หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้
การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

**โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้**

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
ส 691 ผ แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กรุงเทพฯ : 2552
112 หน้า
ISBN 978-974-559-685-6
1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร
2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สิ่งพิมพ์ สกศ.	อันดับที่ 29 /2552
พิมพ์ครั้งที่ 1	มีนาคม 2552
จำนวน	1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่	สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา 99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300 โทรศัพท์ 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530 โทรสาร 0-2243-1129, 0-2668-7329 Web site: http:// www.onec.go.th และ http:// www.thaigifted.org
ผู้พิมพ์	บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด 580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1 ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230 โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753

คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนโรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์

สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า องค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

(รองศาสตราจารย์ธงทอง จันทรางศุ)

เลขาธิการสภาการศึกษา

คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตร การศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้าที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียนในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน

ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ระดับ		เนื้อหา	จำนวนคาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบเขียนแผนการจัดการเรียนรู้
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		7. ตรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึกและมหาวชิราวุธ
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด	40	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	
		▪ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ)		โรงเรียนบูรณะรำลึก
		▪ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ)		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		▪ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ)		โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
รวม			100	

สารบัญ

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง **กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจ มีทักษะในการคิดคำนวณเกี่ยวกับกฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับ และนำไปแก้โจทย์ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ใช้แผนภาพต้นไม้ในการตอบปัญหาเกี่ยวกับจำนวนวิธีที่เหตุการณ์ต่างๆ จะเกิดขึ้น
1.2 สรุปกฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับข้อ 1 และข้อ 2 ได้
1.3 นำกฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับข้อ 1 และข้อ 2 ไปแก้โจทย์ปัญหาได้

2. แนวความคิดหลัก

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ เป็นกฎเกณฑ์ที่ใช้ในการหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะเป็นไปได้ ซึ่งความรู้เรื่องนี้จะเป็นประโยชน์ในการเรียนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

3. เนื้อหาสาระ

3.1 กฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับข้อที่ 1
3.2 กฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับข้อที่ 2
3.3 การใช้กฎข้อที่ 1 และข้อที่ 2 ในการแก้โจทย์ปัญหา

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

4.1 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4.2 ทบทวนเรื่องผลคูณคาร์ทีเซียน และแผนภาพต้นไม้
4.3 ให้นักเรียนทำกิจกรรมจากใบกิจกรรมที่ 1.1
4.4 ให้ตัวแทนนักเรียนออกมาสรุปความคิดรวบยอดจากการทำใบกิจกรรมที่ 1.1 ซึ่งก็คือกฎข้อที่ 1 โดยครูช่วยเสริมและแก้ไขข้อบกพร่อง
4.5 ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 1.1

ชั่วโมงที่ 2 - 3

4.6 พูดคุยกับนักเรียนเกี่ยวกับเรื่องในชีวิตประจำวัน เช่น เรื่องการแต่งกาย ซึ่งประกอบด้วยการสวมเสื้อ กางเกงหรือกระโปรง และรองเท้า เป็นต้น เพื่อให้นักเรียนเห็นถึงการทำงานที่มีขั้นตอนมากกว่า 2 ขั้นตอน
4.7 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 1.2
4.8 ให้ตัวแทนนักเรียนออกมาสรุปความคิดรวบยอดจากการทำใบกิจกรรมที่ 1.2 ซึ่งก็คือกฎข้อที่ 2 โดยครูช่วยเสริมและแก้ไขข้อบกพร่อง
4.9 ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 1.2

4.10 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำใบงานที่ 1 เป็นการฝึกแก้โจทย์ปัญหาที่ยากขึ้น แล้วจับฉลากหากลุ่มตัวแทน 4 กลุ่ม จากนั้นสุ่มนักเรียนเพื่อเป็นตัวแทนของกลุ่มในการนำเสนอวิธีการแก้โจทย์ปัญหาแต่ละข้อ โดยมีครูช่วยเสริมและแก้ไขข้อบกพร่อง

4.11 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน

4.12 ให้นักเรียนฝึกทำโจทย์เพิ่มเติมจากใบแบบฝึกหัดที่ 1 เป็นการบ้าน

5. สื่อ/แหล่งเรียนรู้

5.1 ใบความรู้ที่ 1.1 และ 1.2 เรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (1) และ (2)

5.2 ใบกิจกรรมที่ 1.1 และ 1.2 เรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (1) และ (2)

5.3 ใบงานที่ 1 เรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

5.4 ใบแบบฝึกหัดที่ 1 เรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

5.5 แบบทดสอบก่อนและหลังเรียน

6. การวัดและประเมินผล

สังเกตจากการทำใบกิจกรรม ใบงาน ใบแบบฝึกหัด การนำเสนอ การทำแบบทดสอบ และการตรวจใบแบบฝึกหัดและแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังสอน

7.1 ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องการพัฒนา

………

………

………

7.2 แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

………

………

………

7.3 ผลที่เกิดกับผู้เรียน

………

………

………

8. ข้อเสนอแนะ

………

………

………

ใบความรู้ที่ 1.1 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (1)

****

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (1)

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ จะเป็นพื้นฐานสำคัญที่สุดที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ซึ่งจะได้เรียนในหัวข้อต่อไป โดยมีรายละเอียดของกฎดังต่อไปนี้

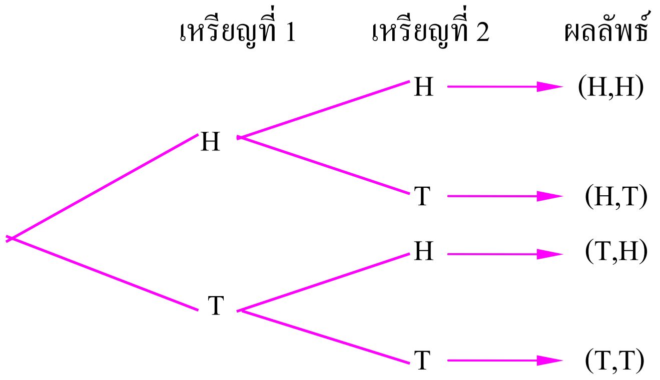
กฎข้อที่ 1 เมื่อการทำงานอย่างหนึ่งมี 2 ขั้นตอน โดยที่ขั้นตอนที่ 1 เลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของการทำงานขั้นตอนที่ 1 มีวิธีเลือกทำงานขั้นตอนที่ 2 ได้ n_2 วิธี จะได้จำนวนวิธีที่เลือกทำงานทั้งสองขั้นตอนให้สำเร็จเท่ากับ n_1n_2 วิธี

ตัวอย่างที่ 1 นายประชามีเสื้อ 6 ตัว กางเกง 3 ตัว สำหรับสวมไปเที่ยว จงหาว่าเขามีวิธีเลือกสวมเสื้อและกางเกงอย่างละ 1 ตัว เป็นชุดต่างๆ กันได้ทั้งหมดกี่ชุด

วิธีทำ ในการแต่งตัว จะประกอบด้วยการทำงาน 2 ขั้นตอน คือ
ขั้นตอนที่ 1 เลือกเสื้อมาสวม ซึ่งเลือกได้ 6 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 แต่ละวิธีของการเลือกเสื้อ สามารถเลือกกางเกงมาสวมได้ 3 วิธี
ดังนั้น เขาสามารถเลือกเสื้อและกางเกงมาสวมเป็นชุดต่างๆ กันได้ทั้งหมด $6 \times 3 = 18$ ชุด <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 2 โยนเหรียญบาทพร้อมกัน 2 เหรียญ 1 ครั้ง จะได้ผลลัพธ์แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี อะไรบ้าง

วิธีทำ ในการพิจารณาผลลัพธ์ ประกอบด้วยการทำงาน 2 ขั้นตอน คือ
ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาผลลัพธ์จากเหรียญที่ 1 ซึ่งเป็นไปได้ 2 วิธี คือหัวหรือก้อย
ขั้นตอนที่ 2 แต่ละวิธีของผลลัพธ์ในขั้นตอนที่ 1 ผลลัพธ์ในขั้นตอนที่ 2 ก็เป็นไปได้ 2 วิธี
ดังนั้น จะได้ผลลัพธ์ที่แตกต่างกันทั้งหมด $2 \times 2 = 4$ วิธี
ถ้าแทนหน้าหัวด้วย H แทนหน้าก้อยด้วย T จะแสดงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดด้วยแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้



ผลลัพธ์ที่แตกต่างกันทั้งหมดมี 4 วิธีคือ (H,H) , (H,T) , (T,H) และ (T,T) <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 3 ศูนย์การค้าแห่งหนึ่ง มีประตูทั้งสี่ทิศๆ ละ 1 ประตู ถ้าจะเข้าไปในศูนย์การค้านี้แล้วออกมาจะมีวิธีเข้าออกกี่วิธี ถ้า

(1) เข้าออกประตูใดก็ได้

(2) ห้ามออกทางประตูที่เข้า

วิธีทำ ในการเข้าออกประตู ประกอบด้วยการทำงาน 2 ขั้นตอน คือ เข้า และ ออกจากประตู

(1) ขั้นตอนที่ 1 เข้าประตู ซึ่งเลือกเข้าได้ 4 วิธี เพราะมีประตูทั้งหมด 4 ประตู

ขั้นตอนที่ 2 แต่ละวิธีของการเข้า สามารถเลือกออกได้ 4 วิธี เช่นเดียวกัน เพราะอาจจะออกประตูเดียวกับที่เข้าก็ได้

ดังนั้น จะมีวิธีเข้าออกได้ทั้งหมด $4 \times 4 = 16$ วิธี Ans.

(2) ขั้นตอนที่ 1 เข้าประตู ซึ่งเลือกเข้าได้ 4 วิธี เพราะมีประตูทั้งหมด 4 ประตู

ขั้นตอนที่ 2 แต่ละวิธีของการเข้า สามารถเลือกออกได้เพียง 3 วิธี เพราะจะออกประตูเดียวกับที่เข้าไม่ได้

ดังนั้น จะมีวิธีเข้าออกได้ทั้งหมด $4 \times 3 = 12$ วิธี Ans.

ตัวอย่างที่ 4 ครูคนหนึ่งมีหนังสือที่แตกต่างกัน 2 เล่ม ต้องการแจกหนังสือทั้งหมดให้นักเรียนซึ่งมี 10 คนจะมีวิธีแจกหนังสือให้นักเรียนได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

(1) ไม่มีเงื่อนไขใดๆ

(2) ไม่แจกหนังสือซ้ำคน

(3) มีการแจกหนังสือซ้ำคน

วิธีทำ ในการแจกหนังสือ 2 เล่ม ประกอบด้วยการทำงาน 2 ขั้นตอน คือแจกหนังสือเล่มที่ 1 และเล่มที่ 2

(1) ขั้นตอนที่ 1 แจกหนังสือเล่มที่ 1 ซึ่งแจกให้นักเรียนคนใดก็ได้ จึงแจกได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ในแต่ละวิธี จะแจกหนังสือเล่มที่ 2 ให้นักเรียนคนใดก็ได้ จึงแจกได้ 10 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีแจกหนังสือได้ทั้งหมด $10 \times 10 = 100$ วิธี Ans.

(2) ขั้นตอนที่ 1 แจกหนังสือเล่มที่ 1 ซึ่งแจกให้นักเรียนคนใดก็ได้ จึงแจกได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ในแต่ละวิธีจะแจกหนังสือเล่มที่ 2 ให้นักเรียนซ้ำคนไม่ได้ จึงแจกได้ 9 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีแจกหนังสือได้ทั้งหมด $10 \times 9 = 90$ วิธี Ans.

(3) ในข้อนี้ ใช้หลักการคำนวณแบบตรงกันข้าม กล่าวคือ

จำนวนวิธีแจกแบบซ้ำคน = จำนวนวิธีแจกแบบไม่มีเงื่อนไข - จำนวนวิธีแจกแบบไม่ซ้ำคน

= 100 - 90 วิธี

= 10 วิธี Ans.

ใบกิจกรรมที่ 1.1 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (1)

****

กิจกรรมที่ 1.1.1 ให้นักเรียนศึกษาข้อความในกรอบที่กำหนดให้ แล้วเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

ความรู้พื้นฐานที่สำคัญที่สุดซึ่งจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ก็คือ กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ โดยที่นักเรียนสามารถทำความเข้าใจง่ายๆ จากตัวอย่างปัญหาต่อไปนี้

ปัญหา สมมติว่านักเรียนมีกางเกงอยู่ 2 ตัว ยี่ห้อ Lee และ โป๊เบ๊ ส่วนเสื้อมีอยู่ 3 ตัว ยี่ห้อ AII Z , Ten & Co และ ใบหยก ปัญหาก็คือว่า นักเรียนจะมีวิธีเลือกเสื้อและกางเกงมาแต่งตัวเป็นชุดที่แตกต่างกันได้กี่วิธี

1. ในการแต่งตัวของเรานั้น จะต้องมีการกระทำจำนวน …………… ขั้นตอน คือ
   ขั้นตอนที่ 1 ……………………………………………………………………………………………...
   ขั้นตอนที่ 2 ………………………………………………………………………………………………
   ……
2. เลือกกางเกงมาใส่ได้จำนวน …………………….. วิธี คือ
   วิธีที่ 1 …………………………………………………………………………………………………
   วิธีที่ 2 …………………………………………………………………………………………………
3. หลังจากเลือกกางเกงตัวใดตัวหนึ่งมาใส่แล้ว (แต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1) นักเรียนต้องกระทำขั้นต่อไปคือ เลือกเสื้อมาใส่ ซึ่งสามารถเลือกเสื้อได้จำนวน ……………….. วิธี คือ
   วิธีที่ 1 …………………………………………………………………………………………………
   วิธีที่ 2 ………………………………………………………………………………………………..
4. จากข้อ 2 และ 3 เมื่อนักเรียนใช้วิธีการนับ จะพบว่า จำนวนวิธีที่นักเรียนจะแต่งตัว สามารถเลือกกระทำได้ทั้งหมดจำนวน ………………… วิธีที่ไม่เหมือนกัน
5. แผนภาพต้นไม้แสดงคำตอบทั้งหมดในข้อ 4 แสดงได้ดังนี้
   ……………………………………………………………………………………………………...
   ……………………………………………………………………………………………………...
   ……………………………………………………………………………………………………...
6. เมื่อใช้หลักการคำนวณแบบสัดส่วน จะพบว่า
   1 วิธีของการกระทำขั้นตอนที่ 1 (เลือกกางเกง) สามารถเลือกทำขั้นตอนที่ 2 (เลือกเสื้อ) ได้ ……. วิธี
   ดังนั้น 2 วิธีของการกระทำขั้นตอนที่ 1 สามารถเลือกทำขั้นตอนที่ 2 ได้ …… x …... วิธี
7. จากข้อ 6 เมื่อสังเกต จะพบว่าตัวเลขแต่ละตัวที่เอามาคูณกันนั้น
หมายถึง ……………………………………………………………………………………………………....

กิจกรรมที่ 1.1.2 จงวิเคราะห์โจทย์ปัญหาในกรอบที่กำหนดให้ แล้วตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

ปัญหา จากจังหวัดนครศรีธรรมราชไปกรุงเทพมหานคร มีเส้นทางการเดินทางได้ 3 วิธี คือทางรถยนต์ รถไฟและเครื่องบิน จากกรุงเทพมหานครไปจังหวัดเชียงใหม่ มีเส้นทางการเดินทางได้ 3 วิธี เช่นกันคือ ทางรถยนต์ รถไฟและเครื่องบิน ถ้านักเรียนต้องการเดินทางจากนครศรีธรรมราช ไปเชียงใหม่ โดยผ่านกรุงเทพ ฯ นักเรียนจะมีวิธีเลือกเดินทางได้กี่วิธี

1. ในการเดินทางจากนครศรีธรรมราชไปเชียงใหม่ ประกอบด้วยการทำงานกี่ขั้นตอน อะไรบ้าง

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2. จากข้อ 1 ขั้นตอนที่ 1 เลือกทำได้กี่วิธี อะไรบ้าง

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

และใน**<u>แต่ละวิธี</u>**ของการทำงานในขั้นตอนที่ 1 จะเลือกทำขั้นตอนที่ 2 ได้กี่วิธี อะไรบ้าง

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3. จงเขียนแผนภาพต้นไม้แสดงวิธีการเดินทางที่แตกต่างกันทั้งหมด จากนครศรีธรรมราชไปเชียงใหม่

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4. จากข้อ 3 สรุปได้ว่านักเรียนจะเลือกเดินทางได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี และคำตอบที่ได้มีความสัมพันธ์กับจำนวนวิธีในข้อ 2 อย่างไร

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

กิจกรรมที่ 1.1.3 จงแสดงวิธีการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาต่อไปนี้

1. ศูนย์การค้าโรบินสันมีประตูเข้าออกทั้งหมด 6 ประตู นักเรียนคนหนึ่งจะมีวิธีเข้าแล้วออกจากศูนย์การค้านี้ได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

……

……

……

2. จากข้อ 1 ถ้ามีเงื่อนไขว่า นักเรียนจะออกทางประตูเดิมที่นักเรียนเข้ามาไม่ได้ ดังนั้นนักเรียนจะเข้าแล้วออกจากศูนย์การค้านี้ได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

……

……

……

3. จะใช้เลขโดด 2 , 4 , 6 , 7 และ 9 เขียนจำนวนที่มีสองหลัก ได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่จำนวน

……

……

……

4. จากข้อ 3 ถ้าห้ามใช้ตัวเลขซ้ำ จะเขียนจำนวนที่มีสองหลัก ได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่จำนวน

……

……

……

5. ในห้องเรียนของนักเรียนมีชาย 14 คน หญิง 26 คน จะมีวิธีเลือกหัวหน้าห้อง 1 คน และรองหัวหน้าห้องอีก 1 คน ได้กี่วิธี ถ้า

5.1 หัวหน้าห้องและรองหัวหน้าห้องเป็นเพศใดก็ได้

5.2 หัวหน้าห้องเป็นเพศชายและรองหัวหน้าห้องเป็นเพศหญิง

……...

……...

……...

6. จากการวิเคราะห์และหาคำตอบของโจทย์แต่ละข้อข้างต้น **สรุปเป็นกฎข้อที่ 1** ได้ว่า เมื่อการทำงานอย่างหนึ่งมีสองขั้นตอน โดยในขั้นตอนที่ 1 เลือกทำได้ n_1 วิธี และใน**แต่ละวิธี**ของการทำงานขั้นตอนที่ 1 เลือกทำขั้นตอนที่ 2 ได้ n_2 วิธี ดังนั้นจะมีวิธีทำงานทั้งสองขั้นตอนนี้ให้สำเร็จได้แตกต่างกันทั้งหมด ………..….. วิธี

ใบความรู้ที่ 1.2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (2)

****

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (2)

ในกรณีที่การดำเนินงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยขั้นตอนย่อยๆ หลายขั้นตอน จำนวนวิธีการทำงานทุกขั้นตอนให้สำเร็จจะเป็นไปตามกฎต่อไปนี้

กฎข้อที่ 2 ถ้าในการดำเนินงานอย่างใดอย่างหนึ่งให้สำเร็จ ประกอบด้วยการกระทำย่อยๆ ทั้งหมด k ขั้นตอน โดยที่งานในขั้นตอนที่ 1 มีวิธีทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีที่ทำงานขั้นตอนที่ 1 แล้ว มีวิธีเลือกทำงานขั้นตอนที่ 2 ได้ n_2 วิธี และในแต่ละวิธีที่ทำงานขั้นตอนที่ 2 แล้ว มีวิธีเลือกทำงานขั้นตอนที่ 3 ได้ n_3 วิธี ฯลฯ จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะทำงาน k ขั้นตอนนี้ให้สำเร็จ เท่ากับ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 โยนลูกเต๋า 1 ลูก จำนวน 3 ครั้ง จงหาผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้

วิธีทำ ในการพิจารณาผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ ประกอบด้วยการทำงาน 3 ขั้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาผลลัพธ์ของลูกเต๋าจากการโยนครั้งที่ 1 ซึ่งเป็นไปได้ 6 วิธี
เพราะลูกเต๋า 1 ลูก มี 6 หน้า คือหน้าที่เป็นแต้ม 1, 2 , 3 , 4 , 5 และ 6
ขั้นตอนที่ 2 แต่ละวิธีในขั้นที่ 1 ผลลัพธ์จากการโยนครั้งที่ 2 เป็นไปได้ 6 วิธี
ขั้นตอนที่ 3 แต่ละวิธีในขั้นที่ 2 ผลลัพธ์จากการโยนครั้งที่ 3 เป็นไปได้ 6 วิธี
ดังนั้น ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จึงเท่ากับ 6 x 6 x 6 = 216 วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 2 มีจดหมาย 4 ฉบับ จะใส่ในตู้จดหมายซึ่งมีอยู่ 5 ตู้ได้กี่วิธีเมื่อ

(1) จดหมายฉบับใดอยู่ในตู้ใดก็ได้
(2) ห้ามใส่จดหมายมากกว่า 1 ฉบับ ในตู้เดียวกัน

วิธีทำ การใส่จดหมาย 4 ฉบับ ลงในตู้ 5 ตู้ ประกอบด้วยการทำงาน 4 ขั้นตอน

(1) ขั้นตอนที่ 1 ใส่จดหมายฉบับที่ 1 ลงในตู้ใดก็ได้ ซึ่งเลือกใส่ได้ 5 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 ในแต่ละวิธี ใส่จดหมายฉบับที่ 2 ลงในตู้ใดก็ได้ ซึ่งเลือกใส่ได้ 5 วิธี
ขั้นตอนที่ 3 ในแต่ละวิธี ใส่จดหมายฉบับที่ 3 ลงในตู้ใดก็ได้ ซึ่งเลือกใส่ได้ 5 วิธี
ขั้นตอนที่ 4 ในแต่ละวิธี ใส่จดหมายฉบับที่ 4 ลงในตู้ใดก็ได้ ซึ่งเลือกใส่ได้ 5 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีใส่จดหมายทั้งหมดลงในตู้เท่ากับ 5 x 5 x 5 x 5 = 625 วิธี <u>Ans</u>.

(2) ขั้นตอนที่ 1 ใส่จดหมายฉบับที่ 1 ลงในตู้ใดก็ได้ ซึ่งเลือกใส่ได้ 5 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 ในแต่ละวิธี ใส่จดหมายฉบับที่ 2 ลงในตู้ได้เพียง 4 วิธี
เพราะตู้ใดที่มีฉบับที่ 1 อยู่แล้ว จะใส่ฉบับที่ 2 อีกไม่ได้ จึงเหลือตู้ว่างอยู่เพียง 4 ตู้

ทำนองเดียวกันนี้ จึงได้ว่า

ขั้นตอนที่ 3 ในแต่ละวิธี ใส่จดหมายฉบับที่ 3 ลงในตู้ได้เพียง 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 ในแต่ละวิธี ใส่จดหมายฉบับที่ 4 ลงในตู้ได้เพียง 2 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีใส่จดหมายทั้งหมดลงในตู้เท่ากับ 5 x 4 x 3 x 2 = 120 วิธี Ans.

ตัวอย่างที่ 3 มีสีที่แตกต่างกันทั้งหมด 7 สี จะมีกี่วิธีที่แตกต่างกันในการทาสีลูกเต๋า หน้าละ 1 สี

วิธีทำ การใช้สี 7 สีทาหน้าลูกเต๋าซึ่งมี 6 หน้า หน้าละ 1 สี ประกอบด้วยการทำงาน 6 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 ทาสีลูกเต๋าหน้าที่ 1 ซึ่งจะทาสีใดก็ได้ เลือกทาได้ 7 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ในแต่ละวิธี ทาสีลูกเต๋าหน้าที่ 2 ซึ่งจะทาสีใดก็ได้ แต่ไม่ใช่สีที่ใช้ทาแล้ว จึงเลือกทาได้ 6 วิธี ทำนองเดียวกันนี้ จึงได้ว่า

ขั้นตอนที่ 3 ในแต่ละวิธี เลือกทาสีลูกเต๋าหน้าที่ 3 ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 ในแต่ละวิธี เลือกทาสีลูกเต๋าหน้าที่ 4 ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 5 ในแต่ละวิธี เลือกทาสีลูกเต๋าหน้าที่ 5 ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 6 ในแต่ละวิธี เลือกทาสีลูกเต๋าหน้าที่ 6 ได้ 2 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทาสีลูกเต๋าทั้ง 6 หน้าเท่ากับ 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 = 5,040 วิธี Ans.

ตัวอย่างที่ 4 จะใช้เลขโดด 0 , 1 , 2 , 3 สร้างจำนวน 3 หลัก ได้ทั้งหมดกี่จำนวน ถ้า

(1) ใช้เลขซ้ำกันได้

(2) ห้ามใช้เลขซ้ำกัน

วิธีทำ การสร้างจำนวน 3 หลัก ประกอบด้วยการทำงาน 3 ขั้นตอน

(1) ขั้นตอนที่ 1 เขียนหลักร้อย ซึ่งใช้เลขใดที่กำหนดให้ก็ได้ แต่ใช้ 0 ไม่ได้ จึงเลือกได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ในแต่ละวิธี เขียนหลักสิบซึ่งใช้เลขซ้ำกันก็ได้ จึงเลือกได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 ในแต่ละวิธี เขียนหลักหน่วยซึ่งใช้เลขซ้ำกันก็ได้ จึงเลือกได้ 4 วิธี

ดังนั้นจึงสร้างจำนวนสามหลักได้ทั้งหมด 3 x 4 x 4 = 48 จำนวน Ans.

(2) ขั้นตอนที่ 1 เขียนหลักร้อย ซึ่งใช้เลขใดที่กำหนดให้ก็ได้ แต่ใช้ 0 ไม่ได้ จึงเลือกได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ในแต่ละวิธี เขียนหลักสิบซึ่งใช้เลขซ้ำกันไม่ได้ จึงเลือกได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 ในแต่ละวิธี เขียนหลักหน่วยซึ่งใช้เลขซ้ำกันไม่ได้ จึงเลือกได้ 2 วิธี

ดังนั้นจึงสร้างจำนวนสามหลักได้ทั้งหมด 3 x 3 x 2 = 18 จำนวน Ans.

ในแต่ละข้อ ให้นักเรียนพิจารณาว่า ถ้าเขียนหลักอื่นๆ ก่อนเขียนหลักร้อย จะสามารถแก้ปัญหา เพื่อหาคำตอบได้หรือไม่ อย่างไร

ใบกิจกรรมที่ 1.2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (2)

****

กิจกรรมที่ 1.2.1 จงวิเคราะห์โจทย์ปัญหาในกรอบที่กำหนดให้ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

ปัญหา นักร้องชายคนหนึ่งมีกางเกง 2 ตัว เสื้อ 3 ตัว และรองเท้า 2 คู่ เขาจะแต่งกายด้วยกางเกง เสื้อ และรองเท้าเหล่านี้ได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

1. ในการแต่งกายตามที่กำหนดนี้ ประกอบด้วยการทำงานกี่ขั้นตอน อะไรบ้าง

   ………………………………………………………………………………………………………...
   ………………………………………………………………………………………………………...
   ………………………………………………………………………………………………………

2. จากข้อ 1 ขั้นตอนที่ 1 เลือกทำได้กี่วิธี ………………………………………………
   <u>แต่ละวิธี</u>ของการทำขั้นตอนที่ 1 เลือกทำขั้นตอนที่ 2 ได้กี่วิธี ………………………………
   <u>แต่ละวิธี</u>ของการทำขั้นตอนที่ 2 เลือกทำขั้นตอนที่ 3 ได้กี่วิธี ………………………………

3. ถ้า แทนกางเกง 2 ตัวด้วย A และ B แทนเสื้อ 3 ตัวด้วย P , Q และ R และแทนรองเท้า 2 คู่ ด้วย X และ Y จงเขียนแผนภาพต้นไม้แสดงจำนวนวิธีในการแต่งกายทั้งหมด

   ………………………………………………………………………………………………………...
   ………………………………………………………………………………………………………...
   ………………………………………………………………………………………………………...
   ………………………………………………………………………………………………………...
   ………………………………………………………………………………………………………...

4. จากแผนภาพต้นไม้ในข้อ 3 สรุปได้ว่านักร้องคนนี้สามารถแต่งกายได้แตกต่างกันทั้งหมด …………วิธี และคำตอบนี้สัมพันธ์อย่างไรกับจำนวนวิธีในข้อ 2

   ………………………………………………………………………………………………………

5. ถ้าในการแต่งกายทุกครั้งจะต้องสวมหมวกด้วย โดยที่เขามีหมวกเท่อยู่ 2 ใบ นักเรียนคิดว่าในการแต่งกายนี้จะประกอบด้วยการทำงานจำนวน ……….. ขั้นตอน และโดยการขยายความคิดจากแผนภาพต้นไม้ในข้อ 3 จะมีวิธีการแต่งกายต่างๆ กันทั้งหมดจำนวน …………………. วิธี ซึ่งจำนวนวิธีทั้งหมดนี้สัมพันธ์กับจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนอย่างไร

   ………………………………………………………………………………………………………...
   ………………………………………………………………………………………………………...
   ………………………………………………………………………………………………………...

กิจกรรมที่ 1.2.2 จงวิเคราะห์โจทย์ปัญหาในแต่ละข้อที่กำหนดให้ แล้วแสดงวิธีการหาคำตอบ

1. จะเลือกคณะกรรมการสมาคม ซึ่งประกอบด้วย ประธาน รองประธาน และเลขานุการ ตำแหน่งละ 1 คน จากสมาชิกทั้งหมด 30 คน ได้ทั้งหมดกี่วิธี (ประกอบด้วยการทำงาน ……..ขั้นตอน)

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

2. นำเลขโดด 1 , 2 , 3 , 4 และ 5 มาเขียนจำนวนที่มี 4 หลัก โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่จำนวน (ประกอบด้วยการทำงาน ……..ขั้นตอน)

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

3. โยนเหรียญบาท เหรียญห้าบาท และเหรียญสิบบาท อย่างละ 1 เหรียญพร้อมๆ กันจำนวน 1 ครั้ง จงพิจารณาว่าเหรียญจะขึ้นหน้าต่าง ๆ กันได้ทั้งหมดกี่วิธี (ประกอบด้วยการทำงาน ……..ขั้นตอน)

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

4. นำอักษรจากคำว่า COUNTRY มาจัดเป็นคำใหม่ โดยไม่คำนึงถึงความหมาย จะได้คำใหม่ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่คำ (ประกอบด้วยการทำงาน ……..ขั้นตอน)

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

5. จากการวิเคราะห์และหาคำตอบของโจทย์แต่ละข้อข้างต้น **สรุปเป็นกฎข้อที่ 2** ได้ว่า ถ้าในการดำเนินงานอย่างใดอย่างหนึ่งให้สำเร็จ ประกอบด้วยการกระทำย่อยๆ k ขั้นตอน โดยที่ ขั้นตอนที่ 1 เลือกทำได้ n_1 วิธี และ**ในแต่ละวิธีของการทำขั้นตอนที่ 1** สามารถเลือกทำขั้นตอนที่ 2 ได้ n_2 วิธี และ**ในแต่ละวิธีของการทำขั้นตอนที่ 2** เลือกทำขั้นตอนที่ 3 ได้ n_3 วิธี เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งเลือกทำขั้นตอนที่ k ได้ n_k วิธี จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะทำงาน k ขั้นตอนนี้ให้สำเร็จเท่ากับ ……………………………………………วิธี

ใบงานที่ 1 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

****

คำสั่ง ให้นักเรียนทำใบงานเป็นกลุ่ม โดยช่วยกันคิดหาวิธีการแก้โจทย์ปัญหาต่อไปนี้แล้วนำเสนอหน้าชั้น

1. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีกฎว่า ประธานนักเรียนจะเป็นนักเรียนชายหรือหญิงก็ได้ แต่รองประธานต้องเป็นนักเรียนหญิง ถ้าในการเลือกประธานและรองประธานนักเรียน มีนักเรียนชายสมัคร 10 คน นักเรียนหญิงสมัคร 8 คน จะเลือกประธาน และรองประธานนักเรียนตำแหน่งละ 1 คน ได้กี่วิธี

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2. จัดนักเรียนชาย 3 คน หญิง 3 คน นั่งสลับชายหญิงทีละคนเป็นแถวบนเก้าอี้ 6 ตัวได้กี่วิธีเมื่อ

(1) หัวแถวเป็นชาย (2) หัวแถวเป็นหญิง (3) หัวแถวเป็นชายหรือหญิงก็ได้

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3. จะใช้เลขโดด 0 , 1 , 2 , 3 , 4 สร้างจำนวนคู่ 5 หลัก โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมดกี่จำนวน

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4. ห้องเรียนห้องหนึ่งมีประตู 4 ประตู นายเอก และนายตรี ต้องการเดินเข้าและออกจากห้องนี้ จะมีวิธีเดินเข้าและออกของชายทั้งสองคนนี้กี่วิธี เมื่อ

(1) ชายทั้งสองคนจะเข้าและออกประตูใดก็ได้

(2) แต่ละคนเมื่อเข้าประตูใดแล้ว ออกประตูนั้นไม่ได้

(3) ชายทั้งสองคนจะใช้วิธีการเข้าและออกเหมือนกันไม่ได้

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

5. ถ้าครอบครัวหนึ่งต้องการมีบุตร3 คน จงหาจำนวนวิธีที่จะปรากฏผลได้ทั้งหมดของการมีบุตรของครอบครัวนี้

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

6. นายมนต์สิทธิ์เข้าไปรับประทานอาหารเช้าในร้านก๋วยเตี๋ยวชื่อชวนชิม ซึ่งมีเส้นเล็ก เส้นใหญ่ เส้นหมี่ เส้นบะหมี่ และเกาเหลา โดยมีทั้งเนื้อหมู และเนื้อวัว เขาจะสั่งอาหารเช้ามารับประทานได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

7. นักเรียนห้องหนึ่งแบ่งเป็น 7 กลุ่มย่อยเพื่อทำกิจกรรม หลังจากทำกิจกรรมเสร็จแล้ว ครูให้แต่ละกลุ่มสุ่มตัวแทนออกมานำเสนอหน้าชั้น อยากทราบว่า ครูมีวิธีจัดลำดับตัวแทนนักเรียนที่จะออกมานำเสนอได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

8. มีกล่องอยู่ 4 กล่อง แต่ละกล่องมีลูกบอลสีต่างๆ กัน ดังนี้ กล่องที่ 1 มีลูกบอลสีแดง 5 ลูก กล่องที่ 2 มีลูกบอลสีดำ 8 ลูก กล่องที่ 3 มีลูกบอลสีขาว 3 ลูก และกล่องที่ 4 มีลูกบอลสีเขียว 6 ลูก ถ้าเด็กชายเจมส์หยิบลูกบอลจากแต่ละกล่อง ๆ ละ 1 ลูก เขาจะมีวิธีหยิบลูกบอลได้ทั้งหมดกี่วิธี

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

9. จำนวนเต็ม**<u>คี่</u>**ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 กับ 999 มีทั้งหมดกี่จำนวน ถ้า

(1) หลักหน่วยเป็นจำนวนเฉพาะ
(2) หลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ
(3) หลักหน่วย**<u>และ</u>**หลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ
(4) หลักหน่วย**<u>หรือ</u>**หลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ (ent.)

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

ใบแบบฝึกหัดที่ 1 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

****

1. ครูมีรางวัลที่แตกต่างกัน 2 รางวัล เพื่อมอบให้นักเรียน 9 คน จะมีวิธีการแจกรางวัลทั้งสองรางวัลให้แก่เด็กได้กี่วิธีเมื่อ (1) ทั้งสองรางวัลอาจจะให้แก่เด็กคนเดียวกัน
(2) ทั้งสองรางวัลจะให้แก่เด็กคนเดียวกันไม่ได้

2. สมาคมหนึ่งมีสมาชิก 20 คน ถ้าต้องการเลือกกรรมการประกอบด้วยนายกสมาคม รองนายกสมาคม เลขานุการ และเหรัญญิก ตำแหน่งละ 1 คน จะมีวิธีเลือกกี่วิธี

3. จำนวนเต็มบวกห้าหลักซึ่งเป็นจำนวนคู่ และไม่มีเลขในหลักใดซ้ำกัน มีทั้งหมดกี่จำนวน

4. จะหย่อนบัตรชิงโชค 5 ใบ ลงในกล่องรับบัตรชิงโชค 3 กล่อง ได้กี่วิธี

5. หยิบลูกบอลที่แตกต่างกัน 3 ลูก ใส่ในกล่อง 6 ใบ จะมีการใส่ลูกบอลได้กี่วิธีเมื่อ
(1) ลูกบอลแต่ละลูกจะอยู่ในกล่องเดียวกันไม่ได้ (2) มีลูกบอลอย่างน้อย 2 ลูกที่อยู่ในกล่องเดียวกัน

6. จากตัวเลข 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 จะสร้างจำนวนสามหลัก โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้กี่จำนวน เมื่อ
(1) มีค่ามากกว่า 350 (2) เป็นจำนวนที่ 10 หารลงตัว

7. ถ้าต้องการสร้างคำที่ประกอบด้วยตัวอักษร 4 ตัวซึ่งไม่ซ้ำกัน โดยเอามาจากคำ “HISTORY” จะสร้างได้ทั้งหมดกี่คำ เมื่อถือว่าทุกคำที่สร้างได้มีความหมาย และ
(1) ตัวอักษรทั้ง 4 ตัวเป็นตัวใดก็ได้ (2) ตัวอักษรทั้ง 4 ตัวเป็นพยัญชนะล้วน
(3) ต้องขึ้นต้นและลงท้ายด้วยพยัญชนะ (4) คำที่สร้างต้องมีอักษร Y

8. จะสร้างคำที่ประกอบด้วยอักษร 5 ตัว ซึ่งไม่ซ้ำกัน โดยเอามาจากคำ “MATHEMATICS” ได้ทั้งหมดกี่คำ เมื่อคำที่สร้างขึ้นจะมีความหมายหรือไม่ก็ได้ และ
(1) มีสระอย่างน้อย 1 ตัว (2) ขึ้นต้นด้วยสระและลงท้ายด้วยพยัญชนะ

9. จากเมือง ก ไปเมือง ข มีถนนอยู่ 5 สาย และจากเมือง ข ไปเมือง ค มีถนนอยู่ 3 สาย จะมีการเดินทางจาก เมือง ก ไปเมือง ค และเดินทางกลับได้แตกต่างกันกี่วิธี โดยการเดินทางนั้นต้องผ่านเมือง ข

10. ชายคนหนึ่งมีถุงเท้า 2 คู่ สีดำ และน้ำตาล มีเสื้อ 4 ตัว สีดำ น้ำตาล แดงและขาว มีกางเกง 4 ตัว สีดำ น้ำตาล เทาและน้ำเงิน ชายคนนี้จะแต่งกายได้กี่วิธีโดยไม่ให้สีของถุงเท้า เสื้อ และกางเกงซ้ำกัน

11. ชายคนหนึ่งมีกางเกงสีขาว เทา และน้ำเงินอย่างละ 1 ตัว มีเสื้อสีอ่อนที่ไม่ซ้ำกัน 5 ตัว เสื้อสีเข้มที่ไม่ซ้ำกัน 4 ตัว โดยที่เมื่อเขาสวมกางเกงสีเทาหรือขาว จะสามารถใส่ได้กับเสื้อทุกตัว แต่เมื่อเขาสวมกางเกงสีน้ำเงิน จะใส่ได้กับเสื้อสีเข้มเท่านั้น จงหาจำนวนวิธีการแต่งกายของชายคนนี้

12. ในการเลือกประธาน รองประธาน และเหรัญญิก ตำแหน่งละ 1 คน โดยเลือกจากชาย 5 คน หญิง 4 คน จะเลือกกรรมการดังกล่าวได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่ชุด เมื่อประธานต้องเป็นชาย และรองประธานกับเหรัญญิกเป็นคนละเพศกัน

13. จากตัวเลข 2 , 3 , 5 , 6 , 7 และ 9 จะสร้างจำนวนสามหลักโดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน ได้ทั้งหมดกี่จำนวน เมื่อ (1) มีค่าน้อยกว่า 400 (2) เป็นจำนวนคู่ (3) หารด้วย 5 ลงตัวและมีค่ามากกว่า 500

14. กำหนด x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก สมการ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{9999}$ มีทั้งหมดกี่คำตอบ

15. ต้องการพิมพ์จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 2,000 จะต้องกดแป้นพิมพ์หมายเลข 1 เป็นจำนวนทั้งหมดกี่ครั้ง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง **แฟกทอเรียล (factorial)** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจและมีทักษะในการคิดคำนวณเกี่ยวกับแฟกทอเรียล

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกความหมายของ $n!$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้

1.2 คำนวณหาค่าของจำนวนที่อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้

1.3 กระจายแฟกทอเรียลและสร้างแฟกทอเรียลได้

1.4 แก้สมการแฟกทอเรียลได้

2. แนวความคิดหลัก

แฟกทอเรียลเป็นสัญลักษณ์ตัวหนึ่ง โดยที่ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$n!$ หมายถึง $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

ซึ่งความรู้เรื่องนี้จะเป็นประโยชน์ในการเรียนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

3. เนื้อหาสาระ

3.1 นิยามของ $n!$

3.2 การคำนวณเกี่ยวกับสัญลักษณ์แฟกทอเรียล

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

4.1 ให้นักเรียนทบทวนการแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับกฎเกณฑ์เบื้องต้นของการนับ เช่น จัดนักเรียน 10 คน นั่งเก้าอี้ 10 ตัวโดยวางเรียงเป็นแถวยาวได้ทั้งหมดกี่วิธี ซึ่งนักเรียนควรได้คำตอบในรูป $10 \times 9 \times 8 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ จากนั้นครูชี้แจงให้นักเรียนทราบว่า จำนวนที่อยู่ในรูปลักษณะดังกล่าวนี้ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเรียกว่า แฟกทอเรียล

4.2 ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 2 เรื่องแฟกทอเรียล โดยศึกษาเป็นกลุ่มเพื่อให้คนเก่งช่วยเหลือคนที่อ่อนกว่า ขณะเดียวกันครูคอยให้คำแนะนำช่วยเหลือเมื่อนักเรียนมีปัญหา

4.3 ให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของ $n!$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และเขียนคำตอบของโจทย์ตัวอย่างในขั้นตอนที่ 1 โดยใช้สัญลักษณ์แฟกทอเรียล

4.4 ให้นักเรียนฝึกการคำนวณเกี่ยวกับสัญลักษณ์แฟกทอเรียล โดยแต่ละกลุ่มช่วยกันทำใบงานที่ 2 เรื่อง แฟกทอเรียล แล้วจับฉลากหากลุ่มตัวแทนและสุ่มนักเรียนที่เป็นตัวแทนของกลุ่มมานำเสนอวิธีการคิดคำนวณโจทย์แต่ละข้อ โดยครูคอยแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่อง

4.5 ให้นักเรียนกลับไปฝึกทำโจทย์เพิ่มเติมจากใบแบบฝึกหัดที่ 2

5. สื่อ/ แหล่งเรียนรู้

5.1 ใบความรู้ที่ 2 เรื่องแฟกทอเรียล

5.2 ใบงานที่ 2 เรื่องแฟกทอเรียล

5.3 ใบแบบฝึกหัดที่ 2 เรื่องแฟกทอเรียล

6. การวัดและประเมินผล

สังเกตจากการทำใบงาน การนำเสนอ การทำใบแบบฝึกหัด และตรวจใบแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

7.1 ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องการพัฒนา

....

....

....

7.2 แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

....

....

....

7.3 ผลที่เกิดกับผู้เรียน

....

....

....

8. ข้อเสนอแนะ

....

....

....

ใบความรู้ที่ 2 เรื่องแฟกทอเรียล

****

แฟกทอเรียล (factorial)

นิยาม	เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก สัญลักษณ์ $n!$ อ่านว่า เอ็นแฟกทอเรียล หรือแฟกทอเรียลเอ็น
	โดยที่ $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots .3.2.1$

จากนิยามจะเห็นว่า $n!$ ก็คือผลคูณของจำนวนเต็มบวก n กับจำนวนที่ลดลงจาก n ทีละหนึ่งหน่วยจนถึง 1 นั่นเอง ตัวอย่างเช่น $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$1! = 1$

$(n+2)! = (n+2)(n+!)\, n\, (n-1) \ldots (3)(2)(1)$

$(n-3)! = (n-3)(n-4)(n-5) \ldots (3)(2)(1)$

$2n! = 2n(2n-1)(2n-2) \ldots .(3)(2)(1)$

บทนิยามของ $n!$ กล่าวถึงเฉพาะเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แต่บางครั้งจำเป็นต้องใช้ $0!$ จึงต้องกำหนดค่าไว้โดยให้ $0! = 1$ ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังนี้

เนื่องจาก $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots .3.2.1$

$= n(n-1)!$

ถ้าแทน n ด้วย 1 จะได้

$1! = 1(1-1)!$

$1 = 1(0!)$

$= 0!$

นั่นคือ $\mathbf{0! = 1}$

ตัวอย่างที่ 1 1) $3!6! = 3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4{,}320$

2) $\dfrac{8!}{3!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6{,}720$

3) $\dfrac{12!}{9!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1{,}320$

4) $\dfrac{15\,!}{6\,!\,9\,!} = \dfrac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9!}{6\times5\times4\times3\times2\times1\times9!} = \dfrac{15\times14\times13\times12\times11\times10}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 5{,}005$

5) $\dfrac{20\,!}{16\,!\,4\,!} = \dfrac{20\times19\times18\times17}{4\times3\times2\times1} = 4{,}845$

ตัวอย่างที่ 2 เขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปที่ไม่มีแฟกทอเรียลได้ดังนี้

1) $\dfrac{n\,!}{(n-4)\,!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\,!}{(n-4)\,!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$

2) $\dfrac{(n+2)\,!}{(n-1)\,!} = \dfrac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)\,!}{(n-1)\,!} = n(n+1)(n+2)$

3) $\dfrac{(n-1)\,!\,(n+2)\,!}{n\,!(n-2)\,!} = \dfrac{(n-1)(n-2)\,!\,(n+2)(n+1)n\,!}{n\,!(n-2)\,!} = (n-1)(n+2)(n+1)$

4) $\dfrac{n\,!}{(n-r)\,!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)(n-r)\,!}{(n-r)\,!}$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)$

5) $\dfrac{n\,!}{5!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(6)(5!)}{5!} = n(n-1)(n-2)(n-3)\,.\,.\,.\,(6)$

ตัวอย่างที่ 3 เขียนผลคูณในข้อต่อไปนี้ในรูปของแฟกทอเรียลได้ดังนี้

1) $25\cdot24\cdot23\cdot22 = \dfrac{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21!}{21!} = \dfrac{25!}{21!}$

2) $49\cdot50\cdot51\cdot\ldots\cdot100 = \dfrac{100\cdot99\cdot98\cdot\;.\;.\;.\;\cdot49\cdot48!}{48!} = \dfrac{100!}{48!}$

3) $n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\,!}{(n-4)\,!} = \dfrac{n\,!}{(n-4)\,!}$

4) $n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1)\,!}{(n-1)\,!} = \dfrac{(n+3)\,!}{(n-1)\,!}$

5) $n\,(n^2-1)\,(n^2-4)\,(n^2-9) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)(n-3)(n+3)$

$= (n+3)\,(n+2)\,(n+1)(n)\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$

$= \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\,!}{(n-4)\,!}$

$= \dfrac{(n+3)\,!}{(n-4)\,!}$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 720$ แล้ว จงหาค่าของ $(n+1)!$

วิธีทำ จาก $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 720$

จะได้ $\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 720$

$(n+1)(n)(n-1) = 720$

ในที่นี้มีข้อสังเกตว่า $(n+1)(n)(n-1)$ เป็นจำนวนเต็มสามจำนวนที่เรียงถัดกัน ทำให้การแก้สมการนี้ทำได้ง่ายขึ้น

เนื่องจาก $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

ดังนั้น $n = 9$

จึงได้ $(n+1)! = 10!$ Ans.

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $3 \bullet \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-6)!}$ แล้ว จงหาค่า n

วิธีทำ จาก $3 \bullet \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-6)!}$

จะได้ $3 \bullet \frac{n(n-1)!}{(n-4)(n-5)(n-6)!} = \frac{(n-1)!}{(n-6)!}$

$3 \bullet \frac{n}{(n-4)(n-5)} = 1$

$3n = (n-4)(n-5)$

$n^2 - 12n + 20 = 0$

$(n-10)(n-2) = 0$

$n = 10, 2$

เมื่อพิจารณาจากโจทย์ จะเห็นว่า $n \geq 6$

ดังนั้นในที่นี้จึงได้ $n = 10$ Ans.

ตัวอย่างที่ 6 $\sum_{n=1}^{100!} n!$ หารด้วย 240 จะเหลือเศษเท่าไร

วิธีทำ เนื่องจาก $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ $\therefore$ $6!$ หารด้วย 240 ลงตัว

และเนื่องจาก $7! = 7 \times 6!$ $\therefore$ $7!$ ก็หารด้วย 240 ลงตัว

เราจึงพิสูจน์ได้ว่า $n!$ หารด้วย 240 ลงตัว เมื่อ $n \geq 6$, $n \in N$

$\therefore$ $\sum_{n=6}^{100!} n!$ หารด้วย 240 ลงตัว

พิจารณา $\sum_{n=1}^{5} n! = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 = 153$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{100!} n!$ หารด้วย 240 จะเหลือเศษเท่ากับ 153 Ans.

ใบงานที่ 2 เรื่อง แฟกทอเรียล

คำสั่ง หลังจากศึกษาใบความรู้เรื่องแฟกทอเรียลภายในกลุ่มแล้ว จงช่วยกันคิดคำนวณหาคำตอบของโจทย์แต่ละข้อต่อไปนี้ แล้วนำเสนอวิธีการคิดหาคำตอบ

1. จงหาค่าของ

(1) $5! + 7!$ (2) $10! - 8!$ (3) $\dfrac{11!}{9!2!}$

....
....
....
....
....
....

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปที่ไม่มีแฟกทอเรียล

(1) $\dfrac{(n-2)!\,n(n^2-1)}{n!}$ (2) $\dfrac{(n-2)!\,(n+4)!}{(n+1)!(n-3)!}$ (3) $\dfrac{(2n^2)!(n!)^2}{(2n^2-3)!\,(n+1)!\,(n-1)!n}$

....
....
....
....
....
....

3. จงเขียนผลคูณต่อไปนี้ในรูปของแฟกทอเรียล

(1) $9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$ (2) $150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot \ .\ .\ .\ \cdot 99$

(3) $(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ (4) $(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)(n+3)$

(5) $(n^2-81)(n^2-64)(n^2-49)$

....
....
....
....
....
....

4. จงหาค่า n จากสมการ $\frac{(n^2 - 7n + 12)\,n!}{(n-3)!} = 15{,}120$

....

....

....

....

....

5. กำหนด $\frac{8!\,n!}{(n-10)!} = \frac{n!\,10!}{(n-8)!}$ จงหาค่า n

....

....

....

....

....

6. จงหาเศษที่เหลือจากการหาร 47 ! ด้วย 2538

....

....

....

....

....

7. ผลบวกของ $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 50 \cdot 50!$ จะ มีหลักหน่วยเป็นเลขจำนวนใด

....

....

....

....

....

8. จงแสดงว่า $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{(2^n)\,n!}$

....

....

....

....

....

ใบแบบฝึกหัดที่ 2 เรื่อง แฟกทอเรียล

****

1. จงเขียนจำนวนในข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ไม่มีแฟกทอเรียล

(1) $\frac{8\,!}{4\,!}$ (2) $\frac{7\,!}{11\,!}$ (3) $\frac{2\,!\,8\,!\,9\,!}{6\,!\,6\,!}$

(4) $\frac{10\,!}{7\,!\,3\,!}$ (5) $\frac{n\,!}{(n-5)\,!}$ (6) $\frac{(n+1)\,!}{(n-1)\,!}$

(7) $\frac{(n-1)\,!\,(\mathrm{n}+1)\,!}{(n\,!)^2}$ (8) $\frac{n\,!\,(n+2)\,!}{(n-1)\,!\,(\mathrm{n}+1)\,!}$ (9) $\frac{n\,!}{(n-k)\,!}$

2. จงเขียนผลคูณต่อไปนี้ในรูปของแฟกทอเรียล

(1) 100 . 99 . 98 . 97 (2) 9 . 10 . 11 . 12

(3) 20 . 19. 18 . ... 10 (4) (n+2) (n+1) n (n-1)

(5) n (n-1)(n-2) ..... (n-9) (6) n (n-1)(n-2) ..... (n - r + 1)

(7) n (n+1)(n+2) ..... (n + r) (8) 3n (9n^2 - 9n + 2)

3. จงหาค่า n จากสมการในข้อต่อไปนี้

(1) $\frac{(n+3)\,!}{(n-1)\,!} = 1680$ (2) $2 \cdot \frac{(n+4)\,!}{(n-2)\,!} = \frac{(n+5)\,!}{(n-1)\,!}$

(3) $\frac{(n+1)\,!}{n\,!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+2)\,!}{(n+1)\,!}$ (4) $3 \cdot \frac{(2n+4)\,!}{(2n+1)\,!} = 2 \cdot \frac{(n+4)\,!}{n\,!}$

(5) $\frac{n\,!}{(n-4)\,!} = 30 \cdot \frac{n\,!}{(n-5)\,!\,5\,!}$

♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง **วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันในแนวตรง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 4 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจ มีทักษะในการคิดคำนวณเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันในแนวตรงและนำไปแก้โจทย์ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกกฎเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันในแนวตรงได้

1.2 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงของสิ่งของทั้งหมด n สิ่งที่แตกต่างกันได้

1.3 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยจัดเรียงคราวละ r สิ่งได้

2. แนวความคิดหลัก

2.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นวิธีการนำสิ่งของจำนวนหนึ่งมาจัดเรียง โดยถือลำดับหรือตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญ ซึ่งความรู้เรื่องนี้จะเป็นประโยชน์ในการเรียนเรื่องความน่าจะเป็น

2.2 ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง นำสิ่งของทั้ง n สิ่งนี้มาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง จะมีวิธีจัดเรียงได้ $n!$ วิธี

2.3 ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง นำสิ่งของมาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงเพียงคราวละ r สิ่งจะมีวิธีจัดเรียงได้ $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

3. เนื้อหาสาระ

3.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง (กฎข้อที่ 3)

3.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของบางสิ่งจากสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง (กฎข้อที่ 4)

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1 - 2

4.1 ทบทวนกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ และแฟกทอเรียล โดยให้นักเรียนยกตัวอย่างโจทย์ที่ใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ หาคำตอบ และเขียนคำตอบให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียล

4.2 ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องกฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ และแฟกทอเรียล ทำใบกิจกรรมที่ 3.1 โดยร่วมกันทำเป็นกลุ่ม

4.3 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มสรุปกฎเกี่ยวกับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง (กฎข้อที่ 3)

4.4 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 3.1 โดยให้แต่ละกลุ่มบันทึกข้อประเด็นที่มีปัญหาหรือไม่เข้าใจ

4.5 ครูรวบรวมประเด็นปัญหาของนักเรียนแต่ละกลุ่ม ถ้าประเด็นปัญหาใดตรงกันทุกกลุ่ม ครูจะใช้คำถามประกอบการอธิบาย แต่ถ้าประเด็นปัญหาที่ไม่ตรงกันทุกกลุ่ม จะสุ่มให้กลุ่มที่เข้าใจอธิบายให้กลุ่มที่ไม่เข้าใจ โดยครูคอยช่วยเสริมและแก้ไขข้อบกพร่อง

4.6 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำใบงานที่ 3

ชั่วโมงที่ 3 - 4

4.7 ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องกฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ และแฟกทอเรียล ทำใบกิจกรรมที่ 3.2 โดยร่วมกันคิดเป็นกลุ่ม

4.8 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มสรุปกฎเกี่ยวกับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของบางสิ่งจากสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง (กฎข้อที่ 4)

4.9 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 3.2 โดยให้แต่ละกลุ่มบันทึกข้อประเด็นที่มีปัญหาหรือไม่เข้าใจ

4.10 ครูรวบรวมประเด็นปัญหาของนักเรียนแต่ละกลุ่ม ถ้าประเด็นปัญหาใดตรงกันทุกกลุ่ม ครูจะใช้คำถามประกอบการอธิบาย แต่ถ้าประเด็นปัญหาที่ไม่ตรงกันทุกกลุ่ม จะสุ่มให้กลุ่มที่เข้าใจอธิบายให้กลุ่มที่ไม่เข้าใจ โดยครูคอยช่วยเสริมและแก้ไขข้อบกพร่อง

4.11 ให้นักเรียนไปฝึกทักษะเพิ่มเติมจากการทำโจทย์ในใบแบบฝึกหัดที่ 3

5. สื่อ/ แหล่งการเรียนรู้

5.1 ใบความรู้ที่ 3.1 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

5.2 ใบกิจกรรมที่ 3.1 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

5.3 ใบงานที่ 3 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

5.4 ใบความรู้ที่ 3.2 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของบางสิ่งจากสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

5.5 ใบกิจกรรมที่ 3.2 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของบางสิ่งจากสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

5.6 ใบแบบฝึกหัดที่ 3 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันในแนวตรง

6. การวัดและประเมินผล

สังเกตจากการทำใบกิจกรรม ใบงาน การนำเสนอ และการตรวจใบแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังการสอน

7.1 ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องการพัฒนา

………

………

………

………

7.2 แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

………

………

………

………

7.3 ผลที่เกิดกับผู้เรียน

………

………

………

………

8. ข้อเสนอแนะ

………

………

………

………

ใบความรู้ที่ 3.1 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

****

วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation)

เป็นวิธีนำสิ่งของจำนวนหนึ่งมาจัดเรียงโดยถือลำดับหรือตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญ ซึ่งก็คือวิธีเดียวกับหลักการนับเบื้องต้น แต่มีข้อแม้ว่าสิ่งใดที่นำไปใช้ในตำแหน่งใดหรือขั้นตอนใดแล้ว จะนำไปใช้ในตำแหน่งอื่นหรือขั้นตอนอื่นอีกไม่ได้ เช่น

การยืนเรียงแถวของคน 5 คน

การนำจดหมาย 3 ฉบับ ใส่ในซอง 3 ซอง

การสร้างเลข 3 หลัก โดยที่เลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

การจัดคน 6 คน นั่งเก้าอี้ที่เรียงเป็น 2 แถวๆ ละ 3 คน

การนั่งรอบโต๊ะกลมของคน 7 คน

วิธีเรียงสับเปลี่ยนที่จะกล่าวถึงมี 2 ลักษณะคือ

1. วิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง
2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม

และในแต่ละลักษณะจะแยกเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน

วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

โดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

1. หาจำนวนวิธีจัดคน 5 คนยืนเรียงแถว ซึ่งประกอบด้วยการทำงาน 5 ขั้นตอนจะได้จำนวนวิธีการจัดทั้งหมดเท่ากับ 5 x 4 x 3 x 2 x 1 วิธี ซึ่งเท่ากับ 5 ! วิธีนั่นเอง

2. หาจำนวนวิธีสลับที่ตัวอักษรในคำ EQUATION ซึ่งประกอบด้วยการทำงาน 8 ขั้นตอน จะได้จำนวนวิธีสลับที่ทั้งหมดเท่ากับ 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 ซึ่งเท่ากับ 8 ! วิธีนั่นเอง

จากตัวอย่างดังกล่าวนี้ เป็นการนำสิ่งของ**ทั้งหมด**มาเรียงสับเปลี่ยนหรือจัดลำดับ ซึ่งในกรณีทั่วไปมีกฎดังต่อไปนี้

กฎข้อที่ 3	ถ้ามีของ n สิ่งที่แตกต่างกัน ต้องการนำสิ่งของ**<u>ทั้งหมด</u>**มาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ n ! วิธี

ตัวอย่างที่ 1 จะจัดเรียงหนังสือ 7 เล่มที่แตกต่างกันบนชั้นหนังสือได้กี่วิธี

วิธีทำ เพราะว่าหนังสือ 7 เล่มแตกต่างกัน และนำมาจัดเรียงลำดับทั้ง 7 เล่ม

ดังนั้นจึงนำมาจัดเรียงได้ทั้งหมด 7! = 5,040 วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 2 จะสร้างคำโดยสลับอักษรในคำว่า "SECOND" ได้ทั้งหมดกี่คำ ถ้าถือว่าทุกคำที่สร้างขึ้นมีความหมาย และให้ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยสระเท่านั้น

วิธีทำ อักษรในคำที่กำหนดมีทั้งหมด 6 ตัว แยกเป็นพยัญชนะ 4 ตัว กับสระอีก 2 ตัว

จะสร้างคำโดยการสลับอักษรทั้ง 6 ตัว แต่ต้องสลับตามเงื่อนไขที่กำหนด กล่าวคือ

ตัวขึ้นต้นต้องเป็นสระ จึงเขียนตัวขึ้นต้นได้ 2 วิธี เพราะมีสระให้เลือกได้ 2 ตัว

ตัวลงท้ายก็ต้องเป็นสระ จึงเขียนตัวลงท้ายได้ 1 วิธี เพราะมีสระเหลือเพียงตัวเดียว

ส่วนอักษร 4 ตัวที่เหลือ สลับที่โดยไม่มี เงื่อนไขใด จึงสลับที่ได้ 4! วิธี

โดยกฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ จึงได้ว่า

จะสร้างคำได้ทั้งหมด $2 \times 1 \times 4! = 48$ คำ <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 3 มีหนังสือที่แตกต่างกัน 9 เล่ม ในจำนวนนี้เป็นหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม จะจัดเรียงหนังสือทั้งหมด บนชั้นหนังสือเดียวกันได้กี่วิธีเมื่อ

(1) คณิตศาสตร์อยู่ติดกันทั้ง 3 เล่ม (2) คณิตศาสตร์อยู่ติดกันทั้ง 3 เล่มไม่ได้

(3) คณิตศาสตร์ทั้ง 3 เล่มอยู่แยกจากกัน

วิธีทำ มีหนังสือ 9 เล่ม จะจัดลำดับทั้ง 9 เล่ม แต่เป็นการจัดลำดับโดยมีเงื่อนไขต่างๆ กัน

(1) เนื่องจากต้องการให้คณิตศาสตร์อยู่ติดกันทั้ง 3 เล่ม ใช้วิธีการจินตนาการ โดยนำหนังสือทั้ง 3 เล่มนี้มามัดไว้ด้วยกันเป็น 1 มัด

คณิต 1 คณิต 2 คณิต 3

ดังนั้นหนังสือ 9 เล่ม จึงคิดเสมือนเป็นหนังสือเพียง 7 เล่ม

ในการจัดเรียงหนังสือทั้งหมด ประกอบด้วยการทำงาน 2 ขั้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ 1 จัดเรียงหนังสือ 7 เล่ม ซึ่งจัดได้ 7! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ในแต่ละวิธี จัดเรียงหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่มในมัด ซึ่งจัดได้ 3! วิธี

ดังนั้นจึงได้จำนวนวิธีจัดเรียงหนังสือทั้งหมดเท่ากับ $7! \times 3! = 5{,}040 \times 6 = 30{,}240$ วิธี <u>Ans</u>.

(2) ในข้อนี้ หนังสือคณิตศาสตร์จะอยู่ติดกันทั้ง 3 เล่มเหมือนในข้อ (1) ไม่ได้ จึงใช้วิธีคิดในทางตรงกันข้าม กล่าวคือ

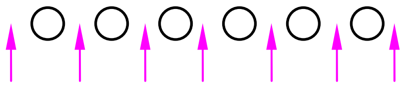
จำนวนวิธีจัดโดยไม่ให้คณิตศาสตร์อยู่ติดกันทั้ง 3 เล่ม เท่ากับ จำนวนวิธีจัดหนังสือทั้งหมดแบบไม่มีเงื่อนไข ลบด้วยจำนวนวิธีจัดหนังสือโดยให้คณิตศาสตร์อยู่ติดกันทั้ง 3 เล่ม

เนื่องจากจำนวนวิธีจัดหนังสือทั้งหมดแบบไม่มีเงื่อนไข = 9! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีจัดโดยที่คณิตศาสตร์อยู่ติดกันทั้ง 3 เล่มไม่ได้ = $9! - 7!\,3! = 332{,}640$ วิธี <u>Ans</u>.

(3) ในข้อนี้ต่างกับข้อ (2) คือคณิตศาสตร์ 3 เล่มต้องแยกจากกันทั้งหมด จะอยู่ติดกันเพียง 2 เล่มก็ไม่ได้ วิธีการง่ายๆ ที่จะไม่ให้คณิตศาสตร์อยู่ติดกันเลย ก็คือให้มีหนังสือเล่มอื่น คั่นระหว่างหนังสือคณิตศาสตร์เสมอ

ดังนั้นควรจัดหนังสืออื่นๆ 6 เล่มก่อน หลังจากนั้นนำคณิตศาสตร์แทรกตามลูกศร ดังรูป



จึงประกอบด้วยการทำงาน 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 จัดหนังสือ 6 เล่ม จัดได้ 6! วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดหนังสือ 3 เล่ม ใน 7 ตำแหน่ง จัดได้ 7 x 6 x 5 = 210 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีจัดโดยให้คณิตศาสตร์อยู่แยกจากกัน = 6! x 210 = 151,200 วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 4 จัดชาย 6 คน หญิง 6 คน ยืนเรียงแถว ได้กี่วิธีเมื่อให้ชายกับหญิงยืนสลับกันทีละ

(1) 1 คน (2) 2 คน (3) 3 คน

วิธีทำ (1) ถ้าให้ □ แทนชาย และ ○ แทนหญิง จะได้รูปแบบของแถว 2 รูปแบบ ดังรูป

รูปแบบที่ 1 ชายยืนหัวแถว

□ ○ □ ○ □ ○ □ ○ □ ○ □ ○

รูปแบบที่ 2 หญิงยืนหัวแถว

○ □ ○ □ ○ □ ○ □ ○ □ ○ □

การหาจำนวนวิธีจัดคนทั้งหมดยืนในแต่ละรูปแบบ อาจคิดได้ 2 แนว กล่าวคือ

แนวที่ 1 ถ้าแบ่งการทำงานเป็น 12 ขั้นตอน คือจัดคนยืนใน 12 ตำแหน่ง จะได้จำนวนวิธีจัดคนทั้งหมดในแต่ละรูปแบบได้ = 6 x 6 x 5 x 5 x 4 x 4 x 3 x 3 x 2 x 2 x 1 x 1 วิธี

= 6! 6! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีจัดคนทั้งหมด 2 รูปแบบจึงเท่ากับ 6! 6! + 6! 6! = 2 (6! 6!) วิธี

แนวที่ 2 แบ่งการทำงานเป็น 2 ขั้นตอนใหญ่ คือ จัดชายยืน และจัดหญิงยืนจะได้จำนวนวิธีจัดชาย 6 คน ยืน 6 ตำแหน่ง = 6! วิธี

และ จำนวนวิธีจัดหญิง 6 คน ยืน 6 ตำแหน่ง = 6! วิธี

จึงได้จำนวนวิธีจัดคนทั้งหมดในแต่ละรูปแบบ = 6! 6! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีจัดคนทั้งหมด 2 รูปแบบจึงเท่ากับ 6! 6! + 6! 6! = 2 (6! 6!) วิธี <u>Ans</u>.

(2) ทำนองเดียวกับข้อ (1) การจัดให้ยืนโดยสลับชาย หญิง ทีละ 2 คน ก็มี 2 รูปแบบ ดังรูป

□ □ ○ ○ □ □ ○ ○ □ □ ○ ○

หรือ ○ ○ □ □ ○ ○ □ □ ○ ○ □ □

และในแต่ละรูปแบบ จัดชาย 6 คน ยืนใน 6 ตำแหน่งได้ 6! วิธี และ

จัดหญิง 6 คน ยืนใน 6 ตำแหน่งได้ 6! วิธี

จึงได้จำนวนวิธีจัดคนทั้งหมดในแต่ละรูปแบบ = 6! 6! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีจัดคนทั้งหมด 2 รูปแบบจึงเท่ากับ 6! 6! + 6! 6! = 2 (6! 6!) วิธี <u>Ans</u>.

(3) ทำนองเดียวกับข้อ (1) และ (2) การจัดให้ยืนโดยสลับชาย หญิง ทีละ 3 คน ก็มี 2 รูปแบบ ดังรูป

□ □ □ ○ ○ ○ □ □ □ ○ ○ ○

หรือ ○ ○ ○ □ □ □ ○ ○ ○ □ □ □

และในแต่ละรูปแบบ จัดชาย 6 คน ยืนใน 6 ตำแหน่งได้ 6! วิธี และ

จัดหญิง 6 คน ยืนใน 6 ตำแหน่งได้ 6! วิธี

จึงได้จำนวนวิธีจัดคนทั้งหมดในแต่ละรูปแบบ = 6! 6! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีจัดคนทั้งหมด 2 รูปแบบจึงเท่ากับ 6! 6! + 6! 6! = 2 (6! 6!) วิธี <u>Ans</u>.

หมายเหตุ ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกันสองชุด ๆ ละ n สิ่งเท่า ๆ กัน นำสิ่งของทั้งสองชุดมาวางเรียงเป็นแถวยาว โดยวางสลับกันระหว่างสิ่งของสองชุดนั้น ถ้าสลับกันทีละ k สิ่ง เมื่อ k หาร n ลงตัว จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ 2 x n ! x n ! วิธี

ตัวอย่างที่ 5 นักเรียน 6 คน เข้าแถวเป็น 2 แถว ๆ ละ 3 คนได้กี่วิธี

วิธีทำ ลักษณะของแถว จะเป็นดังรูป

ตำแหน่งที่	1	2	3
	○	○	○
	○	○	○
ตำแหน่งที่	4	5	6

จะเห็นว่าในแต่ละตำแหน่งจะจัดให้ใครยืนก็ได้ ซึ่งไม่แตกต่างกับการจัดคน 6 คน ยืนแถวเดียว ดังนั้นจึงจัดคนทั้งหมดเข้าแถวได้ 6! = 720 วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 6 มีสามีภรรยา 6 คู่ มาร่วมในงานเลี้ยงแห่งหนึ่ง ถ้าให้คนทั้งหมดมานั่งบนม้านั่ง 12 ตัว ซึ่งวางเรียงเป็น 2 แถวๆ ละ 6 ตัว จะมีวิธีการนั่งกี่วิธีเมื่อ

(1) ผู้หญิงนั่งแถวเดียวกัน (2) สามีภรรยาแต่ละคู่นั่งติดกันและแถวเดียวกัน

วิธีทำ (1) ถ้าให้ □ แทนชาย และ ○ แทนหญิง ตัวอย่างการจัดให้นั่ง อาจเป็นดังรูป

แถวหลัง □ □ □ □ □ □
แถวหน้า ○ ○ ○ ○ ○ ○

ซึ่งผู้หญิงจะนั่งแถวหน้าหรือหลังก็ได้
ดังนั้นผู้หญิงจึงเลือกแถวนั่งได้ 2 วิธี
ในแต่ละวิธีผู้หญิง 6 คนสลับที่กันเองได้ 6! วิธี
และในแต่ละวิธีชายก็สลับที่กันเองได้ 6! วิธี
จึงได้จำนวนวิธีการนั่งทั้งหมดเท่ากับ 2 (6! 6!) วิธี <u>Ans</u>.

(2) รูปแบบ**หนึ่ง**ของการนั่งอาจเป็นไปได้ดังรูป

แถวหลัง □ ○ □ ○ □ ○
แถวหน้า ○ □ ○ □ ○ □

เนื่องจากสามีภรรยาแต่ละคู่ต้องนั่ง**<u>ติดกัน</u>** ดังนั้นในการคิดจึงให้สามีภรรยา 1 คู่เสมือนเป็น 1 คน ในที่นี้จึงเสมือนกับจัดคนทั้งหมด 6 คน นั่ง 2 แถว ๆ ละ 3 คน ซึ่งจัดได้ 6! วิธี

ในแต่ละวิธี สามีภรรยาคู่ที่ 1 สลับที่กันได้ 2! วิธี
ในแต่ละวิธี สามีภรรยาคู่ที่ 2 สลับที่กันได้ 2! วิธี
……………………………………………..
……………………………………………..
ในแต่ละวิธี สามีภรรยาคู่ที่ 6 สลับที่กันได้ 2! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีการนั่งทั้งหมดจึงเท่ากับ $6!\,(2!)^6$ วิธี <u>Ans</u>.

##

ใบกิจกรรมที่ 3.1 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

****

จงใช้ความรู้เรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ และเรื่องแฟกทอเรียล เติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1. จัดนักเรียน 3 คน นั่งเก้าอี้เป็นแถว 3 ตัว ได้ ………………………………………… วิธี
2. เขียนคำตอบในข้อ 1 ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น …………………………………………..…………
3. จัดนักเรียน 10 คน ยืนเข้าแถวได้ทั้งหมด ………………………………………….. วิธี
4. เขียนคำตอบในข้อ 3 ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น …………………………………………...…………
5. จัดเรียงหนังสือ 9 เล่มที่แตกต่างกัน เป็นแถวบนชั้นหนังสือเดียวกัน ได้ …………………….. วิธี
6. เขียนคำตอบในข้อ 5 ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ……………………ใช้เลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 เขียนจำนวนห้าหลัก โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน ได้ ……………… วิธี
7. เขียนคำตอบในข้อ 7 ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น …………………………………………………..……
8. ในข้อ 7 ถ้าตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้ จะได้คำตอบเท่ากับ …………………………… วิธี ซึ่งเป็นคำตอบที่ (เท่ากัน หรือ ไม่เท่ากัน) …………………………………กับคำตอบในข้อ 7
10. นำลูกบอล 6 ลูกที่แตกต่างกัน ใส่ลงในกล่อง 6 ใบ โดยที่กล่องแต่ละใบ ต้องมีลูกบอลอยู่เพียงลูกเดียว จะมี วิธีใส่ลูกบอลได้ …………………………………………………. วิธี
11. คำตอบที่ได้ในข้อ 10 เขียนให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียล (ได้ หรือ ไม่ได้) ……………………………………….
ถ้าเขียนได้ จะเขียนได้เป็น …………………..……………………………..………………………………
12. จากข้อ 10 ถ้าในกล่องแต่ละใบ สามารถใส่ลูกบอลได้มากกว่า 1 ลูก จะได้คำตอบเท่ากับ………..…......วิธี ซึ่งเป็นคำตอบที่ (เท่ากัน หรือ ไม่เท่ากัน) …………………… กับคำตอบในข้อ 10
13. จากการจัดสิ่งของดังกล่าวในโจทย์แต่ละข้อข้างต้น ถ้าลำดับหรือตำแหน่งของสิ่งของมีการเปลี่ยนแปลงจะถือว่าวิธีจัดนั้นเป็น (วิธีเดียวกัน หรือ คนละวิธี) ………………………………………………..…………
14. จากข้อ 13 จะเห็นว่าการจัดสิ่งของในที่นี้ (ให้ หรือ ไม่ให้) ……………… ความสำคัญของลำดับ
15. การนำสิ่งของจำนวนหนึ่งมาจัดเรียง โดยถือลำดับหรือตำแหน่งของสิ่งของเป็นสำคัญ โดยมีข้อแม้ว่าสิ่งใดที่นำไปใช้ในตำแหน่งใดหรือขั้นตอนใดแล้ว จะนำไปใช้ในตำแหน่งอื่นหรือขั้นตอนอื่นอีกไม่ได้เรียกว่า "วิธีเรียงสับเปลี่ยน" ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวเลขโดดทั้งหมดเท่ากับ …………………… วิธี
16. วิธีเรียงสับเปลี่ยนที่นักเรียนจะได้เรียน มี 2 ลักษณะ คือ วิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง และวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม ในโจทย์แต่ละข้อที่กล่าวมาเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนลักษณะ ……………………………...…..
17. จากข้อมูล 16 ข้อข้างต้น สรุปได้ว่า ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง จะนำสิ่งของทั้ง n สิ่งนั้น มาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงได้ทั้งหมด ……………………………………… วิธี (กฎข้อที่ 3)

****

ใบงานที่ 3 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

ในแต่ละกลุ่มจงช่วยกันวิเคราะห์โจทย์ต่อไปนี้ แล้วแสดงวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียด

1. ถ้าต้องการสร้างคำ โดยการสลับที่ตัวอักษรในคำว่า "NUMBER" จะสร้างได้ทั้งหมดกี่คำ โดยคำที่สร้างไม่จำเป็นต้องมีความหมายและ

(1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) ลงท้ายด้วยสระ

(3) ลงท้ายด้วยพยัญชนะ (4) ขึ้นต้นด้วยสระและลงท้ายด้วยพยัญชนะ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. มีนักเรียน 7 คน ในจำนวนนี้มีนาย ก และนาย ข รวมอยู่ด้วย ถ้าจัดคนทั้งหมดนั่งบนเก้าอี้ที่วางเรียงเป็นแถวยาว 7 ตัว จะมีวิธีการนั่งทั้งหมดกี่วิธีเมื่อ

(1) นาย ก นั่งกลางเสมอ (2) นาย ก นั่งริมเสมอ

(3) นาย ก กับนาย ข นั่งติดกัน (4) นาย ก กับ นาย ข นั่งแยกกัน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. จงหาจำนวนวิธีในการจัดให้ชาย 5 คน หญิง 4 คน นั่งบนเก้าอี้ที่วางเรียงเป็นแถวยาว 9 ตัว เมื่อ

(1) ไม่มีหญิง 2 คนใดเลยนั่งติดกัน (2) ไม่มีชาย 2 คนใดเลยนั่งติดกัน

....

....

....

....

....

....

4. ถ้าต้องการนำตัวเลข 1 , 2 , 3 , ... , 9 ใส่ในช่องตารางที่กำหนดให้ช่องละ 1 ตัว จะมีวิธีใส่กี่วิธี เมื่อต้องการให้เลข 1 , 2 และ 3

(1) อยู่แถวเดียวกัน

(2) อยู่คนละแถว

....

....

....

....

....

....

5. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่มี 4 หลักทั้งหมดที่สร้างได้จากตัวเลข 1 , 2 , 3 และ 4 โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

....

....

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 3.2 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของบางสิ่งจากสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

****

วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของบางสิ่งจากสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกัน ในแนวตรง

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักเรียนได้ศึกษาเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรงมาแล้ว ซึ่งเป็นการนำสิ่งของทั้งหมดที่มีอยู่มาจัดเรียงลำดับ แต่ในหัวข้อนี้จะเป็นการนำสิ่งของเพียงบางสิ่ง จากสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันซึ่งมีอยู่ มาเรียงสับเปลี่ยนหรือจัดลำดับ เมื่อใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

1. หาจำนวนวิธีจัดคน 8 คน ให้นั่งเก้าอี้ที่เรียงเป็นแถวยาว 5 ตัว ซึ่งประกอบด้วยการทำงาน 5 ขั้นตอน
   จะได้จำนวนวิธีเท่ากับ $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ วิธี ซึ่งสามารถเขียนในรูปแฟกทอเรียลเป็น
   $\frac{8!}{3!} = \frac{8!}{(8-5)!}$ วิธีนั่นเอง
2. หาจำนวนวิธีสร้างจำนวน 4 หลัก จากเลขโดด 2 , 4 , 5 , 7 , 8 , 9 โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน ซึ่งประกอบด้วยการทำงาน 4 ขั้นตอน
   จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $6 \times 5 \times 4 \times 3$ วิธี ซึ่งสามารถเขียนในรูปแฟกทอเรียลเป็น
   $\frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$ วิธีนั่นเอง

จากตัวอย่างดังกล่าวนี้ เป็นการนำสิ่งของเพียงบางสิ่งจากสิ่งของทั้งหมดที่มีอยู่มาเรียงสับเปลี่ยนหรือจัดลำดับ ซึ่งในกรณีทั่วไปมีกฎดังต่อไปนี้

กฎข้อที่ 4 ถ้ามีของ n สิ่งที่แตกต่างกัน ต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงเพียง r สิ่ง
จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี $(r \leq n)$

ข้อตกลง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยจัดคราวละ r สิ่ง จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(n , r)

ดังนั้นจึงได้ $\boxed{P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$

หมายเหตุ 1) กรณี r = n จะได้

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

ซึ่งก็คือจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดในแนวตรงนั่นเอง

2) หนังสือบางเล่มใช้สัญลักษณ์ ${}^{n}P_{r}$ หรือ nPr หรือ $P_{n,r}$ แทน P(n , r)

ตัวอย่างที่ 1 $P(4\,,2) = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$

$P(9\,,3) = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$

$P(15\,,5) = \dfrac{15!}{(15-5)!} = \dfrac{15!}{10!} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 = 360{,}360$ <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $3.\ P(n\,,4) = P(n-1\,,5)$

วิธีทำ $3.\ P(n\,,4) = P(n-1\,,5)$

$$3 \cdot \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-5)!}$$

$$3 \cdot \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-6)!}$$

$$3 \cdot \frac{n(n-1)!}{(n-4)(n-5)(n-6)!} = \frac{(n-1!}{(n-6)!}$$

$$\frac{3n}{(n-4)(n-5)} = 1$$

$$n^2 - 12n + 20 = 0$$

$$(n-10)(n-2) = 0$$

$$n = 10\,,2$$

แต่ในโจทย์ข้อนี้ $n = 2$ ใช้ไม่ได้

ดังนั้น $n = 10$ <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 3 มีหนังสือ 10 เล่ม จะจัดเรียงบนชั้นหนังสือซึ่งมีที่ว่าง 3 ที่ได้กี่วิธี

วิธีทำ มีหนังสือทั้งหมด 10 เล่ม แตกต่างกัน แต่นำมาจัดเรียงเพียงคราวละ 3 เล่ม

ดังนั้น จะจัดเรียงบนชั้นหนังสือได้ $P(10\,,3) = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!}$ วิธี

$= 10(9)(8)$ วิธี

$= 720$ วิธี <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 4 ในการแข่งขันวิ่งทนครั้งหนึ่ง มีผู้สมัคร 5 คน แต่วิ่งถึงเส้นชัยเพียง 3 คน จะมีผู้ชนะที่ 1 ที่ 2 และที่ 3 ได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ มีผู้สมัครทั้งหมด 5 คน แต่นำมาจัดเรียงลำดับเพียงคราวละ 3 คน

ดังนั้น จะจัดลำดับผู้เข้าแข่งขันได้ทั้งหมด $P(5\,,3) = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!}$ วิธี

$= 5(4)(3)$ วิธี

$= 60$ วิธี <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 5 ถ้าต้องการสร้างคำซึ่งประกอบด้วยอักษร 5 ตัวที่ไม่ซ้ำกัน โดยเลือกอักษรจากคำว่า "PERMUTATION" จะสร้างได้ทั้งหมดกี่คำ โดยที่คำที่สร้างไม่จำเป็นต้องมีความหมายและ

(1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) อักษรตัวแรกเป็นพยัญชนะ

(3) อักษรตัวกลางเป็นสระ (4) มีสระอย่างน้อย 1 ตัว

วิธีทำ ในคำว่า "PERMUTATION" มีอักษรที่แตกต่างกันทั้งหมด 10 ตัว แยกเป็นพยัญชนะ 5 ตัว และสระ 5 ตัว

การสร้างคำที่ประกอบด้วยอักษร 5 ตัว ไม่ซ้ำกัน จากอักษรที่แตกต่างกัน 10 ตัว ก็คือการนำตัวอักษร 10 ตัวที่แตกต่างกันมาจัดลำดับคราวละ 5 ตัว นั่นเอง

(1) เมื่อไม่มีเงื่อนไขใดๆ จึงสร้างคำได้ทั้งหมด $P(10, 5) = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!}$ คำ

$= 10(9)(8)(7)(6)$ คำ

$= 30{,}240$ คำ <u>Ans.</u>

(2) เมื่ออักษรตัวแรกต้องเป็นพยัญชนะ ซึ่งพยัญชนะมีอยู่ 5 ตัว

ขั้นที่ 1 เขียนอักษรตัวแรก จึงเขียนได้ 5 วิธี

ขั้นที่ 2 เขียนอักษรอีก 4 ตัวที่เหลือ ซึ่งจะเป็นพยัญชนะหรือสระก็ได้

ในแต่ละวิธีของการเขียนอักษรตัวแรก จะมีอักษรเหลืออีก 9 ตัว จึงเขียนอักษร 4 ตัวที่เหลือได้ $P(9, 4)$ วิธี

ดังนั้น จะสร้างคำได้ทั้งหมด $5 \times P(9, 4) = 5 \times \frac{9!}{5!}$ คำ

$= 5(9)(8)(7)(6) = 15{,}120$ คำ <u>Ans.</u>

(3) เมื่ออักษรตัวกลางต้องเป็นสระ ซึ่งสระมีอยู่ 5 ตัว

ขั้นที่ 1 เขียนอักษรตัวกลาง จึงเขียนได้ 5 วิธี

ขั้นที่ 2 เขียนอักษรอีก 4 ตัวที่เหลือ ซึ่งจะเป็นพยัญชนะหรือสระก็ได้

ในแต่ละวิธีของการเขียนอักษรตัวกลาง จะมีอักษรเหลืออีก 9 ตัว จึงเขียนอักษร 4 ตัวที่เหลือได้ $P(9, 4)$ วิธี

ดังนั้น จะสร้างคำได้ทั้งหมด $5 \times P(9, 4) = 5 \times \frac{9!}{5!}$ คำ

$= 5(9)(8)(7)(6) = 15{,}120$ คำ <u>Ans.</u>

(4) ในข้อนี้ใช้การคำนวณแบบตรงกันข้าม กล่าวคือ

จำนวนวิธีสร้างคำที่ประกอบด้วยสระอย่างน้อย 1 ตัว เท่ากับ จำนวนวิธีสร้างคำแบบไม่มีเงื่อนไข ลบด้วย จำนวนวิธีสร้างคำที่ไม่มีสระเลย (พยัญชนะล้วน)

เนื่องจากสร้างคำที่ประกอบด้วยพยัญชนะล้วนได้ $= 5! = 120$ คำ

ดังนั้นสร้างคำที่ประกอบด้วยสระอย่างน้อย 1 ตัว ได้ $= 30{,}240 - 120 = 30{,}120$ คำ <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 6 เรือลำหนึ่งต้องการให้สัญญาณกับเรืออีกลำหนึ่ง โดยการใช้ธงสัญญาณซึ่งเป็นธงสีแตกต่างกัน 5 ผืนในการให้สัญญาณแต่ละสัญญาณจะต้องใช้ธงอย่างน้อย 1 ผืน และธงจะถูกชักเรียงบนเชือกเส้นเดียวกัน จงหาว่าเรือลำนี้จะให้สัญญาณได้ทั้งหมดกี่สัญญาณ

วิธีทำ มีธงสีแตกต่างกัน 5 ผืน แต่ในการใช้ธงให้สัญญาณนั้น อาจใช้ธงเพียง 1 ผืน 2 ผืน 3 ผืน 4 ผืน หรือ 5 ผืนก็ได้ ดังนั้นจึงคิดเป็นกรณีต่างๆ ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ใช้ธง 1 ผืน จะให้สัญญาณได้ทั้งหมด 5 สัญญาณ เพราะใช้ผืนใดก็ได้ จากที่มี 5 ผืน

กรณีที่ 2 ใช้ธง 2 ผืน จะให้สัญญาณได้ทั้งหมด $P(5, 2) = 20$ สัญญาณ
เพราะเป็นการจัดลำดับธงคราวละ 2 ผืน จากธงทั้งหมด 5 ผืน

กรณีที่ 3 ใช้ธง 3 ผืน จะให้สัญญาณได้ทั้งหมด $P(5, 3) = 60$ สัญญาณ
เพราะเป็นการจัดลำดับธงคราวละ 3 ผืน จากธงทั้งหมด 5 ผืน

กรณีที่ 4 ใช้ธง 4 ผืน จะให้สัญญาณได้ทั้งหมด $P(5, 4) = 120$ สัญญาณ
เพราะเป็นการจัดลำดับธงคราวละ 4 ผืน จากธงทั้งหมด 5 ผืน

กรณีที่ 5 ใช้ธงทั้ง 5 ผืน จะให้สัญญาณได้ทั้งหมด $5! = 120$ สัญญาณ
เพราะเป็นการจัดลำดับธงทั้งหมด 5 ผืน

ดังนั้น เรือลำนี้จะให้สัญญาณได้ทั้งหมด $5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$ สัญญาณ <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 7 ถ้านำเลขโดด 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ซึ่งมีอย่างละตัว มาจัดเรียงเป็นเลข 4 หลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด จงหาผลบวกของเลขทั้งหมดที่ได้จากการจัดเรียงนี้

วิธีทำ เนื่องจากมีเลขโดดที่แตกต่างกันอยู่ 6 ตัว แต่นำมาจัดเรียงเพียงคราวละ 4 ตัว

ดังนั้นจะได้เลข 4 หลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด $= P(6, 4) = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!}$
$= 360$ จำนวน

โดยในทั้งหมด 360 จำนวนนั้น พบว่าเลขโดดในหลักหน่วยสามารถเป็นเลข

1 , 2 , 3 , 4 , 5 หรือ 6 ได้อย่างละ $\dfrac{360}{6} = 60$ วิธี

ดังนั้น ผลบวกของเลขโดดในหลักหน่วยทั้งหมดมีค่าเป็น

$(1 \times 60) + (2 \times 60) + (3 \times 60) + (4 \times 60) + (5 \times 60) + (6 \times 60) = 1{,}260$

ทำนองเดียวกัน จะได้

ผลบวกของเลขโดดในหลักสิบ หลักร้อย และหลักพัน แต่ละหลักมีค่าเป็น 1,260 เช่นกัน

แต่มีค่าประจำตำแหน่งของแต่ละหลักเป็น 10 , 100 และ 1,000 ตามลำดับ

ดังนั้นผลบวกของเลขทั้งหมดที่ได้จากการจัดเรียงนี้มีค่าเท่ากับ

$1{,}260 + (1{,}260 \times 10) + (1{,}260 \times 100) + (1{,}260 \times 1{,}000) = 1{,}399{,}860$ <u>Ans</u>.

$$

ใบกิจกรรมที่ 3.2 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของบางสิ่งจากสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันในแนวตรง

****

จงใช้ความรู้เรื่องกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ และเรื่องแฟกทอเรียล เติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1. จัดนักเรียน 5 คน นั่งเก้าอี้เป็นแถว 3 ตัว ได้ ……………………………………… วิธี
   ซึ่งเป็นการนำนักเรียน 5 คน มาเรียงสับเปลี่ยนเพียงคราวละ …………………………. คน
2. เขียนคำตอบในข้อ 1 ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ……………………………………………………..
3. นำอักษรจากคำว่า SOCIAL มาสร้างคำที่ประกอบด้วยอักษร 4 ตัวไม่ซ้ำกัน ได้ ……………… คำ
   ซึ่งเป็นการนำอักษร 6 ตัว มาเรียงสับเปลี่ยนคราวละ ………………………………. ตัว
4. เขียนคำตอบในข้อ 3 ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ……………………………………………………
5. จัดเรียงหนังสือ 9 เล่มที่แตกต่างกัน บนชั้นหนังสือเดียวกันซึ่งมีที่ว่าง 6 ที่ ได้ …………………… วิธี
   ซึ่งเป็นการนำหนังสือ 9 เล่ม มาเรียงสับเปลี่ยนคราวละ ……………………………………. เล่ม
6. เขียนคำตอบในข้อ 5 ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ……………………………………………………..
7. ใช้เลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 เขียนจำนวนสองหลักโดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน ได้ …………….. วิธี
   ซึ่งเป็นการนำตัวเลข 5 ตัว มาเรียงสับเปลี่ยนคราวละ ……………………………………. ตัว
8. เขียนคำตอบในข้อ 7 ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ……………………………………………………..
9. ในข้อ 7 ถ้าตัวเลขในแต่ละหลักซ้ำกันได้ จะได้คำตอบเท่ากับ …………………………………… วิธี
   ซึ่งเป็นคำตอบที่ (เท่ากัน หรือ ไม่เท่ากัน) ………………………………………. กับคำตอบในข้อ 7
10. นำลูกบอล 5 ลูกที่แตกต่างกัน ใส่ลงในกล่อง 8 ใบ โดยที่กล่องแต่ละใบ ต้องมีลูกบอลอยู่เพียงลูกเดียว จะมีวิธีใส่ลูกบอลได้ ……………………………………… วิธี
    ซึ่งเป็นการนำกล่อง 8 ใบ มาเรียงสับเปลี่ยนคราวละ ……………………………………. ใบ
11. คำตอบที่ได้ในข้อ 10 เขียนให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียล (ได้ หรือ ไม่ได้) ……………………………………………
    ถ้าเขียนได้ จะเขียนได้เป็น …………………………………………………………………………….....
12. จากข้อ 10 ถ้าในกล่องแต่ละใบ สามารถใส่ลูกบอลได้มากกว่า 1 ลูก จะได้คำตอบเท่ากับ …………….. วิธี
    ซึ่งเป็นคำตอบที่ (เท่ากัน หรือ ไม่เท่ากัน) ……………………. กับคำตอบในข้อ 10
13. ในโจทย์แต่ละข้อที่กล่าวมาเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนลักษณะ (แนวตรง หรือ วงกลม) …………………………
14. ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง จะนำมาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงเพียงคราวละ r สิ่งได้
    จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ ……………………………………………. วิธี (กฎข้อที่ 4)
15. ถ้าจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยจัดคราวละ r สิ่ง เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $P(n, r)$ ดังนั้นเขียน $P(n, r)$ ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ……………………………………………………

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

ใบแบบฝึกหัดที่ 3 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันในแนวตรง

****

1. ในการสลับอักษร 7 ตัวคือ A , B , C , D , E , F และ G มีกี่วิธีที่ตำแหน่งที่หนึ่งและที่ห้าเป็นสระ
2. นักฟุตบอลของโรงเรียนมี 22 คน ทุกคนสามารถเล่นทุกตำแหน่ง จะจัดทีมฟุตบอลไปแข่งขันกับ โรงเรียนอื่นได้แตกต่างกันกี่ทีม
3. มีกี่วิธีที่ชาย 4 คน หญิง 2 คน ยืนเรียงกันเป็นแถวตรง โดยที่หญิงทั้งสองคนไม่ยืนติดกัน
4. จัดชาย 3 คน หญิง 4 คน ยืนเป็นแถวตรง 2 แถว โดยที่แถวหน้าเป็นหญิง แถวหลังเป็นชายได้กี่วิธี
5. จัดคน 5 คนยืนเป็นแถวเพื่อถ่ายรูป โดยจะถ่ายทีละกี่คนก็ได้ จะได้ภาพที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่ภาพ
6. จัดชาย 12 คน หญิง 12 คน นั่งเรียงเป็นแถวตรงได้กี่วิธี เมื่อ
   (1) เพศเดียวกันนั่งติดกัน (2) ชายกับหญิงนั่งสลับกันทีละ 1 คน
   (3) ชายกับหญิงนั่งสลับกันทีละ 2 คน (4) ชายกับหญิงนั่งสลับกันทีละ 3 คน
7. ชาย 6 คน หญิง 6 คน ในจำนวนนี้มีนายดำกับนางสาวแดงรวมอยู่ด้วย ถ้าให้ชายจับคู่กับหญิง จะจับคู่ได้กี่วิธี เมื่อ (1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) นายดำจับคู่กับนางสาวแดง
   (3) นายดำไม่จับคู่กับนางสาวแดง
8. มีหนังสือคณิตศาสตร์ 4 เล่มต่างกัน เคมี 3 เล่มต่างกัน ฟิสิกส์ 3 เล่มต่างกัน นำหนังสือทั้งหมดมาจัดเรียงบนชั้นหนังสือเป็นแถวยาว จะจัดได้กี่วิธีเมื่อ
   (1) วิชาเดียวกันอยู่ติดกันและเคมีต้องอยู่ตรงกลาง (2) เคมีอยู่ติดกันทั้ง 3 เล่มไม่ได้
   (3) เคมีอยู่แยกจากกันทั้ง 3 เล่ม
9. มีหนังสือต่างกันทั้งหมด 8 เล่ม เป็นปกสีแดง 4 เล่ม จงหาจำนวนวิธีจัดหนังสือทั้งหมดบนชั้น เมื่อ
   (1) 4 เล่มแรกเป็นปกสีแดง (2) 3 เล่มแรกเป็นปกสีแดง
   (3) 2 เล่มสุดท้ายเป็นปกสีแดง (4) 3 เล่มแรกเป็นปกสีแดงแต่เล่มสุดท้ายไม่ใช่ปกสีแดง
10. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 8 เล่ม เป็นหนังสือภาษาจีน 3 เล่ม ถ้าจะจัดหนังสือทั้งหมดเป็นแถวบนชั้น หนังสือ 2 ชั้นๆ ละ 4 เล่ม จะจัดได้กี่วิธีเมื่อ
    (1) ไม่มีเงื่อนไขใดๆ (2) หนังสือภาษาจีนอยู่ติดกันทั้งหมด
    (3) หนังสือภาษาจีนอยู่ติดกันทั้งหมดไม่ได้
11. สามีภรรยา 6 คู่ นั่งบนม้านั่งซึ่งจัดเป็นแถวยาว จงหาจำนวนวิธีนั่งทั้งหมดเมื่อ
    (1) สามีภรรยาแต่ละคู่นั่งติดกัน (2) มีผู้ชายอย่างน้อย 2 คนนั่งติดกัน
    (3) ชายและหญิงนั่งสลับกันทีละคน โดยที่สามีภรรยาแต่ละคู่นั่งติดกัน
12. ถ้าต้องการทาสีหน้าลูกเต๋าทุกหน้าๆ ละสีไม่ซ้ำกัน จะมีวิธีทาทั้งหมดกี่วิธีเมื่อ
    (1) มีสีที่แตกต่างกัน 6 สี (2) มีสีที่แตกต่างกัน 7 สี
    (3) มีสีที่แตกต่างกัน 8 สี ซึ่งมีสีแดงอยู่ด้วย และต้องทาสีแดงเสมอ
    (4) มีสีที่แตกต่างกัน 7 สี ซึ่งมีสีแดงและเขียวอยู่ด้วย และต้องทาสีแดงและเขียวเสมอบนหน้าที่อยู่ตรงข้ามกัน
13. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ จำนวนฟังก์ชัน $f: B \rightarrow A$ โดยที่ $f(x) \notin x$ เมื่อ $x \in B$ เป็นเท่าไร
14. ตัวประกอบของ 4,000,000 ซึ่งมีค่ามากกว่า 250 มีทั้งหมดกี่จำนวน
15. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ จำนวนฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันไม่ทั่วถึงมีทั้งหมดเท่าไร

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง **วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจ มีทักษะในการคิดคำนวณเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมและนำไปแก้โจทย์ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกกฎเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติได้

1.2 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติ ของสิ่งของทั้งหมด n สิ่งที่แตกต่างกันได้

1.3 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ได้

1.4 บอกกฎเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 3 มิติได้

1.5 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติของสิ่งของ ทั้งหมด n สิ่งที่แตกต่างกันได้

1.6 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยจัดเรียงคราวละ r สิ่ง ได้

2. แนวความคิดหลัก

2.1 ในการจัดเรียงสิ่งของชุดหนึ่งแบบวงกลม ถ้าของแต่ละชิ้นที่นำมาจัดเรียง เปลี่ยนตำแหน่งโดยการหมุนไปพร้อมๆ กัน จะถือว่าเป็นการจัดเรียงวิธีเดียวกัน

2.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม มี 2 ลักษณะคือ วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติ และชนิด 3 มิติ

2.3 มีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติทั้ง n สิ่ง จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน $= (n-1)!$ วิธี

2.4 มีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติคราวละ r สิ่ง จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน $= \dfrac{P(n,r)}{r} = \dfrac{n!}{r(n-r)!}$ วิธี

2.5 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติ จะเท่ากับ**ครึ่งหนึ่ง**ของจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติ

3. เนื้อหาสาระ

3.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม

3.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติ (กฎข้อที่ 5 และข้อที่ 6)

3.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 3 มิติ (กฎข้อที่ 7 และข้อที่ 8)

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ชั่วโมงที่ 1- 2

4.1 สุ่มนักเรียน 5 คน ออกมาหน้าห้อง แล้วให้ยืนเรียงเป็นวงกลมโดยเรียงลำดับตามชอบใจ จากนั้นให้นักเรียนทั้ง 5 คน จัดเรียงลำดับวิธีอื่นๆ ที่ไม่ซ้ำกับแบบเดิมอีกประมาณ 3 วิธีให้นักเรียนที่เหลือสังเกตและบันทึกวิธีต่างๆ

4.2 ให้นักเรียนคิด แล้วลองทายว่านักเรียนทั้ง 5 คนนี้จะยืนเรียงเป็นวงกลมได้ต่างๆ กันกี่วิธี โดยครูจะยังไม่เฉลย แต่ให้นักเรียนค้นพบคำตอบด้วยตัวเองจากการเรียนรู้ในขั้นต่อไป

4.3 ให้นักเรียนเขียนรูปวงกลม 2 รูป ขนาดใหญ่พอสมควรบนกระดานแม่เหล็กที่ครูเตรียมไว้

4.4 ให้นักเรียนนำดุมแม่เหล็ก 3 ลูก สีต่างกัน มาจัดเรียงตามแนวเส้นรอบวงกลมของวงกลมหนึ่ง

4.5 ครูจัดเรียงดุมแม่เหล็กเหมือนกับที่นักเรียนได้จัดเรียงไว้ในข้อ 3 แต่ครูจัดเรียงบนเส้นรอบวงของวงกลมอีกวงหนึ่ง

4.6 ให้นักเรียนคนหนึ่งออกมาเปลี่ยนตำแหน่งของดุมแม่เหล็กที่ครูจัดเรียงไว้ในข้อ 4 โดยวิธีการเปลี่ยนตำแหน่งนั้น ให้เปลี่ยนโดยการหมุนไปพร้อมๆ กัน

4.7 ให้นักเรียนทุกคนช่วยกันพิจารณาว่า หลังจากที่เพื่อนมาเปลี่ยนตำแหน่งของดุมแม่เหล็กโดยการหมุนไปพร้อมๆ กันแล้ว การจัดเรียงลำดับเปลี่ยนแปลงไปจากการจัดเรียงในข้อ 3 ที่นักเรียนคนแรกได้จัดเรียงไว้หรือไม่ ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่าการจัดเรียงลำดับเหมือนเดิม ไม่เปลี่ยนแปลง

4.8 ให้นักเรียนคนหนึ่งออกมาเปลี่ยนตำแหน่งของดุมแม่เหล็ก โดยวิธีอื่นซึ่งไม่ใช่วิธีเปลี่ยนโดยการหมุนไปพร้อมๆ กัน แล้วให้นักเรียนทุกคนช่วยกันพิจารณาว่า การจัดเรียงลำดับเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมหรือไม่ ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่าการจัดเรียงลำดับเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม

4.9 ใช้กระบวนการเดียวกัน แต่เปลี่ยนจำนวนดุมแม่เหล็ก จนกระทั่งนักเรียนสรุปได้ว่าในการจัดเรียงสิ่งของชุดหนึ่งแบบวงกลม ถ้าของแต่ละชิ้นที่นำมาจัดเรียง เปลี่ยนตำแหน่งโดยการหมุนไปพร้อมๆ กัน จะถือว่าเป็นการจัดเรียงวิธีเดียวกัน

4.10 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มรับใบกิจกรรมที่ 4 และชุดอุปกรณ์ซึ่งประกอบด้วยกระดาษแข็งซึ่งเขียนรูปวงกลมไว้ และกระดุมสีต่างๆ กัน จำนวนหนึ่ง แล้วทำตามคำสั่งในใบกิจกรรมที่ 4

4.11 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรมที่ 4 และสรุปกฎข้อ 5 และข้อ 6 เกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติที่ได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 4

4.12 นักเรียนแต่ละกลุ่มรับใบความรู้ที่ 4.1 ไปศึกษาเพิ่มเติมด้วยตนเอง แล้วฝึกคำนวณและแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติจากการทำใบงานที่ 4

ชั่วโมงที่ 3

4.13 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มจับฉลากหัวข้อโจทย์ในใบงานที่ 4 แล้วครูสุ่มตัวแทนกลุ่มออกมารายงานวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยครูช่วยเสริมและแก้ไขข้อบกพร่อง

4.14 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาใบความรู้ที่ 4.2

4.15 ให้นักเรียนซักถามปัญหาจากการศึกษาใบความรู้ที่ 4.2 (ถ้ามี)

4.16 ให้ตัวแทนกลุ่มออกมาสรุปกฎข้อที่ 7 และ 8 เกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 3 มิติ ที่ได้จากการศึกษาใบความรู้ที่ 4.2

4.17 ให้นักเรียนฝึกคำนวณและแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 3 มิติจากการทำใบแบบฝึกหัดที่ 4

5. สื่อ/ แหล่งเรียนรู้

5.1 ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติ
5.2 ใบความรู้ที่ 4.1 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติ
5.3 ใบงานที่ 4 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติ
5.4 ใบความรู้ที่ 4.2 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 3 มิติ
5.5 ใบแบบฝึกหัดที่ 4 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม
5.6 กระดานแม่เหล็กพร้อมดุมแม่เหล็กสีต่างๆ กัน
5.7 กระดาษแข็งพร้อมกระดุมสีต่างๆ กัน

6. การวัดและประเมินผล

สังเกตจากการทำใบกิจกรรม การทำใบงาน การนำเสนอ และการตรวจใบแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

7.1 ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องการพัฒนา

………
………
………

7.2 แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

………
………
………

7.3 ผลที่เกิดกับผู้เรียน

………
………
………

8. ข้อเสนอแนะ

………
………
………

ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติ

****

กิจกรรมที่ 4.1 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้อุปกรณ์ที่กำหนดให้ หาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้งหมดที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิดพลิกไม่ได้ โดยเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง กำหนด n เป็นจำนวนสิ่งของที่แตกต่างกัน

1. เมื่อ $n = 2$ จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ ....วิธี
   ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ....
2. เมื่อ $n = 3$ จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ .... วิธี
   ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ....
3. เมื่อ $n = 4$ จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ .... วิธี
   ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ....

กิจกรรมที่ 4.2 จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1. มีอักษร 2 ตัว คือ A , B จะจัดลำดับในแนวตรงได้ .... วิธี คือ ....
   AB และ BA 2 วิธีนี้ ถือเป็นการจัดลำดับแบบวงกลมได้ .... วิธี
2. มีอักษร 3 ตัว คือ A , B , C จะจัดลำดับในแนวตรงได้ .... วิธี
   คือ ....
   ABC BCA และ CAB 3 วิธีนี้ ถือเป็นการจัดลำดับแบบวงกลมได้ .... วิธี
   ACB CBA และ BAC 3 วิธีนี้ ถือเป็นการจัดลำดับแบบวงกลมได้ .... วิธี
3. มีอักษร 4 ตัว คือ A , B , C , D จะจัดลำดับในแนวตรงได้ .... วิธี
   ABCD BCDA CDAB และ DABC 4 วิธีนี้ ถือเป็นการจัดลำดับแบบวงกลมได้ ....วิธี
   ACBD CBDA BDAC และ DACB 4 วิธีนี้ ถือเป็นการจัดลำดับแบบวงกลมได้ .... วิธี
4. มีอักษร 5 ตัว คือ A , B , C , D , E จะจัดลำดับในแนวตรงได้ .... วิธี
   ABCDE BCDEA CDEAB DEABC และ EABCD 5 วิธีนี้ ถือเป็นการจัดลำดับแบบวงกลมได้ .... วิธี
5. โดยใช้หลักการคำนวณแบบสัดส่วน
   5.1 เมื่อมีสิ่งของ 2 สิ่งแตกต่างกัน ; 2 วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม 1 วิธี
   ดังนั้น 2! วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม .... วิธี
   ซึ่งเขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ....
   5.2 เมื่อมีสิ่งของ 3 สิ่งแตกต่างกัน ; 3 วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม .... วิธี
   ดังนั้น 3! วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม .... วิธี
   ซึ่งเขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ....

5.3 เมื่อมีสิ่งของ 4 สิ่งแตกต่างกัน ; 4 วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม ……….... วิธี
ดังนั้น 4! วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม ……....…วิธี
ซึ่งเขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ……………………………………………………………………

5.4 เมื่อมีสิ่งของ 5 สิ่งแตกต่างกัน ; 5 วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม …………... วิธี
ดังนั้น 5! วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม ………. วิธี
ซึ่งเขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ……………………………………………………………………

5.5 เมื่อมีสิ่งของ n สิ่งแตกต่างกัน ; n วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม ……….... วิธี
ดังนั้น n! วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลม …………วิธี
ซึ่งเขียนในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น ……………………………………………………………………

6. สรุปได้ว่า เมื่อมีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำสิ่งของทั้งหมดมาเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติ จะมีจำนวนวิธีจัดเรียงได้เท่ากับ ……………………………….. วิธี **(กฎข้อที่ 5)**

7. ถ้ามีอักษร 3 ตัว คือ A , B และ C นำมาจัดเรียงในแนวตรงคราวละ 2 ตัว จะจัดได้ ………………… วิธี
คือ ……………………………………………………………………………………………………
จะได้ว่า 2 วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลมได้ ………………….. วิธี
ดังนั้น P(3 , 2) วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลมได้ ………………….. วิธี

8. ถ้ามีอักษร 4 ตัว คือ A , B , C และ D นำมาจัดเรียงในแนวตรงคราวละ 3 ตัว จะจัดได้ …………วิธี
จะได้ว่า 3 วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลมได้ ………………….. วิธี
ดังนั้น P(4 , 3) วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลมได้ ………………….. วิธี

9. ถ้ามีอักษร n ตัวแตกต่างกัน นำมาจัดเรียงในแนวตรงคราวละ r ตัว จะจัดได้ ………………วิธี
จะได้ว่า r วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลมได้ ………………….. วิธี
ดังนั้น P(n , r) วิธีของการจัดในแนวตรง ถือเป็นการจัดแบบวงกลมได้ ………………….. วิธี

10. สรุปได้ว่า เมื่อมีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำสิ่งของมาเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติคราวละ r สิ่ง จะมีจำนวนวิธีจัดเรียงได้เท่ากับ ……………………………….. วิธี **(กฎข้อที่ 6)**

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

ใบความรู้ที่ 4.1 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติ

****

วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมจะต่างกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง เพราะแบบวงกลมจะไม่มีตำแหน่งใดเป็นหัวแถวหรือท้ายแถว ดังนั้น จึงมีหลักเกณฑ์พื้นฐานสำคัญประการหนึ่งคือ ในการจัดเรียงสิ่งของชุดหนึ่งแบบวงกลม ถ้าของแต่ละชิ้นที่นำมาจัดเรียง เปลี่ยนตำแหน่งโดยการหมุนไปพร้อมๆ กัน ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนวิธีเดียวกัน

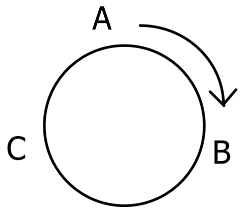
เช่น มีอักษร A , B , C จะจัดแบบแถวได้ $3! = 6$ วิธี คือ

ABC BCA CAB

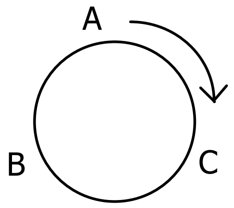
ACB CBA BAC

แต่ถ้านำมาจัดแบบวงกลม จะพบว่าจัดได้แตกต่างกันเพียง 2 วิธีเท่านั้นคือ

ABC BCA CAB ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน



ACB CBA BAC ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน



วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมแยกออกได้ 2 ประเภทคือ

1. วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติ เช่น การนั่งรอบโต๊ะกลมของคนจำนวนหนึ่ง
2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติ เช่น การร้อยดอกไม้เป็นพวงมาลัยวงกลม ซึ่งเมื่อร้อยเสร็จแล้วสามารถพลิกกลับมามองอีกด้านหนึ่งได้

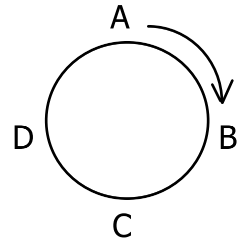
วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติ

จากกรณีตัวอย่างอักษร A , B , C ดังกล่าวข้างต้น จะพบว่า

วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 3 สิ่งแบบแถว 3 วิธี เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมเพียง 1 วิธี ดังนั้นวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 3 สิ่งแบบแถว 3! วิธี จะเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมเพียง $\frac{3!}{3} = 2!$ วิธี

ถ้ามีอักษร 4 ตัว คือ A , B , C , D นำมาเรียงสับเปลี่ยนแบบแถวจะจัดได้ 4 ! = 24 วิธี พิจารณาวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบแถวเฉพาะ 4 วิธี ต่อไปนี้

ABCD BCDA CDAB DABC ซึ่งถ้าจัดแบบวงกลมจะได้วิธีเดียวคือ



จะพบว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ 4 สิ่งแบบแถว 4 วิธี เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมเพียง 1 วิธี ดังนั้น วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ 4 สิ่งแบบแถว 4 ! วิธี เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมเพียง $\frac{4\,!}{4} = 3\,!$ วิธี ในกรณีทั่วไปมีกฎดังต่อไปนี้

กฎข้อที่ 5 ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ต้องการนำสิ่งของทั้งหมดมาเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติ จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(n - 1)\,!$ วิธี

นั่นคือ วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ทำได้โดยให้สิ่งใดสิ่งหนึ่งอยู่คงที่แล้วนำ n - 1 สิ่งที่เหลือมาจัดแบบแถว ซึ่งจะจัดได้ $(n - 1)\,!$ วิธี

ในทำนองเดียวกันถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เลือกเพียง r สิ่งมาจัดแบบวงกลมก็สามารถคิดได้ดังนี้

เมื่อมีสิ่งของแตกต่างกัน n สิ่ง นำมาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงคราวละ r สิ่ง จะจัดได้ $P(n , r)$ วิธี ซึ่ง r วิธีของการจัดแบบแถว จัดแบบวงกลมได้เพียง 1 วิธี

ดังนั้น $P(n , r)$ วิธีของการจัดแบบแถว จะจัดแบบวงกลมได้เพียง $\frac{P(n\,,\,r)}{r} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!\,\mathrm{r}}$ วิธี

ซึ่งสอดคล้องกับกฎดังต่อไปนี้

กฎข้อที่ 6 ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติเพียง r สิ่ง จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $\frac{P(n\,,\,r)}{r}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 มีนักเรียน 6 คน เป็นชาย 4 คน หญิง 2 คน จะจัดนักเรียนทั้งหมดนั่งรอบโต๊ะตัวหนึ่งได้กี่วิธี ถ้า

(1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) หญิง 2 คนนั่งติดกัน

(3) หญิง 2 คนนั่งแยกกัน (4) หญิง 2 คนนั่งตรงข้ามกัน

วิธีทำ (1) การจัดนักเรียนนั่งรอบโต๊ะตัวหนึ่ง เป็นการจัดลำดับแบบวงกลมชนิด 2 มิติ

จึงจัดนักเรียนทั้งหมด 6 คน นั่งรอบโต๊ะได้ $(6 - 1)! = 5! = 120$ วิธี Ans.

(2) เมื่อต้องการให้หญิง 2 คน นั่งติดกัน มัดหญิง 2 คน เป็น 1 มัด

นักเรียน 6 คน จึงเสมือนนักเรียนเพียง 5 คน

จัดนักเรียน 5 คน นั่งรอบโต๊ะได้ $(5 - 1)! = 4!$ วิธี

ในแต่ละวิธี หญิง 2 คนในมัดสลับที่กันเองได้อีก $2!$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดจึงเท่ากับ $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$ วิธี Ans.

(3) เมื่อต้องการให้หญิงทั้ง 2 คน นั่งแยกจากกัน ใช้วิธีคิดแบบตรงกันข้าม กล่าวคือ

จำนวนวิธีที่หญิง 2 คน นั่งแยกจากกัน เท่ากับจำนวนวิธีการนั่งแบบไม่มีเงื่อนไข ลบด้วย

จำนวนวิธีที่หญิง 2 คน นั่งติดกัน

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดจึงเท่ากับ $120 - 48 = 72$ วิธี Ans.

(4) ใช้หลักการที่ว่า **วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิดพลิกไม่ได้ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ทำได้โดยให้สิ่งใดสิ่งหนึ่งอยู่คงที่ แล้วนำ n - 1 สิ่งที่เหลือมาจัดแบบแถว**

ในที่นี้ให้หญิงคนหนึ่งนั่งคงที่ไว้ อีก 5 คนที่เหลือ นำมาคิดแบบแถว ดังนี้

หญิงที่เหลือ 1 คน นั่งได้เพียง 1 วิธี เพราะต้องนั่งตรงข้ามกับหญิงที่นั่งคงที่

ในแต่ละวิธี ชายอีก 4 คน สลับที่กันได้ $4!$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการนั่งทั้งหมดจึงเท่ากับ $1 \times 4! = 24$ วิธี Ans.

ตัวอย่างที่ 2 มีคน 8 คน ในจำนวนนี้มีนาย ก , ข และ ค รวมอยู่ด้วย จัดคนทั้งหมดยืนเป็นวงกลมได้กี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) ก , ข , ค ยืนติดกัน

(3) ก , ข , ค ยืนแยกจากกัน (4) ก ยืนติดกับ ข แต่ไม่ติดกับ ค

วิธีทำ (1) มีคน 8 คน จัดทั้ง 8 คน ให้ยืนเป็นวงกลม ซึ่งเป็นการจัดลำดับแบบวงกลมชนิด 2 มิติ

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนทั้งหมดยืนจึงเท่ากับ $(8 - 1)! = 7! = 5{,}040$ วิธี Ans.

(2) มัด ก , ข และ ค ไว้ด้วยกันเป็น 1 มัด

ดังนั้น คนทั้งหมด 8 คน จึงเสมือนคนเพียง 6 คน

จัดคน 6 คน ยืนเป็นวงกลมได้ $5!$ วิธี

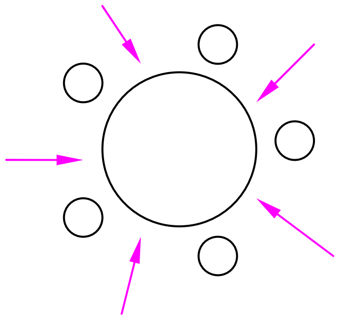
ในแต่ละวิธี ก , ข และ ค ในมัดสลับที่กันเองได้อีก $3!$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนทั้งหมดยืนจึงเท่ากับ $5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$ วิธี Ans.

(3) เมื่อต้องการให้ ก , ข , ค ยืนแยกจากกัน แสดงว่าจะต้องมีคนอื่นคั่นระหว่าง 3 คนนี้เสมอ ดังนั้นจึงต้องจัดคนอื่นๆ ก่อน แล้วแทรก ก , ข , ค ทีหลัง

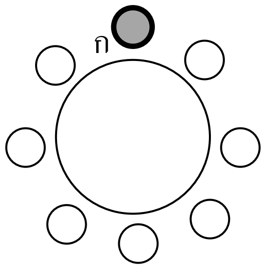
จัดคนอื่นๆ 5 คน ยืนเป็นวงกลมได้ 4! วิธี

ในแต่ละวิธี แทรก ก , ข , ค ตรงที่แทรก 5 ที่ ดังรูป ซึ่งแทรกได้ P(5 ,3) วิธี



ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนทั้งหมดยืนจึงเท่ากับ 4! x P(5 ,3) = 24 x 5 x 4 x 3 = 1,440 วิธี <u>Ans</u>.

(4) ให้ ก ยืนคงที่ไว้ ดังรูป ที่เหลืออีก 7 คน คิดเป็นการจัดแบบแถว ก



ข ต้องยืนติดกับ ก ดังนั้น ข ยืนได้ 2 วิธี

ในแต่ละวิธี ค ต้องไม่ยืนติดกับ ก ดังนั้น ค จึงยืนได้ 5 วิธี

ในแต่ละวิธี อีก 5 คนที่เหลือ ยืนได้ 5! วิธี

จึงได้จำนวนวิธีจัดคนยืนทั้งหมดเท่ากับ 2 x 5 x 5! = 1,200 วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 3 มีนักเรียนสมัครรำวงรอบกองไฟ 10 คน แต่ครูต้องการเพียง 5 คน ครูจะจัดนักเรียนให้รำวงรอบกองไฟได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ มีนักเรียน 10 คน แต่นำมาจัดลำดับแบบวงกลมเพียงคราวละ 5 คน

จึงได้จำนวนวิธีจัดรำวงรอบกองไฟเท่ากับ $\frac{p(10\,,\,5)}{5} = \frac{10!}{5(5!)}$ วิธี

$= 2(9)(8)(7)(6) = 6{,}048$ วิธี <u>Ans</u>.

##

ใบงานที่ 4 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 2 มิติ

****

ในแต่ละกลุ่มจงช่วยกันวิเคราะห์โจทย์ต่อไปนี้ แล้วแสดงวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียด

1. ในการประชุมตัวแทนนักศึกษามหาวิทยาลัย 4 แห่ง ประกอบด้วย จุฬา 2 คน ธรรมศาสตร์ 2 คน เกษตรศาสตร์ 2 คน และมหิดล 3 คน ถ้าในการประชุมครั้งนี้จัดให้นั่งรอบโต๊ะกลม จะมีกี่วิธีที่สามารถจัดได้ ถ้าให้นักศึกษามหาวิทยาลัยเดียวกันนั่งติดกันเสมอ

....
....
....
....
....
....

2. มีครอบครัว 4 ครอบครัว แต่ละครอบครัวประกอบด้วย พ่อ แม่ และลูก 2 คน จัดคนทั้งหมดนั่งรับประทานอาหารร่วมกันรอบโต๊ะตัวหนึ่ง จงหาจำนวนวิธีการนั่งถ้าต้องการให้สมาชิกในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน และในแต่ละครอบครัวพบว่าพ่อและแม่นั่งติดกัน

....
....
....
....
....
....

3. จัดชาย 6 คน หญิง 6 คน นั่งรอบโต๊ะตัวหนึ่งได้กี่วิธี ถ้าให้ชายกับหญิงนั่งสลับกันทีละ

1) 1 คน 2) 2 คน 3) 3 คน

....
....
....
....
....
....
....
....

4. จัดเด็ก 1 คน หญิง 3 คน และชาย 3 คน นั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่ชายไม่นั่งติดกับเด็ก จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

………

………

………

………

………

………

………

5. มีลูกแก้ว 7 ลูกสีแตกต่างกัน โดยมีสีแดง สีขาว และสีน้ำเงินรวมอยู่ด้วย จงหาจำนวนวิธีวางลูกแก้วเป็นวงกลม เมื่อต้องการให้

(1) สีแดงอยู่ติดกับสีขาว แต่สีแดงไม่ติดกับสีน้ำเงิน

(2) สีแดงอยู่ติดกับสีขาว แต่สีน้ำเงินไม่ติดกับสีแดงและไม่ติดกับสีขาว

………

………

………

………

………

………

………

………

6. ในงานสังสรรค์ครั้งหนึ่ง มีผู้มาในงานนี้ 15 คน จะจัดให้เล่นเกมเก้าอี้ดนตรี ซึ่งจัดเก้าอี้เป็นวงกลม 10 ตัว จะมีวิธีการนั่งเก้าอี้ทั้งหมดกี่วิธี

………

………

………

………

………

………

………

****

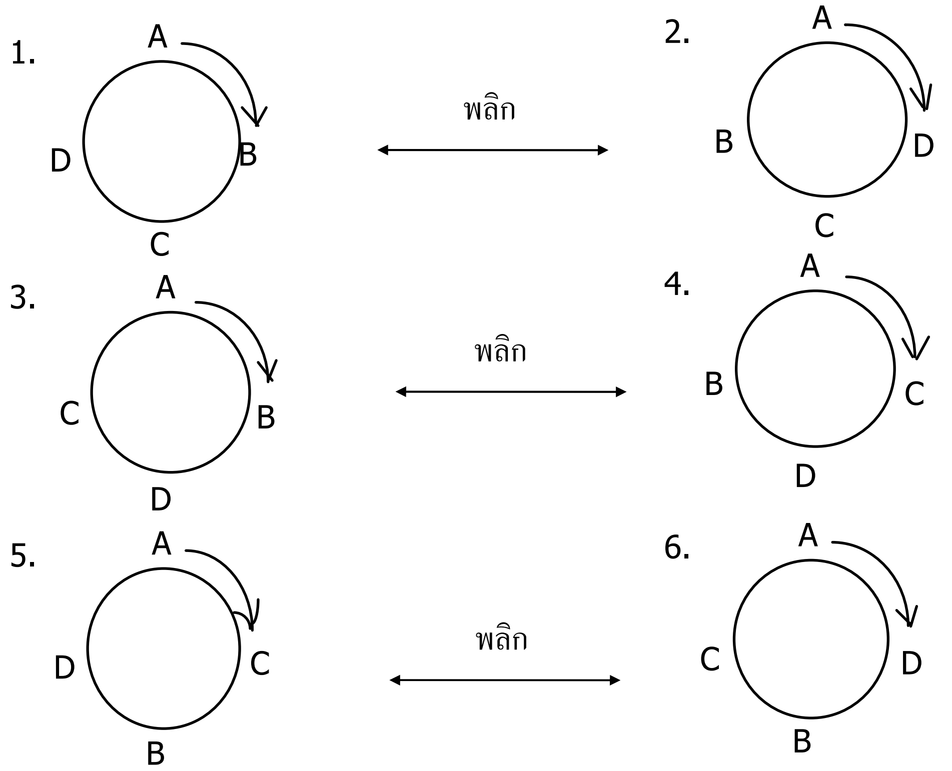
ใบความรู้ที่ 4.2 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลมชนิด 3 มิติ

****

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติ

การร้อยลูกปัดสีต่างๆ กันเป็นสายสร้อย การร้อยกุญแจลงในพวงกุญแจเดียวกัน การนำดอกไม้มาร้อยเป็นพวงมาลัย เป็นตัวอย่างของการเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติ ซึ่งสามารถมองได้ 2 ด้าน

พิจารณาวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติ ของอักษร A , B , C , D ซึ่งมีจำนวน 3 ! = 6 วิธี ดังนี้



ซึ่งถ้าเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติ จะได้ว่า

รูป 1 และ 2 ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

รูป 3 และ 4 ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

รูป 5 และ 6 ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติ จะเหลือเพียง 3 วิธี ซึ่งเท่ากับครึ่งหนึ่งของจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 2 มิติ ในกรณีทั่วไปมีกฎดังต่อไปนี้

> **กฎข้อที่ 7** ถ้ามีสิ่งของแตกต่างกัน n สิ่ง จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติ ของสิ่งของทั้งหมดเท่ากับ $\frac{(n-1)\,!}{2}$ วิธี

กฎข้อที่ 8 ถ้ามีสิ่งของแตกต่างกัน n สิ่ง จะนำมาเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติเพียงคราวละ r สิ่ง จะได้จำนวนวิธีจัดทั้งหมดเท่ากับ $\frac{P(n, r)}{2r}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 จะร้อยกุญแจ 7 ดอกในพวงกุญแจได้กี่วิธี

วิธีทำ การร้อยกุญแจในพวงกุญแจ ถือเป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติ

มีกุญแจ 7 ดอกแตกต่างกัน นำมาร้อยทั้ง 7 ดอก

ดังนั้นจะมีวิธีการร้อยทั้งหมด $= \frac{(7-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360$ วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 2 ในการร้อยพวงมาลัยวงกลมด้วยดอกไม้ 9 ดอกที่แตกต่างกัน เป็นสีขาว 2 ดอก สีแดง 3 ดอก และสีอื่นๆ จะได้พวงมาลัยที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่พวง เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) สีขาวอยู่ติดกัน และสีแดงอยู่ติดกัน

วิธีทำ การร้อยดอกไม้เป็นพวงมาลัยวงกลมถือเป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมชนิด 3 มิติ

(1) มีดอกไม้แตกต่างกัน 9 ดอก นำมาร้อยทั้ง 9 ดอก

ดังนั้นจะได้พวงมาลัยที่แตกต่างกันทั้งหมด $= \frac{(9-1)!}{2} = \frac{8!}{2} = \frac{40,320}{2}$ พวง

$= 20,160$ พวง <u>Ans</u>.

(2) เมื่อต้องการให้ดอกไม้สีขาวอยู่ติดกัน และสีแดงก็อยู่ติดกัน

จึงคิดโดยการมัดดอกไม้สีขาวเป็น 1 มัด และดอกไม้สีแดงอีก 1 มัด

ดังนั้น ดอกไม้ 9 ดอก จึงคิดเสมือนดอกไม้เพียง 6 ดอก

ร้อยดอกไม้ 6 ดอกเป็นพวงมาลัยได้ $= \frac{(6-1)!}{2} = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$ วิธี

ในแต่ละวิธี ดอกไม้สีขาว 2 ดอกในมัดสลับที่กันได้ $2! = 2$ วิธี และ

ดอกไม้สีแดง 3 ดอกในมัดสลับที่กันได้ $3! = 6$ วิธี

ดังนั้น จะได้พวงมาลัยที่แตกต่างกันทั้งหมด $= 60 \times 2 \times 6 = 720$ พวง <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 3 มีลูกปัดสีแตกต่างกันทั้งหมด 10 ลูก นำมาร้อยเป็นสร้อยข้อมือที่ประกอบด้วยลูกปัด 6 ลูกสีแตกต่างกัน จะร้อยเป็นสร้อยข้อมือได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่เส้น

วิธีทำ การนำลูกปัดมาร้อยเป็นสร้อยข้อมือ ถือเป็น การเรียงสับเปลี่ยนชนิด 3 มิติ

มีลูกปัดแตกต่างกัน 10 ลูก แต่นำมาร้อยเป็นสร้อยข้อมือเพียงคราวละ 6 ลูก

ดังนั้น จะได้สร้อยข้อมือที่แตกต่างกันทั้งหมด $= \frac{P(10,6)}{2(6)} = \frac{10!}{2(6)(4!)} = 12,600$ เส้น <u>Ans</u>.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

ใบแบบฝึกหัดที่ 4 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่แตกต่างกันแบบวงกลม

****

1. มีเด็ก 10 คน ในจำนวนนี้มีเด็กชายเอ และเด็กชายเอ็มรวมอยู่ด้วย ถ้าให้เด็กทั้งหมดมานั่งเล่นเกมรอบโต๊ะตัวหนึ่ง จะมีวิธีการนั่งที่แตกต่างกันกี่วิธีเมื่อ
   (1) ไม่ต้องการให้เด็กชายเอและเด็กชายเอ็มนั่งติดกัน
   (2) เด็กชายเอนั่งตรงข้ามกับเด็กชายเอ็ม
2. จัดนักเรียนชาย 4 คน หญิง 3 คน นั่งเป็นวงเพื่อเล่นเกม โดยจัดให้มีนักเรียนคนหนึ่งนั่งตรงกลางวง แล้วให้นักเรียนที่เหลือนั่งล้อมเป็นวงกลม จะจัดให้นั่งได้กี่วิธีเมื่อ
   (1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) นักเรียนที่นั่งตรงกลางวงเป็นชาย นักเรียนที่นั่งล้อม นั่งสลับชายและหญิง
3. สามีภรรยา 5 คู่ นั่งรับประทานอาหารร่วมกันรอบโต๊ะกลมตัวหนึ่ง จะนั่งได้กี่วิธีเมื่อ
   (1) สามีภรรยาแต่ละคู่นั่งติดกัน (2) มีสามีภรรยาอย่างน้อย 1 คู่นั่งแยกกัน
4. ครอบครัว 5 ครอบครัว แต่ละครอบครัวประกอบด้วย พ่อ แม่ และลูก 1 คน จะจัดให้นั่งรอบโต๊ะตัวหนึ่งได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธีเมื่อ
   (1) ครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน โดยมีลูกนั่งตรงกลางเสมอ
   (2) ลูกทุกคนนั่งติดกัน แต่แม่ทุกคนนั่งแยกกันหมด
5. มีคน 7 คน ในจำนวนนี้มีนาย ก , นาย ข และนาย ค รวมอยู่ด้วย จัดคนทั้งหมดยืนเรียงเป็นวงกลมได้กี่วิธี เมื่อไม่ต้องการให้นาย ก หรือนาย ข ยืนติดกับ นาย ค
6. จัดชาย 12 คน หญิง 12 คน นั่งรอบโต๊ะตัวหนึ่งได้กี่วิธีเมื่อ
   (1) เพศเดียวกันนั่งติดกัน (2) ชายและหญิงนั่งสลับกันทีละ 1 คน
   (3) ชายและหญิงนั่งสลับกันทีละ 2 คน (4) ชายและหญิงนั่งสลับกันทีละ 3 คน
7. ชาย 6 คน หญิง 5 คน นั่งล้อมเป็นวงกลมได้กี่วิธีเมื่อ
   (1) ในระหว่างหญิง 2 คนใดๆ จะต้องมีชายนั่งคั่นอย่างน้อย 1 คน
   (2) ในระหว่างชาย 2 คนใดๆ จะต้องมีหญิงนั่งคั่นอย่างน้อย 1 คน
8. มีหนังสือคณิตศาสตร์เหมือนกัน 4 เล่ม ฟิสิกส์ต่างกัน 3 เล่ม เคมีต่างกัน 2 เล่ม จะจัดหนังสือทั้งหมด บนชั้นหนังสือเป็นวงกลมรอบเสาได้กี่วิธีเมื่อ
   (1) วิชาเดียวกันอยู่ติดกัน (2) คณิตศาสตร์อยู่ติดกันทั้งหมด แต่เคมีอยู่แยกกัน
9. มีลูกปัดสีแตกต่างกัน 8 ลูก ในจำนวนนี้มีสีแดงและขาวอยู่ด้วย นำลูกปัดทั้งหมดมาร้อยเป็นสร้อยข้อมือ จะได้สร้อยข้อมือที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่เส้นเมื่อ
   (1) สีแดงอยู่ติดกับสีขาว (2) สีแดงไม่อยู่ติดกับสีขาว (3) สีแดงอยู่ตรงข้ามกับสีขาว
10. มีเด็ก 10 คน ในจำนวนนี้มีเด็กชายเก่งอยู่ด้วย จะให้เด็กทั้งหมดมาเล่นเกมโดยให้เด็กชายเก่งเป็นพิธีกรซึ่งต้องยืนอยู่ตรงกลางวง แล้วจัดเด็กนั่งล้อมวงคราวละ 5 คน จะจัดเด็กให้นั่งเล่นเกมได้กี่วิธี

♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง **วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 5 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจ มีทักษะในการคิดคำนวณเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม พร้อมทั้งนำไปแก้โจทย์ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกกฎเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรงได้

1.2 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรงได้

1.3 บอกกฎการแบ่งกลุ่ม คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการแบ่งกลุ่มได้

1.4 บอกกฎเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันแบบวงกลมได้

1.5 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันแบบวงกลมได้

2. แนวความคิดหลัก

2.1 ถ้าของ n สิ่งแบ่งเป็น k กลุ่มที่แตกต่างกัน โดยที่ กลุ่มที่ 1 มีของเหมือนกัน n_1 สิ่ง กลุ่มที่ 2 มีของเหมือนกัน n_2 สิ่ง . . . กลุ่มที่ k มีของเหมือนกัน n_k สิ่ง และ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ แล้ว
จะได้วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งนั้นในแนวตรงเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,.....\,n_k!}$ วิธี

2.2 จำนวนวิธีแบ่งคนหรือสิ่งของ n หน่วยออกเป็น k กลุ่ม**<u>ที่แตกต่างกัน</u>** โดยให้กลุ่มที่ 1 มี n_1 หน่วย กลุ่มที่ 2 มี n_2 หน่วย .... กลุ่มที่ k มี n_k หน่วย และ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ จะได้จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,.....\,n_k!}$ วิธี

2.3 ถ้าของ n สิ่ง แบ่งเป็น k กลุ่ม โดยที่กลุ่มที่ 1 มีของเหมือนกัน n_1 สิ่ง กลุ่มที่ 2 มีของเหมือนกัน n_2 สิ่ง .... กลุ่มที่ k มีของเหมือนกัน n_k สิ่ง และ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ โดยที่ ห.ร.ม $(n_1, n_2, ..., n_k)$ **= 1** แล้ว จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งนั้นแบบวงกลมเท่ากับ $\frac{(n-1)!}{n_1!\,n_2!\,.....\,n_k!}$ วิธี

3. เนื้อหาสาระ

3.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรง (กฎข้อที่ 9)

3.2 กฎการแบ่งกลุ่ม

3.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันแบบวงกลม (กฎข้อที่ 10)

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

4.1 ครูกำหนดอักษร A , B , C ให้นักเรียนหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง แล้วเขียนคำตอบทั้งหมดบนกระดาน

4.2 ครูให้อักษร A กับ B เป็นอักษรที่เหมือนกัน สมมติให้แทนด้วยอักษร M แล้วให้นักเรียนออกมาเขียนคำตอบใหม่ โดยใช้คำตอบเดิมเป็นหลัก

4.3 ให้นักเรียนสรุปคำตอบของจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 3 ตัว คือ M , M , C โดยเขียนในรูปแฟกทอเรียล

4.4 ครูยกตัวอย่างเพิ่มเติม เช่น ให้หาจำนวนวิธีสลับอักษรในคำว่า "ELEMENT" ซึ่งมีอักษร E ซ้ำกัน 3 ตัว โดยใช้กระบวนการเดียวกับตัวอย่างแรก

4.5 ให้นักเรียนใช้การสังเกตวิธีการหาคำตอบจากตัวอย่างแล้วช่วยกันสรุปจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรง (กฎข้อที่ 9)

ชั่วโมงที่ 2

4.6 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรงเพิ่มเติม พร้อมทั้งศึกษากฎการแบ่งกลุ่มจากใบความรู้ที่ 5.1 ซักถามปัญหาจากการศึกษาใบความรู้ และช่วยกันสรุปกฎการแบ่งกลุ่ม

ชั่วโมงที่ 3

4.7 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มฝึกทักษะการคิดคำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรงและกฎการแบ่งกลุ่มจากใบงานที่ 5

ชั่วโมงที่ 4

4.8 ให้ตัวแทนนักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอวิธีแก้โจทย์ปัญหาในใบงานที่ 5 โดยครูช่วยเสริมและแก้ไขข้อบกพร่อง

4.9 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาใบความรู้ที่ 5.2 อภิปราย ซักถามปัญหา แล้วให้ตัวแทนกลุ่มออกมาสรุปจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันแบบวงกลม (กฎข้อที่ 10) โดยครูช่วยเสริมและอธิบายเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 5

4.10 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มฝึกทักษะการคิดคำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันแบบวงกลมจากใบแบบฝึกหัดที่ 5

5. สื่อ/แหล่งเรียนรู้

5.1 ใบความรู้ที่ 5.1 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรงและการแบ่งกลุ่ม

5.2 ใบงานที่ 5 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรงและการแบ่งกลุ่ม

5.3 ใบความรู้ที่ 5.2 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันแบบวงกลม

5.4 ใบแบบฝึกหัดที่ 5 เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม

6. การวัดและประเมินผล

สังเกตจาก การทำใบงาน การนำเสนอ และการตรวจใบแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

7.1 ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องการพัฒนา

………...………...

………..

…...……..

7.2 แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

………...………...

………..

…...……..

7.3 ผลที่เกิดกับผู้เรียน

………...………...

………..

…...……..

8. ข้อเสนอแนะ

………...………...

………..

…...……..

………...………...

………..

ใบความรู้ที่ 5.1 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรงและการแบ่งกลุ่ม

****

วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรง

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

1. ถ้านำอักษร 3 ตัว คือ A , B , C มาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง จะได้ $3! = 6$ วิธี คือ

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

แต่ถ้าให้ A กับ B เหมือนกัน สมมติให้เป็น M 6 วิธีดังกล่าวจะเปลี่ยนเป็น

MMC MCM MMC MCM CMM CMM

ซึ่งจะเห็นว่าจัดได้เพียง 3 วิธีเท่านั้น คือ MMC MCM CMM

แสดงว่านำอักษร M , M , C มาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรงได้ 3 วิธี

พิจารณาแต่ละคำตอบใน 3 คำตอบ เช่น MMC จะเห็นว่าถ้า M 2 ตัวนี้ต่างกัน จะสามารถเรียงสับเปลี่ยนได้ $2!$ วิธี

นั่นคือ จาก 1 วิธี (MMC) จะแยกได้เป็น $2!$ วิธี

ดังนั้น จากทั้งหมด 3 วิธี จึงแยกได้เป็น $3 \times 2! = 3! = 6$ วิธี

นั่นคือคำตอบ 3 วิธี ได้จาก $\frac{3!}{2!}$ นั่นเอง

2. จะสลับอักษรในคำว่า"ELEMENT" ได้กี่วิธี

ในที่นี้มีอักษรทั้งหมด 7 ตัว แต่เป็นตัว E ซ้ำกัน 3 ตัว

สมมติให้จำนวนวิธีสลับอักษรที่ต้องการดังกล่าว = y วิธี

แต่ในแต่ละวิธีนี้ ถ้า E ไม่ซ้ำกัน จะแยกได้เป็น $3!$ วิธี

ดังนั้น ใน y วิธี ถ้า E ไม่ซ้ำกัน จะแยกได้เป็น $3! \times y$ วิธี

แต่ถ้า E ไม่ซ้ำกัน การสลับอักษร 7 ตัวย่อมทำได้ = $7!$ วิธี

ดังนั้น $3! \times y = 7!$

$$y = \frac{7!}{3!}$$

นั่นคือจะสลับอักษรในคำ "ELEMENT" ได้ $\frac{7!}{3!}$ วิธี

ในกรณีทั่วไปมีกฎดังต่อไปนี้

กฎข้อที่ 9 ถ้าของ n สิ่งแบ่งเป็น k กลุ่มที่แตกต่างกัน โดยที่

กลุ่มที่ 1 มีของเหมือนกัน n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 มีของเหมือนกัน n_2 สิ่ง

⋮ ⋮

กลุ่มที่ k มีของเหมือนกัน n_k สิ่ง

และ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

จะได้วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งนั้นในแนวตรงเท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \,.....\, n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 ชายคนหนึ่งมีธนบัตรชนิด 500 บาท 3 ใบ ชนิด 100 บาท 4 ใบ ชนิด 20 บาท 2 ใบ และชนิด 10 บาท 3 ใบ ถ้าเขาต้องการจัดเรียงธนบัตรทั้งหมดในซองธนบัตร เขาจะมีวิธีจัดเรียงทั้งหมดกี่วิธี (ถือว่าธนบัตรชนิดเดียวกันเหมือนกัน)

วิธีทำ เมื่อถือว่าธนบัตรชนิดเดียวกันเหมือนกัน

นั่นคือ มีธนบัตรทั้งหมด 12 ใบ แยกเป็น

ธนบัตรชนิด 500 บาท เหมือนกัน 3 ใบ

ชนิด 100 บาท เหมือนกัน 4 ใบ

ชนิด 20 บาท เหมือนกัน 2 ใบ

และชนิด 10 บาท เหมือนกัน 3 ใบ

ดังนั้น นำธนบัตรทั้งหมดมาจัดเรียงในซองธนบัตรได้ $= \dfrac{12!}{3!4!2!3!}$ วิธี

$= 277{,}200$ วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 2 มีหนังสือคณิตศาสตร์ที่ต่างกัน 4 เล่ม ฟิสิกส์ที่เหมือนกัน 4 เล่ม และเคมีที่ต่างกัน 3 เล่ม ถ้าต้องการจัดหนังสือทั้งหมดบนชั้นหนังสือเดียวกัน จะมีวิธีจัดทั้งหมดกี่วิธีเมื่อ

(1) เล่มใดอยู่ที่ใดก็ได้ (2) วิชาเดียวกันต้องอยู่ติดกัน

(3) เคมีอยู่แยกกันทั้ง 3 เล่ม

วิธีทำ (1) มีหนังสือทั้งหมด 11 เล่ม เป็นหนังสือฟิสิกส์ที่เหมือนกัน 4 เล่ม

ดังนั้น จะจัดหนังสือทั้งหมดบนชั้นหนังสือเดียวกันได้ $= \dfrac{11!}{4!}$ วิธี

$= 1{,}663{,}200$ วิธี <u>Ans</u>.

(2) มัดหนังสือวิชาเดียวกันไว้ด้วยกัน หนังสือทั้งหมด 11 เล่ม จึงเสมือนเพียง 3 เล่ม จัดหนังสือ 3 เล่ม บนชั้นหนังสือเดียวกันได้ 3! วิธี

ในแต่ละวิธี หนังสือคณิตศาสตร์ที่ต่างกัน 4 เล่ม ในมัดสลับที่กันเองได้ 4! วิธี

หนังสือเคมีที่ต่างกัน 3 เล่ม ในมัดสลับที่กันเองได้ 3! วิธี

ส่วนหนังสือฟิสิกส์ 4 เล่มเหมือนกัน สลับที่กันก็ไม่มีความหมาย

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงหนังสือทั้งหมด = 3! 4! 3! = 864 วิธี Ans.

(3) จัดหนังสือวิชาอื่นก่อน แล้วค่อยนำหนังสือเคมีแทรกระหว่างหนังสือเหล่านั้น

จัดหนังสือคณิตศาสตร์ที่ต่างกัน 4 เล่ม กับฟิสิกส์ที่เหมือนกัน 4 เล่ม ได้ $\frac{8!}{4!} = 1{,}680$ วิธี

เมื่อจัดหนังสือ 8 เล่มนี้แล้ว จะแทรกเคมี 3 เล่มใน 9 ตำแหน่งได้ $P(9\,,3) = \frac{9!}{6!} = 504$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดเรียงหนังสือทั้งหมดเท่ากับ 1,680 x 504 = 846,720 วิธี Ans.

ตัวอย่างที่ 3 มีตัวเลข 7 ตัวดังนี้ 1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 3 , 4 ถ้านำเลขทุกตัวมาจัดเรียงเป็นจำนวนที่มี 7 หลัก จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวนเมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) มีค่ามากกว่า 2 ล้าน

วิธีทำ (1) ในตัวเลข 7 ตัว เป็น 1 ซ้ำกัน 2 ตัว และ 2 ซ้ำกัน 3 ตัว

ดังนั้น จะนำเลขทั้ง 7 ตัวนี้ มาจัดเรียงเป็นเลข 7 หลักได้ $\frac{7!}{2!3!} = 420$ จำนวน Ans.

(2) หลักล้านต้องเป็นเลข 2 หรือ 3 หรือ 4 เท่านั้น ซึ่งต้องแยกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หลักล้านเป็นเลข 2 ซึ่งเขียนหลักล้านได้ 1 วิธี

ในแต่ละวิธี จะเหลือเลข 2 ซ้ำกัน 2 ตัว และเลข 1 ซ้ำกัน 2 ตัว

จึงเขียน 6 หลักที่เหลือได้ $\frac{6!}{2!2!} = 180$ วิธี

ในกรณีนี้จะได้จำนวน 7 หลักทั้งหมด 1 x 180 = 180 จำนวน ***

กรณีที่ 2 หลักล้านเป็นเลข 3 หรือ 4 ซึ่งเขียนหลักล้านได้ 2 วิธี

ในแต่ละวิธี จะเหลือเลข 2 ซ้ำกัน 3 ตัว และเลข 1 ซ้ำกัน 2 ตัว

จึงเขียน 6 หลักที่เหลือได้ $\frac{6!}{3!2!} = 60$ วิธี

ในกรณีนี้จะได้จำนวน 7 หลักทั้งหมด 2 x 60 = 120 จำนวน ***

ดังนั้น สร้างจำนวน 7 หลักที่มีค่ามากกว่า 2 ล้านได้ทั้งหมด 180 + 120 = 300 จำนวน

กฎข้อที่ 9 นี้ บางครั้งเรียกว่า " **กฎการแบ่งกลุ่ม** " (**partitioning law**) เพราะอาจใช้คำนวณจำนวนวิธีแบ่งคนหรือสิ่งของ n หน่วยออกเป็น k กลุ่ม**<u>ที่แตกต่างกัน</u>** โดยให้กลุ่มที่ 1 มี n_1 หน่วย กลุ่มที่ 2 มี n_2 หน่วย .... กลุ่มที่ k มี n_k หน่วย และ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ ซึ่งจะได้จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \,.....\, n_k!}$ วิธี

Ans.

หมายเหตุ ในกรณีที่ลักษณะ**กลุ่มมีความเหมือนกัน** จะเกิดความซ้ำจากลักษณะกลุ่มที่สามารถสลับที่กันได้ขึ้น ดังนั้นจะต้องนำความซ้ำคือ**จำนวนกลุ่มที่ซ้ำมาหาร**ด้วย จากสูตรดังกล่าวจึงได้ว่า ในการแบ่งคนหรือสิ่งของ n หน่วยออกเป็น k กลุ่ม**ที่เหมือนกัน** โดยที่แต่ละกลุ่มมี m หน่วย

จะได้จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\dfrac{n!}{(m!)^k k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 ในการฝึกสะกดรอยของพลทหารกลุ่มหนึ่งซึ่งมี 10 คน ครูฝึกต้องการแบ่งเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละ 2 คน 3 คน และ 5 คน จะมีวิธีแบ่งกลุ่มย่อยกี่วิธี

(1) ถ้าไม่มีเงื่อนไขใด

(2) ถ้าพลทหารบุญมาซึ่งเป็น 1 ใน 10 คนนั้น เคยเป็นพรานป่ามาก่อน ครูฝึกต้องการให้อยู่ในกลุ่ม 5 คน เพื่อจะได้ช่วยฝึกพรรคพวกในกลุ่ม

วิธีทำ (1) แบ่งคน 10 คน ออกเป็น 3 กลุ่มๆ ละ 2 , 3 และ 5 คน

จะมีวิธีแบ่งกลุ่มได้ $\dfrac{10!}{2!3!5!}$ = 2,520 วิธี <u>Ans.</u>

(2) แยกพลทหารบุญมาออกมา แล้วแบ่ง 9 คนที่เหลือออกเป็น 3 กลุ่ม ๆ ละ 2 ,3 และ 4 คน

จึงมีวิธีแบ่งกลุ่มได้ $\dfrac{9!}{2!3!4!}$ = 1,260 วิธี <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 5 แบ่งคน 10 คนออกเป็น 2 กลุ่มเท่า ๆ กัน เพื่อเล่นเกม 2 ชนิด ได้กี่วิธี

วิธีทำ ถึงแม้ว่าจำนวนคนในแต่ละกลุ่มจะเท่ากัน คือกลุ่มละ 5 คน แต่ในที่นี้ถือว่าลักษณะกลุ่มแตกต่างกัน เพราะเล่นเกม 2 ชนิดที่ต่างกัน

ดังนั้น จึงมีวิธีแบ่งกลุ่มได้ $\dfrac{10!}{5!5!}$ = 252 วิธี <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 6 แบ่งคน 10 คนออกเป็น 2 กลุ่มเท่าๆ กันได้กี่วิธี

วิธีทำ ในที่นี้ ลักษณะกลุ่มเหมือนกัน เพราะว่าจำนวนคนในแต่ละกลุ่มคือ 5 คนเท่ากัน และไม่ได้ให้ทำกิจกรรมที่ต่างกัน จึงต้องหารด้วยแฟกทอเรียลของจำนวนกลุ่มที่เหมือนกัน

ดังนั้น จะมีวิธีแบ่งกลุ่มได้ $\dfrac{10!}{5!5!2!}$ = 126 วิธี <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 7 จะแบ่งคน 9 คนเข้าพักในห้อง 3 ห้อง ซึ่งแต่ละห้องพักได้ 4 คน โดยแบ่งเป็น 3 กลุ่ม ๆละ 2 คน 3 คน และ 4 คน ได้กี่วิธี

วิธีทำ ขั้นที่ 1 แบ่งคน 9 คน ออกเป็น 3 กลุ่มๆ ละ 2 , 3 และ 4 คน ได้ $\dfrac{9!}{2!3!4!}$ = 1,260 วิธี

ขั้นที่ 2 จัดคน 3 กลุ่ม เข้าห้องพัก 3 ห้อง ซึ่งกลุ่มใดจะเข้าห้องใดก็ได้ จัดได้ 3! = 6 วิธี

ดังนั้น จะมีวิธี จัดคนทั้งหมดเข้าห้องพักได้ 1,260 x 6 = 7,560 วิธี <u>Ans.</u>

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

ใบงานที่ 5 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันในแนวตรงและการแบ่งกลุ่ม

****

ในแต่ละกลุ่มจงช่วยกันวิเคราะห์โจทย์ต่อไปนี้ แล้วแสดงวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียด

1. จะมีวิธีนำตัวอักษรในคำว่า “MISSISSIPPI” มาสลับที่ให้เกิดคำใหม่ได้ทั้งหมดกี่คำโดยไม่คำนึงถึงความหมาย

……

……

……

……

……

……

……

2. มีลูกบอลสีแดงเหมือนกัน 3 ลูก สีขาวเหมือนกัน 2 ลูก และสีน้ำเงินเหมือนกัน 4 ลูก ถ้าต้องการนำลูกบอลทั้งหมดมาวางเรียงเป็นแถวยาว จะมีวิธีจัดเรียงกี่วิธีเมื่อ

(1) ลูกบอลที่มีสีเดียวกันอยู่ติดกัน (2) ลูกบอลที่อยู่ริมทั้ง 2 ด้านมีสีเดียวกัน

……

……

……

……

……

……

……

……

3. ถ้าจัดหนังสือ 9 เล่มบนชั้นหนังสือเดียวกันอย่างไม่มีเงื่อนไขใดๆ ปรากฏว่าได้จำนวนวิธีการจัดเท่ากับ 2,520 วิธี จงหาจำนวนวิธีการจัดหนังสือโดยให้หนังสือที่เหมือนกันและมีจำนวนมากที่สุดอยู่ติดกัน

……

……

……

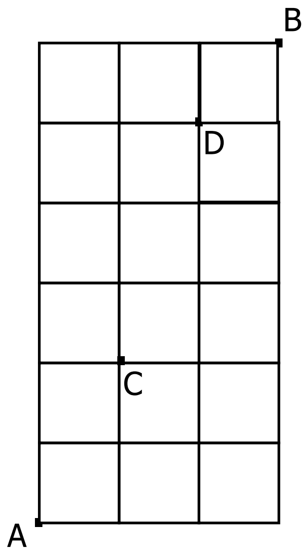
……

……

……

……

4. จากรูปที่กำหนดให้เป็นแผนผังของเมืองๆ หนึ่ง รอยเส้นในแผนผังคือถนน ถ้าชายคนหนึ่งต้องการขับรถออกจากจุด A ไปยังจุด B โดยมีเงื่อนไขว่าเขาจะต้องขับรถไปทางทิศเหนือหรือทิศตะวันออกเท่านั้น อยากทราบว่าเขาจะมีการเลือกเส้นทางได้ทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ



(1) ไม่มีเงื่อนไขใด

(2) ต้องผ่านจุด C ด้วย

(3) ต้องผ่านจุด C และ D ด้วย

(4) ต้องผ่านจุด C แต่ไม่ผ่านจุด D

………
………
………
………
………
………
………
………

5. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดให้คน 9 คน เข้าพักในห้อง 3 ห้อง ถ้าห้องหนึ่งๆ อยู่ได้ 4 คน 3 คน และ 2 คน

………
………
………
………
………
………
………
………

6. จงหาจำนวนวิธีแบ่งของเล่น 10 ชิ้นให้แก่เด็ก 3 คน โดยที่

(1) คนหนึ่งได้ 4 ชิ้น อีก 2 คนได้คนละ 3 ชิ้น

(2) เด็กที่มีอายุมากที่สุดได้ 4 ชิ้น อีก 2 คนได้คนละ 3 ชิ้น

……

……

……

……

……

……

7. มีนักเรียนจำนวน 10 คน ในจำนวนนี้มีนาย ก นาย ข และนาย ค รวมอยู่ด้วย ถ้าให้นักเรียนทั้งหมดขึ้นนั่งในรถยนต์ 3 คัน คันที่หนึ่งจำนวน 4 คน คันที่สองจำนวน 3 คน และคันที่สามจำนวน 3 คน
จงหาจำนวนวิธีการขึ้นนั่งของนักเรียนทั้ง 10 คนเมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) นาย ก ข และ ค แยกกันนั่งคนละคัน

(3) นาย ก ข และ ค นั่งคันเดียวกัน

……

……

……

……

……

……

8. จัดนักเรียน 6 คนเป็น 3 กลุ่ม แบ่งกันไปทำโจทย์เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยน 3 ข้อที่แตกต่างกัน โดยจัดกลุ่มละกี่คนก็ได้ จะมีวิธีจัดทั้งหมดกี่วิธี

……

……

……

……

……

……

……

$$

ใบความรู้ที่ 5.2 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันแบบวงกลม

****

วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันแบบวงกลม

กฎข้อที่ 10 ถ้าของ n สิ่ง แบ่งเป็น k กลุ่ม โดยที่กลุ่มที่ 1 มีของเหมือนกัน n_1 สิ่ง กลุ่มที่ 2 มีของเหมือนกัน n_2 สิ่ง .... กลุ่มที่ k มีของเหมือนกัน n_k สิ่ง และ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ โดยที่ **ห.ร.ม $(n_1, n_2, ..., n_k) = 1$** แล้ว จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งนั้นแบบวงกลมเท่ากับ $\dfrac{(n-1)!}{n_1!\,n_2!\,.....\,n_k!}$ วิธี

หมายเหตุ : 1. จากกฎข้อที่ 10 นี้ ถ้าในจำนวน $n_1, n_2, ..., n_k$ มีบางตัวเท่ากับ 1 แล้ว จะได้ ห.ร.ม $(n_1, n_2, ..., n_k) = 1$ เสมอ

2. ในกรณีที่ ห.ร.ม $(n_1, n_2, ..., n_k)$ ไม่เท่ากับ 1 เราไม่สามารถใช้สูตรนี้ได้ (กล่าวคือใช้สูตรนี้จะให้ค่าที่ไม่ถูกต้องกับความเป็นจริง) เช่น การจัดเรียงอักษร AABBCC ในแนววงกลม (ซึ่ง ห.ร.ม. ของ 2 , 2 , 2 คือ 2) จากการลองนับจริงจะทำได้ 16 วิธี ขณะที่การใช้สูตรจะได้ $\dfrac{(6-1)!}{2!2!2!} = 15$ วิธี ซึ่งผิดสำหรับการคำนวณหาค่าที่แท้จริง ทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบทของเมอบิอุส (Mobius Theorem) ซึ่งเกินหลักสูตรในชั้นนี้

ตัวอย่างที่ 1 มีลูกบอลสีแดงเหมือนกัน 2 ลูก สีเขียวเหมือนกัน 3 ลูก สีขาวเหมือนกัน 4 ลูก จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของลูกบอลทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ มีลูกบอลทั้งหมด 9 ลูก แต่เป็นสีแดงเหมือนกัน 2 ลูก สีเขียวเหมือนกัน 3 ลูก และสีขาวเหมือนกัน 4 ลูก เนื่องจาก ห.ร.ม. ของ 2 , 3 และ 4 เท่ากับ 1

ดังนั้น จะมีวิธีจัดเรียงลูกบอลทั้งหมดแบบวงกลมได้ $\dfrac{(9-1)!}{2!3!4!} = 140$ วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 2 มีหนังสือคณิตศาสตร์ 1 เล่ม เคมีเหมือนกัน 2 เล่ม ฟิสิกส์เหมือนกัน 2 เล่ม และชีววิทยาเหมือนกัน 3 เล่ม จะนำหนังสือทั้งหมดมาเรียงเป็นวงกลมได้กี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) วิชาเดียวกันอยู่ติดกัน (3) วิชาชีววิทยาอยู่ติดกันทั้ง 3 เล่ม

วิธีทำ (1) มีหนังสือทั้งหมด 8 เล่ม เป็นเคมีเหมือนกัน 2 เล่ม ฟิสิกส์เหมือนกัน 2 เล่ม ชีววิทยาเหมือนกัน 3 เล่ม และเป็นคณิตศาสตร์อีก 1 เล่ม

เนื่องจาก ห.ร.ม. ของ 2 , 2 , 3 และ 1 เท่ากับ 1

ดังนั้น จะนำหนังสือทั้งหมดมาเรียงเป็นวงกลมได้ $\frac{(8-1)!}{2!2!3!} = 210$ วิธี <u>Ans</u>.

(2) มัดวิชาเดียวกันไว้ด้วยกัน จึงเสมือนมีหนังสือทั้งหมด 4 เล่ม แตกต่างกัน แต่ในมัดเดียวกันเป็นหนังสือที่เหมือนกัน สลับที่กันก็ไม่มีความหมาย

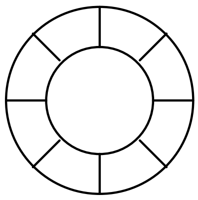
ดังนั้น จึงจัดเรียงหนังสือทั้งหมดเป็นวงกลมได้ $3! = 6$ วิธี <u>Ans</u>.

(3) มัดวิชาชีววิทยาไว้เป็น 1 มัด จึงเสมือนมีหนังสือทั้งหมด 6 เล่ม ซึ่งใน 6 เล่มนี้ มีฟิสิกส์เหมือนกัน 2 เล่ม เคมีเหมือนกัน 2 เล่ม คณิตศาสตร์ 1 เล่ม และชีววิทยา 1 มัด

เนื่องจาก ห.ร.ม. ของ 2 , 2 , 1 และ 1 เท่ากับ 1

ดังนั้น จะนำหนังสือทั้งหมดมาเรียงเป็นวงกลมได้ $\frac{(6-1)!}{2!2!} = 30$ วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าต้องการทาสีดำ สีขาว และสีเขียว ในช่องบนแผ่นวงแหวนที่มี 8 ช่อง ดังรูป โดยทาสีดำ 2 ช่อง และสีขาว 2 ช่อง จะมีวิธีทาทั้งหมดกี่วิธีเมื่อต้องการให้ช่องที่ทาสีดำอยู่ติดกัน



วิธีทำ ถ้าให้ B แทนสีดำ W แทนสีขาว และ G แทนสีเขียว

จำนวนวิธีการทาสีจากโจทย์ข้อนี้ ก็คือ การจัดเรียงอักษร B 2 ตัวจับมัดติดกัน W 2 ตัว และ G 4 ตัว เป็นวงกลม โดยให้อักษร B ทั้งสองตัวอยู่ติดกัน นั่นเอง

มัดอักษร B ไว้ด้วยกัน จึงเสมือนมีอักษรทั้งหมด 7 ตัว คือ

BB WWGGGG

เนื่องจาก ห.ร.ม. ของ 1 , 2 และ 4 เท่ากับ 1

ดังนั้น จึงจัดเรียงอักษรดังกล่าวนี้ได้ $\frac{(7-1)!}{2!4!} = 15$ วิธี

นั่นคือ จะมีวิธีการทาสีทั้งหมด 15 วิธี <u>Ans</u>.

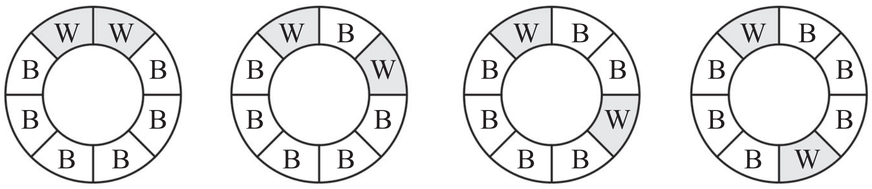
ตัวอย่างที่ 4 จากรูปในตัวอย่างที่ 3 ถ้าต้องการทาเฉพาะสีดำ และสีขาวลงในช่องวงแหวน 8 ช่อง โดยทาสีดำ 6 ช่อง จะมีจำนวนวิธีทาได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ต้องการทาสีดำ 6 ช่อง และสีขาว 2 ช่อง

จำนวนวิธีทาสี ก็คือ จำนวนวิธีจัดเรียงอักษร B 6 ตัว และ W 2 ตัว เป็นวงกลมนั่นเอง

เนื่องจาก ห.ร.ม. ของ 6 และ 2 เท่ากับ 2 จึงใช้สูตรไม่ได้

เราสามารถแยกนับโดยแจกแจงแต่ละกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด ดังนี้



แบบที่ 1 W ติดกัน 2 ช่อง | แบบที่ 2 W 1 ช่อง เว้น 1 ช่อง | แบบที่ 3 W 1 ช่อง เว้น 2 ช่อง | แบบที่ 4 W 1 ช่อง เว้น 3 ช่อง

จึงได้จำนวนวิธีการทาสีทั้งหมดเท่ากับ 4 วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 5 มีแท่งไม้รูปกรวยฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ต้องการทาสีแดง ขาว น้ำเงิน โดยทาสีที่ฐาน 1 สี ส่วนด้านข้างทาสีละ 2 ด้าน จงหาจำนวนวิธีการทาสีเมื่อด้านข้างที่ทาสีแดง 2 ด้านอยู่ติดกัน

วิธีทำ เนื่องจากมีสีต่างกัน 3 สี ดังนั้น จำนวนวิธีทาสีที่ฐาน = 3 วิธี

ต้องการให้ด้านข้างที่ทาสีแดง 2 ด้านอยู่ติดกัน จึงคิดโดยรวบสีแดง 2 ด้านเป็น 1 ด้าน ด้านข้าง 6 ด้าน จึงเสมือนมีเพียง 5 ด้าน ดังนี้

$\boxed{\text{แดง แดง}}$ ขาว ขาว น้ำเงิน น้ำเงิน

เนื่องจาก ห.ร.ม. ของ 1 , 2 และ 2 เท่ากับ 1

จึงมีวิธีทาสีด้านข้าง $= \dfrac{(5-1)!}{2!2!} = 6$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทาสีแท่งไม้นี้ $= 3 \times 6 = 18$ วิธี <u>Ans</u>.

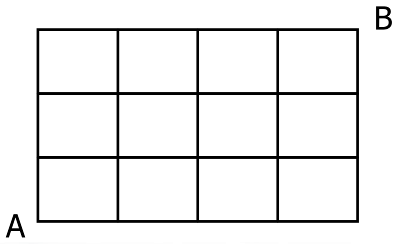
จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของคราวละ r สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง ซึ่งมีบางสิ่งซ้ำกัน ไม่มีสูตรคำนวณตายตัว หลักในการคิดก็คือ ให้แยกเป็นกรณีย่อยๆ โดยแต่ละกรณีย่อยสามารถนำกฎที่เรียนผ่านมาแล้วใช้ในการพิจารณาได้ ในที่นี้จะยังไม่ยกตัวอย่างโจทย์ลักษณะดังกล่าวนี้ เพราะเมื่อนักเรียนได้เรียนหัวข้อเรื่องการจัดหมู่ซึ่งจะกล่าวถึงในลำดับต่อไปแล้ว จะทำให้การทำโจทย์ลักษณะดังกล่าวง่ายขึ้น จึงจะยกไปไว้ในหัวข้อเรื่องวิธีจัดหมู่

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

ใบแบบฝึกหัดที่ 5 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกันและการแบ่งกลุ่ม

****

1. จะสลับอักษรในคำว่า “COOPERATOR” ได้กี่วิธีเมื่อ
   (1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) อักษร O อยู่ติดกันทั้ง 3 ตัว
   (3) ขึ้นต้นด้วยอักษร R ทั้ง 2 ตัว
2. จะสลับอักษรในคำว่า “MATHEMATICIAN” ได้กี่วิธีเมื่อ
   (1) อักษร A อยู่ติดกันทั้ง 3 ตัว (2) อักษร A อยู่ติดกันเพียง 2 ตัว
3. มีกี่วิธีที่จะนำอักษรทุกตัวจากคำว่า “TROTTING” มาเรียงสับเปลี่ยนเป็นคำต่างๆ โดยมีเงื่อนไขว่า คำนั้นต้องขึ้นต้นด้วยสระและลงท้ายด้วยอักษร T
4. มีหนังสือ 4 วิชาที่แตกต่างกัน แต่ละวิชามี 3 เล่มที่เหมือนกัน ถ้าจะจัดหนังสือทั้งหมดเป็นแถวยาว จะจัดได้กี่วิธีเมื่อ (1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) วิชาเดียวกันอยู่ติดกัน (3) หนังสือที่อยู่ริมทั้งสองด้านเป็นวิชาเดียวกัน
5. ชายคนหนึ่งมีธงสำหรับส่งสัญญาณ 7 ผืนเหมือนกัน สีแดง 2 ผืน ขาว 2 ผืน น้ำเงิน 3 ผืน ในการส่งสัญญาณแต่ละสัญญาณจะต้องใช้ธงทั้ง 7 ผืน โดยแขวนในแนวดิ่ง และสัญญาณขอความช่วยเหลือจะต้องใช้ธงสีน้ำเงินเป็นผืนที่อยู่บนสุด ชายคนนี้จะส่งสัญญาณได้กี่วิธีเมื่อ
   (1) สัญญาณนั้นเป็นสัญญาณขอความช่วยเหลือ
   (2) สัญญาณนั้นไม่ใช่สัญญาณขอความช่วยเหลือ
6. มีบัตรชมภาพยนตร์ชั้นหนึ่งอยู่ 2 ใบ ชั้นสอง 3 ใบ ชั้นสาม 2 ใบ จะแจกบัตรชมภาพยนตร์เหล่านี้ ให้แก่เด็ก 7 คนๆ ละ 1 ใบได้กี่วิธี
7. แบ่งนักเรียน 9 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม ให้มีกลุ่มละ 4 คน 3 คน และ 2 คน ตามลำดับ จะแบ่งได้กี่วิธี
8. มีนักเรียน 8 คน ต้องการจัดนักเรียนเข้าห้องพัก 3 ห้องๆ ละ 4 คน 2 คน และ 2 คน จะจัดนักเรียนเข้าห้องพักดังกล่าวได้กี่วิธี
9. มีชาย 4 คน ต้องการแบ่งชาย 4 คนนี้ออกเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ 2 คน จะแบ่งได้กี่วิธี
10. แบ่งคน 9 คน ออกเป็น 3 กลุ่มๆ ละ 3 คน จะมีวิธีแบ่งได้กี่วิธี
11. มีนักกีฬาเทนนิสชาย 4 คน ต้องการจัดชาย 4 คนนี้ไปแข่งขันเทนนิสประเภทชายคู่ 2 ทีม โดยให้เป็นทีมมืออันดับหนึ่งและอันดับสองตามลำดับ จะจัดได้กี่วิธี
12. กำหนดให้เส้นแต่ละเส้นต่อไปนี้แทนถนน นาย ก จะเดินทางจากจุด A ไปยังจุด B ได้กี่วิธี โดยที่ในการเดินแต่ละครั้งต้องเดินไปทางทิศตะวันออกหรือทิศเหนือเท่านั้น



13. ชายขี้เมาคนหนึ่งสามารถก้าวไปข้างหน้าหรือข้างหลังก็ได้ ถ้าเขาเดินทั้งหมด 11 ก้าว เขาจะมีวิธีเดินทั้งหมดกี่วิธี เมื่อเดินครบ 11 ก้าวแล้วตัวเขาจะยืนอยู่ห่างจากจุดตั้งต้นไปข้างหน้า 5 ก้าว

14. ในการแข่งขันฟุตบอลของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ซึ่งต้องแข่งทั้งหมด 8 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีต่างๆ ที่เป็นไปได้ของผลการแข่งขันต่อไปนี้

    (1) ชนะ 4 ครั้ง และแพ้ 4 ครั้ง

    (2) ชนะ 2 ครั้ง แพ้ 3 ครั้ง และเสมอ 3 ครั้ง

    (3) ชนะ 6 ครั้ง แพ้ 1 ครั้ง และเสมอ 1 ครั้ง

15. นักทัศนาจรกลุ่มหนึ่งจำนวน 9 คน ในจำนวนนี้มีชาย 3 คน ถ้าให้คนกลุ่มนี้เข้าพักในบ้านพักหลังหนึ่ง ซึ่งมี 3 ห้องนอน โดยให้นอนห้องละ 3 คน จงหาจำนวนวิธีการแบ่งคนเข้าพักในห้องดังกล่าว เมื่อ

    (1) ไม่มีเงื่อนไขใด   (2) ชายพักห้องเดียวกันทั้ง 3 คน

    (3) ทุกห้องต้องมีหญิงอย่างน้อย 1 คน   (4) ทุกห้องต้องมีชายอย่างน้อย 1 คน

16. เด็กคนหนึ่งมีลูกบอลจำนวน 10 ลูก ถ้าเขานำลูกบอลมาเรียงเป็นแถวยาวอย่างไม่มีเงื่อนไข พบว่ามีวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด 12,600 วิธี อยากทราบว่าเขาจะมีวิธีจัดเรียงลูกบอลกี่วิธีเมื่อ

    (1) ให้ลูกบอลที่เหมือนกันอยู่ติดกัน

    (2) ให้ลูกบอลเฉพาะที่เหมือนกันและมีจำนวนมากที่สุดอยู่ติดกัน

17. มีดอกไม้อยู่ 5 ชนิดๆ ละ 3 ดอกเหมือนกัน จะมีวิธีการนำดอกไม้มาร้อยเป็นพวงมาลัยได้กี่วิธี โดยให้ดอกไม้ชนิดเดียวกันอยู่ติดกัน

18. จะนำอักษรทุกตัวจากคำว่า “PARALLEL” มาจัดเรียงแบบวงกลมได้กี่วิธีเมื่อ

    (1) ไม่มีเงื่อนไขใด

    (2) อักษร A อยู่ติดกัน

19. จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร X, X, Y, Y, Y, Z, Z แบบวงกลม เมื่อ

    (1) ไม่มีเงื่อนไขใด   (2) X อยู่ติดกันทั้ง 2 ตัว

    (3) Y อยู่ติดกันทั้ง 3 ตัว   (4) Z อยู่แยกกัน

20. ถ้านำลูกแก้วซึ่งมีลักษณะและขนาดเหมือนกัน สีแดง 2 ลูก สีขาว 4 ลูก และสีดำ 3 ลูก มาวางเรียงเป็นวงกลม จะวางได้กี่วิธีเมื่อต้องการให้สีดำอยู่ติดกันทั้ง 3 ลูก แต่สีแดงอยู่แยกกัน

♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง **วิธีจัดหมู่** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 4 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจ มีทักษะในการคิดคำนวณเกี่ยวกับวิธีจัดหมู่และนำไปแก้โจทย์ปัญหาได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกความหมายของวิธีจัดหมู่ได้

1.2 บอกกฎเกี่ยวกับวิธีจัดหมู่ได้

1.3 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง ซึ่งเลือกมาจากสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันได้

1.4 คำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง ซึ่งเลือกมาจากสิ่งของ n สิ่งที่มีบางสิ่งซ้ำกันได้

2. แนวความคิดหลัก

2.1 วิธีจัดหมู่ เป็นวิธีการจัดสิ่งของ r สิ่ง ซึ่งเลือกมาจากสิ่งของ n สิ่ง โดยไม่ถือลำดับหรือตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญซึ่งความรู้เรื่องนี้จะเป็นประโยชน์ในการเรียนเรื่องความน่าจะเป็น

2.2 ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง จำนวนวิธีจัดหมู่ครั้งละ r สิ่ง เท่ากับ $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ วิธี

3. เนื้อหาสาระ

3.1 วิธีจัดหมู่ของสิ่งของคราวละ r สิ่งจากสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง (กฎข้อที่ 11)

3.2 วิธีจัดหมู่ของสิ่งของคราวละ r สิ่งจากสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1 - 2

4.1 กำหนดอักษร A , B , C , D ให้นักเรียนเลือกอักษรมา 3 ตัว จากอักษร 4 ตัวที่กำหนดให้ โดยให้นักเรียนตอบทีละคน และคำตอบต้องไม่ซ้ำกับเพื่อน แล้วครูเขียนคำตอบทั้งหมดบนกระดาน ซึ่งจะได้คำตอบทั้งหมดคือ ABC , ABD , ACD , BCD

4.2 ให้นักเรียนเปรียบเทียบคำตอบที่ได้นี้กับคำตอบของวิธีเรียงสับเปลี่ยนของอักษร คราวละ 3 ตัวจากอักษร 4 ตัว คือ A , B , C , D ซึ่งนักเรียนควรจะค้นพบว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะมากกว่าจำนวนวิธีเลือก เนื่องจากจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนให้ความสำคัญกับลำดับ แต่จำนวนวิธีเลือกนั้น ลำดับจะไม่มีความสำคัญ

4.3 ครูชี้แจงนักเรียนว่า วิธีเลือกอักษร 3 ตัว จากอักษร 4 ตัว ดังตัวอย่างข้างต้นนี้ เป็นตัวอย่างหนึ่งของวิธีจัดหมู่

4.4 ให้นักเรียนช่วยกันสรุปความหมายของวิธีจัดหมู่

4.5 ใช้วิธีถาม - ตอบ ประกอบการอธิบาย ต่อไปนี้

1) จากคำตอบวิธีจัดหมู่ของ 3 สิ่งจากสิ่งของ 4 สิ่งบนกระดาน ให้นักเรียนพิจารณาว่าในแต่ละวิธีของการจัดหมู่ ถ้าถือลำดับเป็นสำคัญจะเรียงสับเปลี่ยนได้กี่วิธี (3 ! วิธี)

2) ดังนั้น 4 วิธีของการจัดหมู่จะเรียงสับเปลี่ยนได้กี่วิธี (3 ! x 4 วิธี)

3) จากที่เรียนมาแล้ว นักเรียนต้องทราบแล้วว่าจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของคราวละ 3 สิ่งจากสิ่งของ 4 สิ่ง เท่ากับเท่าใด [P(4 , 3)]

ดังนั้น $4 \times 3! = P(4,3)$

$$4 = \frac{P(4,3)}{3!}$$

นั่นคือ จำนวนวิธีจัดหมู่ของ 3 สิ่งจาก 4 สิ่ง $= \dfrac{P(4,3)}{3!}$

4.6 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มยกตัวอย่างโจทย์ทำนองเดียวกับที่ครูตั้งในตอนต้น โดยเปลี่ยนจำนวน สิ่งของที่กำหนดและจำนวนสิ่งของที่เลือก แล้วช่วยกันหาจำนวนวิธีจัดหมู่ของโจทย์ที่นักเรียนตั้ง จนกระทั่งนักเรียนสามารถสรุปจำนวนวิธีจัดหมู่ของ r สิ่งจากสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง (กฎข้อที่ 11) ได้

4.7 ครูอธิบายสัญลักษณ์ C (n , r) พร้อมทั้งยกตัวอย่างให้นักเรียนหาค่า C (n , r) เมื่อกำหนดค่า n และ r ต่างๆ กัน

4.8 ยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีจัดหมู่ ให้นักเรียนช่วยกันคิด โดยใช้วิธีถาม - ตอบ

4.9 ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 6.1 และบันทึกปัญหาที่ไม่เข้าใจไว้

ชั่วโมงที่ 3

4.10 ซักถามปัญหาของนักเรียนจากการศึกษาใบความรู้ที่ 6.1 โดยที่ปัญหาของนักเรียนคนหนึ่งอาจให้นักเรียนอีกคนหนึ่งที่เข้าใจเป็นผู้อธิบายได้ หรือครูเป็นผู้อธิบายก็ได้

4.11 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มฝึกคำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง ซึ่งเลือกมาจากสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันในใบงานที่ 6

4.12 สุ่มตัวแทนกลุ่มออกมานำเสนอวิธีแก้โจทย์ปัญหาแต่ละข้อในใบงานที่ 6 โดยครูช่วยเสริม และแก้ไขข้อบกพร่อง

ชั่วโมงที่ 4

4.13 พูดคุยกับนักเรียนถึงเรื่องการจัดหมู่ที่ได้เรียนผ่านมาว่า ที่เรียนมาแล้วนั้น สิ่งของที่นำมาจัดหมู่เป็นสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และให้นักเรียนช่วยกันทบทวนกฎข้อที่ 11 จากนั้นครูตั้งปัญหายั่วยุให้นักเรียนคิดว่า ถ้าสิ่งของที่นำมาจัดหมู่มีบางสิ่งซ้ำกัน นักเรียนจะมีวิธีหาคำตอบในการจัดหมู่ได้อย่างไร

4.14 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มรับบัตรปัญหากลุ่มละ 1 บัตร พร้อมอุปกรณ์ (กระดุม ตัวอักษร ลูกแก้ว) แล้วให้สมาชิกในกลุ่มร่วมกันหาคำตอบของปัญหาที่ได้รับ โดยใช้อุปกรณ์ช่วย

4.15 ให้ตัวแทนกลุ่มออกมานำเสนอวิธีหาคำตอบของปัญหาที่ได้รับ โดยครูช่วยแก้ไขและอธิบายเพิ่มเติมให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

4.16 ครูใช้คำถามนำจนกระทั่งนักเรียนสรุปได้ว่าในการหาจำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง ที่มีบางสิ่งซ้ำกัน ไม่มีสูตรคำนวณตายตัว แต่ต้องแยกเป็นกรณีย่อยๆ โดยแต่ละกรณีย่อยสามารถนำกฎที่เรียนผ่านมาแล้วไปใช้ได้

4.17 ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 6.2 และซักถามปัญหาถ้าไม่เข้าใจ

4.18 ให้นักเรียนฝึกทักษะการคำนวณและแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง ซึ่งเลือกมาจากสิ่งของ n สิ่งที่มีบางสิ่งซ้ำกันในใบแบบฝึกหัดที่ 6

5. สื่อ/ แหล่งเรียนรู้

5.1 ใบความรู้ที่ 6.1 เรื่องวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด
5.2 ใบงานที่ 6 เรื่องวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด
5.3 ใบความรู้ที่ 6.2 เรื่องวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของ n สิ่งที่มีบางสิ่งซ้ำกัน
5.4 บัตรปัญหา พร้อมอุปกรณ์ (กระดุม ตัวอักษร ลูกแก้ว)
5.5 ใบแบบฝึกหัดที่ 6 เรื่องวิธีจัดหมู่

6. การวัดและประเมินผล

สังเกตจากการตอบคำถาม การทำใบงาน การนำเสนอ และการตรวจใบแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

7.1 ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องการพัฒนา

……

……

……

7.2 แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

……

……

……

7.3 ผลที่เกิดกับผู้เรียน

……

……

……

8. ข้อเสนอแนะ

……

……

……

……

……

ใบความรู้ที่ 6.1 เรื่อง วิธีจัดหมู่ของสิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด

****

วิธีจัดหมู่ (combination)

เป็นการศึกษาจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ในการเลือกสมาชิกจำนวนหนึ่งจากสมาชิกทั้งหมด หรือการจัดหมู่สิ่งของโดยไม่สนใจลำดับของสิ่งที่เราเลือก (คิดเสมือนเลือกมาพร้อมกัน)

วิธีจัดหมู่ต่างจากวิธีเรียงสับเปลี่ยนตรงที่ว่า วิธีจัดหมู่นั้นไม่ยึดถือเรื่องลำดับเป็นสำคัญ กล่าวคือ การสลับที่กันไม่มีความหมาย

นิยาม การจัดของ r สิ่ง ที่เลือกมาจากของ n สิ่งโดยไม่ถือลำดับหรือตำแหน่งเป็นสำคัญ เรียกว่าวิธีจัดหมู่

วิธีจัดหมู่ของสิ่งของครั้งละ r สิ่ง จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง

ถ้ามีอักษรที่แตกต่างกัน 4 ตัว คือ A , B , C , D จะได้จำนวนวิธีการจัดหมู่ของตัวอักษรครั้งละ 3 ตัว ดังต่อไปนี้คือ ABC , ABD , ACD และ BCD เท่ากับ 4 วิธีเท่านั้น ซึ่งถ้าเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะพบว่าแต่ละหมู่มีวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้อีก 3! วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 3 ตัวจาก 4 ตัวเท่ากับ 4 x 3! วิธี แต่จากที่เรียนมาแล้ว เราทราบว่าจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ 3 สิ่งจาก 4 สิ่งเท่ากับ P(4 , 3) วิธี

ดังนั้น $4 \times 3! = P(4, 3)$

$$4 = \frac{P(4,3)}{3!}$$

นั่นคือ จำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของ 3 สิ่งจาก 4 สิ่ง $= \dfrac{P(4,3)}{3!}$

ในกรณีทั่วไป จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน $= \dfrac{P(n,r)}{r!}$

> **กฎข้อที่ 11** ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง จำนวนวิธีจัดหมู่ครั้งละ r สิ่ง
> เท่ากับ $\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ วิธี

เขียนแทนจำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ด้วยสัญลักษณ์ nCr หรือ ${}^{n}C_{r}$ หรือ ${}_{n,r}$ หรือ C (n , r) หรือ $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ สำหรับในที่นี้จะใช้ $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$

ดังนั้นจากกฎข้อที่ 11 จึงได้ว่า

$$\boxed{\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

ตัวอย่างที่ 1

$$\binom{6}{0} = \frac{6!}{0!(6-0)!} = \frac{6!}{0!6!} = 1$$

$$\binom{6}{1} = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{6!}{1!5!} = 6$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{6!}{5!1!} = 6$$

$$\binom{6}{6} = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{6!}{6!0!} = 1$$

ข้อสังเกต

1. $\binom{6}{0} = \binom{6}{6}$, $\binom{6}{1} = \binom{6}{5}$, $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$
2. $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64 = 2^6$

ในกรณีทั่วไป

1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
2. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

เช่น

1. $\binom{5}{0} = \binom{5}{5}$, $\binom{5}{1} = \binom{5}{4}$, $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$
2. $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$
3. $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \ldots + \binom{8}{8} = 2^8$
4. $\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \ldots + \binom{10}{10} = 2^{10} - 1$

ตัวอย่างที่ 2 บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่งมีจุดคงที่ 10 จุด จงหา

(1) จำนวนคอร์ดของวงกลม โดยมีจุดเหล่านี้เป็นจุดปลายทั้งสองด้านของคอร์ด

(2) จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอดมุม

วิธีทำ กำหนดจุด 10 จุด อยู่บนเส้นรอบวง แสดงว่า ไม่มี 3 จุดใดที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

(1) เนื่องจากคอร์ด 1 เส้น เกิดจากการลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุด 2 จุด ใดๆ บนเส้นรอบวง ดังนั้น จำนวนคอร์ดของวงกลมก็คือจำนวนวิธีเลือกจุดครั้งละ 2 จุด จากจุดทั้งหมด 10 จุด

จึงได้ จำนวนคอร์ดของวงกลมทั้งหมดเท่ากับ $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$ เส้น <u>Ans</u>.

(2) เนื่องจากสามเหลี่ยม 1 รูป เกิดจากการลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุด 3 จุด ใด ๆ จากจุดที่กำหนดให้

ดังนั้น จำนวนสามเหลี่ยมทั้งหมดเท่ากับจำนวนวิธีเลือกจุดครั้งละ 3 จุด จากจุดทั้งหมด 10 จุด

จึงได้ จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดเท่ากับ $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ รูป <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 3 มีจุดบนระนาบจำนวน 12 จุด

(1) ถ้าไม่มีสามจุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จงหาจำนวนเส้นตรงที่ลากผ่านจุด 2 จุดใดๆ ใน 12 จุดนี้

(2) ถ้าในจำนวน 12 จุดนี้ มีจุด A , B , C และ D อยู่ด้วย ซึ่งอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และนอกจาก 4 จุดนี้แล้ว ไม่มี 3 จุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จงหาจำนวนเส้นตรงที่ลากผ่าน 2 จุดใดๆ ใน 12 จุดนี้

วิธีทำ (1) เนื่องจากใน 12 จุด ไม่มี 3 จุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ดังนั้น จำนวนเส้นตรงทั้งหมดที่ลากผ่าน 2 จุดใด ๆ เท่ากับ $\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!10!} = 66$ เส้น <u>Ans</u>.

(2) เนื่องจากใน 12 จุดนี้ มี 4 จุด อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ดังนั้น เส้นตรงที่ลากผ่าน 2 จุดใดๆ ใน 4 จุดนี้ ย่อมเป็นเส้นตรงเดียวกัน

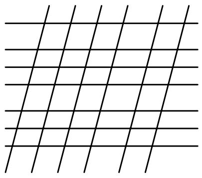
ซึ่งถ้า 4 จุดนี้ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะได้เส้นตรงที่ลากผ่าน 2 จุดใดๆ ทั้งหมด

เท่ากับ $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ เส้น

นั่นคือ ใน 4 จุดนี้ แทนที่จะได้เส้นตรงทั้งหมด 6 เส้น แต่ทำให้ได้เพียง 1 เส้น

ดังนั้น จำนวนเส้นตรงทั้งหมดที่ลากผ่าน 2 จุดใดๆ เท่ากับ $\binom{12}{2} - 6 + 1 = 61$ เส้น <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 4 มีเส้นตรงที่ขนานกัน 2 ชุด ชุดที่หนึ่งมี 6 เส้น ชุดที่สองมี 7 เส้น ถ้าให้เส้นขนานทั้ง 2 ชุดตัดกัน จะเกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมดกี่รูป



วิธีทำ จากรูป จะเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน 1 รูป เกิดจากการตัดกันของเส้นตรงคู่ใดคู่หนึ่งจากชุดที่ 1 และเส้นตรงอีกคู่ใดคู่หนึ่งจากชุดที่ 2

ดังนั้น จำนวนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมดย่อมเท่ากับจำนวนวิธีเลือกเส้นตรง 1 คู่ จากเส้นตรงชุดที่หนึ่ง และ จำนวนวิธีเลือกเส้นตรงอีก 1 คู่ จากเส้นตรงชุดที่สอง

เนื่องจาก จำนวนวิธีเลือกเส้นตรง 1 คู่ จากเส้นตรงชุดที่หนึ่งเท่ากับ $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$ วิธี

และ จำนวนวิธีเลือกเส้นตรง 1 คู่ จากเส้นตรงชุดที่สองเท่ากับ $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$ วิธี

ดังนั้น จึงเกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมด $15 \times 21 = 315$ รูป <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 5 หยิบไพ่ 5 ใบ จากไพ่ 1 สำรับได้กี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขใด (2) ได้ไพ่คิง 4 ใบ

(3) ได้ไพ่โพดำ 2 ใบ โพแดง 3 ใบ (4) ได้ไพ่ชุดเดียวกันทั้ง 5ใบ

วิธีทำ ไพ่ 1 สำรับ ประกอบด้วยไพ่ทั้งหมด 52 ใบ แยกเป็น 4 ดอก คือ โพดำ (♠) โพแดง (♥) ดอกจิก (♣) และ ข้าวหลามตัด (♦) ดอกละ 13 ใบ และในแต่ละดอกจะมีแต้ม A , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , J , Q และ K

(1) หยิบไพ่ 5 ใบ จากทั้งหมด 52 ใบ

จะได้จำนวนวิธีหยิบไพ่เท่ากับ $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2{,}598{,}960$ วิธี <u>Ans</u>.

(2) ในไพ่ 1 สำรับ มีไพ่คิงอยู่ 4 ใบ จำนวนวิธีหยิบไพ่ได้คิง 4 ใบ จึงเท่ากับ $\binom{4}{4} = 1$ วิธี

และจำนวนวิธีหยิบไพ่อีก 1 ใบ จากไพ่ที่เหลือ เท่ากับ $\binom{48}{1} = 48$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบไพ่ทั้งหมดจึงเท่ากับ $1 \times 48 = 48$ วิธี <u>Ans</u>.

(3) เนื่องจากในไพ่ 1 สำรับ มีไพ่โพดำ 13 ใบ และ ไพ่โพแดง 13 ใบ

จึงได้ จำนวนวิธีหยิบไพ่ได้โพดำ 2 ใบ เท่ากับ $\binom{13}{2} = \frac{13!}{2!11!} = 78$ วิธี

จำนวนวิธีหยิบไพ่ได้โพแดง 3 ใบ เท่ากับ $\binom{13}{3} = \frac{13!}{3!10!} = 286$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบไพ่ได้โพดำ 2 ใบ โพแดง 3 ใบจึงเท่ากับ $78 \times 286 = 22{,}308$ วิธี <u>Ans</u>.

(4) ไพ่ชุดเดียวกันหมายถึงไพ่ที่มีดอกเดียวกัน

ขั้นแรก เลือกชนิดของดอก 1 ดอก จากทั้งหมด 4 ดอก เลือกได้ $\binom{4}{1} = 4$ วิธี

ในแต่ละวิธี เลือกไพ่ 5 ใบ จากไพ่ 13 ใบ เลือกได้ $\binom{13}{5} = \frac{13!}{5!8!} = 1,287$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบไพ่ได้ชุดเดียวกันทั้ง 5 ใบจึงเท่ากับ $4 \times 1,287 = 5,148$ วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 6 นายเดชมีลูกบอล 9 ลูก นายดอนมีลูกบอล 6 ลูก จะมีวิธีการแลกลูกบอลได้กี่วิธี ถ้า

(1) แลกกันคนละ 3 ลูก

(2) แลกกันคนละกี่ลูกก็ได้

วิธีทำ การแลกของกัน ก็คือ การเลือกสิ่งของในการสับเปลี่ยนกันนั่นเอง

(1) จำนวนวิธีที่นายเดชเลือกลูกบอล 3 ลูก ไปแลก เท่ากับ $\binom{9}{3} = 84$ วิธี

จำนวนวิธีที่นายดอนเลือกลูกบอล 3 ลูก ไปแลก เท่ากับ $\binom{6}{3} = 20$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีแลกลูกบอลคนละ 3 ลูก เท่ากับ $84 \times 20 = 1,680$ วิธี <u>Ans</u>.

(2) การแลกคนละกี่ลูกก็ได้ ก็คือการแลกคนละ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 หรือ 6 ลูก ซึ่งอาจคิดโดยตรงทีละกรณีๆ คือ

$$\binom{9}{1}\binom{6}{1} + \binom{9}{2}\binom{6}{2} + \binom{9}{3}\binom{6}{3} + \binom{9}{4}\binom{6}{4} + \binom{9}{5}\binom{6}{5} + \binom{9}{6}\binom{6}{6} = 5,004 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีแลกลูกบอลคนละกี่ลูกก็ได้เท่ากับ 5,004 วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 7 มีห้องเรียน 5 ห้อง ส่งตัวแทนห้องละ 2 คน เป็นชาย 1 คน หญิง 1 คน ถ้าต้องการคัดเลือกกรรมการ 4 คน จากตัวแทนทั้ง 10 คน จะมีวิธีเลือกกรรมการกี่วิธีเมื่อ

(1) ได้กรรมการชาย 2 คน หญิง 2 คน (2) ได้กรรมการที่มาจากห้องต่างกัน

(3) ได้กรรมการชายหญิง 1 คู่ที่มาจากห้องเดียวกัน

(4) ได้กรรมการชาย 2 คน หญิง 2 คน และได้ชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่มาจากห้องเดียวกัน

วิธีทำ (1) ตัวแทนที่ส่งมาห้องละ 2 คน รวมแล้วจะเป็นชาย 5 คน และหญิง 5 คน

เลือกชาย 2 คน จากชาย 5 คน ได้ $\binom{5}{2} = 10$ วิธี

เลือกหญิง 2 คน จากหญิง 5 คน ได้ $\binom{5}{2} = 10$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกกรรมการได้ชาย 2 คน และหญิง 2 คน เท่ากับ $10 \times 10 = 100$ วิธี <u>Ans</u>.

(2) เมื่อกรรมการ 4 คน มาจากห้องที่ต่างกัน แสดงว่ากรรมการ 4 คน ต้องมาจาก 4 ห้อง

แต่ห้องมีทั้งหมด 5 ห้อง จึงต้องเลือก 4 ห้องจากจาก 5 ห้องก่อน ซึ่งเลือกได้ $\binom{5}{4} = 5$ วิธี

จากนั้นในแต่ละห้องซึ่งมี 2 คน เราเลือกเพียง 1 คน จึงเลือกได้ $\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 16$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกกรรมการที่มาจากห้องต่างกันเท่ากับ $5 \times 16 = 80$ วิธี <u>Ans</u>.

(3) เลือกชายหญิง 1 คู่ที่มาจากห้องเดียวกัน ก็คือเลือก 1 ห้องจาก 5 ห้อง

ซึ่งเลือกได้ $\binom{5}{1} = 5$ วิธี

จากนั้นเลือกอีก 2 คน ซึ่ง 2 คนนี้ต้องมาจาก 2 ห้อง จึงเลือก 2 ห้องจาก 4 ห้องที่เหลือก่อน

ซึ่งเลือกได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ต่อมา จาก 2 ห้องที่เลือก เราเลือกเด็กมาห้องละ 1 คน ซึ่งเลือกได้ $\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 4$ วิธี

ดังนั้น จะเลือกกรรมการให้ได้ชายหญิง 1 คู่มาจากห้องเดียวกันได้ $5 \times 6 \times 4 = 120$ วิธี <u>Ans</u>.

(4) ได้กรรมการชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่ มาจากห้องเดียวกัน แสดงว่า

ได้ชายและหญิง 1 คู่ มาจากห้องเดียวกัน หรือ ได้ชายและหญิงมาจากห้องเดียวกัน 2 คู่

กรณีที่ 1 ได้ชายและหญิง 1 คู่ มาจากห้องเดียวกัน

เลือกชายหญิง 1 คู่ มาจากห้องเดียวกันได้ $\binom{5}{1} = 5$ วิธี

ต้องเลือกชายอีก 1 คน จากที่เหลือ 4 คน ได้ $\binom{4}{1} = 4$ วิธี

และเลือกหญิงอีก 1 คน จากหญิงห้องอื่นที่เหลืออีก 3 ห้อง ได้ $\binom{3}{1} = 3$ วิธี

กรณีนี้ จึงได้จำนวนวิธีเลือกทั้งหมดเท่ากับ $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี ***

กรณีที่ 2 ได้ชายและหญิง 2 คู่ มาจากห้องเดียวกัน

ในกรณีนี้ ก็คือเลือก 2 ห้อง จาก 5 ห้อง ซึ่งเลือกได้ $\binom{5}{2} = 10$ วิธี ***

จากทั้ง 2 กรณี จึงได้จำนวนวิธีเลือกกรรมการทั้งหมดเท่ากับ $60 + 10 = 70$ วิธี <u>Ans</u>.

$$$

ใบงานที่ 6 เรื่อง วิธีจัดหมู่ของสิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด

ในแต่ละกลุ่มจงช่วยกันวิเคราะห์โจทย์ต่อไปนี้ แล้วแสดงวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียด

1. จงแสดงว่า $C(n, r) = C(n, n-r)$

2. จงหาค่า r ที่ทำให้ $C(n, r) = P(n, r)$

3. กำหนด a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ b ไม่เท่ากับ 17 และ

$\binom{19}{14} = \binom{a}{5}$ และ $\binom{20}{17} = \binom{20}{b}$ จงหาค่าของ $\binom{a}{b}$

4. จงหาจำนวนเส้นทแยงมุมของรูปสิบสองเหลี่ยม

5. คณะกรรมการรุ่น ม.6 ประกอบด้วยกรรมการ 9 คน ในการประชุมแต่ละครั้งจะต้องมีกรรมการเข้าประชุมอย่างน้อยสองในสามจึงจะครบองค์ประชุม ดังนั้นจะมีการประชุมที่ครบองค์ประชุมได้ทั้งหมดกี่วิธี

....

....

....

....

....

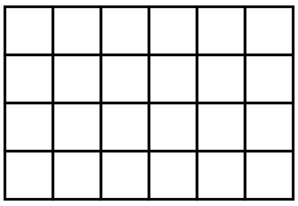
....

....

6. กำหนดเส้นที่อยู่ในแนวนอนห่างกัน 1 หน่วย เส้นที่อยู่ในแนวตั้งห่างกัน 1 หน่วย จากการตัดกันของเส้นขนานทั้งสองชุด ดังรูป จงหา

(1) จำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งหมด

(2) จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด



....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{p, q, r, s, t\}$ จงหาจำนวนฟังก์ชันจาก C ไป B เมื่อ $C \subset A$ และ $C \neq \phi$

....

....

....

....

....

....

****

ใบความรู้ที่ 6.2 เรื่อง วิธีจัดหมู่ของสิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของ n สิ่งที่มีบางสิ่งซ้ำกัน

****

วิธีจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของ n สิ่งที่มีบางสิ่งซ้ำกัน

จำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของคราวละ r สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง ซึ่งมีบางสิ่งซ้ำกัน ไม่มีสูตรคำนวณตายตัว หลักในการคิดก็คือ ให้แยกเป็นกรณีย่อยๆ โดยแต่ละกรณีย่อยสามารถนำกฎที่เรียนผ่านมาแล้ว ใช้ในการพิจารณาได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 มีลูกบอล 6 ลูก สีแดง 1 ลูก สีขาว 1 ลูก สีเหลือง 1 ลูก และสีดำเหมือนกัน 3 ลูก จะเลือกลูกบอล 4 ลูกได้กี่วิธี

วิธีทำ ลูกบอล 4 ลูกที่เลือก อาจได้สีต่างกันทั้งหมด หรืออาจมีสีที่ซ้ำกันอยู่ด้วยก็ได้ ซึ่งสามารถแบ่งเป็นกรณีย่อยๆ ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ได้ลูกบอลที่มีสีต่างกันทั้งหมด คือสีแดง ขาว เหลือง และดำ อย่างละ 1 ลูก

เลือกลูกบอลสีแดง 1 ลูก ได้ 1 วิธี

เลือกลูกบอลสีขาว 1 ลูก ได้ 1 วิธี

เลือกลูกบอลสีเหลือง 1 ลูก ได้ 1 วิธี

เลือกลูกบอลสีดำ 1 ลูก ได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกลูกบอลจึงเท่ากับ $1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ วิธี

กรณีที่ 2 ได้ลูกบอลที่มีสีเหมือนกัน 2 ลูก คือได้สีดำ 2 ลูก กับสีอื่น ๆ อีก 2 ลูก

เลือกลูกบอลสีดำ 2 ลูก ได้ 1 วิธี

เลือกลูกบอลสีอื่น 2 ลูก จากสีอื่นที่มีอยู่ 3 สี ได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกลูกบอลจึงเท่ากับ $1 \times 3 = 3$ วิธี

กรณีที่ 3 ได้ลูกบอลที่มีสีเหมือนกัน 3 ลูก คือได้สีดำ 3 ลูก กับสีอื่น ๆ อีก 1 ลูก

เลือกลูกบอลสีดำ 3 ลูก ได้ 1 วิธี

เลือกลูกบอลสีอื่น 1 ลูก จากสีอื่นที่มีอยู่ 3 สี ได้ $\binom{3}{1} = 3$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกลูกบอลจึงเท่ากับ $1 \times 3 = 3$ วิธี

รวมทุกกรณี จึงได้จำนวนวิธีเลือกลูกบอลทั้งหมดเท่ากับ $1 + 3 + 3 = 7$ วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 2 มีอักษรชุดหนึ่งประกอบด้วย a , a , a , b , b , c , c , d , d , e , f จะเลือกตัวอักษรมา 4 ตัวได้กี่วิธี

วิธีทำ อักษร 4 ตัวที่เลือก อาจได้ที่ต่างกันทั้งหมด หรืออาจได้ที่ซ้ำกันอยู่ด้วยก็ได้ ซึ่งสามารถแบ่งเป็นกรณี ย่อยๆ ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ได้อักษร 4 ตัวที่แตกต่างกันทั้งหมด

เนื่องจากอักษร**ที่<u>ต่างกัน</u>** มี 6 ตัว จึงเลือก 4 ตัว ได้ $\binom{6}{4} = 15$ วิธี

กรณีที่ 2 ได้อักษรที่เหมือนกัน 2 ตัว กับตัวอื่นๆ ที่ไม่เหมือนกันอีก 2 ตัว

เลือกอักษรที่เหมือนกัน 2 ตัว ได้ $\binom{4}{1} = 4$ วิธี

เลือกอักษรอื่นอีก 2 ตัวที่ไม่เหมือนกัน ได้ $\binom{5}{2} = 10$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกอักษรจึงเท่ากับ $4 \times 10 = 40$ วิธี

กรณีที่ 3 ได้อักษรที่เหมือนกัน 2 ตัว 2 คู่

เลือกอักษรที่เหมือนกัน 2 ตัว 2 คู่ ได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกอักษรจึงเท่ากับ 6 วิธี

กรณีที่ 4 ได้อักษรที่เหมือนกัน 3 ตัว กับอีก 1 ตัวที่ต่างออกไป

เลือกอักษรที่เหมือนกัน 3 ตัว ได้ 1 วิธี

เลือกอักษรอื่นอีก 1 ตัวที่ต่างออกไป ได้ $\binom{5}{1} = 5$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกอักษรจึงเท่ากับ $1 \times 5 = 5$ วิธี

รวมทุกกรณี จึงได้จำนวนวิธีเลือกอักษรทั้งหมดเท่ากับ $15 + 40 + 6 + 5 = 66$ วิธี <u>Ans</u>.

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

ใบแบบฝึกหัดที่ 6 เรื่อง วิธีจัดหมู่

****

1. จงหาค่า n จากสมการในข้อต่อไปนี้

   1) $4 \cdot C(n, 2) = C(n+2, 3)$ 2) $C(n, 12) = C(n, 8)$

   3) $C(n-2, 2) + C(n-3, 2) + C(n-4, 2) = 10$

2. ถ้า $P(n, r) = 3{,}024$ และ $C(n, r) = 126$ แล้ว จงหา

   1) $C(10, r+1)$ 2) $C(9, r-1)$

3. ถ้า $C(18, r) = C(18, r+2)$ จงหา $C(r, 5)$ และ $P(r+1, 3)$

4. ข้อสอบชุดหนึ่งมี 12 ข้อ ให้นักเรียนเลือกทำเพียง 8 ข้อ จงหาจำนวนวิธีทำข้อสอบ เมื่อ

   1) ต้องทำข้อสอบ 3 ข้อแรก

   2) ต้องทำอย่างน้อย 2 ข้อจาก 3 ข้อแรก และอย่างน้อย 1 ข้อจาก 2 ข้อหลัง

5. สโมสรสตรีแห่งหนึ่งมีสมาชิกหลายอาชีพได้แก่ ครู 5 คน ประกอบธุรกิจส่วนตัว 10 คน หมอ 2 คน ทำงานธนาคาร 4 คน จะเลือกกรรมการชุดหนึ่งประกอบด้วยสมาชิก 5 คน ได้กี่วิธีเมื่อ

   1) ต้องการอาชีพประกอบธุรกิจส่วนตัว 3 คน ครู 1 คน และหมอ 1 คน

   2) มีอาชีพประกอบธุรกิจส่วนตัว 3 คน   3) มีอาชีพทำงานธนาคารอย่างน้อย 3 คน

6. จะเลือกกรรมการ 3 คน จาก 20 คนได้กี่วิธีเมื่อ

   1) ถ้ามีบุคคลหนึ่งได้รับเลือกด้วยเสมอ

   2) ใน 20 คน มี 2 คนเป็นสามีภรรยากัน จะถูกเลือกเป็นกรรมการทั้งสองคนไม่ได้

   3) ถ้ามี 2 คนปฏิเสธที่จะเป็นกรรมการ

7. ภรรยานักการทูตไทยคนหนึ่งต้องการเชิญภรรยานักการทูตชาติต่างๆ มารับประทานอาหารที่บ้าน 4 คน จากบรรดานักการทูตเยอรมัน ฝรั่งเศส อเมริกัน อังกฤษ รัสเซีย และจีน จะมีวิธีเชิญกี่วิธีเมื่อ

   1) ไม่มีเงื่อนไข   2) ต้องการเชิญภรรยานักการทูตเยอรมัน

   3) ต้องการเชิญภรรยานักการทูตอเมริกันหรือรัสเซียอย่างน้อย 1 คน

   4) ระหว่างภรรยานักการทูตจีนและรัสเซียจะเชิญมาทั้งคู่ไม่ได้

8. มีเพื่อน 10 คน จะชวนไปทัศนาจร 6 คนได้กี่วิธีเมื่อ

   1) มีอยู่ 2 คนที่ไม่ต้องการชวนไป   2) มีอยู่ 3 คนที่ต้องการชวนไปแน่นอน

   3) มีอยู่ 2 คนอยู่บ้านเดียวกัน ถ้าจะชวนต้องชวนทั้งคู่

9. มีจุดในระนาบจำนวน 10 จุด ในจำนวนนี้มีจุด A , B และ C รวมอยู่ด้วย โดยไม่มีสามจุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จงหาจำนวนรูป

   1) สี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดเหล่านี้เป็นจุดมุม   2) สี่เหลี่ยมซึ่งมี A เป็นจุดมุม

   3) สี่เหลี่ยมซึ่งมี A หรือ B เป็นจุดมุม   4) สี่เหลี่ยมซึ่งมี A หรือ B หรือ C เป็นจุดมุม

10. มีจุดอยู่ 10 จุดในระนาบ ซึ่งมี 4 จุด อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน นอกนั้นไม่มีสามจุดใดเลยที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ถ้าลากเส้นเชื่อมจุดเหล่านี้ จะสามารถลากเส้นได้ทั้งหมดกี่เส้น

11. มีเหรียญสลึง ห้าสิบสตางค์ หนึ่งบาท และห้าบาท อย่างละ 1 เหรียญ จะมีวิธีใช้เงินในจำนวนนี้เพื่อซื้อของมูลค่าต่างๆ กันโดยไม่ต้องทอนได้กี่วิธี
12. ในงานเลี้ยงสังสรรค์เพื่อนกลุ่มหนึ่ง ถ้าทุกคนที่มาในงานต่างทักทายด้วยการจับมือกัน เมื่อนับดูแล้วมีทั้งหมด 36 ครั้ง อยากทราบว่ามีแขกมาร่วมงานทั้งหมดกี่คน
13. จากการศึกษาความพึงพอใจกับงานที่ทำของพนักงานในบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งมีพนักงาน 20 คน พบว่ามีพนักงาน 9 คนพอใจกับงานที่ทำ 5 คนรู้สึกเฉยๆ กับงานที่ทำ ส่วนอีก 6 คนไม่พอใจกับงานที่ทำ ถ้าสุ่มพนักงานในบริษัทนี้มา 3 คน จงหาจำนวนวิธีที่จะได้พนักงานที่พอใจกับงานที่ทำอย่างน้อย 2 คน
14. ถ้าต้องการสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็นจุดยอดหรือจุดกึ่งกลางด้านของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าที่กำหนดให้รูปหนึ่ง จะสร้างรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่รูป
15. มีสามีภรรยารวม 6 คู่ ถ้าต้องการเลือกคนเหล่านี้ออกมา 4 คน จงหาจำนวนวิธีการเลือกเมื่อ
    1) ทั้ง 4 คนไม่มีใครเป็นสามีภรรยากัน
    2) ในจำนวน 4 คนนั้นมีสามีภรรยา 1 คู่
    3) ในจำนวน 4 คนนั้นมีสามีภรรยาอย่างน้อย 1 คู่
16. จงหาจำนวนวิธีการหยิบไพ่จากไพ่ 1 สำรับ ตามเงื่อนไขต่อไปนี้
    1) หยิบ 4 ใบ โดยได้ไพ่ครบทุกดอก
    2) หยิบ 3 ใบ ไม่ซ้ำดอกกันเลย
    3) หยิบ 3 ใบ แต้มไม่ซ้ำกันเลย
    4) หยิบ 4 ใบ ได้ไพ่ 2 ดอกต่างกัน
17. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{a, b, c, d\}$ จงหาจำนวนฟังก์ชัน 1 - 1 จาก C ไป B เมื่อ $C \subset A$ และ $C \neq \phi$
18. มีกล่อง 2 ใบ ใบที่หนึ่ง มีลูกบอลสีขาว 2 ลูก สีแดง 3 ลูก สีดำ 3 ลูก ใบที่สอง มีลูกบอลสีขาว 3 ลูก สีแดง 4 ลูก สีดำ 2 ลูก โดยที่ลูกบอลแต่ละลูกมีความแตกต่างกัน ถ้าหยิบลูกบอลออกจากกล่องทั้งสอง โดยหยิบกล่องละ 2 ลูก จงหาจำนวนวิธีการหยิบเมื่อ
    1) ได้สีเดียวกันทั้ง 4 ลูก
    2) ได้สีต่างกันอย่างน้อย 2 สี
    3) ได้สีขาว 2 ลูก
19. มีจำนวนเต็มที่ต่างกัน 8 ตัว ในจำนวนนี้เป็นจำนวนเต็มบวก 6 ตัว และจำนวนเต็มลบ 2 ตัว จำนวนเต็มบวกมีเลขคู่ และเลขคี่จำนวนเท่ากัน จำนวนเต็มลบมีทั้งที่เป็นเลขคู่และเลขคี่ ถ้าเลือกจำนวนเต็มเหล่านี้มา 4 ตัว จงหาจำนวนวิธีการเลือกเมื่อ
    1) ผลคูณของทั้ง 4 ตัวเป็นจำนวนบวก
    2) ผลคูณของทั้ง 4 ตัวเป็นจำนวนลบ
    3) ผลคูณของทั้ง 4 ตัวเป็นจำนวนบวกและเป็นเลขคู่
20. จากรูป กำหนดให้เส้นขนานที่อยู่ในแนวนอนแต่ละเส้นห่างกัน 1 หน่วย และเส้นขนานที่อยู่ในแนวตั้งแต่ละเส้นห่างกัน 1 หน่วย จากการตัดกันของเส้นขนานทั้งสองชุดซึ่งตั้งฉากกัน จงหา

    1) จำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งหมด
    2) จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด
    3) จำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง **โจทย์ระคนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 5 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ไปแก้โจทย์ปัญหาระคนได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้

1.2 แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวิธีจัดหมู่ได้

2. แนวความคิดหลัก

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นวิธีนำสิ่งของจำนวนหนึ่งมาจัดเรียง โดยถือลำดับหรือตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญ ส่วนวิธีจัดหมู่ เป็นวิธีจัดสิ่งของ r สิ่ง ซึ่งเลือกมาจากสิ่งของ n สิ่งโดยไม่ถือลำดับหรือตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญ มีโจทย์บางข้อเป็นโจทย์ระคนเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ซึ่งต้องใช้ทั้งวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่มาแก้ปัญหาร่วมกัน

3. เนื้อหาสาระ

โจทย์ปัญหาระคนเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1 - 2

4.1 ทบทวนเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ซึ่งนักเรียนได้เรียนผ่านมาแล้ว จากนั้นยกตัวอย่างโจทย์ระคนง่ายๆ 1 ข้อ เช่น “นักเรียนกลุ่มหนึ่งมี 6 คน ซึ่งใน 6 คนนี้มีนาย ก และนาย ข รวมอยู่ด้วย และมีเก้าอี้วางเรียงเป็นแถวตรง 4 ตัว ถ้าต้องการเลือกนักเรียน 4 คน นั่งเก้าอี้ 4 ตัวนี้ โดยที่นาย ก และนาย ข ต้องได้นั่งเสมอ จะมีวิธีการจัดให้นักเรียนเหล่านี้นั่งเก้าอี้ได้กี่วิธี” ให้นักเรียนทุกคนช่วยกันคิด ถ้านักเรียนคิดไม่ได้ครูพยายามใช้คำถามนำ จนกระทั่งนักเรียนสรุปได้ว่า ในการแก้โจทย์ปัญหานี้จะต้องใช้ทั้งวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ร่วมกัน (20 นาที)

4.2 ให้นักเรียนรับใบความรู้ที่ 7 ไปศึกษาร่วมกันเป็นกลุ่ม โดยครูคอยให้ความช่วยเหลือเมื่อนักเรียนมีปัญหา (40 นาที)

4.3 ให้นักเรียนรับใบงานที่ 7 แล้วสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มจับฉลากหมายเลขข้อในใบงานแล้วแยกกันไปศึกษาในข้อที่หยิบได้จนเข้าใจพอที่จะกลับไปกลุ่มเดิม เพื่ออธิบายสมาชิกคนอื่นในกลุ่มได้ (60 นาที)

ชั่วโมงที่ 3 – 5

4.4 ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญในแต่ละข้ออธิบายเพื่อนในกลุ่มเดิม จนกระทั่งทุกคนในกลุ่มเข้าใจวิธีแก้โจทย์ปัญหาทุกข้อในใบงานที่ 7

ชั่วโมงที่ 6

4.5 สุ่มตัวแทนกลุ่มออกมานำเสนอวิธีแก้ปัญหาโจทย์กลุ่มละ 1 ข้อ โดยครูคอยช่วยเสริมและแก้ไขข้อบกพร่อง

4.6 ให้นักเรียนไปฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาระคนเพิ่มเติมจากโจทย์ในใบแบบฝึกหัดที่ 7

5. สื่อ/ แหล่งเรียนรู้

5.1 ใบความรู้ที่ 7 เรื่องโจทย์ระคนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

5.2 ใบงานที่ 7 เรื่องโจทย์ระคนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

5.3 ใบแบบฝึกหัดที่ 7 เรื่องโจทย์ระคนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

6. การวัดและประเมินผล

สังเกตจากการร่วมกิจกรรมกลุ่ม การตอบคำถาม การนำเสนอ และการตรวจใบแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

7.1 ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องการพัฒนา

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

7.2 แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

7.3 ผลที่เกิดกับผู้เรียน

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

8. ข้อเสนอแนะ

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

ใบความรู้ที่ 7 เรื่อง โจทย์ระคนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

****

มีโจทย์ปัญหาบางข้ออาจต้องใช้ทั้งวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ในข้อเดียวกัน ซึ่งนักเรียนสามารถศึกษาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 นักสะสมสแตมป์คนหนึ่งมีสแตมป์ของแคนาดาอยู่ 8 แบบ และของอเมริกาอยู่ 9 แบบ จงหาจำนวนวิธีที่เขาจะเลือกแสตมป์ของแคนาดา 4 แบบและของอเมริกา 3 แบบ แล้วใส่ในสมุดสแตมป์ ซึ่งมีที่ว่างอยู่ 7 ที่ในแถวเดียวกัน

วิธีทำ ขั้นที่ 1 เลือกสแตมป์แคนาดา 4 แบบ จาก 8 แบบ ได้ $\binom{8}{4}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกสแตมป์อเมริกา 3 แบบ จาก 9 แบบ ได้ $\binom{9}{3}$ วิธี

ขั้นที่ 3 จัดสแตมป์ 7 แบบใส่ในสมุดสแตมป์ซึ่งมีที่ว่าง 7 ที่ได้ $7!$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกสแตมป์ใส่ในสมุดสแตมป์ทั้งหมด $= \binom{8}{4} \times \binom{9}{3} \times 7!$ วิธี <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 2 นักเรียนชาย 5 คน หญิง 5 คน และครูปรานีซึ่งเป็นครูที่ปรึกษาของนักเรียนกลุ่มนี้ ต้องการยืนเรียงแถวเพื่อถ่ายรูปทีละ 5 คน โดยที่ในรูปจะต้องประกอบด้วยนักเรียนชาย 2 คน นักเรียนหญิง 2 คน และครูปรานีซึ่งต้องยืนตรงกลางเสมอ ดังนั้นจะได้ภาพถ่ายที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่ภาพ

วิธีทำ ขั้นที่ 1 เลือกนักเรียนชาย 2 คน จากนักเรียนชาย 5 คน ได้ $\binom{5}{2}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกนักเรียนหญิง 2 คน จากนักเรียนหญิง 5 คน ได้ $\binom{5}{2}$ วิธี

ขั้นที่ 3 จัดนักเรียนชาย 2 คน หญิง 2 คน และครูปรานียืนถ่ายรูปได้ $4!$ วิธี

ดังนั้น จะได้ภาพถ่ายที่แตกต่างกันทั้งหมด $\binom{5}{2} \times \binom{5}{2} \times 4! = 10 \times 10 \times 24$ ภาพ

$= 2,400$ ภาพ <u>Ans</u>.

ตัวอย่างที่ 3 มีอักษรภาษาอังกฤษต่างกัน 10 ตัว เป็นพยัญชนะ 6 ตัว สระ 4 ตัว ถ้านำเอาพยัญชนะ 3 ตัว กับสระ 2 ตัว มาจัดเรียงเป็นคำโดยไม่คำนึงถึงความหมาย โดยที่สระทั้ง 2 ตัวจะอยู่ติดกันไม่ได้ จะได้คำที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่คำ

วิธีทำ ขั้นที่ 1 เลือกพยัญชนะ 3 ตัว จาก 6 ตัว ได้ $\binom{6}{3}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกสระ 2 ตัว จาก 4 ตัว ได้ $\binom{4}{2}$ วิธี

ขั้นที่ 3 สร้างคำจากพยัญชนะ 3 ตัว กับสระ 2 ตัว โดยให้สระทั้ง 2 ตัวอยู่แยกจากกันได้โดย นำจำนวนวิธีสร้างคำโดยไม่มีเงื่อนไขใด - จำนวนวิธีสร้างคำโดยที่สระทั้ง 2 ตัวอยู่ติดกัน ซึ่งจะได้จำนวนวิธีสร้างคำเท่ากับ $5! - 4!\,2! = 120 - 48 = 72$ วิธี

ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีเลือกพยัญชนะและสระมาสร้างคำได้ทั้งหมด $= \binom{6}{3} \times \binom{4}{2} \times 72$ คำ

$= 20 \times 6 \times 72$ คำ

$= 8{,}640$ คำ Ans.

ตัวอย่างที่ 4 นักเรียนอนุบาลกลุ่มหนึ่งมี 10 คน เป็นหญิง 5 คน ชาย 5 คน ครูจัดเกมให้เล่นร่วมกัน โดยจัดให้นั่งรอบโต๊ะกลมครั้งละ 6 คน และให้เด็กหญิงนั่งสลับกับเด็กชาย ครูจะจัดให้นั่งได้ต่างๆ กันกี่วิธี

วิธีทำ เนื่องจากต้องการให้เด็กหญิงและเด็กชายนั่งสลับกันรอบโต๊ะกลม 6 คน ดังนั้นจะต้องเลือกเด็กหญิงมา 3 คน และเลือกเด็กชายมา 3 คน

ขั้นที่ 1 เลือกเด็กหญิง 3 คน จาก 5 คน ได้ $\binom{5}{3}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกเด็กชาย 3 คน จาก 5 คน ได้ $\binom{5}{3}$ วิธี

ขั้นที่ 3 จัดเด็กหญิงและเด็กชายนั่งเล่นเกมโดยที่เด็กหญิงนั่งสลับกับเด็กชายได้ $2!\,3! = 12$ วิธี

ดังนั้น ครูจะมีวิธีจัดให้นักเรียนนั่งเล่นเกมได้ต่าง ๆ กัน $= \binom{5}{3} \times \binom{5}{3} \times 12$ วิธี

$= 10 \times 10 \times 12$ วิธี

$= 1{,}200$ วิธี Ans.

ตัวอย่างที่ 5 สโมสรธนาคารกรุงเทพต้องการจัดนักกีฬาแบดมินตัน 1 ทีม ซึ่งประกอบด้วยนักแบดมินตัน 3 คู่ ที่แต่ละคู่เป็นชาย 1 คน หญิง 1 คน โดยคัดเลือกจากนักแบดมินตันในสังกัดชาย 7 คน หญิง 5 คน จะมีวิธีเลือกเพื่อจัดทีมไปแข่งขันได้กี่วิธี

วิธีทำ ขั้นที่ 1 เลือกนักกีฬาหญิง 3 คน จาก 5 คน ได้ $\binom{5}{3}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกนักกีฬาชาย 3 คน จาก 7 คน ได้ $\binom{7}{3}$ วิธี

ขั้นที่ 3 จัดนักกีฬาหญิง 3 คน และนักกีฬาชาย 3 คนเป็นคู่ โดยที่แต่ละคู่เป็นชาย 1 คน หญิง 1 คน ซึ่งจะจัดได้ $3!$ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีเลือกเพื่อจัดทีมไปแข่งขันได้ $= \binom{5}{3} \times \binom{7}{3} \times 3!$ วิธี

$= 10 \times 35 \times 6$ วิธี

$= 2{,}100$ วิธี Ans.

ตัวอย่างที่ 6 จะสร้างคำที่ประกอบด้วยอักษร 5 ตัว ซึ่งเลือกมาจากคำว่า “INTERMEDIATE” โดยไม่คำนึงถึงความหมายได้ต่างๆ กันทั้งหมดกี่คำ

วิธีทำ ในคำ “INTERMEDIATE” มี I ซ้ำ 2 ตัว T ซ้ำ 2 ตัว และ E ซ้ำ 3 ตัว การเลือกอักษร 5 ตัว เพื่อนำมาสร้างคำ จะต้องแยกเป็นกรณีย่อย ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 อักษร 5 ตัวที่เลือกมาแตกต่างกันทั้งหมด

ขั้นที่ 1 เลือกมา 5 ตัว จาก 8 ตัว (I , N , T , E , R , M , D , A) ได้ $\binom{8}{5}$ วิธี

ขั้นที่ 2 สร้างคำจากอักษร 5 ตัว ที่แตกต่างกันได้ 5! วิธี

ดังนั้น กรณีนี้จะสร้างคำได้ต่างๆ กัน $= \binom{8}{5} \times 5!$ คำ

$= 56 \times 120 = 6{,}720$ คำ

กรณีที่ 2 อักษร 5 ตัวที่เลือกมา มีซ้ำกันเพียง 2 ตัว

ขั้นที่ 1 เลือก 2 ตัวที่ซ้ำกัน 1 ชุด จาก 3 ชุด (I , T , E) ได้ $\binom{3}{1}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือก 3 ตัวต่างกันจาก 7 ตัว (ที่ไม่ซ้ำมี 5 ตัว และที่ซ้ำใช้ไป 1 ตัว เหลืออีก 2 ตัว รวมเป็น 7 ตัว) เลือกได้ $\binom{7}{3}$ วิธี

ขั้นที่ 3 สร้างคำจากอักษร 5 ตัว ซึ่งมีอักษรซ้ำกันอยู่ 2 ตัวได้ $\frac{5!}{2!}$ วิธี

ดังนั้น กรณีนี้จะสร้างคำได้ต่างๆ กัน $= \binom{3}{1} \times \binom{7}{3} \times \frac{5!}{2!}$ คำ

$= 3 \times 35 \times 60 = 6{,}300$ คำ

กรณีที่ 3 อักษร 5 ตัวที่เลือกมา มีซ้ำกัน 2 ตัว 2 ชุด

ขั้นที่ 1 เลือก 2 ตัวที่ซ้ำกัน 2 ชุด จาก 3 ชุด (I , T , E) ได้ $\binom{3}{2}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือก 1 ตัว จาก 6 ตัว (ที่ไม่ซ้ำมี 5 ตัว และที่ซ้ำใช้ไป 2 ตัว เหลืออีก 1 ตัว รวมเป็น 6 ตัว) เลือกได้ $\binom{6}{1}$ วิธี

ขั้นที่ 3 สร้างคำจากอักษร 5 ตัว ซึ่งมีอักษรซ้ำกันอยู่ 2 ตัว 2 ชุดได้ $\frac{5!}{2!2!}$ วิธี

ดังนั้น กรณีนี้จะสร้างคำได้ต่างๆ กัน $= \binom{3}{2} \times \binom{6}{1} \times \frac{5!}{2!2!}$ คำ

$= 3 \times 6 \times 30 = 540$ คำ

กรณีที่ 4 อักษร 5 ตัวที่เลือกมา มีซ้ำกัน 2 ตัว 1 ชุด และซ้ำกัน 3 ตัวอีก 1 ชุด

ขั้นที่ 1 เลือก 2 ตัวที่ซ้ำกัน 1 ชุด จาก 2 ชุด (I, T) ได้ $\binom{2}{1}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือก 3 ตัวที่ซ้ำกัน 1 ชุด (E) เลือกได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 3 สร้างคำจากอักษร 5 ตัว ซึ่งมีอักษรซ้ำกัน 2 ตัว 1 ชุด และซ้ำกัน 3 ตัว 1 ชุด ได้ $\frac{5!}{2!3!}$ วิธี

ดังนั้น กรณีนี้จะสร้างคำได้ต่างๆ กัน $= \binom{2}{1} \times 1 \times \frac{5!}{2!3!}$ คำ

$= 2 \times 1 \times 10 = 20$ คำ

กรณีที่ 5 อักษร 5 ตัวที่เลือกมา ซ้ำกัน 3 ตัว

ขั้นที่ 1 เลือก 3 ตัวที่ซ้ำกัน 1 ชุด (E) เลือกได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 2 เลือก 2 ตัวต่างกันจาก 7 ตัว (ที่ไม่ซ้ำมี 5 ตัว และที่ซ้ำมี 2 ตัว รวมเป็น 7 ตัว จึงเลือกได้ $\binom{7}{2}$ วิธี

ขั้นที่ 3 สร้างคำจากอักษร 5 ตัว ซึ่งมีอักษรซ้ำกันอยู่ 3 ตัวได้ $\frac{5!}{3!}$ วิธี

ดังนั้น กรณีนี้จะสร้างคำได้ต่างๆ กัน $= 1 \times \binom{7}{2} \times \frac{5!}{3!}$ คำ

$= 1 \times 21 \times 20$ คำ

$= 420$ คำ

รวมทั้ง 5 กรณี จะสร้างคำได้ต่างๆ กันทั้งหมด $= 6{,}720 + 6{,}300 + 540 + 20 + 420$ คำ

$= 14{,}000$ คำ <u>Ans</u>.

$$

ใบงานที่ 7 เรื่อง โจทย์ระคนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

****

โจทย์บางข้อต้องใช้ทั้งวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ในข้อเดียวกัน ในแต่ละกลุ่ม จงช่วยกันวิเคราะห์โจทย์ต่อไปนี้ แล้วแสดงวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียด

1. ถ้ามีพยัญชนะที่แตกต่างกัน 8 ตัว และสระที่แตกต่างกัน 4 ตัว จะสร้างคำที่ประกอบด้วยอักษร 5 ตัวที่ไม่ซ้ำกัน โดยไม่คำนึงถึงความหมาย จะสร้างได้ทั้งหมดกี่คำเมื่อ

(1) คำที่สร้างต้องมีพยัญชนะ 3 ตัว และสระ 2 ตัว (2) คำที่สร้างต้องมีสระอย่างน้อย 1 ตัว

(3) คำที่สร้างต้องมีทั้งพยัญชนะและสระ โดยมีพยัญชนะมากกว่าสระ

………

………

………

………

………

2. มีชาย 5 คน ในจำนวนนี้มีนายเอ็มรวมอยู่ด้วย มีหญิง 6 คน ในจำนวนนี้มีนางสาวเอรวมอยู่ด้วย ถ้าให้ชายจับคู่เต้นรำกับหญิง จะมีวิธีจับคู่เต้นรำทั้งหมดกี่วิธีเมื่อ

(1) ชายออกเต้นรำทุกคน โดยที่นายเอ็มเต้นรำกับนางสาวเอ

(2) มีชายออกเต้นรำเพียง 3 คน และนายเอ็มเต้นรำกับนางสาวเอ

………

………

………

………

………

3. นักเรียนกลุ่มหนึ่งมี 10 คน ในจำนวนนี้มีนาย ก นาย ข และนาย ค รวมอยู่ด้วย ถ้าต้องการนำนักเรียนออกมา ครั้งละ 8 คน นั่งบนเก้าอี้ 8 ตัว จะมีวิธีการนั่งกี่วิธี เมื่อต้องการให้ใน 8 คนที่เลือกมา มีนาย ก นาย ข และนาย ค อยู่ด้วยเสมอ โดยใน 3 คนนั้นนั่งติดกันเพียง 2 คนเท่านั้น เมื่อเก้าอี้วางเรียงเป็นวงกลม

………

………

………

………

………

………

4. นักจัดรายการนัดพบชายกับหญิง มีรายชื่อชาย 312 คน หญิง 259 คน ในรายการแต่ละครั้งมีเวลาให้คู่นัดพบเพียง 8 คู่ จะมีวิธีจัดรายการนัดพบรายการแรกได้กี่วิธี

....

....

....

....

....

....

....

5. ในการสัมภาษณ์ผู้สมัครเข้าทำงานของสำนักงานแห่งหนึ่ง มีผู้สมัครเป็นชาย 5 คน หญิง 5 คน ถ้าผู้สัมภาษณ์ตัดสินใจเรียกผู้สมัครมาสัมภาษณ์เพียง 5 คน โดยเลือกชาย 3 คน หญิง 2 คน จากผู้สมัครทั้งหมดอย่างสุ่ม ดังนั้นการจัดลำดับเข้าสัมภาษณ์ทีละคนจะจัดได้กี่วิธีเมื่อ

(1) ผู้สมัครที่เป็นชายได้เข้าสอบสัมภาษณ์ติดต่อกัน

(2) ผู้สมัครที่เป็นหญิงได้เข้าสอบสัมภาษณ์ติดต่อกัน

....

....

....

....

....

....

6. มีชาย 6 คน หญิง 6 คน ในจำนวนนี้มีสามีภรรยา 1 คู่ ถ้าเลือกชาย 4 คน และหญิง 4 คนจากคนทั้งหมดนี้ เพื่อไปนั่งรอบโต๊ะกลม 2 ตัวๆ ละ 4 คน จะมีวิธีการนั่งได้กี่วิธีเมื่อสามีภรรยาต้องนั่งโต๊ะเดียวกันและนั่งติดกันเสมอ

....

....

....

....

....

....

....

****

ใบแบบฝึกหัดที่ 7 เรื่อง โจทย์ระคนวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

****

1. มีหนังสือ 10 เล่ม เลือกมา 3 เล่มเพื่อแจกให้เด็ก 3 คนได้กี่วิธี
2. สร้างคำซึ่งประกอบด้วยอักษรที่ไม่ซ้ำกัน ให้มีพยัญชนะ 3 ตัวและสระ 2 ตัว จากคำซึ่งมีพยัญชนะ 7 ตัว สระ 4 ตัวแตกต่างกัน ได้ทั้งหมดกี่คำเมื่อ
   1) ไม่มีเงื่อนไข 2) คำที่สร้างต้องขึ้นต้นด้วยพยัญชนะและลงท้ายด้วยสระ
3. ชาย 6 คนและหญิง 4 คน เดินเข้าไปในห้องๆ หนึ่งซึ่งมีเก้าอี้ 8 ตัวเรียงเป็นแถว จงหาจำนวนวิธีที่ชาย และหญิงนั่งเก้าอี้คนละตัวสลับกัน
4. มีเด็ก 10 คน เป็นหญิง 5 คน ชาย 5 คน ครูจัดเกมให้เล่นร่วมกัน โดยจัดให้นั่งรอบโต๊ะกลมครั้งละ 6 คน และให้หญิงนั่งสลับกับชาย จะจัดให้นั่งต่างๆ กันได้กี่วิธี
5. มีข้อสอบปรนัยแบบตอบถูกหรือผิด 20 ข้อ จะมีวิธีทำข้อสอบ 15 ข้อได้กี่วิธี
6. มีข้อสอบปรนัยแบบ 5 ตัวเลือก 25 ข้อ จะมีวิธีทำข้อสอบ 20 ข้อได้กี่วิธี
7. ในงานเลี้ยงครั้งหนึ่งมีชาย 7 คน หญิง 4 คน ถ้าจะจับคู่เต้นรำโดยที่หญิงทุกคนออกเต้นรำ จะจับคู่ได้กี่วิธี
8. มีจดหมาย 7 ฉบับ จะใส่ตู้จดหมาย 5 ตู้ ได้กี่วิธีถ้าทุกตู้มีจดหมายใส่อย่างน้อย 1 ฉบับ
9. มีอักษรภาษาอังกฤษที่แตกต่างกัน 10 ตัว ในจำนวนนี้เป็นสระ 4 ตัว ถ้าต้องการนำอักษรเหล่านี้มาสร้างคำซึ่งไม่จำเป็นต้องมีความหมาย ประกอบด้วยอักษร 6 ตัวไม่ซ้ำกัน จะสร้างได้ทั้งหมดกี่คำเมื่อ
   1) มีจำนวนพยัญชนะและสระเท่ากัน 2) มีจำนวนพยัญชนะมากกว่าจำนวนสระ
   3) มีสระสองตัวและสระทั้งสองตัวอยู่แยกกัน
10. นักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 10 คน ในจำนวนนี้มีนาย ก นาย ข และนาย ค รวมอยู่ด้วย ถ้าต้องการนำ นักเรียนมา 7 คน เพื่อนั่งบนเก้าอี้ 7 ตัว จะมีการนั่งทั้งหมดกี่วิธี เมื่อต้องการให้ในจำนวน 7 คนนั้นมี นาย ก นาย ข และนาย ค รวมอยู่ด้วย และคนสามคนนี้นั่งติดกันเพียง 2 คน
11. สามีภรรยาคู่หนึ่งมีบุตรรวม 7 คน ในจำนวนนี้มีฝาแฝด 1 คู่ ซึ่งฝาแฝดคู่นี้จะไปไหนต้องไปด้วยกันเสมอ วันหนึ่งสามีภรรยาคู่นี้ต้องการพาบุตรจำนวน 4 คนไปรับประทานอาหารนอกบ้าน โดยนั่งรอบโต๊ะกลมตัวหนึ่ง จงหาจำนวนวิธีการนั่งของสามีภรรยาและบุตร 4 คนเมื่อ
    1) สามีภรรยานั่งตรงข้ามกัน 2) ฝาแฝดนั่งติดกัน และสามีภรรยานั่งแยกกัน
12. ในการสัมภาษณ์ผู้สมัครเข้าทำงานของบริษัทแห่งหนึ่ง มีผู้สมัครเป็นชาย 5 คน หญิง 5 คน ถ้าผู้สัมภาษณ์เรียกผู้สมัครมาสัมภาษณ์เพียง 5 คน โดยเลือกชาย 3 คน หญิง 2 คน จากผู้สมัครทั้งหมดโดยการสุ่ม เขาจะมีวิธีจัดลำดับของการเข้าสอบของผู้สมัครทั้ง 5 คนกี่วิธีเมื่อ
    1) ผู้สมัครที่เป็นชายจะเข้าสอบติดต่อกันทีเดียวทั้งสามคนไม่ได้
    2) ผู้สมัครที่เป็นหญิงจะเข้าสอบติดต่อกันทีเดียวทั้งสองคนไม่ได้
    3) ผู้สมัครที่เป็นชายและหญิงได้เข้าสอบสลับกันทีละคน
13. จะเลือกอักษร 3 ตัวจากคำว่า “COLLEGE” มาสร้างเป็นคำที่ไม่จำเป็นต้องมีความหมายได้ทั้งหมดกี่คำ
14. กำหนด x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งมี ห.ร.ม. เป็น 1 และ $0 < \frac{x}{y} < 1$ สมการ $xy = 100!$ มีทั้งหมดกี่คำตอบ
15. กำหนด m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\binom{m}{n} = \binom{33}{0}^2 + \binom{33}{1}^2 + \binom{33}{2}^2 + \ldots + \binom{33}{33}^2$ ค่า $m+n$ น้อยที่สุดเป็นเท่าไร

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง **ทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem)** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 4 ชั่วโมง

****

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความรู้ความเข้าใจและมีทักษะในการคิดคำนวณเกี่ยวกับทฤษฎีบททวินาม

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 สรุปทฤษฎีบททวินามได้

1.2 ใช้ทฤษฎีบททวินามกระจาย $(a+b)^n$ ได้

1.3 คำนวณหาพจน์ที่ r ใดๆ จากการกระจาย $(a+b)^n$ ได้

1.4 คำนวณหาสัมประสิทธิ์ และสัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ต่างๆ จากการกระจาย $(a+b)^n$ ได้

1.5 คำนวณหาค่าโดยประมาณของจำนวนที่กำหนดให้โดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้

2. แนวความคิดหลัก

ทฤษฎีบททวินามเป็นทฤษฎีที่ใช้หาผลลัพธ์ในการกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ให้อยู่ในรูปผลบวกของพจน์ต่างๆ โดยที่

เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริง n , r เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $0 \leq r \leq n$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + ... + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

3. เนื้อหาสาระ

ทฤษฎีบททวินาม

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1 - 2

4.1 ทบทวนค่าของ $(a + b)^2$ และ $(a + b)^3$ ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วในชั้น ม.3 โดยให้นักเรียนออกไปเขียนบนกระดาน

4.2 ให้นักเรียนหาค่าของ $(a + b)^4$ และ $(a + b)^5$ แล้วให้นักเรียนบอกว่ามีวิธีการหาคำตอบเหล่านั้นได้อย่างไร (ซึ่งนักเรียนควรจะตอบได้ว่า หาคำตอบได้โดยการคูณทีละพจน์) และถ้าจะหา $(a + b)^n$ เมื่อ n มีค่ามากๆ เช่น หา $(a+b)^{10}$ นักเรียนจะพบปัญหาอย่างไรหรือไม่ ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบว่า จะมีทฤษฎีบทหนึ่งที่ใช้กระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และเรียกทฤษฎีบทนี้ว่า ทฤษฎีบททวินาม

4.3 ให้นักเรียนเขียน $(a + b)^n$ ให้อยู่ในรูปการคูณ ซึ่งจะได้ $(a + b)^n = (a + b)(a + b)(a + b) .... (a + b)$ ทั้งหมด n วงเล็บ ครูใช้การถาม - ตอบ ประกอบการอธิบายดังนี้

ให้นักเรียนพิจารณาว่าจะต้องนำ a มาคูณกันทั้งหมดกี่ตัว ให้นักเรียนเขียนพจน์ที่ได้ และพิจารณาว่าผลลัพธ์ที่ได้นี้เกิดขึ้นได้กี่วิธี ซึ่งนักเรียนจะต้องได้ว่า a^n ซึ่งเกิดขึ้นได้วิธีเดียว จะต้องนำ b จาก 1 วงเล็บไปคูณกับ a จากกี่วงเล็บ ให้นักเรียนเขียนพจน์ที่ได้ และผลลัพธ์ที่ได้นี้เกิดขึ้นได้กี่วิธี ซึ่งนักเรียนจะต้องได้ว่า นำ b จาก 1 วงเล็บไปคูณกับ a จาก n - 1 วงเล็บที่เหลือ และได้พจน์ $a^{n-1}b$ ซึ่งพจน์เช่นนี้จะเกิดขึ้นได้ $\binom{n}{1}$ วิธี เพราะจะเลือก b จากวงเล็บใดก็ได้ ดังนั้น จะได้พจน์ $a^{n-1}b$ จำนวน $\binom{n}{1}$ พจน์จะต้องนำ b จาก 2 วงเล็บไปคูณกับ a จากกี่วงเล็บ ให้นักเรียนเขียนพจน์ที่ได้ และผลลัพธ์ที่ได้นี้เกิดขึ้นได้กี่วิธี ซึ่งนักเรียนจะต้องได้ว่า นำ b จาก 2 วงเล็บไปคูณกับ a จาก n - 2 วงเล็บที่เหลือ และได้พจน์ $a^{n-2}b^2$ ซึ่งพจน์เช่นนี้จะเกิดขึ้นได้ $\binom{n}{2}$ วิธี เพราะจะเลือก b จากสองวงเล็บใดก็ได้ ดังนั้น จะได้พจน์ $a^{n-2}b^2$ จำนวน $\binom{n}{2}$ พจน์จะต้องนำ b มาคูณกันทั้งหมดกี่ตัว ให้นักเรียนเขียนพจน์ที่ได้ และผลลัพธ์ที่ได้นี้เกิดขึ้นได้กี่วิธี ซึ่งนักเรียนจะต้องได้ว่า b^n ซึ่งเกิดขึ้นได้วิธีเดียวให้นักเรียนช่วยกันเขียนผลลัพธ์ของ $(a + b)^n$ แล้วสรุปเป็นทฤษฎีบททวินาม ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบว่า แต่ละ $\binom{n}{r}$ ที่ปรากฏในแต่ละพจน์นั้นเรียกว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม

4.4 ให้นักเรียนกระจาย $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, $(a + b)^5$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม แล้วเปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับคำตอบที่หาไว้ในตอนแรก

4.5 ให้นักเรียนช่วยกันสรุปข้อสังเกตของผลลัพธ์ที่ได้จากการกระจาย $(a + b)^n$ ให้โจทย์ตัวอย่างการนำทฤษฎีบททวินามไปกระจาย $(a + b)^n$ เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริงใดๆ เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการใช้ทฤษฎีบททวินามกระจาย $(a + b)^n$

ชั่วโมงที่ 3 - 4

4.6 ทบทวนทฤษฎีบททวินามจากใบความรู้ที่ 8

4.7 ให้นักเรียนพิจารณาจากทฤษฎีบททวินามว่า ถ้าต้องการหาเฉพาะพจน์ใดพจน์หนึ่งจากการกระจาย $(a + b)^n$ จำเป็นต้องหาผลลัพธ์ทั้งหมดก่อนหรือไม่อย่างไร (ไม่จำเป็น) แล้วพิจารณาว่า $\binom{n}{r} a^{n-r}b^r$ เป็นพจน์ที่เท่าใดในการกระจาย $(a + b)^n$ (ตอบ พจน์ที่ r + 1) ให้นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีหาพจน์ใดพจน์หนึ่งจากการกระจาย $(a+ b)^n$ ให้โจทย์ตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนได้ฝึกทักษะในการคำนวณหาเฉพาะพจน์ใดพจน์หนึ่ง การหาสัมประสิทธิ์ทวินามและสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ จากการกระจาย $(a + b)^n$ ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มฝึกทักษะการคิดคำนวณเกี่ยวกับทฤษฎีบททวินามเพิ่มเติม โดยการทำใบงานที่ 8 แล้วรวบรวมส่งครูเป็นกลุ่มตั้งปัญหาให้นักเรียนช่วยกันคิด โดยให้นักเรียนหาค่าประมาณของ $(1.2)^6$ ซักถามนักเรียนถึงวิธีการหาคำตอบในข้อ 2

ซึ่งนักเรียนอาจจะหาได้โดยใช้ความรู้พื้นฐานเรื่องเลขยกกำลัง คือนำ 1.2 มาคูณกัน 6 ตัว หรือนักเรียนคนใดมีวิธีอื่นนอกเหนือจากวิธีดังกล่าวหรือไม่ อย่างไร ถ้ามีนักเรียนใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาคำตอบ ให้นักเรียนออกไปนำเสนอ โดยครูช่วยเสริมและแก้ไขข้อบกพร่อง แต่ถ้าไม่มีนักเรียนคนใดเลยใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาคำตอบ ครูใช้วิธีการนำทางให้นักเรียนค้นพบโดยให้นักเรียนกระจาย 1.2 ให้อยู่ในรูป $a + b$ แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาค่าประมาณของ $(1.2)^6$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินามให้โจทย์เพิ่มเติมเกี่ยวกับการหาค่าประมาณโดยใช้ทฤษฎีบททวินาม เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการคำนวณหาค่าประมาณของจำนวนที่กำหนดให้โดยใช้ทฤษฎีบททวินามให้นักเรียนฝึกทักษะเพิ่มเติมจากการทำโจทย์ในใบแบบฝึกหัดที่ 8

5. สื่อ/ แหล่งเรียนรู้

5.1 ใบความรู้ที่ 8 เรื่องทฤษฎีบททวินาม

5.2 ใบงานที่ 8 เรื่องทฤษฎีบททวินาม

5.3 ใบแบบฝึกหัดที่ 8 เรื่องทฤษฎีบททวินาม

6. การวัดและประเมินผล

สังเกตจากการร่วมกิจกรรมและการตอบคำถาม ตรวจใบงาน และใบแบบฝึกหัด

7. บันทึกหลังสอน

7.1 ปัญหาหรือสิ่งที่ต้องการพัฒนา

………

………

………

7.2 แนวทางการปรับปรุงการเรียนการสอนครั้งต่อไป

………

………

………

7.3 ผลที่เกิดกับผู้เรียน

………

………

………

8. ข้อเสนอแนะ

………

………

………

………

ใบความรู้ที่ 8 เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

****

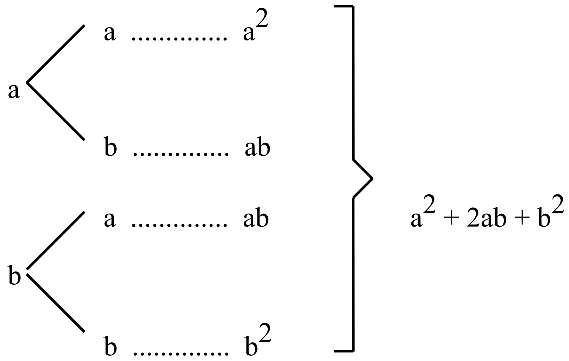
ทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem)

เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริง จะได้ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

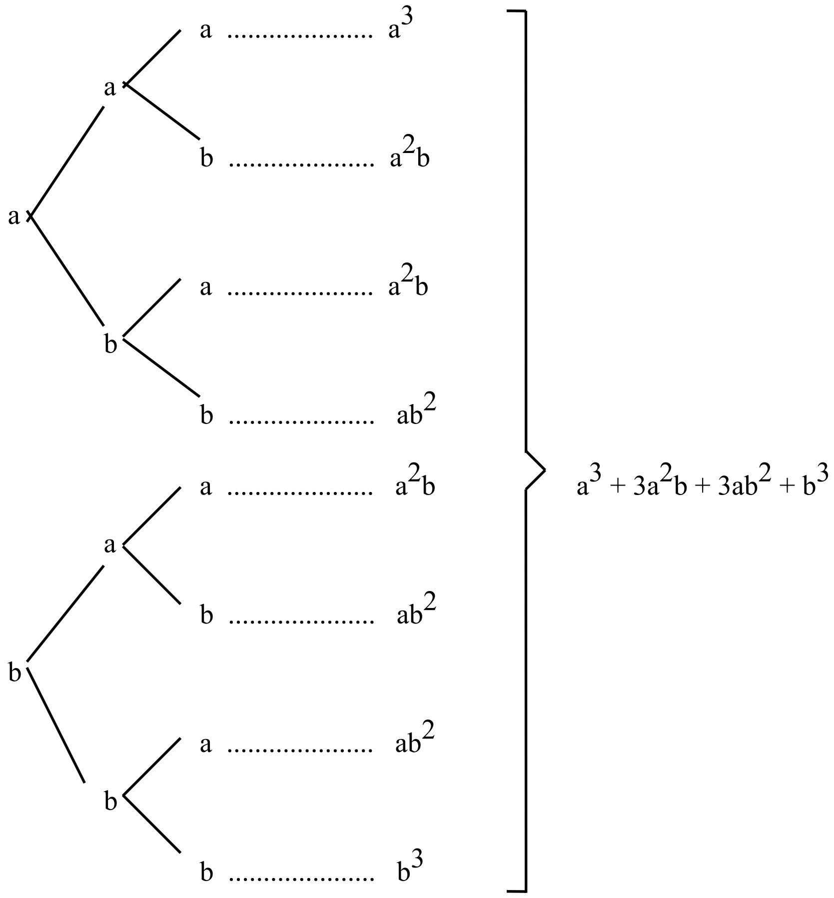
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

พิจารณาแผนภาพแสดงการกระจาย ต่อไปนี้

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$



$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$



พิจารณาการกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่มากนัก อาจทำได้โดยคูณ (a + b) เข้าด้วยกัน n วงเล็บ แต่ถ้า n เป็นจำนวนที่มีค่ามากๆ ย่อมเสียเวลาและผิดพลาดได้ง่าย ในที่นี้จะหาสูตรสำหรับการกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b) \ldots\ldots\ldots (a+b) \text{ ทั้งหมด n วงเล็บ}$$

ถ้านำ a จากทุกวงเล็บมาคูณกัน จะได้พจน์ a^n ซึ่งพจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้วิธีเดียว ดังนั้น จะได้ a^n เพียงพจน์เดียว

ถ้านำ b จาก 1 วงเล็บ มาคูณกับ a จาก n - 1 วงเล็บที่เหลือ จะได้พจน์ $a^{n-1}b$ ซึ่งพจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้ $\binom{n}{1}$ = n วิธี เพราะจะเลือก b จากวงเล็บใดก็ได้ ดังนั้น จะได้พจน์ $a^{n-1}b$ จำนวน $\binom{n}{1}$ พจน์

ถ้านำ b จาก 2 วงเล็บ มาคูณกับ a จาก n - 2 วงเล็บที่เหลือ จะได้พจน์ $a^{n-2}b^2$ ซึ่งพจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้ $\binom{n}{2}$ วิธี เพราะจะเลือก b จาก 2 วงเล็บใดก็ได้ ดังนั้น จะได้พจน์ $a^{n-2}b^2$ จำนวน $\binom{n}{2}$ พจน์

:

:

ถ้านำ b จากทุกวงเล็บมาคูณกัน จะได้พจน์ b^n ซึ่งพจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้วิธีเดียว ดังนั้นจะได้ b^n เพียงพจน์เดียว

เมื่อหาครบทุกพจน์ที่จะเป็นไปได้แล้วนำพจน์ต่างๆมาบวกกัน ผลที่ได้จะเป็นการกระจายของ $(a+b)^n$ จะเห็นว่าทุกพจน์ของการกระจาย $(a+b)^n$ เขียนได้ในรูป $a^{n-r}b^r$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \le r \le n$ ซึ่งพจน์นี้เป็นผลคูณของ b จาก r วงเล็บกับ a จาก n - r วงเล็บที่เหลือ พจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้ $\binom{n}{r}$ วิธี เพราะจะเลือก b จาก r วงเล็บใดก็ได้ จาก n วงเล็บที่มีอยู่

การกระจาย $(a+b)^n$ ที่กล่าวมาข้างต้น สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบททวินาม เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริง n , r เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $0 \le r \le n$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots.. + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \ldots.. + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

เรียก $\binom{n}{r}$ เมื่อ $0 \le r \le n$ ในทฤษฎีบทนี้ว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficient)**

เช่น $(a+b)^2 = a^2 + \binom{2}{1} a^{2-1}b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + \binom{3}{1} a^{3-1}b + \binom{3}{2} a^{3-2}b^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1} a^{4-1}b + \binom{4}{2} a^{4-2}b^2 + \binom{4}{3} a^{4-3}b^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ข้อสังเกต 1. เมื่อกระจาย $(a+b)^n$ จะได้ $n+1$ พจน์

2. พจน์แรกจากการกระจาย $(a+b)^n$ เท่ากับ a^n เสมอ

พจน์สุดท้ายจากการกระจาย $(a+b)^n$ เท่ากับ b^n เสมอ

ซึ่งสัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์แรกและพจน์สุดท้ายอาจเขียนได้ในรูป $\binom{n}{0}$ และ $\binom{n}{n}$

ตามลำดับ แต่เนื่องจาก $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ จึงไม่จำเป็นต้องเขียน

3. เมื่อกระจาย $(a+b)^n$ กำลังของ a จะเริ่มจาก n แล้วลดลงทีละ 1 จนถึง 0 ขณะที่กำลังของ b จะเริ่มจาก 0 แล้วเพิ่มขึ้นทีละ 1 จนถึง n

4. ในแต่ละพจน์ของการกระจาย $(a+b)^n$ กำลังของ a และกำลังของ b บวกกันได้เท่ากับ n เสมอ

5. เมื่อกระจาย $(a+b)^n$ ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของทุกพจน์ จะเท่ากับ

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$ เสมอ

ตัวอย่างที่ 1 จงใช้ทฤษฎีบททวินามกระจายและหาผลสำเร็จของ $(2a+b)^4$

วิธีทำ $(2a+b)^4 = (2a)^4 + \binom{4}{1}(2a)^3 b + \binom{4}{2}(2a)^2 b^2 + \binom{4}{3}(2a)b^3 + b^4$

$= 16a^4 + 4(8a^3)b + 6(4a^2)b^2 + 4(2a)b^3 + b^4$

$= 16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$ Ans.

ตัวอย่างที่ 2 ในข้อต่อไปนี้ จงใช้ทฤษฎีบททวินามกระจายและหาผลสำเร็จของ $(x - \frac{1}{x})^6$

วิธีทำ $(x - \frac{1}{x})^6 = x^6 + \binom{6}{1}x^5(-\frac{1}{x}) + \binom{6}{2}x^4(-\frac{1}{x})^2 + \binom{6}{3}x^3(-\frac{1}{x})^3 + \binom{6}{4}x^2(-\frac{1}{x})^4 + \binom{6}{5}x(-\frac{1}{x})^5 + (-\frac{1}{x})^6$

$= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + 15x^{-2} - 6x^{-4} + x^{-6}$ Ans.

ในบางครั้งเราต้องการเพียงพจน์ใดพจน์หนึ่งจากการกระจาย $(a+b)^n$ ซึ่งมีวิธีการหาพจน์ที่ต้องการได้ดังนี้

จากทฤษฎี $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$

จะเห็นว่าในการกระจาย $(a+b)^n$ จะได้ $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ เป็นพจน์ที่ $r+1$

ดังนั้น เมื่อต้องการเฉพาะพจน์ใดพจน์หนึ่งจากการกระจาย $(a+b)^n$ หาได้จาก

$$\boxed{\text{พจน์ที่ } r+1 = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r}$$

และเรียกพจน์ที่ $r+1$ ว่า พจน์ทั่วไปของการกระจาย $(a+b)^n$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพจน์ที่ 5 จากการกระจาย $(2x - \frac{3}{x})^7$

วิธีทำ พจน์ที่ 5 จากการกระจาย $(2x - \frac{3}{x})^7$

$$= \binom{7}{4}(2x)^3(-\frac{3}{x})^4$$

$$= 35\,(8x^3)\frac{81}{x^4}$$

$$= 22{,}680\,x^{-1} \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

ตัวอย่างที่ 4 จากการกระจาย $(x^2 - y)^{11}$ จงหาพจน์ที่มีตัวแปร x^{10}

วิธีทำ ให้พจน์ที่มีตัวแปร x^{10} คือพจน์ที่ $r+1$

ซึ่งพจน์ที่ $r+1$ จากการกระจาย $(x^2 - y)^{11}$

$$= \binom{11}{r}\left(x^2\right)^{11-r}(-y)^r$$

$$= \binom{11}{r}\left(x^{22-2r}\right)(-y)^r$$

เราต้องการพจน์ที่มีตัวแปร x^{10} จึงให้ $22 - 2r = 10 \Rightarrow r = 6$

ดังนั้น พจน์ที่มีตัวแปร x^{10}

$$= \binom{11}{6}\left(x^{10}\right)(-y)^6$$

$$= 462\,x^{10}y^6 \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑๑

ใบงานที่ 8 เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

****

จงแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

1. จงใช้ทฤษฎีบททวินามกระจายและหาผลสำเร็จของ (1) $(a+b)^6$ และ (2) $(x-2y)^5$

....

....

....

....

....

2. จงหาพจน์ที่ 4 จากการกระจาย $(a+2x)^{10}$

....

....

....

....

....

3. จากการกระจาย $(x^2-y)^{11}$ จงหาพจน์ที่มีตัวแปร y^7

....

....

....

....

....

4. จากการกระจาย $(x^2+\frac{1}{x})^{12}$ จงหา

(1) สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร x^9 (2) สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ที่มีตัวแปร x^{-3}

....

....

....

....

....

....

....

5. จงหาพจน์ที่ไม่มีตัวแปร x จากการกระจาย $(x^2 - \frac{1}{x})^9$

....

....

....

....

....

6. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

(1) $(a + b)^4 + (a - b)^4$ (2) $(a + b)^7 - (a - b)^7$

....

....

....

....

....

....

7. จากการกระจายและทำให้เป็นผลสำเร็จของ $(2 - \sqrt{x}) + (2 - \sqrt{x})^2 + (2 - \sqrt{x})^3 + (2 - \sqrt{x})^4 + (2 - \sqrt{x})^5$

จงหา

(1) สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร x (2) สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร $x^{3/2}$

....

....

....

....

....

8. จงหาเศษจากการหาร 2^{202} ด้วย 3 และด้วย 5

....

....

....

....

....

****

ใบแบบฝึกหัดที่ 8 เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

****

1. ในข้อต่อไปนี้ จงใช้ทฤษฎีบททวินามกระจายและทำให้เป็นผลสำเร็จ

    1) $(2a + b)^5$

    2) $(2x - 3y)^4$

    3) $(\frac{a}{2} + 2b)^6$

    4) $(\frac{1}{a} - a^2)^7$

    5) $(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}})^6$

2. จงหาพจน์ต่างๆ ในข้อต่อไปนี้

    1) พจน์ที่ 6 ของการกระจาย $(x - y)^{10}$

    2) พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(x^3 + 2)^8$

    3) พจน์ที่ 10 ของการกระจาย $(\tan^2 A - 1)^{15}$

    4) พจน์ที่ 8 ของการกระจาย $(\frac{x^2}{2} - 2y)^{16}$

    5) พจน์กลางของการกระจาย $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^{14}$

    6) พจน์ที่มีตัวแปร a^3 จากการกระจาย $(a^2 + \frac{1}{a})^{12}$

    7) พจน์ที่มีตัวแปร y^4 จากการกระจาย $(xy - \frac{1}{x^2})^6$

    8) พจน์ที่ไม่มีตัวแปร x จากการกระจาย $(\sqrt{x} + \frac{1}{3x^2})^{10}$

    9) พจน์ที่ไม่มีตัวแปร y จากการกระจาย $(5y - \frac{3}{y^2})^6$

3. จากการกระจาย $(2x - 3y)^9$ จงหา

    1) สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ x^6y^3

    2) สัมประสิทธิ์ของพจน์ x^4y^5

    3) ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของทุกพจน์

4. จากการกระจาย $(a^2 + \frac{2}{a})^{10}$ จงหา

    1) สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ a^2

    2) สัมประสิทธิ์ของพจน์ a^{-1}

    3) ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของทุกพจน์

5. จากการกระจายและทำให้เป็นผลสำเร็จของ $(3-2\sqrt{x})+(3-2\sqrt{x})^2+(3-2\sqrt{x})^3+(3-2\sqrt{x})^4$

จงหา 1) สัมประสิทธิ์ของ x

2) สัมประสิทธิ์ของ $x^{3/2}$

6. จงหาผลบวกของ $(x+\sqrt{x+1})^5+(x-\sqrt{x+1})^5$

7. จงหาผลต่างของ $(\sqrt{x-1}+x)^5-(\sqrt{x-1}-x)^5$

8. จงใช้ทฤษฎีบททวินามหาค่าโดยประมาณของจำนวนต่อไปนี้ โดยตอบเป็นทศนิยม 3 ตำแหน่ง

1) $(1.01)^8$

2) $(1.1)^{10}$

3) $(0.98)^9$

4) $(1.99)^4$

9. จงหารูปอย่างง่ายของ $1^2\binom{99}{1}+2^2\binom{99}{2}+3^2\binom{99}{3}+\ldots+99^2\binom{99}{99}$

10. กำหนด $1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{2006}-x^{2007} = a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{2007}y^{2007}$ เมื่อ $y=x+1$ และ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ เป็นค่าคงที่ ค่าของ a_2 เป็นเท่าไร

♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

รศ.ธงทอง จันทรางศุ เลขาธิการสภาการศึกษา
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์ ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้เรียบเรียง :

นางศิรดา สันตยากร โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
อาจารย์เอธัสวัฒน์ คำมณี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
อาจารย์สุธิตา มณีชัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้พิจารณารายงาน :

นายไมตรี ศรีทองแท้ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นายรวิช ตาแก้ว หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา ประจำกลุ่มงานฯ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ ประจำกลุ่มงานฯ

บรรณาธิการ :

นายรวิช ตาแก้ว
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

บรรณาธิการร่วม :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา