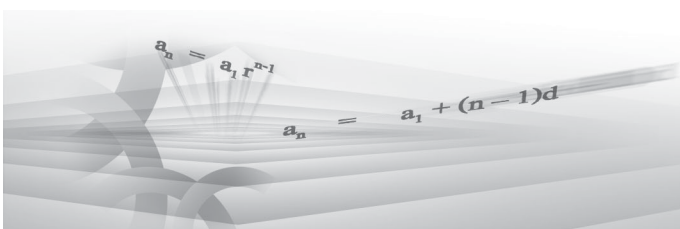
1, 3, 9, ...

5. จงหาพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิต

128, 64, 32, ...

6. -486 เป็นพจน์ที่เท่าไรของลำดับเรขาคณิต

18, -54, 162, ...



## เอกสารฝึกหัดที่ 2.4

- ถ้า  $4, a, 9$  เป็นจำนวนจริง 3 จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต จงหา  $a$
- จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่างสองจำนวนที่กำหนดให้ เพื่อให้จำนวนทั้งสามเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต
  - $5$  และ  $20$
  - $-7$  และ  $-189$
- กำหนดลำดับเรขาคณิต  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  จงหาพจน์ทั่วไป, พจน์ที่ 20, พจน์ที่ 50 จากสิ่งที่กำหนดให้
  - $a_1 = 6, r = 3, a_5 = ?$
  - $a_1 = 5, r = 2, a_7 = ?$
- ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งมี 4 พจน์ ถ้าพจน์แรกและพจน์สุดท้ายเท่ากับ 10 และ 1250 จงหาสองพจน์ตรงกลางของลำดับ
- เมื่อนำจำนวนจริงจำนวนหนึ่งไปบวกกับแต่ละจำนวนต่อไปนี้คือ 10, 25 และ 55 แล้วผลบวกที่ได้จะเป็นพจน์สามพจน์เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาจำนวนที่นำไปบวก

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

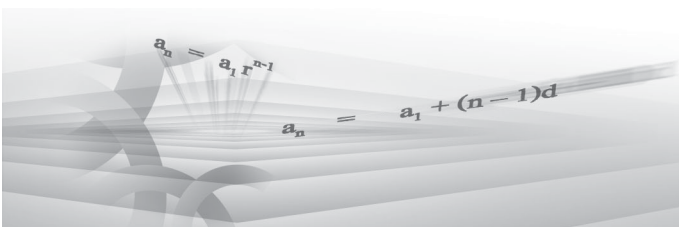
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$





## เอกสารฝึกหัดที่ 2.5

- กำหนดพจน์ที่ 17 และพจน์ที่ 29 ของลำดับเลขคณิตเป็น 47 และ 119 จงหาพจน์ที่ 61 ของลำดับนี้
- สามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งเป็น 215 , 202 , 189 จงหาว่า  $-123$  เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับนี้
- ครอบครัวหนึ่งมีบุตร 5 คน ถ้าอายุของเขาเหล่านี้เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดยที่อายุของลูกคนโตต่างกับอายุของลูกคนสุดท้องอยู่ 44 ปี และผลบวกของอายุแต่ละคนที่เหลือเป็น 84 จงหาอายุของบุตรทุกคน
- จำนวนจริงสามจำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดยมีพจน์กลางเป็น 9 และผลบวกของกำลังสองของแต่ละพจน์เป็น 341 จงหาลำดับเลขคณิตนี้
- จำนวนเต็มสามจำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ผลบวกของพจน์แรกกับพจน์ที่ 3 เท่ากับ 28 และผลคูณของพจน์แรกกับพจน์ที่ 2 เท่ากับ 42 จงหาลำดับนี้
- กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวของด้านเรียงจากน้อยไปมากเป็นลำดับเลขคณิต จงหาอัตราส่วนของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมนี้
- จำนวนจริงสี่จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ผลบวกของทั้ง 4 จำนวนนี้เท่ากับ 26 และผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ 214 จงหาลำดับเลขคณิตนี้
- ให้  $a_n$  เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต โดยที่  $a_8 - a_7 = 2a_4$  และ  $a_4 + a_2 - a_6 = 14$  จงหาพจน์ที่ 15 ของลำดับนี้
- ในปีการศึกษา 2547 จำนวนนักเรียนของโรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัยมี 3500 คน ซึ่งในแต่ละปีจะมีจำนวนนักเรียนเพิ่มขึ้น 1% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด จงหาว่าในปีการศึกษา 2554 โรงเรียนนี้จะมีจำนวนนักเรียนเท่าใด
- ให้ มกรา , มีนา และตุลา มีอายุ 5 , 9 และ 15 ปีตามลำดับ จงหาว่าอีกกี่ปีข้างหน้าอายุของคนทั้งสามจะเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต
- ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่งมีทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก ผลบวกของพจน์ที่ 1 พจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 91 ผลคูณของพจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 4 มีค่าเท่ากับ 81 จงหาลำดับนี้
- ในลำดับเลขคณิต 3 , 7 , 11 , 15 , ... ถ้านำพจน์ที่ 1 , 7 และ  $x$  มาเรียงกันจะได้ลำดับใหม่เป็นลำดับเรขาคณิต จงหาค่า  $x$
- ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์แรกเป็น 1 และมีผลต่างร่วมเป็นจำนวนจริงบวก ถ้าพจน์ที่ 2 , 10 และ 34 นำมาเรียงกันจะเป็นลำดับเรขาคณิต จงหา 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้
- รถยนต์คันหนึ่งราคา 100,000 บาท ในแต่ละปีมูลค่าของรถยนต์คันนี้จะลดลงปีละ 20% จงหามูลค่าของรถยนต์คันนี้เมื่อสิ้นปีที่ 10
- จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้สมการ  $x^3 - 6x^2 + kx + 64 = 0$  มีคำตอบเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต
- จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้สมการ  $x^3 - 13x^2 + kx - 27 = 0$  มีคำตอบเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง ลำดับและอนุกรม  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
เวลา 6 ชั่วโมง

#### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนสามารถหาลิมิตของลำดับที่กำหนด โดยพิจารณาจากกราฟและใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

#### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 เขียนกราฟของลำดับที่กำหนดให้ได้
- 1.2 หาลิมิตของลำดับโดยการพิจารณาจากกราฟได้
- 1.3 นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับไปใช้หาลิมิตของลำดับได้
- 1.4 บอกได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์

#### 2. แนวความคิดหลัก

2.1 เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่  $n$  มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง  $L$  เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น แล้วเรียก  $L$  ว่า ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence) และกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ  $L$

2.2 เราเรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า ลำดับคอนเวอร์เจนต์ (Convergent sequence) และเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตว่า ลำดับไดเวอร์เจนต์ (Divergent sequence)

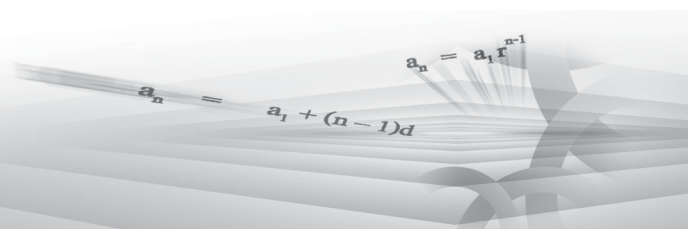
#### 3. เนื้อหาสาระ

การหาลิมิตของลำดับ คือการพิจารณาค่าของ  $a_n$  หรือพจน์ที่  $n$  ของลำดับ เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด ว่ามีลักษณะอย่างไร ซึ่งพิจารณาได้ดังนี้

ลักษณะที่ 1 เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด ค่าของ  $a_n$  เข้าใกล้หรือเท่ากับค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่งค่าคงที่ค่านั้นคือ ลิมิตของลำดับ

ลักษณะที่ 2 เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด ค่าของ  $a_n$  เพิ่มขึ้นหรือลดลงไม่มีขอบเขต กล่าวได้ว่า ลำดับนี้ไม่มีลิมิต หรือหาลิมิตไม่ได้

ลักษณะที่ 3 เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด ค่าของ  $a_n$  เพิ่มขึ้นหรือลดลงสลับกันไป กล่าวได้ว่า ลำดับนี้ไม่มีลิมิต หรือหาลิมิตไม่ได้



ลักษณะที่ 4 เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด ค่าของ  $a_n$  เปลี่ยนแปลงโดยไม่มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอน กล่าวได้ว่า ลำดับนี้ไม่มีลิมิต หรือหาลิมิตไม่ได้

จากทั้ง 4 ลักษณะสรุปได้ดังนี้

1. ลำดับที่มีลิมิต คือลำดับที่ค่าของ  $a_n$  เข้าใกล้หรือเท่ากับค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด เรียกลำดับที่หาลิมิตได้ว่า ลำดับคอนเวอร์เจนต์
2. ลำดับที่หาลิมิตไม่ได้ คือลำดับที่ค่าของ  $a_n$  ไม่เข้าใกล้หรือเท่ากับค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด เรียกลำดับที่หาลิมิตไม่ได้ว่า ลำดับไดเวอร์เจนต์ นั่นคือ ถ้าลำดับ  $a_n$  มีลิมิตเท่ากับ  $L$  เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด เขียนแทนด้วย  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

**ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต**

ให้  $c$  เป็นค่าคงตัว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$  จะได้ว่า

**ทฤษฎีที่ 1**  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$

**ทฤษฎีที่ 2**  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$

**ทฤษฎีที่ 3**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \pm B$

**ทฤษฎีที่ 4**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B$

**ทฤษฎีที่ 5**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}, B \neq 0$

**4. กระบวนการจัดการเรียนรู้**

4.1 ทบทวนการเขียนกราฟ โดยให้นักเรียนเขียนกราฟที่กำหนดให้ในเอกสารแนบแนวทางที่ 3.1 และ 3.2

4.2 ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มๆ ละ 4 คน ศึกษาเรื่องลิมิตของลำดับจากใบความรู้ที่ 3.1 ให้นักเรียนอภิปรายและซักถามข้อสงสัย ครูอธิบายเพิ่มเติม

4.3 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารฝึกหัดที่ 3.1 ถึง 3.3

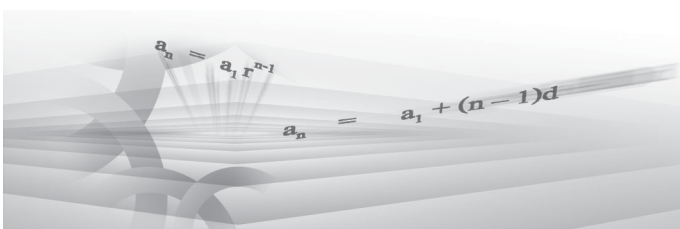
4.4 ให้นักเรียนศึกษาเรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับจากใบความรู้ที่ 3.2 ให้นักเรียนอภิปรายและซักถามข้อสงสัย ครูอธิบายเพิ่มเติม

4.5 ครูและนักเรียนช่วยกันหาลิมิตของลำดับในเอกสารแนบแนวทางที่ 3.3

4.6 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารฝึกหัดที่ 3.4 ถึง 3.5

4.7 ให้นักเรียนศึกษาเรื่องลิมิตของลำดับ เพิ่มเติมจากหนังสือคู่มือวิชาคณิตศาสตร์

4.8 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบเรื่องลิมิตของลำดับ



## 5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 ห้องสมุดโรงเรียน
- 5.2 เอกสารแนะแนวทางที่ 3.1 ถึง 3.3
- 5.3 ใบความรู้ที่ 3.1 และ 3.2
- 5.4 เอกสารฝึกหัดที่ 3.1 ถึง 3.5
- 5.5 หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ชั้น ม. 6

## 6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจสอบเอกสารฝึกหัด 2. ทดสอบ	1. เอกสารฝึกหัด 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 % 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจสอบผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจสอบผลงาน 2. แบบสังเกต	● ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90%
3. ด้านคุณลักษณะ	● สังเกต	● แบบสังเกต	● ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90%

## 7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

## 8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ .....

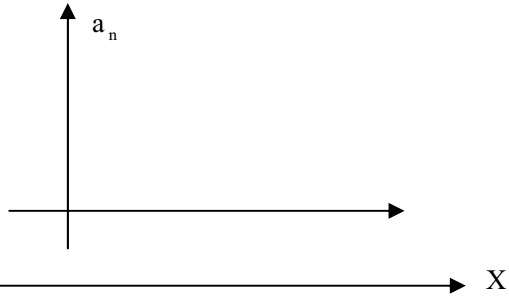


### เอกสารแนะแนวทางที่ 3.1

**คำชี้แจง** จงเขียนกราฟของลำดับอนันต์ต่อไปนี้ แล้วพิจารณาพจน์ที่  $n$  ของลำดับ ว่าเมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้น โดยไม่มีที่สิ้นสุด  $a_n$  จะมีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนใด

1. พิจารณาลำดับ  $a_n = \frac{1}{n}$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						



ค่าของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน

จากกราฟและตำแหน่งของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นได้ว่า เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่  $n$  ของลำดับจะมีค่าเข้าใกล้.....

2. พิจารณาลำดับ  $a_n = 2n - 1$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						



ค่าของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน

จากกราฟและตำแหน่งของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นได้ว่า เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่  $n$  ของลำดับจะมีค่าเข้าใกล้.....

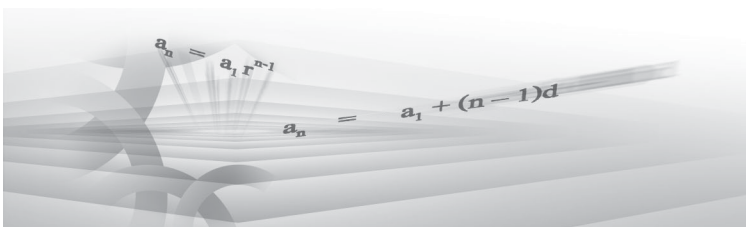
3. พิจารณาลำดับ  $a_n = 3$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						



ค่าของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน

จากกราฟและตำแหน่งของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นได้ว่า เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่  $n$  ของลำดับจะมีค่าเข้าใกล้.....



4. พิจารณาลำดับ  $a_n = (-1)^n$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						



ค่าของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน



จากกราฟและตำแหน่งของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นได้ว่า เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่  $n$  ของลำดับจะมีค่าเข้าใกล้.....

5. พิจารณาลำดับ  $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						



ค่าของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน



จากกราฟและตำแหน่งของ  $a_n$  บนเส้นจำนวน จะเห็นได้ว่า เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่  $n$  ของลำดับจะมีค่าเข้าใกล้.....

จะเห็นได้ว่า มีค่าของพจน์ที่  $n$  ที่เข้าใกล้ หรือเท่ากับจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น คือลำดับในข้อที่.....

เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดและพจน์ที่  $n$  มีค่าเข้าใกล้ หรือเท่ากับจำนวนจริง  $L$  เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น แล้วเรียก  $L$  ว่า ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence) และลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ  $L$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  ส่วนลำดับที่ไม่มีสมบัติดังกล่าวนี้ จะเป็นลำดับไม่มีลิมิต

ลำดับอนันต์ที่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับคอนเวอร์เจนต์ (convergent sequence)

ลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับไดเวอร์เจนต์ (divergent sequence)

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

### เอกสารแนะแนวทางที่ 3.2

**ตัวอย่างที่ 1** จงใช้กราฟตรวจสอบว่าลำดับอนันต์  $a_n = \frac{1}{2^n}$  เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ให้หาลิมิตด้วย

วิธีทำ

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						



จะเห็นได้ว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับนี้จะมีค่าเข้าใกล้.....  
 ดังนั้น ลำดับ  $a_n = \frac{1}{2^n}$  เป็นลำดับ.....

**ตัวอย่างที่ 2** จงใช้กราฟตรวจสอบว่าลำดับอนันต์  $a_n = (-1)^n \cdot n$  เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ให้หาลิมิตด้วย

วิธีทำ

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						



จะเห็นได้ว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับนี้จะมีค่าเข้าใกล้.....  
 ดังนั้น ลำดับ  $a_n = (-1)^n \cdot n$  เป็นลำดับ.....

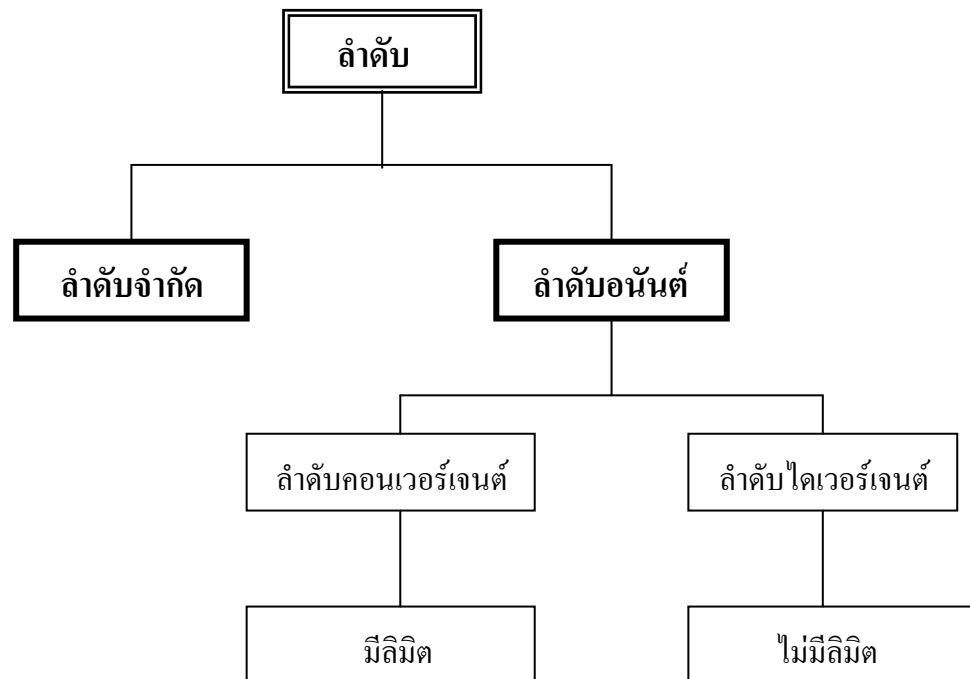


## ใบความรู้ที่ 3.1

### หลักการหาขีดจำกัดของลำดับ

1. ลำดับที่นำมาพิจารณาลิมิตนั้นต้องเป็นลำดับอนันต์
2.  $L$  เป็นขีดจำกัดของลำดับ  $a_n$  ก็ต่อเมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่  $n$  ของลำดับนี้จะมีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง  $L$  เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น
3.  $L$  เป็นขีดจำกัดของลำดับ  $a_n$  แทนด้วยสัญลักษณ์  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
4. ลำดับที่มีขีดจำกัด เรียกว่า ลำดับคอนเวอร์เจนต์ ส่วนลำดับที่ไม่มีขีดจำกัด เรียกว่า ลำดับไดเวอร์เจนต์
5. การพิจารณาว่าลำดับใดจะมีขีดจำกัดหรือไม่นั้น อาจทำได้โดยการพิจารณาจากกราฟของลำดับหรือตำแหน่งของพจน์ที่  $n$  ของลำดับบนเส้นจำนวน เมื่อ  $n$  มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

### แผนภาพแสดงลักษณะของลำดับ





### เอกสารฝึกหัดที่ 3.1

คำชี้แจง จงใช้กราฟตรวจสอบว่าลำดับอนันต์ต่อไปนี้ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับไดเวอร์เจนต์  
 ถ้าเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ให้หาลิมิตด้วย

1. ลำดับ  $a_n = \frac{1}{2n}$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						

2. ลำดับ  $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						

3. ลำดับ  $a_n = \frac{n}{n+1}$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						

4. ลำดับ  $a_n = 1 - 2n$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						

5. ลำดับ  $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

n	1	2	3	4	5	...
$a_n$						

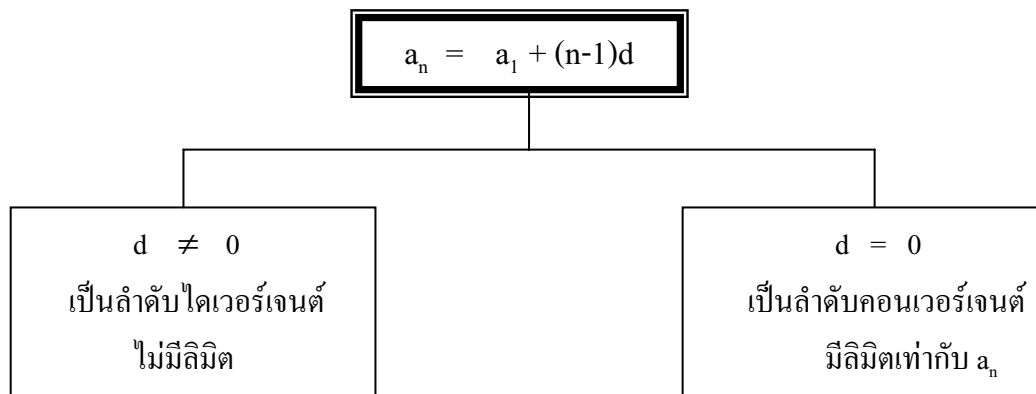


### เอกสารฝึกหัดที่ 3.2

คำชี้แจง จงเติมข้อความลงในตารางให้สมบูรณ์

ลำดับเลขคณิต	ผลต่างร่วม d	พจน์ทั่วไป $a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	ชนิดของลำดับ
1) 1, -2, -5, -8, ...				
2) 2, 6, 10, 14, ...				
3) 1, 1, 1, 1, ...				
4) 0, 0, 0, 0, ...				
5) 1, 2, 3, 4, ...				
6) -5, -4, -3, -2, ...				
7) 1, 4, 7, 10, ...				
8) 2, 4, 6, 8, ...				
9) 3, 1, -1, -3, ...				
10) k, k, k, k, ...				

จากตารางสรุปได้ว่า ลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับเลขคณิต



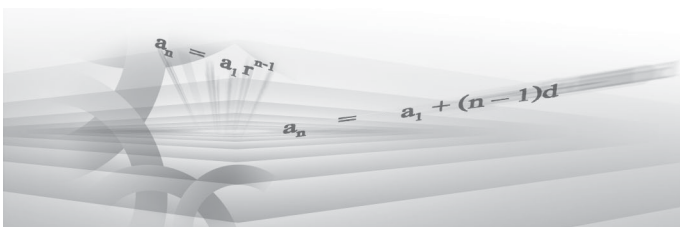
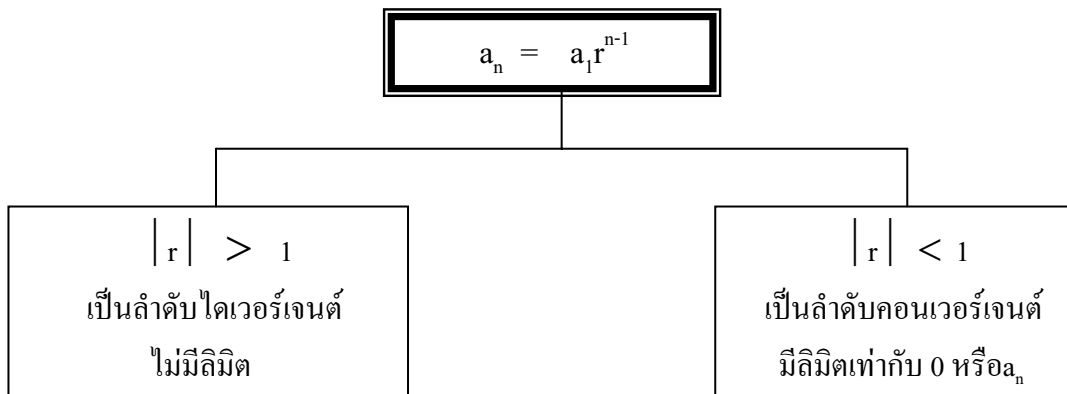
$a_n = a_1 + (n-1)d$   
 $a_n = a_1 r^{n-1}$

### เอกสารฝึกหัดที่ 3.3

คำชี้แจง จงเติมข้อความลงในตารางให้สมบูรณ์

ลำดับเรขาคณิต	อัตราส่วนร่วม r	พจน์ทั่วไป $a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	ชนิดของลำดับ
1) 1, 1, 1, 1, ...				
2) -3, 3, -3, 3, ...				
3) 1, 3, 9, 27, ...				
4) 3, -6, 12, -24, ...				
5) 2, 4, 8, 16, ...				
6) 2, 0.2, 0.02, 0.002, ...				
7) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 10, \dots$				
8) $-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$				
9) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \dots$				
10) k, k, k, k, ...				

จากตารางสรุปได้ว่า ลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับเรขาคณิต



## ใบความรู้ที่ 3.2

การหาขีดจำกัดของลำดับ นอกจากจะหาโดยการพิจารณารูปของลำดับ หาดำแหน่งของพจน์ที่  $n$  ของลำดับบนเส้นจำนวนแล้วยังอาจหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับขีดจำกัด ซึ่งจะขอกล่าวถึงและนำไปใช้ โดยไม่มีการพิสูจน์ไว้ในที่นี้

### ทฤษฎีเกี่ยวกับขีดจำกัด

ให้  $c$  เป็นค่าคงตัว  $A, B$  เป็นจำนวนจริง  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$  จะได้ว่า

ทฤษฎีที่ 1 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

ทฤษฎีที่ 2 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$$

ทฤษฎีที่ 3 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \pm B$$

ทฤษฎีที่ 4 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B$$

ทฤษฎีที่ 5 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$





### เอกสารแนะแนวทางที่ 3.3

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

$$1) a_n = \frac{7n+1}{3n-4}$$

$$2) a_n = \frac{2n^2+3n-1}{n^3-1}$$

$$3) a_n = \frac{2n^2-1}{n+1}$$

**ตัวอย่างที่ 2** จงหาลิมิตของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

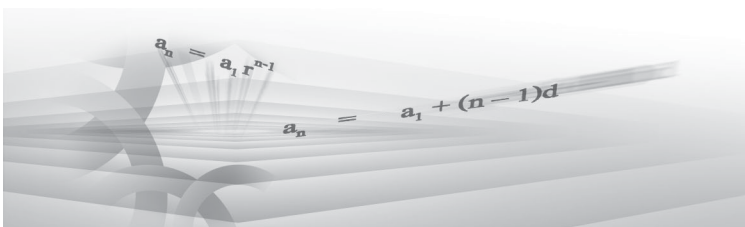
$$1) a_n = \frac{\sqrt{9n^2-1}}{3n-1}$$

$$2) a_n = \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt{n} - 1}{7-2n}$$

**ตัวอย่างที่ 3** จงหาลิมิตของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

$$1) a_n = \sin \frac{n-3}{n^2-4n+3}$$

$$2) a_n = \log_2 \frac{8n^2+n-5}{n^2-2n+1}$$



**ตัวอย่างที่ 4** จงหาขีดจำกัดของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

$$1) a_n = (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$2) a_n = (-1)^{n-1} \cdot \log \frac{100n}{n+1}$$

**ตัวอย่างที่ 5** จงหาขีดจำกัดของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

$$1) a_n = \frac{3^n + 3^{n-1} - 1}{3^{n+1}}$$

$$2) a_n = \frac{7^{n-1}}{7^{n+1} + 7^n + 1}$$

**ตัวอย่างที่ 6** จงหาค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$





### เอกสารฝึกหัดที่ 3.4

คำชี้แจง จงหาลิมิตของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

$$1) a_n = \frac{n}{3n+1}$$

$$2) a_n = \frac{n^2+n}{5n^2-1} \cdot \frac{15n^2+n-7}{6n^2-3n+1}$$

$$3) a_n = \left( \frac{6n-13}{3n+1} \right)^4$$

$$4) a_n = \frac{2n^2+3n-1}{\sqrt{9n^4+1}}$$

$$5) a_n = \frac{\sqrt[3]{n^5+1}}{n^2+5}$$

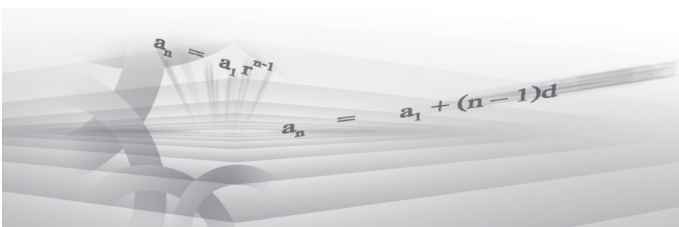
$$6) a_n = \cos \left( \frac{\sqrt{9n^2+1}}{2n-3} \right) \pi$$

$$7) a_n = 10^{\frac{3n+1}{n+1}}$$

$$8) a_n = \frac{3^{n+1}+3^n+3^{n-1}}{3^{n-2}}$$

$$9) a_n = (-1)^n \cdot \frac{4n^2}{(n-1)^2}$$

$$10) a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$



### เอกสารฝึกหัดที่ 3.5

คำชี้แจง จงหาลิมิตของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

$$1) a_n = \frac{2n^2 - 1}{5n - 7}$$

$$2) a_n = \frac{5n - 1}{7 - 4n} \div \frac{21n^2 - 1}{10n^2 + 1}$$

$$3) a_n = \frac{5n^4 + 3n^3 - 1}{(2n + 1)^2(3n - 1)^2}$$

$$4) a_n = \sqrt[3]{\frac{1 - 8n}{n + 1}}$$

$$5) a_n = \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 3}}{\sqrt{4n^2 - 1}}$$

$$6) a_n = \log_3 \frac{27n^2 + 2n - 1}{n^2 - 1}$$

$$7) a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$8) a_n = \frac{5^n + 1}{5^{n+1} + 1}$$

$$9) a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1}$$

$$10) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

$$11) a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$12) a_n = \frac{1}{n}(\sqrt{n^2 + 1} - n)$$







## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง ลำดับและอนุกรม  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
เวลา 10 ชั่วโมง

### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนสามารถหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต และแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต

### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 หาค่าของจำนวนที่อยู่ในรูปที่ใช้สัญลักษณ์แทนการบวก ( $\Sigma$ ) ได้
- 1.2 หาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้
- 1.3 หาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตได้
- 1.4 แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิตได้

### 2. แนวความคิดหลัก

2.1 เมื่อ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  เป็นลำดับจำกัด และ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ว่าเป็นลำดับอนันต์ เรียกการแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  หรือ  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  ว่าอนุกรม

2.2 อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่าอนุกรมเลขคณิต และผลต่างของลำดับเลขคณิตจะเป็นผลต่างของอนุกรมเลขคณิตด้วย

2.3 อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต เรียกว่าอนุกรมเรขาคณิต และอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตจะเป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิตด้วย

2.4 ผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  แทนด้วย  $\sum_{i=1}^n a_i$

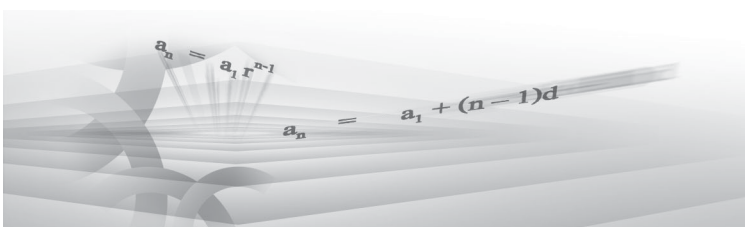
### 3. เนื้อหาสาระ

สัญลักษณ์แทนการบวก ( $\Sigma$ )

สมบัติของ  $\Sigma$  ที่ควรทราบ

กำหนดให้  $c$  เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$1. \sum_{i=1}^n c = cn$$



$$\begin{aligned}
 2. \quad \sum_{i=1}^n ca_i &= c \sum_{i=1}^n a_i \\
 3. \quad \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) &= \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i \\
 4. \quad \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\
 5. \quad \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 6. \quad \sum_{i=1}^n i^3 &= \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2
 \end{aligned}$$

อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่าอนุกรมเลขคณิต และผลต่างของลำดับเลขคณิตจะเป็นผลต่างของอนุกรมเลขคณิตด้วย

ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต

$$S_n = \frac{n}{2} [ 2a_1 + (n-1)d ]$$

หรือ

$$S_n = \frac{n}{2} [ a_1 + a_n ]$$

อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต เรียกว่าอนุกรมเรขาคณิต และอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตจะเป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิตด้วย

ผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

หรือ

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

#### 4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ครูอธิบายเกี่ยวกับสัญลักษณ์แทนการบวก  $\Sigma$  (ซิกมา) สมบัติของ  $\Sigma$  ที่ควรทราบ และตัวอย่างการหาค่าของจำนวนที่อยู่ในรูปที่ใช้สัญลักษณ์แทนการบวก  $\Sigma$

4.2 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะในเอกสารฝึกหัดที่ 4.1

4.3 ทบทวนเกี่ยวกับลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต ผลต่างร่วมและอัตราส่วนร่วม

4.4 ให้นักเรียนศึกษาเรื่องอนุกรมเลขคณิตจากใบความรู้ที่ 4.1

4.5 ครูและนักเรียนช่วยกันหาคำตอบในเอกสารแนะแนวทางที่ 4.1 และ 4.2

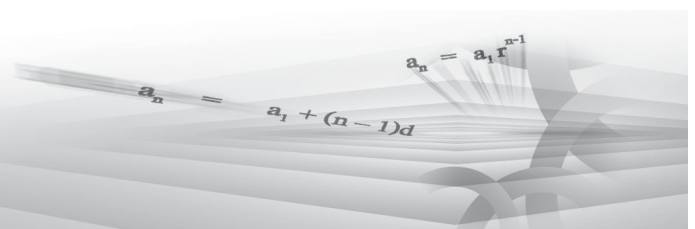
4.6 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะในเอกสารฝึกหัดที่ 4.2 และ 4.3

4.7 ให้นักเรียนศึกษาเรื่องอนุกรมเรขาคณิตจากใบความรู้ที่ 4.2

4.8 ครูและนักเรียนช่วยกันหาคำตอบในเอกสารแนะแนวทางที่ 4.3 และ 4.4

4.9 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะในเอกสารฝึกหัดที่ 4.4 และ 4.5

4.10 ให้นักเรียนศึกษาเกี่ยวกับโจทย์ปัญหาอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต



5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 ห้องสมุดโรงเรียน
- 5.2 เอกสารแนะแนวทางที่ 4.1 ถึง 4.4
- 5.3 ใบความรู้ที่ 4.1 และ 4.2
- 5.4 เอกสารฝึกหัดที่ 4.1 ถึง 4.5
- 5.5 หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ชั้น ม. 6

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจสอบเอกสารฝึกหัด 2. ทดสอบ	1. เอกสารฝึกหัด 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 % 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจสอบผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	● ผ่านระดับคืออย่างน้อย 90%
3. ด้านคุณลักษณะ	● สังเกต	● แบบสังเกต	● ผ่านระดับคืออย่างน้อย 90%

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

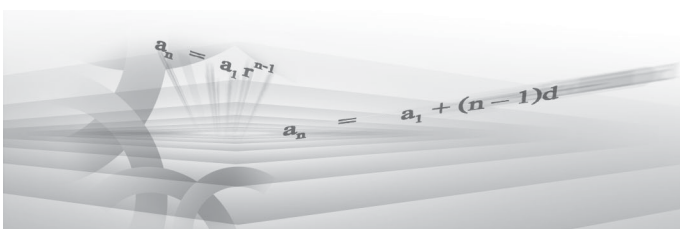
.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ .....



## เอกสารฝึกหัดที่ 4.1

### 1. จงหาค่าของ

$$1) \sum_{i=1}^4 i$$

$$2) \sum_{i=1}^5 2i$$

$$3) \sum_{k=1}^4 (10 - 2k)$$

$$4) \sum_{i=50}^{52} (i + 2)$$

$$5) \sum_{i=1}^6 (3i - 4)$$

$$6) \sum_{i=1}^4 i^2(i - 3)$$

$$7) \sum_{i=1}^4 (i^2 - 2i + 3)^2$$

$$8) \sum_{i=1}^5 (i + 1)(i + 2)$$

$$9) \sum_{k=1}^5 \frac{k + 1}{k + 2}$$

$$10) \sum_{k=1}^4 k(k + 1)$$

2. กำหนด  $f(x) = 2x+1$  และ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  และ  $a_5$  เป็นจำนวนเต็มซึ่งมีค่า 2, 5, 1, 3 และ 4 ตามลำดับ

จงหา

$$1) \sum_{i=1}^6 f(a_i)$$

$$2) \sum_{i=1}^6 a_i f(a_i)$$



### ใบความรู้ที่ 4.1

**บทนิยาม** เมื่อ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  เป็นลำดับจำกัด และ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ว่าเป็นลำดับอนันต์ เรียกการแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  หรือ  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  ว่าอนุกรม

อนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัด เรียกว่า อนุกรมจำกัด

อนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ เรียกว่า อนุกรมอนันต์

สำหรับอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  หรือ  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

เรียก  $a_1$  ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

$a_2$  ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

$a_3$  ว่า พจน์ที่ 3 ของอนุกรม

$a_n$  ว่า พจน์ที่  $n$  ของอนุกรม

**อนุกรมเลขคณิต**

**บทนิยาม** ถ้า  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว เราจะเรียก อนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  ว่าเป็น อนุกรมเลขคณิต

**ผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต**

ให้  $S_n$  แทนผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต ที่มี  $a_1$  เป็นพจน์แรก และ  $d$  เป็นผลต่างร่วม

จาก  $a_n = a_1 + (n-1)d$

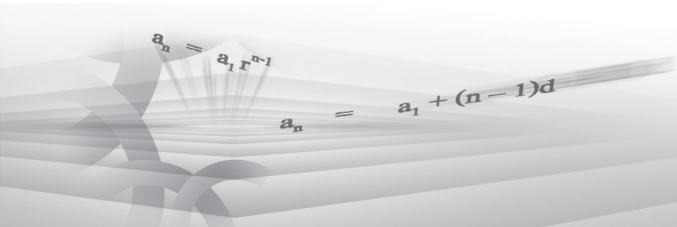
จะได้  $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n-1)d] \dots(1)$

$S_n = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-3)d] + \dots + (a_1 + d) + a_1 \dots(2)$

(1) + (2) ;  $2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-2)d] + [2a_1 + (n-3)d] + \dots + [2a_1 + (n-1)d]$

$= n [2a_1 + (n-1)d]$

$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$



### เอกสารแนะแนวทางที่ 4.1

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของ 30 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต 10, -5, -20, ...

.....

.....

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต  $1 + 5 + 9 + \dots + 117$

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า  $n$  ที่ทำให้  $S_n$  ของอนุกรมเลขคณิต  $24 + 22 + 20 + \dots$  มีค่าเท่ากับ 150

.....

.....

ตัวอย่างที่ 4 อนุกรมเลขคณิต  $39 + 33 + 27 + \dots$  จะต้องบวกกันกี่พจน์ จึงจะทำให้ผลบวกเท่ากับ 144

.....

.....

ตัวอย่างที่ 5 มีจำนวนเต็มระหว่าง 100 และ 500 ที่จำนวนที่ 9 หารลงตัวและหาผลบวกของจำนวนเต็มเหล่านี้

.....

.....

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลบวกของจำนวนเต็มทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง -122 และ 1005 ซึ่งหารด้วย 4 ลงตัว

.....

.....

ตัวอย่างที่ 7 ถ้าผลบวก 40 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตหนึ่ง มีค่าเท่ากับ 430 ในขณะที่เดียวกันผลบวกของ 60 พจน์แรกของอนุกรมนี้มีค่าเท่ากับ 945 จงหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมนี้

.....

.....

ตัวอย่างที่ 8 ให้อนุกรมเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่  $n$  เท่ากับ 33 ผลบวก  $n$  พจน์เท่ากับ 195 และผลต่างร่วมเท่ากับ 3 จงหาพจน์แรก และ  $n$

.....

.....

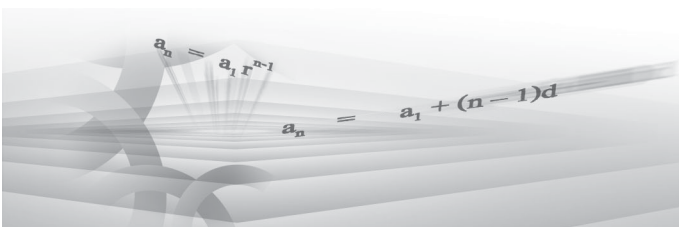
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$



## เอกสารฝึกหัดที่ 4.2

- จงหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต ที่กำหนดค่าต่างๆ ให้ดังนี้
  - $a_1 = 40, d = -3, n = 30$
  - $a_1 = 5, d = 2, n = 40$
  - $a_1 = 5, d = 5, n = 20$
  - $a_1 = -9, a_{10} = 15, n = 10$
- จงหาผลบวกของอนุกรม  $1 + 5 + 9 + \dots + 99$
- จงหาผลบวกของอนุกรม  $5 + 10 + 15 + \dots + 200$
- จงหาผลบวก 30 พจน์แรกของอนุกรม  $1 + 4 + 7 + \dots$
- จงหาผลบวก 25 พจน์ของอนุกรม  $20 + 18 + 16 + \dots$
- อนุกรมเลขคณิต  $1 + 4 + 7 + \dots$  จะต้องบวกกันกี่พจน์จึงจะได้ผลบวกเป็น 590
- อนุกรมเลขคณิต  $205 + 192 + 179 + \dots$  จะต้องบวกกันกี่พจน์จึงจะได้ผลบวกเป็น 440
- อนุกรมเลขคณิต  $10 + 15 + 20 + \dots$  จะต้องบวกกันกี่พจน์จึงจะได้ผลบวกเป็น 1550
- อนุกรมเลขคณิต  $42 + 39 + 36 + \dots$  จะต้องบวกกันกี่พจน์จึงจะได้ผลบวกเป็น 312
- ถ้า  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$  จงหาค่า  $n$
- จงหาผลบวกของจำนวนเต็มคี่ 100 จำนวนแรก
- ถ้าพจน์ที่  $n$  ของอนุกรม คือ  $2n-5$  จงหาผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมนี้
- อนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่งมี  $a_{10} = 20$  และ  $a_5 = 10$  จงหาผลบวกตั้งแต่พจน์ที่ 8 ถึงพจน์ที่ 15
- จงหาผลบวกของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 กับ 99 เมื่อจำนวนเต็มแต่ละจำนวนดังกล่าว
  - หารด้วย 8 ลงตัว
  - หารด้วย 8 ไม่ลงตัว
- ในอนุกรมเลขคณิตพบว่า ผลบวกของ 6 พจน์แรกมีค่าเท่ากับ 21 และพจน์ที่ 7 มีค่าเป็นสามเท่าของผลบวกของพจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 4 จงหา
  - พจน์แรก
  - ผลต่างร่วม
  - ผลบวก 10 พจน์แรก
- ในอนุกรมเลขคณิตพบว่า พจน์ที่ 2 มีค่าเป็นสามเท่าของพจน์ที่ 7 และพจน์ที่ 9 มีค่าเท่ากับ 1 จงหา
  - พจน์แรก
  - ผลต่างร่วม
  - จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $n$  มีค่าน้อยกว่า 0
- ในอนุกรมเลขคณิตพบว่า ผลบวกของพจน์ที่ 2 และพจน์ที่ 4 มีค่าเท่ากับ 15 และผลบวกของพจน์ที่ 5 กับพจน์ที่ 63 มีค่าเท่ากับ 263 จงหา
  - พจน์แรก
  - ผลต่างร่วม
  - ผลบวก 12 พจน์แรก
- ในอนุกรมเลขคณิตพบว่า พจน์ที่ 2 พจน์ที่ 4 และพจน์ที่ 8 เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต และผลบวกของพจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 20 จงหา
  - พจน์แรก
  - ผลต่างร่วม
  - ผลบวกของ  $n$  พจน์แรก



## เอกสารแนะแนวทางที่ 4.2

### โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 1 ชายคนหนึ่งต้องการเดินทางทั้งสิ้น 162 กิโลเมตร วันแรกเขาเดินทางได้ 30 กิโลเมตร วันที่สองเขาเดินทางได้ 27 กิโลเมตร วันที่สามเขาเดินทางได้ 24 กิโลเมตร เป็นเช่นนี้ตลอดไป จงหาว่าชายคนนี้จะเดินทางทั้งสิ้นกี่วันจึงจะถึงปลายทาง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 2 ไม้ก่องหนึ่งวางซ้อนกันเป็นชั้นๆ แต่ละชั้นมีจำนวนไม้มากกว่าจำนวนไม้ชั้นที่ถัดขึ้นไปเป็นจำนวน 3 ท่อนเสมอ ถ้าจำนวนไม้ชั้นบนสุดมี 70 ท่อน ชั้นติดกับพื้นดินมี 376 ท่อน จงหาว่าไม้ก่องนี้มีกี่ท่อน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3 นารีซื้อรถยนต์คันหนึ่งราคา 6,000,000 บาท โดยชำระเงินดาวน์ 200,000 บาท ส่วนเงินค้างชำระต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าๆ กันทุกเดือน พร้อมดอกเบี้ยร้อยละหนึ่งต่อเดือนของยอดเงินที่ยังไม่ได้ชำระ การชำระเงินงวดแรกเริ่มต้นภายหลังหนึ่งเดือนของวันที่ได้ตกลงซื้อขายกัน จงหาว่านารีจะต้องชำระเงินทั้งหมดเท่าใด จึงจะได้รถยนต์เป็นกรรมสิทธิ์สมบูรณ์ภายใน 40 เดือน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = a_1 r^{n-1}$



### เอกสารฝึกหัดที่ 4.3

1. วิณาและนาวินอยู่ห่างกัน 255 กิโลเมตร และตั้งใจเดินทางมาพบกัน โดยตั้งต้นเดินทางพร้อมกัน วิณาเดินทางวันแรกด้วยระยะทาง 1 กิโลเมตร วันที่สอง 3 กิโลเมตร วันที่สาม 5 กิโลเมตร เช่นนี้เรื่อยไป ส่วนนาวินเดินทางสามวันด้วยระยะทาง 20 , 19 และ 18 กิโลเมตร ตามลำดับ จงหาว่าในเวลากี่วันเขาทั้งสองจึงจะพบกัน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. เรือสองลำเดินทางออกจากจุดๆเดียวกัน โดยออกพร้อมกันและไปในทิศทางเดียวกัน เรือลำแรกออกเดินทางในวันแรก ได้ระยะทาง 74 กิโลเมตร วันที่สอง 72 กิโลเมตร วันที่สาม 70 กิโลเมตร เป็นเช่นนี้เรื่อยๆ ไป ส่วนเรือลำที่สองวันแรกเดินทางได้ระยะทาง 2 กิโลเมตร วันที่สอง 6 กิโลเมตร วันที่สาม 10 กิโลเมตร เป็นเช่นนี้เรื่อยๆ ไป จงหาว่าเรือทั้งสองลำจะอยู่ห่างจากจุดตั้งต้นกี่กิโลเมตร ขณะที่เรือทั้งสองเดินทางไปพบกัน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. วัตถุชิ้นหนึ่งถูกปล่อยมาจากเครื่องบินซึ่งสูงจากผิวโลก 3,600 ฟุต และวัตถุดังกล่าวนั้นจะเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 16 ฟุตในวินาทีแรก 48 ฟุตในวินาทีที่สอง และ 80 ฟุตในวินาทีที่สาม เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จงหาว่าวัตถุดังกล่าว ใช้เวลาเคลื่อนที่กี่วินาทีจึงจะถึงผิวโลก

.....

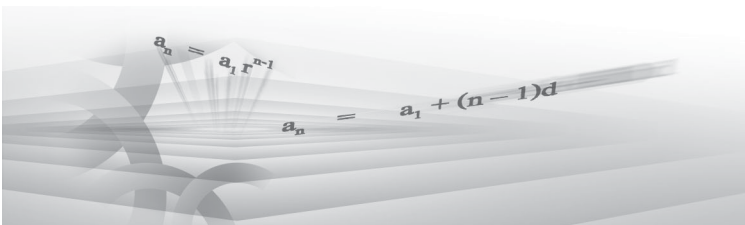
.....

.....

.....

.....

.....



## ใบความรู้ที่ 4.2

### อนุกรมเรขาคณิต

**บทนิยาม** ถ้า  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิตแล้ว เราจะเรียก อนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  ว่าเป็น อนุกรมเรขาคณิต

### ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

ให้  $S_n$  แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต ที่มี  $a_1$  เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิต

$$\text{จาก } S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \quad \dots(1)$$

$$(1) \times r; \quad r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \quad \dots(2)$$

$$(1) - (2); \quad S_n - r S_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$(1-r) S_n = a_1 (1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

$$\text{หรือ } S_n = \frac{a_1 - r a_n}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$

**วิธีทำ** จากอนุกรมเรขาคณิต  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$  จะได้ว่า  $a_1 = 1, r = 2, n = 10$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } S_n &= \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \\ S_{10} &= \frac{(1)(2^{10} - 1)}{2 - 1} \\ &= \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1,024 - 1 = 1,023 \end{aligned}$$

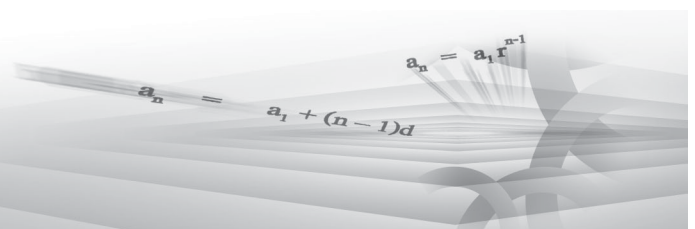
$\therefore$  ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับ 1,023

**ตัวอย่างที่ 2** อนุกรมเรขาคณิต  $3 + 6 + 12 + \dots$  จะต้องบวกกันกี่พจน์จึงจะได้ผลบวกเป็น 765

**วิธีทำ** จากอนุกรมเรขาคณิต  $3 + 6 + 12 + \dots$  จะได้ว่า  $a_1 = 3, r = 2, n = ?, S_n = 765$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } S_n &= \frac{a_1(2^n - 1)}{2 - 1} \\ 765 &= \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} \\ 765 &= \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} \\ 2^n - 1 &= 255 \\ 2^n &= 256 = 2^8 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

$\therefore$  อนุกรมนี้จะต้องบวกกัน 8 พจน์จึงจะได้ผลบวกเป็น 765





### เอกสารแนะแนวทางที่ 4.3

ตัวอย่างที่ 3 อนุกรมเรขาคณิตอนุกรมหนึ่งมี  $a_1 = 3$ ,  $a_n = 96$ , และ  $S_n = 189$  จงหา  $r$  และ  $n$

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 4 จงหา  $S_n$  และ  $S_{10}$  ของอนุกรม  $27 + (-9) + 3 + (-1) + \dots$

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต  $48 - 96 + 192 - \dots$  เป็น 528 จงหาว่าอนุกรมนี้มีกี่พจน์

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 6 อนุกรมเรขาคณิตชุดหนึ่ง มีผลบวกของ 3 พจน์แรกเป็น 9 และมีผลบวกของ 6 พจน์แรกเป็น -63 จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมนี้

.....

.....

.....

.....

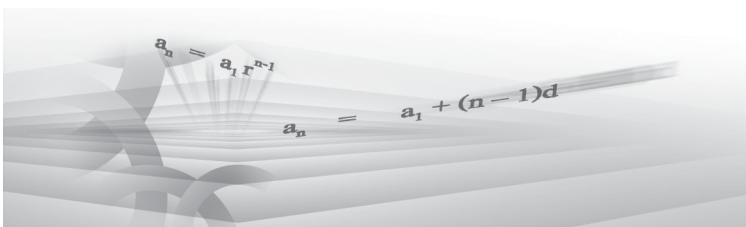
ตัวอย่างที่ 7 ถ้าผลบวก 4 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตชุดหนึ่งเป็น 60 และพจน์ที่ 4 มีค่าเป็น 4 เท่าของพจน์ที่ 2 จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้

.....

.....

.....

.....





### เอกสารแนะแนวทางที่ 4.4

#### โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 1 ในการกำจัดศัตรูพืชแห่งหนึ่ง เมื่อฉีดยาทำลายหนึ่งครั้ง จะกำจัดศัตรูพืชได้เพียง 75 % ของปริมาณศัตรูพืชที่มีอยู่ในขณะนั้นเสมอ จงคำนวณว่าจะกำจัดศัตรูพืชได้เป็นจำนวนกี่เปอร์เซ็นต์ของปริมาณที่มีอยู่ก่อนการกำจัดเมื่อฉีดยาทำลายครบ  $n$  ครั้ง

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 2 ลูกบอลลูกหนึ่งตกลงจากที่สูง 16 เมตร ในแนวตั้ง ถ้าทุกครั้งที่ลูกบอลกระทบพื้นจะกระดอนขึ้นไปได้เป็นระยะ  $\frac{3}{4}$  ของระยะทางที่มันตกลงมา เช่นนี้เรื่อยๆ ไป จงหาระยะทางทั้งหมดที่ลูกบอลเคลื่อนที่ได้ในแนวตั้งก่อนลูกบอลจะหยุดนิ่ง

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3 ชายคนหนึ่งเป็นหนี้จำนวนหนึ่ง เขาผ่อนชำระเงินต้นเป็นปีๆ ปีแรกเขาชำระเป็นเงินเดือนๆ ละ 1,000 บาท และปีต่อไปเขาชำระหนี้เพิ่มขึ้น 10% ของปีที่ผ่านมามากทุกปี จงหาว่าถ้าเขาชำระหนี้หมดภายใน 3 ปี เขาเป็นหนี้ทั้งหมดเท่าไร

.....

.....

.....

.....

.....



### เอกสารฝึกหัดที่ 4.5

1. แบคทีเรียกลุ่มหนึ่งขยายพันธุ์โดยเพิ่มขึ้น 20% ในแต่ละชั่วโมง ถ้าเดิมมีแบคทีเรีย 1,000 ตัว จงหาสูตรที่ใช้ในการหาจำนวนแบคทีเรียในเวลา  $t$  ชั่วโมง และเมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียทั้งหมดเท่าไร

.....

.....

.....

2. ก้นยาซื้อเครื่องใช้ไฟฟ้าเงินผ่อนมาชนิดหนึ่ง โดยสัญญาว่าจะผ่อนชำระเป็นเดือนๆละ 100 บาท และต่อมากเขาจะชำระเพิ่มขึ้น 10% ของปีที่ผ่านมามากทุกปี เมื่อเขาผ่อนหมดภายในเวลา 5 ปี จงหาว่าสินค้าชนิดนี้ราคาเท่าไร (กำหนด  $(1.1)^5 = 1.6$ )

.....

.....

.....

3. ในการเข้าซื้ออาคารสงเคราะห์หลังหนึ่ง ปีแรกเสียค่าเช่าซื้อเดือนละ 5,000 บาท ปีที่สองเสียค่าเช่าซื้อลดลง 10 % ของปีแรก ปีที่สามเสียค่าเช่าซื้อลดลง 10% ของปีที่สองเช่นกัน เป็นเช่นนี้ตลอดไปจนครบ 10 ปี ไม่ต้องเช่าซื้ออาคารหลังนั้นอีก เมื่อรวมแล้วเขาเสียค่าเช่าซื้อทั้งสิ้นเป็นเงินเท่าไร (กำหนด  $(0.9)^{10} = 0.35$ )

.....

.....

.....

4. จากการสำรวจประชากรของอำเภอหนึ่งในจังหวัดสงขลา ปรากฏว่าเมื่อสิ้นปี พ.ศ. 2538 อำเภอ นั้นมีจำนวนประชากร 50,000 คน และปีต่อๆ มาจำนวนประชากรเพิ่มขึ้น 4% จากปีที่ผ่านมามากทุกปี อยากทราบว่าเมื่อสิ้นปี พ.ศ. 2547 ในอำเภอ นั้นจะมีจำนวนประชากรเท่าไร

.....

.....

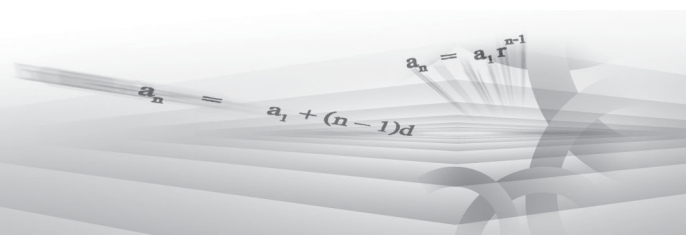
.....

5. กิ่งและกิ่งออกเดินทางจากที่เดียวกันในเวลาเดียวกัน โดยกิ่งออกเดินทางด้วยความเร็ว 2 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ในชั่วโมงแรก ในชั่วโมงถัดไปกิ่งเดินด้วยความเร็ว 4 , 8 , 16 , ... กิโลเมตรต่อชั่วโมงตามลำดับ ส่วนกิ่งออกเดินทางด้วยความเร็ว 20 , 10 , 5 , ... กิโลเมตรต่อชั่วโมงตามลำดับ อยากทราบว่ากิ่งและกิ่งจะเดินทางไปทันกันภายหลังจากที่ กิ่งได้เดินทางไปได้กี่กิโลเมตร

.....

.....

.....



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 4 ชั่วโมง

## ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนสามารถหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมผสม

## 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หาผลบวกของอนุกรมผสมได้

## 2. แนวความคิดหลัก

2.1 ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใดหรือผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมผสม คือ ลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนั้น เมื่อลำดับนั้นมีลิมิต อนุกรมอนันต์ที่มีผลบวกเรียกว่า อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และเรียกอนุกรมอนันต์ที่ไม่มีผลบวกว่า อนุกรมไดเวอร์เจนต์

2.2 ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเลขคณิต

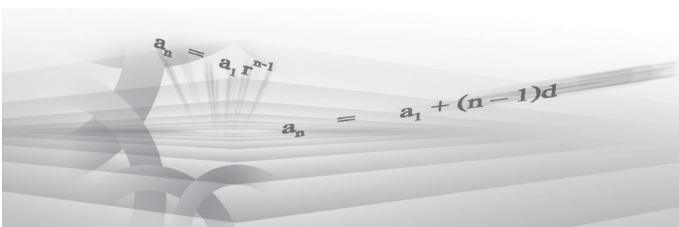
เนื่องจากผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ  $S_n = \frac{n}{2} [ 2a_1 + (n-1)d ]$ 1) ถ้า  $a_1 = 0$  และ  $d = 0$  แล้วอนุกรมเลขคณิตนั้นจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

2) ถ้า  $a_1 \neq 0$  และ  $d \neq 0$  แล้วอนุกรมเลขคณิตนั้นจะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

2.3 ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต

การพิจารณาหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต

กำหนด  $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต1) กรณีที่  $|r| = 1$  เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์2) กรณีที่  $|r| \neq 1$ - ถ้า  $|r| > 1$  เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์- ถ้า  $|r| < 1$  จะได้  $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$ 

### 3. เนื้อหาสาระ

#### ผลบวก $n$ พจน์แรกของอนุกรมแบบผสม

การหาผลบวกของอนุกรมโดยการ take sigma

อนุกรมบางอนุกรมไม่ใช่อนุกรมเลขคณิตหรืออนุกรมเรขาคณิต แต่ถ้าเราต้องการหาผลบวก  $n$  พจน์แรก ก็สามารถทำได้ โดยใช้บทนิยามและสมบัติดังต่อไปนี้

บทนิยาม ให้  $a_n$  แทน พจน์ที่  $n$  ของอนุกรม

$S_n$  แทน ผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรม แล้วจะได้

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

ทฤษฎีบท หรือสูตร

$$1. \quad \sum n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \quad \sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \quad \sum n^3 = [\sum n]^2 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$4. \quad \sum a^n = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}$$

### 4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

- 4.1 ให้นักเรียนศึกษาเรื่องผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมผสม จากใบความรู้ที่ 5.1 และ 5.2
- 4.2 ครูให้นักเรียนอภิปรายและซักถามข้อสงสัย ครูอธิบายเพิ่มเติม
- 4.3 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะในเอกสารฝึกหัดที่ 5.1 และ 5.2
- 4.4 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปวิธีหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมผสม
- 4.5 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบ

### 5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 ห้องสมุดโรงเรียน
- 5.2 ใบความรู้ที่ 5.1 และ 5.2
- 5.3 เอกสารฝึกหัดที่ 5.1 และ 5.2
- 5.4 หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ชั้น ม. 6

$a_n = a_1 + (n-1)d$   
 $a_n = a_1 r^{n-1}$



6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจเอกสารฝึกหัด 2. ทดสอบ	1. เอกสารฝึกหัด 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 % 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	● ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90%
3. ด้านคุณลักษณะ	● สังเกต	● แบบสังเกต	● ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90%

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

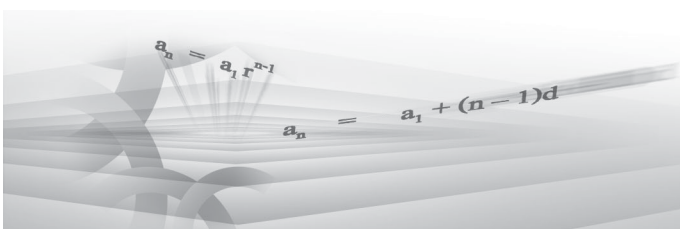
.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ .....



## ใบความรู้ที่ 5.1

### ผลบวก $n$ พจน์แรกของอนุกรมแบบผสม

การหาผลบวกของอนุกรมโดยการ take sigma

อนุกรมบางอนุกรมไม่ใช่อนุกรมเลขคณิตหรืออนุกรมเรขาคณิต แต่ถ้าเราต้องการหาผลบวก  $n$  พจน์แรก ก็สามารถทำได้ โดยใช้บทนิยามและสมบัติดังต่อไปนี้

บทนิยาม ให้  $a_n$  แทน พจน์ที่  $n$  ของอนุกรม

$S_n$  แทน ผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรม แล้วจะได้

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

ทฤษฎีบท หรือสูตร

$$1. \sum_{i=1}^n i = \sum n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{i=1}^n i^2 = \sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \sum_{i=1}^n i^3 = \sum n^3 = [\sum n]^2 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$4. \sum a^n = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}$$

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมที่มีพจน์ทั่วไปเป็น  $a_n = 3n + 1$

**วิธีทำ**  $a_n = 3n + 1$       หา  $S_n$

จะได้  $S_n = \sum a_n = \sum_{i=1}^n a_i$

$$= \sum_{i=1}^n (3i + 1)$$

$$= 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

$$= 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

$$= \frac{n}{2}(3n+5)$$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

### ใบความรู้ที่ 5.2

**ตัวอย่างที่ 2** จงหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมที่มีพจน์ทั่วไปเป็น  $a_n = n^2 - n$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}
 a_n &= n^2 - n \quad \text{หา } S_n \\
 \text{จะได้ } S_n &= \sum a_n = \sum_{i=1}^n a_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (i^2 - i) \\
 &= \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1+3) \\
 &= \frac{n}{3}(n+1)(n+2)
 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 3** จงหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรม  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$

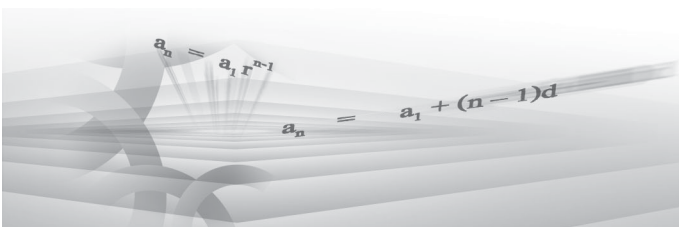
**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2) - 2}{4(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{(n^2 + 3n + 2) - 2}{4(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{n^2 + 3n}{4(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 4** จงหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมที่มีพจน์ทั่วไปเป็น  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } a_n &= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})} \\
 &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{n - (n+1)} \\
 &= -\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\
 S_n &= (-1 + \sqrt{2}) + (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (-\sqrt{3} + \sqrt{4}) + \dots + (-\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) \\
 &= -1 + \sqrt{n+1}
 \end{aligned}$$



## เอกสารฝึกหัดที่ 5.1

จงหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมแต่ละข้อต่อไปนี้

1.  $9 + 98 + 997 + 9996 + 99995 + \dots$

2.  $(a + b) + (2a + bc) + (3a + bc^2) + (4a + bc^3) + \dots$

3.  $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}}$

4.  $1 + \frac{3}{5} + \frac{5}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \frac{9}{5^4} + \dots + \frac{2n-1}{5^{n-1}}$

5.  $2 + 22 + 222 + 2222 + 22222 + \dots$

6.  $5 + 55 + 555 + 5555 + 55555 + \dots$

7.  $\frac{1}{1 \times 7} + \frac{1}{7 \times 13} + \frac{1}{13 \times 19} + \dots + \frac{1}{(6n-5)(6n+1)}$

8.  $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

9.  $9 + 99 + 999 + 9999 + \dots$

10.  $1 + 11 + 111 + 1111 + \dots$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = a_1 r^{n-1}$



## เอกสารฝึกหัดที่ 5.2

จงหาพจน์ที่  $n$  และผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

1.  $6 + 7 + 9 + 13 + 21 + \dots$

2.  $(1 \times 2) + (2 \times 4) + (3 \times 6) + (4 \times 8) + \dots$

3.  $1 + (2 \times 3^2) + (3 \times 5^2) + (4 \times 7^2) + \dots$

4.  $1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \dots$

5.  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots$

6.  $\frac{1}{1 \times 5} + \frac{1}{5 \times 9} + \frac{1}{9 \times 13} + \dots$

7.  $1 + 9 + 25 + 49 + 81 + \dots$

8.  $\frac{1}{1 \times \sqrt{x}} + \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \dots$



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง ลำดับและอนุกรม  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
เวลา 2 ชั่วโมง

### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนสามารถหาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

#### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

หาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมได้

#### 2. แนวความคิดหลัก

1. จากอนุกรมอนันต์  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  ถ้าให้  $S_n$  เป็นผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเรียก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  แต่ละจำนวนว่า ผลบวกย่อย (partial sum) ของอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  และเรียก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$  ว่า ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

#### 3. เนื้อหาสาระ

จากอนุกรมอนันต์  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

ถ้าให้  $S_n$  เป็นผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรม

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{aligned}$$

เรียก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  แต่ละจำนวนว่า ผลบวกย่อย (partial sum) ของอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  และเรียก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$  ว่า ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

#### 4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

- 4.1 ให้นักเรียนศึกษาเรื่องลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมจากใบความรู้ที่ 6
- 4.2 ครูให้นักเรียนอภิปรายและซักถามข้อสงสัย ครูอธิบายเพิ่มเติม
- 4.3 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะในเอกสารฝึกหัดที่ 6
- 4.4 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปวิธีหาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม
- 4.5 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบ

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 ห้องสมุดโรงเรียน
- 5.2 ใบความรู้ที่ 6
- 5.3 เอกสารฝึกหัดที่ 6
- 5.4 หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ชั้น ม. 6

6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจเอกสารฝึกหัด	1. เอกสารฝึกหัด	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. ทดสอบ	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบทดสอบ	1. ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90% 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 %
3. ด้านคุณลักษณะ	1. สังเกต	1. แบบสังเกต	1. ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90%

7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

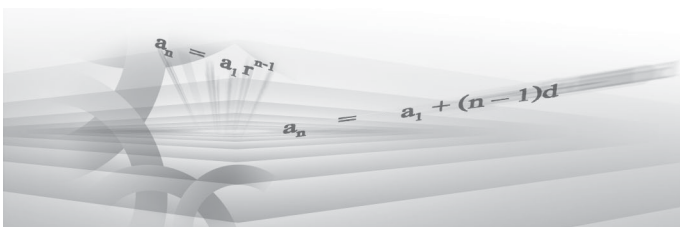
.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ .....



## ใบความรู้ที่ 6

จากอนุกรมอนันต์  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

ถ้าให้  $S_n$  เป็นผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรม

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{aligned}$$

เรียก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  แต่ละจำนวนว่า ผลบวกย่อย (partial sum) ของอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  และเรียก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$  ว่า ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

**ตัวอย่างที่ 1** จงเขียนลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

ดังนั้น ลำดับผลบวกย่อยคือ  $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \dots, (2 - \frac{1}{2^{n-1}})$

$a_n = a_1 + (n-1)d$   
 $a_n = a_1 r^{n-1}$





## เอกสารฝึกหัดที่ 6

จงเขียนลำดับผลบวกย่อย และหาลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมต่อไปนี้

1.  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n}$

2.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

3.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots$

4.  $3 + 2 + \frac{4}{3} + \dots + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots$

5.  $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{25}{2} + \dots + \frac{1}{2} \times 5^{n-1} + \dots$

6.  $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \dots$

7.  $5 + 5 + 5 + \dots$

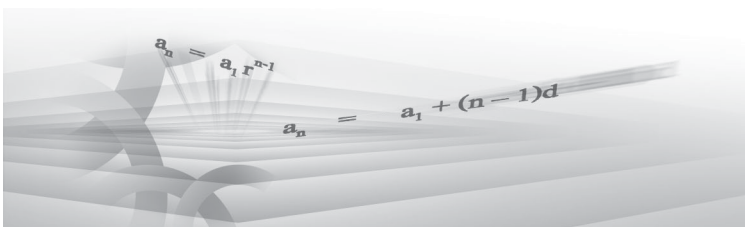
8.  $2 + (-1) + (-4) + \dots + (5-3n) + \dots$

9.  $\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots$

10.  $0 + 3 + 8 + \dots + (n^2 - 1) + \dots$

11.  $-1 + 0 + 9 + \dots + (n^3 - 2n^2)$

12.  $100 + 10 + 1 + 0.1 + \dots$



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง ลำดับและอนุกรม  
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
เวลา 4 ชั่วโมง

### ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มุ่งให้ผู้เรียนสามารถหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมอนันต์ บอกได้ว่าอนุกรมที่กำหนดเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์

### 1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 หาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมได้
- 1.2 หาขีดจำกัดของลำดับได้
- 1.3 บอกได้ว่าอนุกรมที่กำหนดเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์
- 1.4 หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้

### 2. แนวความคิดหลัก

2.1 ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใด คือขีดจำกัดของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนั้น เมื่อลำดับนั้นมีขีดจำกัด อนุกรมอนันต์ที่มีผลบวกเรียกว่า อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และเรียกอนุกรมอนันต์ที่ไม่มีผลบวกว่า อนุกรมไดเวอร์เจนต์

2.2 ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเลขคณิต

เนื่องจากผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ  $S_n = \frac{n}{2} [ 2a_1 + (n - 1) d ]$

1) ถ้า  $a_1 = 0$  และ  $d = 0$  แล้วอนุกรมเลขคณิตนั้นจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

2) ถ้า  $a_1 \neq 0$  และ  $d \neq 0$  แล้วอนุกรมเลขคณิตนั้นจะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

2.3 ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต

การพิจารณาหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต

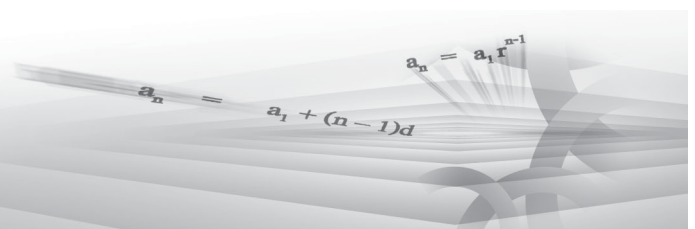
กำหนด  $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต

1) กรณีที่  $|r| = 1$  เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

2) กรณีที่  $|r| \neq 1$

- ถ้า  $|r| > 1$  เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

- ถ้า  $|r| < 1$  จะได้  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r}$





### 3. ตารางการเรียนรู้

จากอนุกรมอนันต์  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

ถ้าให้  $S_n$  เป็นผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรม

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{aligned}$$

เรียก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  แต่ละจำนวนว่า ผลบวกย่อย (partial sum) ของอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  และเรียก  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$  ว่า ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

#### บทนิยาม

ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใด คือลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมอนันต์นั้น เมื่อลำดับนั้นมีลิมิต สำหรับอนุกรมอนันต์ที่มีผลบวกเรียกว่า อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และเรียกอนุกรมอนันต์ที่ไม่มีผลบวกว่า อนุกรมไดเวอร์เจนต์

#### ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเลขคณิต

เนื่องจากผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ  $S_n = \frac{n}{2} [ 2a_1 + (n-1)d ]$

1. ถ้า  $a_1 = 0$  และ  $d = 0$  แล้วอนุกรมเลขคณิตนั้นจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

2. ถ้า  $a \neq 0$  และ  $d \neq 0$  แล้วอนุกรมเลขคณิตนั้นจะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

#### ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต

การพิจารณาหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต

กำหนด  $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1} + \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต

1. กรณีที่  $|r| = 1$  เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

2. กรณีที่  $|r| \neq 1$

- ถ้า  $|r| > 1$  เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

- ถ้า  $|r| < 1$  จะได้  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$

นั่นคือผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต  $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1} + \dots = \frac{a_1}{1-r}$  เมื่อ  $|r| < 1$

เขียนแทนผลบวกของอนุกรมอนันต์ด้วย  $S_\infty$

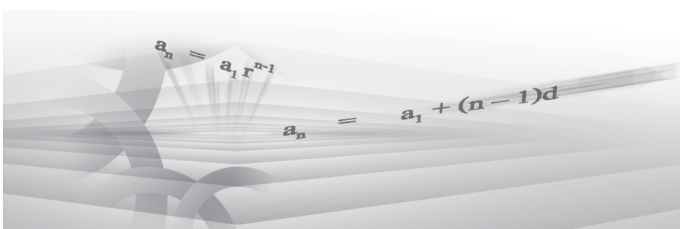
$$\text{ดังนั้น} \quad S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{เมื่อ} \quad |r| < 1$$

#### วิธีการหาผลบวกของอนุกรมอนันต์

1. ต้องหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมให้ได้เสียก่อน กล่าวคือ ต้องหา  $S_n$  ให้ได้

2. นำผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมจากข้อที่ 1 มาหาลิมิต โดยให้  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีที่

สิ้นสุด



กล่าวคือ หาค่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  นั้นเอง

3. ถ้าสามารถหา  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  ได้ ค่าดังกล่าวก็คือ ผลบวกของอนุกรมอนันต์ แต่ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  ไม่เกิดขึ้น หรือหาไม่ได้ แสดงว่าเราไม่สามารถหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ดังกล่าวได้

#### 4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

- 4.1 ให้นักเรียนศึกษาเรื่องผลบวกอนันต์ของอนุกรมจากใบความรู้ที่ 7.1 และ 7.2
- 4.2 ครูให้นักเรียนอภิปรายและซักถามข้อสงสัย ครูอธิบายเพิ่มเติม
- 4.3 ให้นักเรียนทำโจทย์ฝึกทักษะในเอกสารฝึกหัดที่ 7.1 และ 7.2
- 4.4 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปวิธีหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม
- 4.5 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบ

#### 5. แหล่งการเรียนรู้

- 5.1 ห้องสมุดโรงเรียน
- 5.2 ใบความรู้ที่ 7.1 และ 7.2
- 5.3 เอกสารฝึกหัดที่ 7.1 และ 7.2
- 5.4 หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ชั้น ม. 6

#### 6. กระบวนการวัดผลและประเมินผล

สิ่งที่วัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน
1. ด้านความรู้	1. ตรวจเอกสารฝึกหัด 2. ทดสอบ	1. เอกสารฝึกหัด 2. แบบทดสอบ	1. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 % 2. ทำถูกต้องอย่างน้อย 90 %
2. ด้านทักษะ	1. ตรวจผลงาน 2. สังเกต	1. แบบตรวจผลงาน 2. แบบสังเกต	● ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90%
3. ด้านคุณลักษณะ	● สังเกต	● แบบสังเกต	● ผ่านระดับดีอย่างน้อย 90%

#### 7. บันทึกหลังสอน

.....

.....

.....

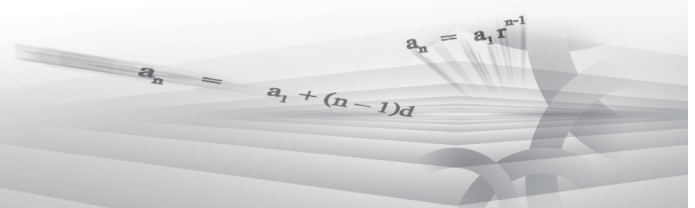
#### 8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

ลงชื่อ .....



## ใบความรู้ที่ 7.1

**บทนิยาม** ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใด คือลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมอนันต์ เมื่อลำดับนั้นมีลิมิต สำหรับอนุกรมอนันต์ที่มีผลบวกเรียกว่า อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และเรียกอนุกรมอนันต์ที่ไม่มีผลบวกว่า อนุกรมไดเวอร์เจนต์

### ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเลขคณิต

เนื่องจากผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ  $S_n = \frac{n}{2} [ 2a_1 + (n-1)d ]$

- ถ้า  $a_1 = 0$  และ  $d = 0$  แล้วอนุกรมเลขคณิตนั้นจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

- ถ้า  $a_1 \neq 0$  และ  $d \neq 0$  แล้วอนุกรมเลขคณิตนั้นจะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

### ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต

การพิจารณาหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต

กำหนด  $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1} + \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต

- กรณีที่  $|r| = 1$  เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
- กรณีที่  $|r| \neq 1$

- ถ้า  $|r| > 1$  เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

- ถ้า  $|r| < 1$  จะได้  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$

นั่นคือผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต  $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1} + \dots = \frac{a_1}{1-r}$  เมื่อ  $|r| < 1$

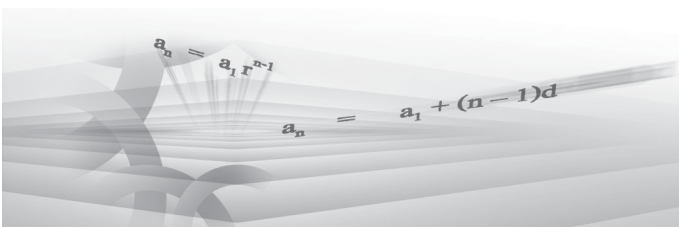
เขียนแทนผลบวกของอนุกรมอนันต์ด้วย  $S$

$$\text{ดังนั้น } S = \frac{a_1}{1-r} \text{ เมื่อ } |r| < 1$$

### วิธีการหาผลบวกของอนุกรมอนันต์

- ต้องการผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมให้ได้เสียก่อน กล่าวคือ ต้องการ  $S_n$  ให้ได้
- นำผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมจากข้อที่ 1 มาหาลิมิต โดยให้  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด กล่าวคือ  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  นั้นเอง

- ถ้าสามารถหา  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  ได้ ค่าดังกล่าวก็คือ ผลบวกของอนุกรมอนันต์ แต่ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  ไม่เกิดขึ้นหรือหาไม่ได้ แสดงว่าเราไม่สามารถหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ดังกล่าวได้



## ใบความรู้ที่ 7.2

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

วิธีทำ เนื่องจากอนุกรมที่กำหนดเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r = \frac{1}{2}$  ( $|r| < 1$  หา S ได้)

$$\begin{aligned} \text{จาก } S_\infty &= \frac{a_1}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกอนันต์ของอนุกรมนี้คือ 1

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } S_n &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกอนันต์ของอนุกรมนี้คือ 1

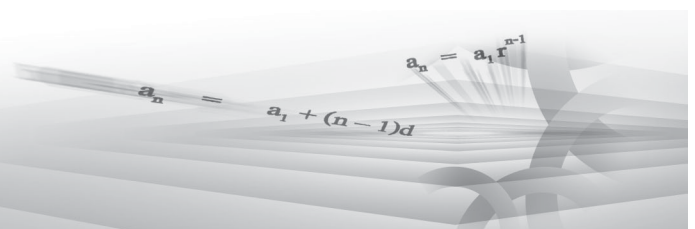
ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรม  $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } S_n &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกอนันต์ของอนุกรมนี้คือ  $\frac{1}{2}$





## เอกสารฝึกหัดที่ 7.1

1. จงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้

1)  $\frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{10 \times 11} + \dots$

2)  $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots$

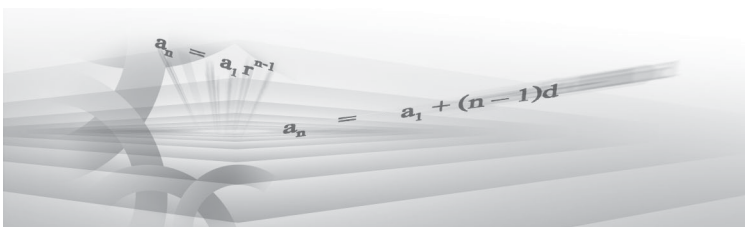
3)  $1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \dots + \frac{2^n - 1}{4^{n-1}}$

4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$

2. จงหาค่าของ  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \dots$

3. จงหาค่าของ  $1 + \frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{12}{8} + \frac{23}{16} + \frac{41}{32} + \frac{68}{64} + \dots$

4. จงหาค่าของ  $1 + \frac{5}{3} + \frac{12}{3^2} + \frac{22}{3^3} + \frac{35}{3^4} + \dots$



## เอกสารฝึกหัดที่ 7.2

1. ถ้าพจน์ที่  $n$  ของอนุกรมหนึ่งเป็น  $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}$  จงหาผลบวกอนันต์ของอนุกรมนี้
2. กำหนด  $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n}$  จงหาค่าของ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
3. จงหาค่าของ  $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^7$  เมื่อ  $i^2 = -1$
4. จงหาค่าของ  $x$  ถ้า  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{2}{3}$
5. ลำดับที่  $n$  เมื่อ  $n > 2$  กำหนดโดย  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$  ถ้า  $a_1 = 1$  และ  $a_2 = 2$  จงหาผลบวก  $n$  พจน์แรก

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$



## ผู้ดำเนินการ

### ที่ปรึกษา :

รศ.ชงทอง จันทรางศุ	เลขธิการสภาการศึกษา
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	รองเลขธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำออง หิรัญบุรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขภักดิ์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

### ผู้เรียบเรียง :

นางวิไลวรรณ เนินพรหม โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา

### ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อารีสา รัตนเพ็ชร มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ หัวหน้าคณะวิจัย  
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์  
นายเอ็ดส์วัฒน์ คำฉิม มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์  
นางสาวสุจิตา มณีชัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์  
คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวิชราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

### ผู้พิจารณารายงาน :

นางสาวสุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

### ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นายวิช ตาแก้ว หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ  
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา ประจํากลุ่มงานฯ  
นายศิริรัตน์ ชานาญกิจ ประจํากลุ่มงานฯ

### บรรณาธิการ :

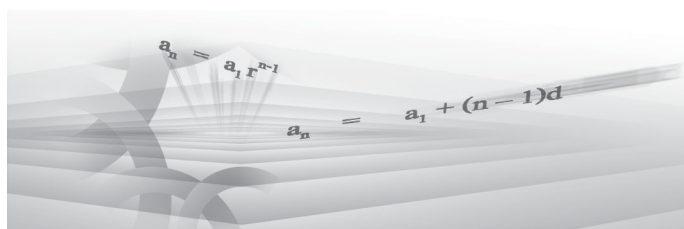
นายวิช ตาแก้ว  
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

### บรรณาธิการร่วม :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา

### เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา



เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า  
หากท่านไม่ใช่หนังสือเล่มนี้แล้ว  
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ  
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้  
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)  
99/20 ถนนสุขุขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300  
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530  
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329  
เว็บไซต์ : <http://www.onec.go.th>  
<http://www.thaigifted.org>



$a_n = a_1 r^{n-1}$   
 $a_n = a_1 + (n-1)d$



บันทึก

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Convergent sequence

Divergent sequence

common ratio

common difference

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\sum_{i=1}^n c = cn$$

$$\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots, a_1 r^{n-1}$