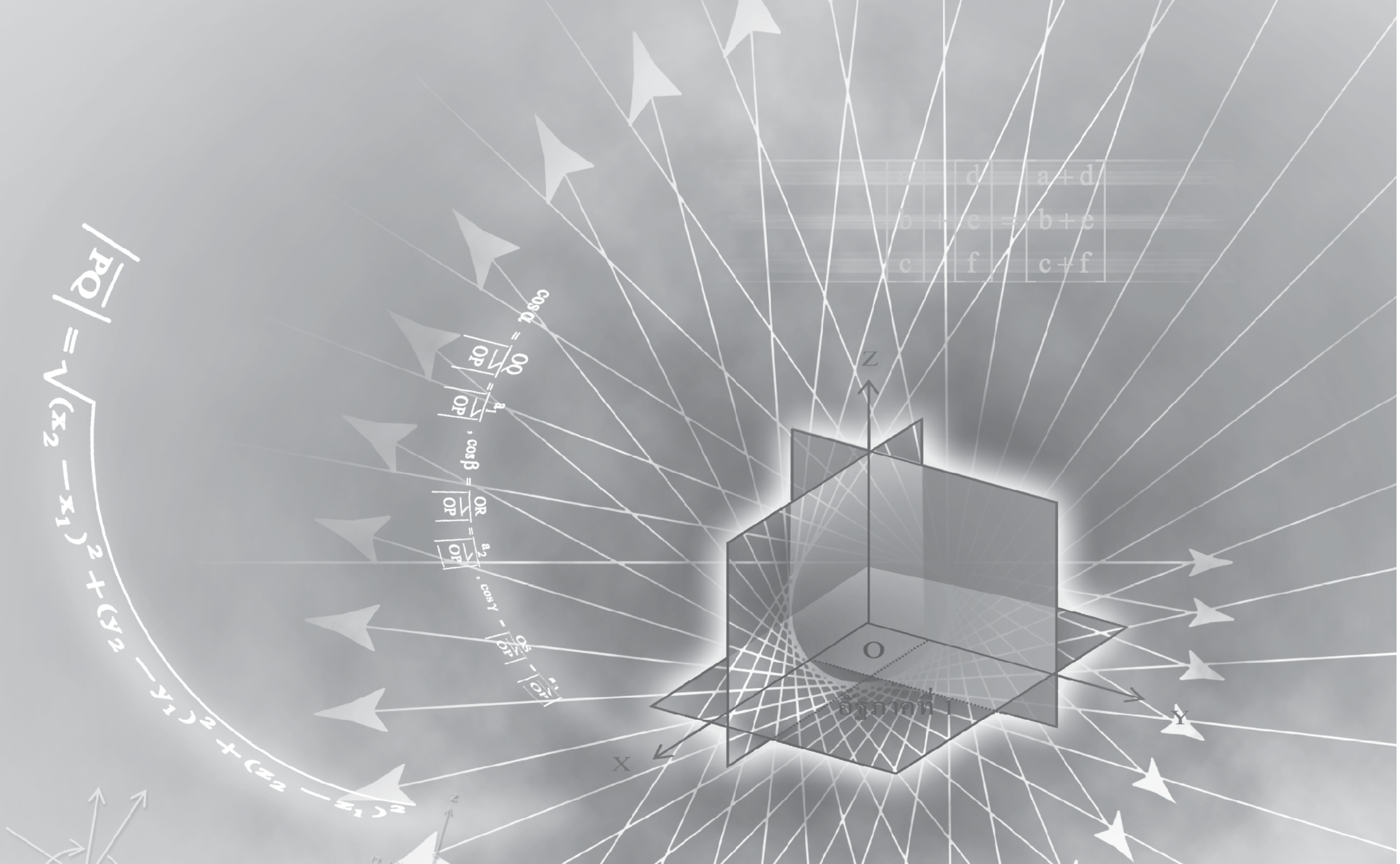
หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้
เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ



โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา

ส 691 ผ แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

กรุงเทพฯ : 2552

108 หน้า

ISBN 978-974-559-783-9

1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร. 2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง.

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สิ่งพิมพ์ สกศ. อันดับที่ 50 /2552

พิมพ์ครั้งที่ 1 สิงหาคม 2552

จำนวน 1,000 เล่ม

จัดพิมพ์เผยแพร่ สำนักงานมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร 0-2243-1129, 0-2668-7329
Web site: http:// www.onec.go.th และ http:// www.thaigifted.org

ผู้พิมพ์ บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด
580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1
ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230
โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753

คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยนขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

(รศ.ธงทอง จันทรางศุ)

เลขาธิการสภาการศึกษา

คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียนในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน เนื่องจากกระทรวงศึกษาธิการได้พัฒนาหลักสูตรขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ดังนั้น คณะจัดทำเอกสารจึงได้ใช้หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามหลักสูตรขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 เป็นเอกสารในการอ้างอิง

ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน

ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ระดับ		เนื้อหา	จำนวนคาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบเขียนแผนการจัดการเรียนรู้
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		7. ตรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึก และมหาวชิราวุธ
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด	40	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	
		▪ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ)		โรงเรียนบูรณะรำลึก
		▪ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ)		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		▪ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ)		โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
รวม			100	

สารบัญ

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง **ระบบพิกัดฉากสามมิติ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระบบพิกัดฉากสามมิติ

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนบอกพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติได้
2. นักเรียนสามารถหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดสองมิติได้

2. แนวความคิดหลัก

1. ระบบพิกัดฉากสามมิติ กำหนดเส้นตรง $XX^/$ $YY^/$ และ $ZZ^/$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด O และตั้งฉากซึ่งกันและกัน โดยการกำหนดทิศทางของเส้นตรงทั้งสามนั้นเป็นไปได้ 2 ระบบ คือ ระบบมือขวา หรือ ระบบมือซ้าย

2. การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติให้ใช้สูตรเดียวกันกับระบบพิกัดฉากสองมิติ กล่าวคือ ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_2)$ และ $Q(x_2, y_2)$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ใช้สูตร $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q\ (x_2, y_2, z_2)$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ใช้สูตร $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

3. เนื้อหาสาระ

แกนพิกัดในสามมิติ และระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ครูทบทวนระบบพิกัดฉากสองมิติ และระบบพิกัดฉากสามมิติว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร โดยใช้เอกสารประกอบการสอนที่ 1

2. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนสูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ซึ่งได้เรียนมาแล้วในระดับชั้น ม.4

3. ครูอธิบายเกี่ยวกับการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ พร้อมยกตัวอย่างประกอบ
4. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1 ข้อ 1 , 2, 3

ชั่วโมงที่ 2

1. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 1 ข้อ 4 , 5 , 6 , 7
2. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบ

5. แหล่งการเรียนรู้

เอกสารประกอบการสอนที่ 1 กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ม.5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมิน
1. สังเกตจากการตอบคำถาม		
2. ตรวจผลงานจากการทำใบงาน	ใบงาน	ทำถูกต้องอย่างน้อย 80 %
3. ทำแบบทดสอบ	แบบทดสอบ	ทำถูกต้องอย่างน้อย 60 %

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....
....

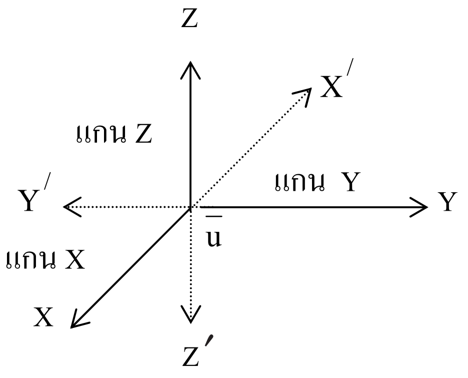
8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....
....
....
....

เอกสารประกอบการสอนที่ 1
เวกเตอร์ในสามมิติ

1. ระบบพิกัดฉากสามมิติ

กำหนดเส้นตรง $XX^{/}$ $YY^{/}$ และ $ZZ^{/}$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด O และตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังรูปที่ 1 ดังนั้น ถ้าให้เส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจำนวน (real line) จะเรียก เส้นตรง

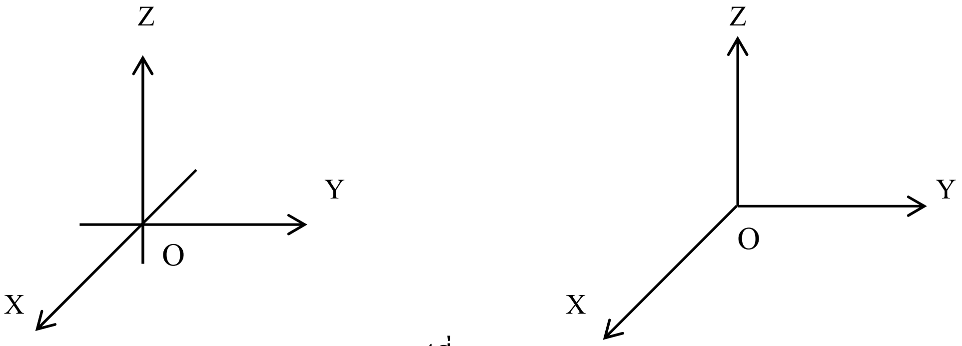


$XX^{/}$ $YY^{/}$ และ $ZZ^{/}$ ว่า ***แกนพิกัด X*** ***แกนพิกัด Y*** และ ***แกนพิกัด Z*** หรือเรียกสั้นๆ ว่า ***แกน X*** (x – axis) ***แกน Y*** (y-axis) และ ***แกน Z*** (z-axis) ตามลำดับ และเรียกจุด O ซึ่งเป็นจุดตัดของแกน X แกน Y และ แกน Z ว่า ***จุดกำเนิด*** (origin)

รูปที่ 1

เรียกส่วนของเส้นตรง OX OY และ OZ ว่า แกน X ทางบวก (positive x – axis) แกน Y ทางบวก (positive y axis) และแกน Z ทางบวก (positive z axis) ตามลำดับ และเรียกส่วนของเส้นตรง $OX^{/}$ $OY^{/}$ $OZ^{/}$ ว่า แกน X ทางลบ (negative x – axis) แกน Y ทางลบ (negative y – axis) และแกน Z ทางลบ (negative z – axis) ตามลำดับ

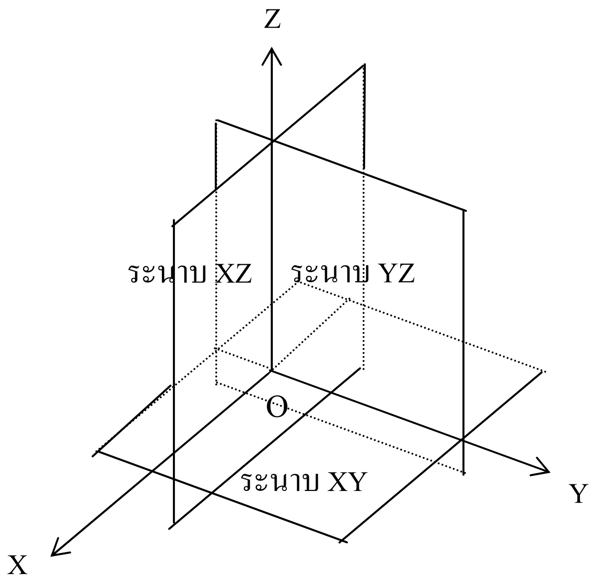
โดยทั่วไปเมื่อเขียนรูปพิกัดในสามมิติ นิยมเขียนเฉพาะ แกน X แกน Y และ Z ที่เน้นเฉพาะทางด้านที่แทนจำนวนจริงบวกซึ่งมีหัวลูกศรกำกับ ดังรูปที่ 2 (ก) หรือ (ข) โดยละทางด้านจำนวนจริงลบไว้ในฐานที่เข้าใจ

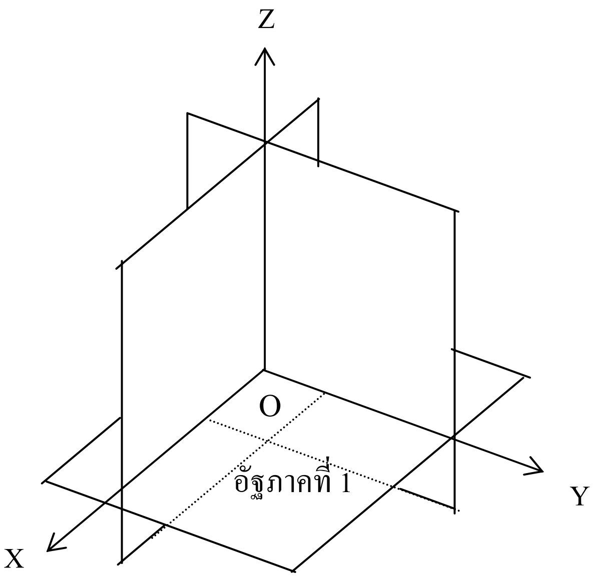


(ก) รูปที่ 2 (ข)

แกน X แกน Y และ แกน Z จะกำหนดระนาบขึ้น 3 ระนาบ เรียกว่า **ระนาบอ้างอิง** เรียกระนาบที่กำหนดด้วย แกน X และ แกน Y ว่า **ระนาบอ้างอิง XY** เรียกระนาบที่กำหนดด้วย แกน Y และ แกน Z ว่า **ระนาบอ้างอิง YZ** และระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Z ว่า**ระนาบอ้างอิง XZ** หรือเรียกสั้นๆ ว่า ระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ ตามลำดับ ดังรูปที่ 3 (ก)

ระนาบ XY ระนาบ YZ และ ระนาบ XZ ทั้งสามระนาบดังกล่าวจะแบ่งปริภูมิสามมิติ ออกเป็น 8 บริเวณ คือ เหนือระนาบ XY จำนวน 4 บริเวณ และใต้ระนาบ XY จำนวน 4 บริเวณ เรียกแต่ละบริเวณว่า **อัฐภาค** (octant) ดังรูป 3 (ข) อัฐภาคที่บรรจุ แกน X แกน Y และแกน Z ทางบวกจะเรียกว่า **อัฐภาคที่ 1** ส่วนอัฐภาคอื่นๆ จะใช้ข้อตกลงเดียวกับในระบบพิกัดฉากสองมิติ (นับทวนเข็มนาฬิกาไปตามลำดับ) โดยพิจารณาบริเวณเหนือระนาบ XY ก่อน

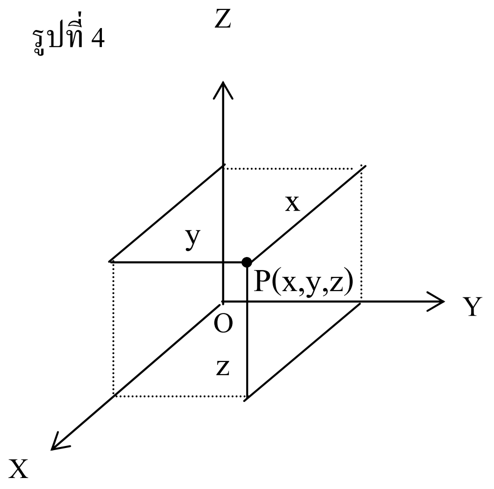




(ก) รูปที่ 3 (ข)

เมื่อกำหนดจุด P เป็นจุดใดๆ ในปริภูมิสามมิติ จะระบุตำแหน่งของจุด P หรือพิกัดของจุด P โดยใช้จำนวนจริงสามจำนวนเรียงกันตามลำดับ หรือเรียกว่า ***สามสิ่งอันดับ*** (ordered triple) ในรูป (x , y , z) โดยที่

รูปที่ 4



x คือระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน X ซึ่งระบุว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ YZ เท่าใด ระยะดังกล่าวมีค่าเป็นจำนวนบวกเมื่อวัดจากระนาบ YZ ไปยังจุด P ไปทางด้านบวกของแกน X มีค่าเป็นจำนวนลบเมื่อวัดไปทางด้านลบของแกน X และมีค่าเป็นศูนย์เมื่อจุด P อยู่บนระนาบ YZ

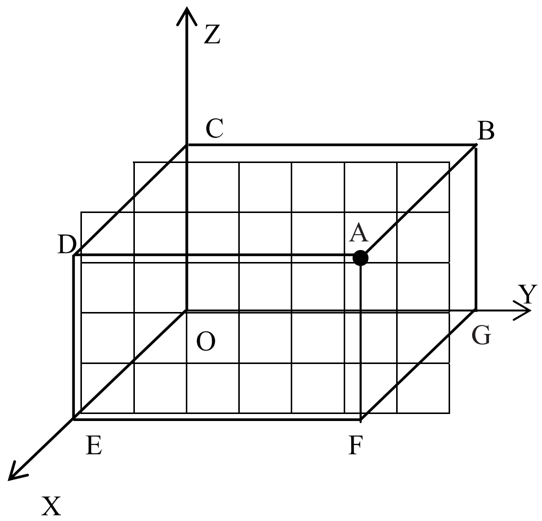
y คือระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน Y ซึ่งระบุว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ XZ เท่าใด ระยะดังกล่าวมีค่าเป็นจำนวนบวกเมื่อวัดจากระนาบ XZ ไปยังจุด P ไปทางด้านบวกของแกน Y มีค่าเป็นจำนวนลบเมื่อวัดไปทางด้านลบของแกน Y และมีค่าเป็นศูนย์เมื่อจุด P อยู่บนระนาบ XZ

z คือระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน Z ซึ่งระบุว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ XY เท่าใด ระยะดังกล่าวมีค่าเป็นจำนวนบวกเมื่อวัดจากระนาบ XY ไปยังจุด P ไปทางด้านบวกของแกน Z มีค่าเป็นจำนวนลบเมื่อวัดไปทางด้านลบของแกน Z และมีค่าเป็นศูนย์เมื่อจุด P อยู่บนระนาบ XY

เรียก (x, y, z) ว่า **พิกัด** ของจุด P และบางครั้งจะเขียนจุดและพิกัดกำกับไว้ด้วยกันเป็น P(x, y, z) ดังรูปที่ 4

ตัวอย่างที่ 1 จากรูป จงหาพิกัดของจุด B , C , D, E และ F เมื่อกำหนด A(2,5,3)

วิธีทำ

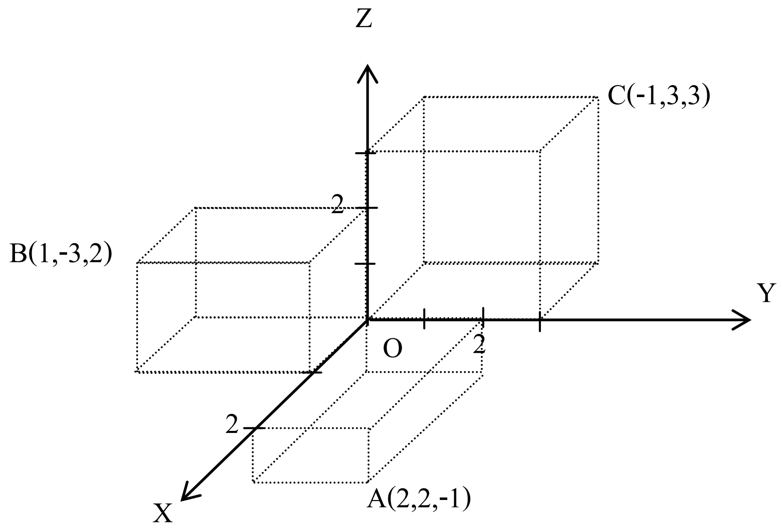


จากรูป

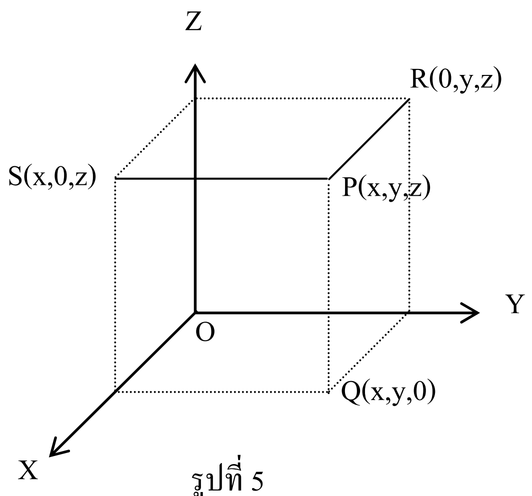
จุด B มีพิกัดเป็น (0,5,3)
จุด C มีพิกัดเป็น (0,0,3)
จุด D มีพิกัดเป็น (2,0,3)
จุด E มีพิกัดเป็น (2,0,0)
จุด F มีพิกัดเป็น (2,5,0)
จุด G มีพิกัดเป็น (0,5,0)

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนจุด A(2,2,-1) , B(1,-3,2) , C(-1,3,3) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ

วิธีทำ



ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติ



รูปที่ 5

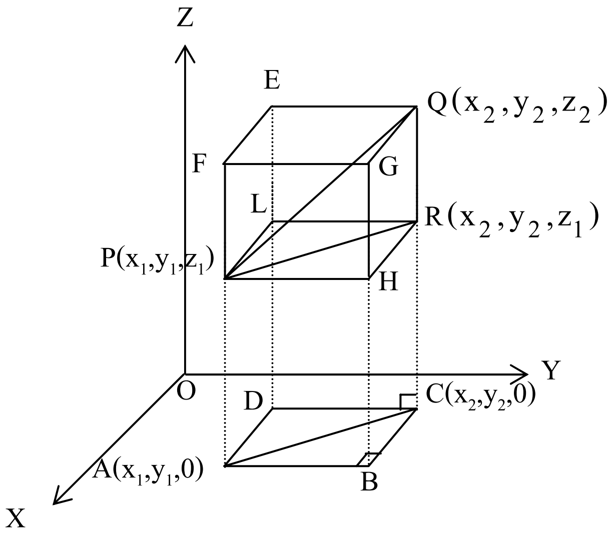
ถ้าเราลากเส้นผ่านจุด P(x,y,z) ให้ขนานกับแกน Z ไปตัดระนาบ XY จะได้จุดตัดมีพิกัด Q(x.y,0) เรียกจุดนี้ว่าเป็น **ภาพฉาย** ของจุด P บนระนาบ XY

ในทำนองเดียวกันจะเรียกจุด R(0,y,z) ว่าเป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบ YZ และเรียกจุด S(x,0,z) ว่าเป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบ XZ ดังรูปที่ 5

การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในปริภูมิสามมิติ สมมติว่าเป็นจุด $P(x_1,y_1,z_1)$ และ $Q(x_2,y_2,z_2)$ ทำได้โดยอาศัยภาพฉายของจุดทั้งสองบนระนาบ XY และอาศัยทฤษฎีพิธาโกรัส ดังนี้

ให้ A และ C เป็นภาพฉายของ P และ Q บนระนาบ XY ตามลำดับแล้วสร้างทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังรูปที่ 6 จะได้ PRQ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยอาศัยความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดบนระนาบ XY จะได้

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



รูปที่ 6

เนื่องจาก $PR = AC$ และ $QR = \left| z_2 - z_1 \right|$

และ $PQ^2 = PR^2 + QR^2$

ดังนั้น $PQ^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1,y_1,z_1)$ และ $Q(x_2,y_2,z_2)$ หรือ

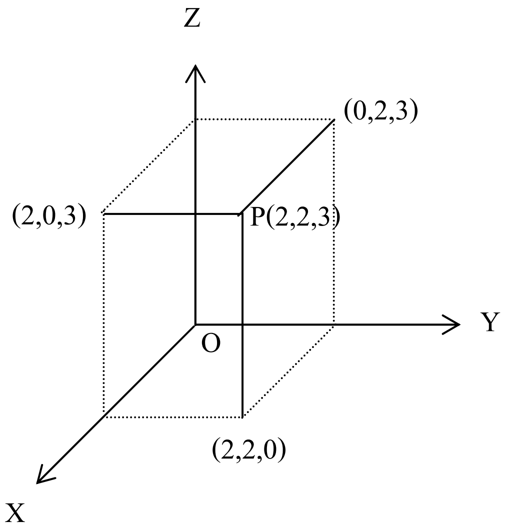
$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ทฤษฎีบท ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1,y_1,z_1)$ และ $Q(x_2,y_2,z_2)$ หรือ

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาภาพฉายของจุด P(2, 2, 3) บนระนาบ XY YZ และ XZ)

วิธีทำ



จากรูป

ภาพฉายของจุด P(2, 2, 3) บนระนาบ XY คือจุด (2, 2, 0)

ภาพฉายของจุด P(2, 2, 3) บนระนาบ YZ คือจุด (0, 2, 3)

ภาพฉายของจุด P(2, 2, 3) บนระนาบ XZ คือจุด (2, 0, 3)

ตัวอย่างที่ 4 จงหาระยะทางระหว่างจุด A(1, 0 , 3) และ B(-1, 3 , 2)

วิธีทำ จากสูตร $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

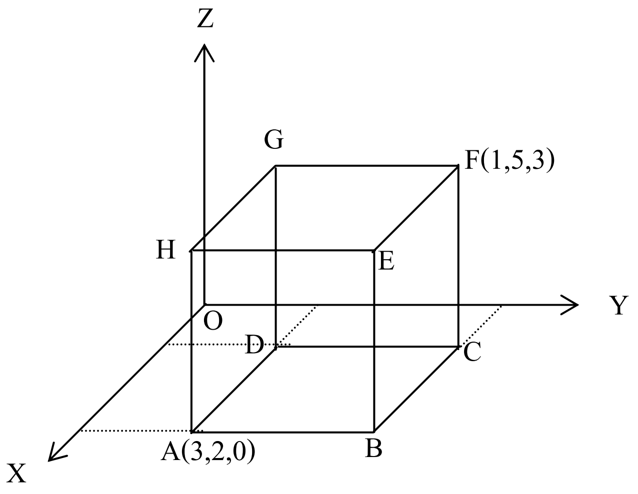
จะได้ $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (3-0)^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{4+9+1}$

$= \sqrt{14}$

ใบงานที่ 1

1.



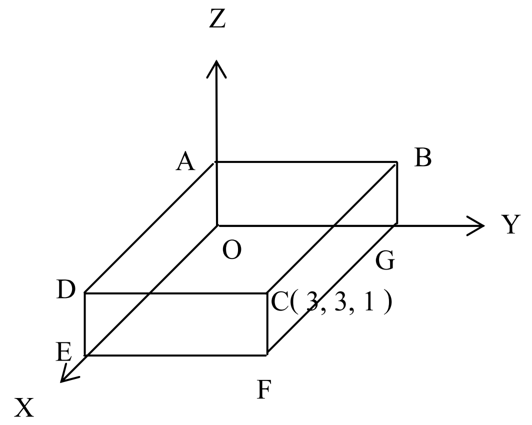
จากรูป จงหาพิกัดของจุดมุมที่เหลือของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งเป็นหน้าทั้งหกขนานกับระนาบอ้างอิง

B......................, C......................

D......................, E......................

H......................, G......................

2.



จากรูป จงหาพิกัดซึ่งเป็นภาพฉายของจุด C(3, 3, 1) บนแกนและระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

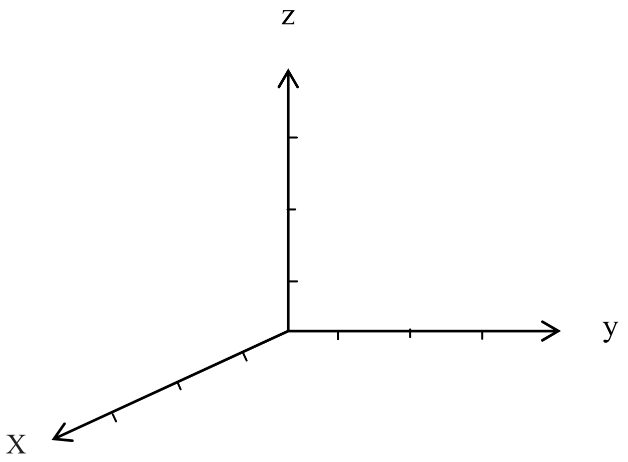
1) บนแกน X คือ จุด......................
2) บนแกน Y คือ จุด......................
3) บนแกน Z คือ จุด......................
4) ระนาบ XY คือ จุด......................
5) ระนาบ YZ คือ จุด......................
6) ระนาย XZ คือ จุด......................

3. จงหารูปทั่วไปของพิกัดของจุดที่อยู่บนแกน หรือระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) จุดบนแกน X คือ............................ 2) จุดบนแกน Y คือ.........................
3) จุดบนแกน Z คือ............................ 4) จุดบนระนาบ XY คือ..................
5) จุดบนระนาบ YZ คือ...................... 6) จุดบนระนาบ XZ คือ...................

4. กำหนดระบบพิกัดฉากของจุดในปริภูมิสามมิติ เขียนจุดในปริภูมิสามมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

A(1 , 1 , 1) B(1 , -1 , 2) C(3 , 2 , -1) D(-1 , -1 , -2)



5. จงหาภาพฉายจุด P , Q บนระนาบ XY , YZ และ XZ เมื่อ P , Q มีพิกัดเป็น (3 , - 4 , 8) และ (7 , -2 , 8) ตามลำดับ

ภาพฉายของ P บนระนาบ XY คือจุด........................

ภาพฉายของ P บนระนาบ YZ คือจุด.........................

ภาพฉายของ Q บนระนาบ XY คือจุด........................

ภาพฉายของ Q บนระนาบ YZ คือจุด........................

ภาพฉายของ Q บนระนาบ XZ คือจุด.......................

6. จงหาระยะทางระหว่างจุด P(1,-2 ,7) และ Q(-2 , -1 , 1)

....

....

....

....

....

7. จงพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A(1, 2, 1) , B(-3, 7, 9) และ C(11, 4, 2) เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

....

....

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง เวกเตอร์ และการเท่ากัน การขนานของเวกเตอร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับปริมาณเวกเตอร์

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถบอกทิศทางของเวกเตอร์ได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนเขียนรูปแสดงทิศทางของเวกเตอร์ได้
2. นักเรียนสามารถหาความยาวของเวกเตอร์ และมุมระหว่างเวกเตอร์โดยใช้กฎของโคไซน์ได้
3. นักเรียนสามารถบอกลักษณะของเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน และทิศทางตรงข้ามกันได้
4. นักเรียนสามารถบอกลักษณะของเวกเตอร์ที่ขนานกันได้
5. นักเรียนสามารถบอกลักษณะของเวกเตอร์ที่เท่ากันได้

2. แนวความคิดหลัก

1. การบอกทิศทางของเวกเตอร์ให้ใช้ทิศเหนือเป็นแกนหลัก แล้ววัดมุมไปในทิศตามเข็มนาฬิกาไปยังเวกเตอร์ โดยเขียนบอกขนาดของมุมด้วยระบบตัวเลข 3 หลัก
2. เวกเตอร์ที่ขนานกัน คือเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน หรือมีทิศทางตรงข้ามกัน
3. เวกเตอร์ที่เท่ากัน คือเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน และมีขนาดเท่ากันหรือมีความยาวเท่ากัน

3. เนื้อหาสาระ

1. การบอกทิศทางของเวกเตอร์
2. เวกเตอร์ที่ขนานกัน
3. เวกเตอร์ที่เท่ากัน

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ครูอธิบายความหมายของปริมาณสเกลาร์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ และอธิบายความหมายของปริมาณเวกเตอร์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ อธิบายการเขียนสัญลักษณ์แทนปริมาณเวกเตอร์ ทั้งเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและมีจุดสิ้นสุด กับเวกเตอร์ใดๆ

2. ครูอธิบายถึงการกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ และการเขียนองศาด้วยระบบ Three figure system

3. ให้นักเรียนศึกษาจากเอกสารประกอบความรู้เพิ่มเติมเพื่อทำโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ในใบงานที่ 2.1
4. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบในใบงานที่ 2.1

ชั่วโมงที่ 2

1. ให้นักเรียนยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเวกเตอร์ที่ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น การพายเรือข้ามฟาก การแข่งรถ การเคลื่อนที่ของเครื่องบินในขณะที่มีพายุ เป็นต้น
2. ครูและนักเรียนทบทวนกฎของโคไซน์ เพื่อใช้ในการคำนวณหาความยาวของเวกเตอร์
3. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 2.1 ข้อ 2 ,3 ,4
4. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบในใบงานที่ 2

ชั่วโมงที่ 3

1. ครูอธิบายเกี่ยวกับเวกเตอร์ที่ขนานกัน การเท่ากันของเวกเตอร์ นิเสธของเวกเตอร์ ขนาดของเวกเตอร์ พร้อมทั้งให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอนเกี่ยวกับเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่ทิศทางตรงข้ามกัน เวกเตอร์ที่ขนานกันและเวกเตอร์ที่เท่ากัน
2. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบความเข้าใจหลังบทเรียน
3. นักเรียนช่วยกันตรวจผลงาน พร้องทั้งครูอธิบายเพิ่มเติม

5. แหล่งการเรียนรู้ เอกสารประกอบการสอนที่ 2 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ม.5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมิน
1. สังเกตจากการตอบคำถาม		
2. ตรวจผลงานจากการทำใบงาน	ใบงาน	ทำถูกต้องอย่างน้อย 80%
3. ทำแบบทดสอบ	แบบทดสอบ	ทำถูกต้องอย่างน้อย 60%

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....
....
....

เอกสารประกอบการสอนที่ 2

เวกเตอร์ (vector)

การระบุปริมาณบางอย่างเราบอกเพียงขนาดซึ่งใช้จำนวนจริง เช่น ความสูง พื้นที่ ปริมาตร อุณหภูมิ เราเรียกปริมาณชนิดนี้ว่า **ปริมาณสเกลาร์** (scalar quantity)

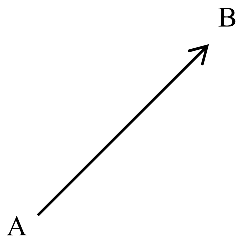
แต่ปริมาณอีกชนิดหนึ่งต้องระบุทั้งขนาด และทิศทาง เช่น ความเร็ว ความเร่ง แรง เราเรียกปริมาณที่บ่งทั้งขนาดและทิศทางว่า **ปริมาณเวกเตอร์ (vector)**

อาจเรียกปริมาณสเกลาร์สั้นๆ ว่า สเกลาร์ และเรียกปริมาณเวกเตอร์ว่า เวกเตอร์

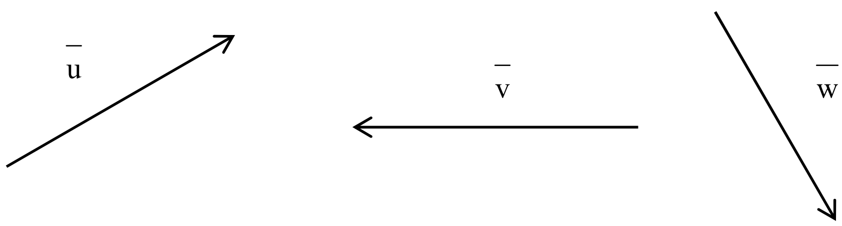
สัญลักษณ์เกี่ยวกับเวกเตอร์

เรานิยมใช้ส่วนของเส้นตรงที่บ่งบอกทิศทาง แทนปริมาณเวกเตอร์ โดยทั่วไปความยาวของส่วนของเส้นตรงจะบ่งบอกถึง**ขนาด** และ**หัวลูกศร** จะบ่งบอก**ทิศทาง**

จากรูป สรุปได้ดังนี้



1. สัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ คือส่วนของเส้นตรงที่บ่งบอกทิศทางจาก A ไป B เราเรียกสั้น ๆ ว่า เวกเตอร์ จาก A ไป B
2. เราเรียก A ว่า จุดเริ่มต้น (initian point) เรียก B ว่า จุดสิ้นสุด(terminal point)
3. เราจะเรียกสั้นๆ ว่า เวกเตอร์ เอ บี
4. ขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ คือความยาวของส่วนของเส้นตรง AB ใช้สัญลักษณ์ $|\overrightarrow{AB}|$
5. ในบางครั้งเราจะไม่ใช้จุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดมาเขียนเป็นสัญลักษณ์ของเวกเตอร์ แต่เราจะใช้สัญลักษณ์ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นต้น แทนเวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์ ดังรูป และขนาดของเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ จะเขียนแทนด้วย $|\bar{u}|$, $|\bar{v}|$, $|\bar{w}|$



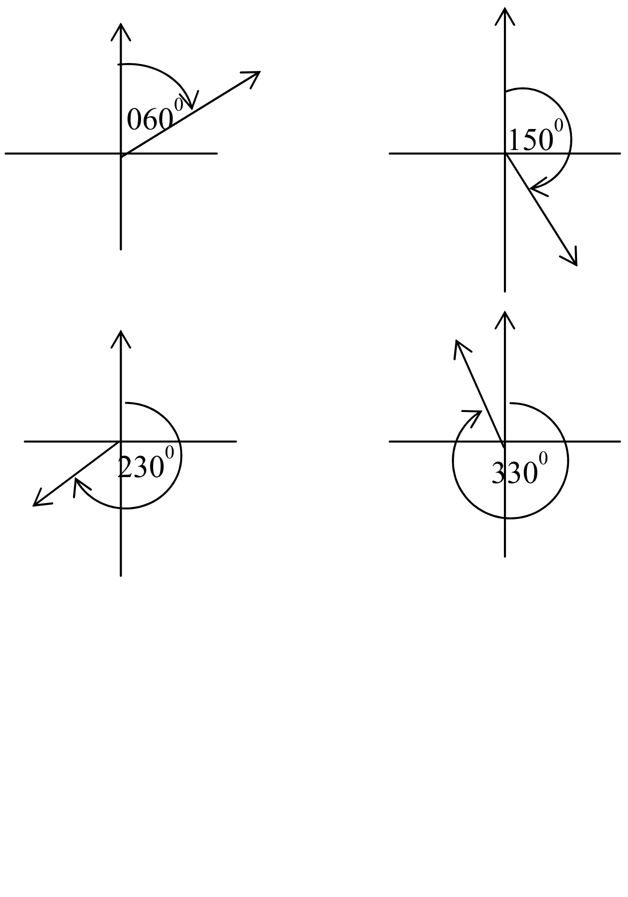
เวกเตอร์ศูนย์ (Zero vector) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 เขียนแทนด้วย $\bar{0}$

ข้อสังเกต เนื่องจากขนาดของ $\bar{0}$ เท่ากับ 0 ดังนั้นจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดของ $\bar{0}$ เป็นจุดเดียวกัน

การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์

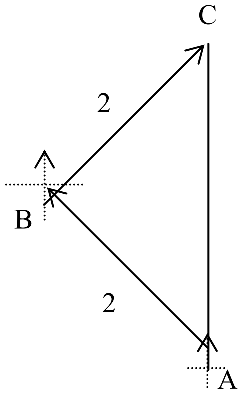
การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ จะกำหนดด้วยค่าของมุมที่เริ่มวัดจากแกนทิศเหนือไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจนถึง เวกเตอร์ ซึ่งค่าของมุมนี้จะมีค่าระหว่าง 0 องศา ถึง 360 องศา และถ้าค่าของมุมต่ำกว่า 100 องศา จะต้องเขียน “ 0 ” นำหน้า เพื่อให้ได้ตัวเลขครบ 3 ตัวทุกครั้ง ระบบการเขียนตัวเลขแบบนี้เรียกว่า ระบบ Three figure system

นักเรียนดูรูปการเขียนรูปแสดงมุมของเวกเตอร์



ตัวอย่างที่ 1 นกตัวหนึ่งบินหาอาหารโดยเริ่มบินไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร แล้วบินตรงไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร อยากทราบว่านกตัวนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใด และอยู่ในทิศใดของจุดเริ่มต้น

วิธีทำ



นกตัวนี้ เริ่มเดินทางจากจุด A ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือถึงจุด B เป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร แล้วบินต่อไปถึงจุด C เป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร ในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ

จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม B เป็นมุมฉาก
จากทฤษฎีบทพิทาโกรัส จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
&= 2^2 + 2^2 \\
&= 4 + 4 \\
&= 8 \\
AC &= 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น นกตัวนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทาง $2\sqrt{2}$ กิโลเมตร ในทิศเหนือของจุดเริ่มต้น

ใบงานที่ 2.1

1. ให้นักเรียนเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ต่อไปนี้

   1) 120 เมตร ไปทางทิศเหนือ

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   2) 30 เมตร ไปทางทิศ 060 องศา

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   3) 80 กิโลเมตรไปทางทิศ 300^0

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   4) 10 กิโลเมตร ไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. ให้นักเรียนวาดรูปและใช้กฎของโคไซน์คำนวณหาความยาวของเวกเตอร์ของแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ชายคนหนึ่งออกเดินทางไปในทิศ 030^0 เป็นระยะทาง 6 กิโลเมตร แล้วเดินทางต่อไปในทิศ 150^0 เป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร เขาจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใดและอยู่ในทิศทางใดของจุดเริ่มต้น

....

....

....

....

....

....

....

2) นักเรียนคนหนึ่งถีบจักรยานไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ 4 กิโลเมตร หลังจากนั้นถีบจักรยานไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ 3 กิโลเมตร จงหาว่าเด็กคนนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มเป็นระยะทางเท่าใด

....

....

....

....

....

....

....

3) ชายคนหนึ่งเดินไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร จากนั้นเดินไปทางทิศ 315^0 เป็นระยะทางอีก 3 กิโลเมตร ชายคนนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร และอยู่ในทิศทางใดของจุดเริ่มต้น

....

....

....

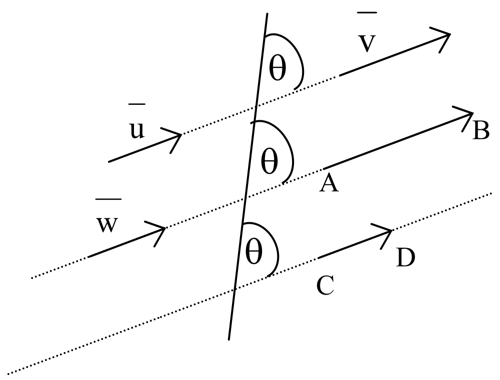
....

....

....

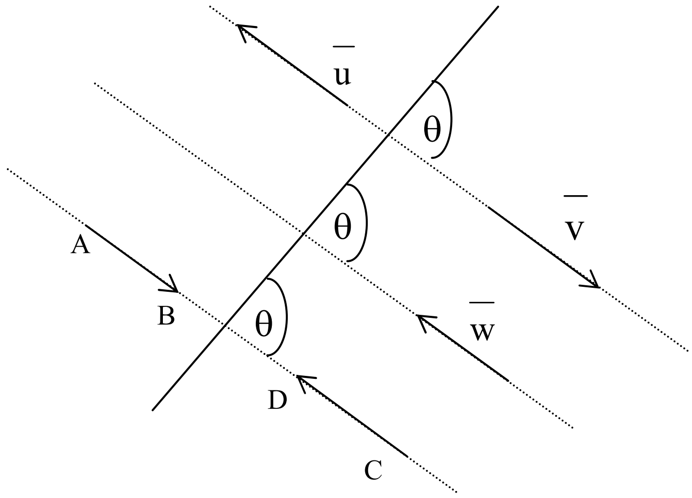
....

บทนิยาม 1 $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ ถ้าแทนเวกเตอร์ด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแล้ว ส่วนของเส้นตรงทั้งสองขนานกันหรืออยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน



จากรูป จะได้ว่า $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ มีทิศทางเดียวกัน

บทนิยาม 2 $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน ก็ต่อเมื่อ ถ้าแทนเวกเตอร์ด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแล้ว ส่วนของเส้นตรงทั้งสองขนานกันหรืออยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันและมีหัวลูกศรไปทางตรงข้ามกัน



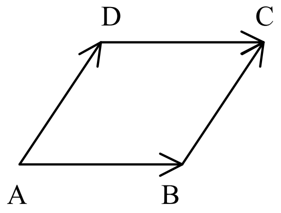
จากรูป $\bar{u}$, $\bar{w}$, $\overrightarrow{CD}$ มีทิศทางเดียวกัน และ $\bar{v}$ กับ $\overrightarrow{AB}$ มีทิศทางเดียวกันแต่ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน และ $\overrightarrow{CD}$ กับ $\overrightarrow{AB}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

ใบงานที่ 2.2

เมื่อนักเรียนศึกษานิยามของเวกเตอร์แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{BA}$ มีทิศทางเดียวกัน หรือ มีทิศทางตรงข้ามกัน................................

2. กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป จงหา

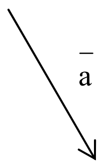


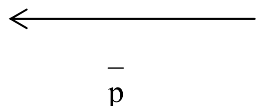
   1) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ...
   2) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AD}$ คือ...
   3) เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ...
   4) เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AD}$ คือ...

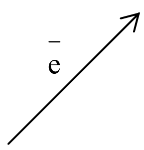
3. $\overrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overrightarrow{BA}$ หรือไม่ ....

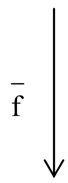
4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ หรือไม่ ....

5. ให้นักเรียนเขียนเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ข้อละ 2 เวกเตอร์ และตั้งชื่อด้วย

1) 

2) 

3) 

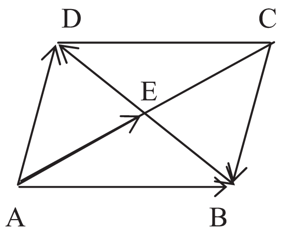
4) 

6. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ถูกต้องหรือไม่ ....

7. $\bar{u} = -\bar{u}$ ถูกต้องหรือไม่..

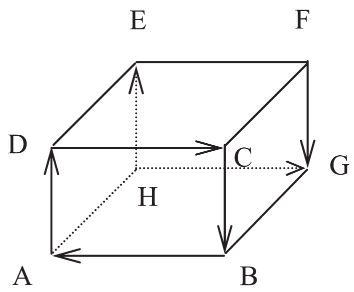
8. $\left|\bar{u}\right| = \left|-\bar{u}\right|$ ถูกต้อง หรือไม่..

9. กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ใช้ตอบคำถามต่อไปนี้



1) เวกเตอร์ที่ขนานกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ.......................................
2) เวกเตอร์ที่ขนานกับ $\overrightarrow{AD}$ คือ.......................................
3) เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{CB}$ คือ...
4) เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธของ $\overrightarrow{AB}$ คือ.................................
5) เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธของ $\overrightarrow{BC}$ คือ.................................
6) $\overrightarrow{AB}$ =................... 7) $\overrightarrow{AE}$ =.........................
8) $-\overrightarrow{BC}$ =.................... 9) $\overrightarrow{BC}$ =.....................
10) $\overrightarrow{ED}$ =..................... 11) $-\overrightarrow{AE}$ =...................

10. กำหนด ABCDEFGH เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหา
1) เวกเตอร์ที่ขนานกัน 3 คู่ คือ.................................
2) เวกเตอร์ที่เท่ากัน 3 คู่ คือ................................
3) เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน 3 คู่
คือ..



แบบทดสอบความเข้าใจหลังบทเรียน

ชื่อ...เลขที่................ชั้น.......................

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ ว่า **ถูก** หรือ **ผิด**

1. ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u} = \bar{v}$ ....
2. ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ ....
3. ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน........................
4. ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน..................
5. ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u} = \bar{v}$ หรือ $\bar{u} = -\bar{v}$ ....
6. ถ้า $\bar{u} = \bar{v}$ แล้ว $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ ....
7. ถ้า $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ แล้ว $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ ....
8. ถ้า $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ แล้ว $\bar{u} = \bar{v}$ ....
9. ถ้า $\bar{u} = -\bar{v}$ แล้ว $\bar{u} = \bar{0}$ ....
10. ถ้า $\bar{u} = \bar{v}$ และ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแล้ว $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะมีจุดเริ่มต้นเดียวกัน และมีจุดสิ้นสุดเดียวกัน ....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง **การบวก ลบ เวกเตอร์** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความเข้าใจการบวก การลบเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถบวก ลบ เวกเตอร์ได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนเขียนรูปแสดงการบวกของเวกเตอร์ และการลบของเวกเตอร์ได้
2. นักเรียนสามารถบอกลักษณะของเวกเตอร์ศูนย์ได้
3. นักเรียนสามารถบอกลักษณะของเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน และทิศทางตรงข้ามกันได้
4. นักเรียนสามารถบอกลักษณะของเวกเตอร์ที่ขนานกันได้
5. นักเรียนสามารถบอกลักษณะของเวกเตอร์ที่เท่ากันได้

2. แนวความคิดหลัก

1. การบวกเวกเตอร์ ถ้าจุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ ไปจรดกับจุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}+\vec{v}$ คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และมีจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$
2. $\bar{u}-\bar{v}$ คือเวกเตอร์ $\bar{u}$ บวกด้วยนิเสธของ $\bar{v}$ จึงสรุปเป็นรูปแบบดังนี้ $\bar{u}-\bar{v}=\bar{u}+(-\bar{v})$

3. เนื้อหาสาระ

1. การบวกเวกเตอร์
2. การลบเวกเตอร์

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ครูอธิบายวิธีการสร้างเวกเตอร์ให้เท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้พร้อมยกตัวอย่างประกอบ
2. ครูอธิบายถึงการวาดรูปแสดงการบวกของเวกเตอร์ และการลบเวกเตอร์
3. ให้นักเรียนช่วยกันกำหนดเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ ที่ไม่ขนานกันบนกระดานดำ แล้วให้นักเรียนแต่ละคนเขียนรูปการบวก และการลบของเวกเตอร์คู่นั้น
4. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 3 ข้อ 1 , 2 , 3

ชั่วโมงที่ 2

1. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลย ข้อ 1 , 2 , 3 ในชั่วโมงที่ 1
2. ให้นักเรียนทำงานใบงานที่ 3 ข้อ 4 , 5, 6 , 7
3. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบในใบงานที่ 3 ข้อ 4, 5, 6, 7

5. แหล่งการเรียนรู้

เอกสารประกอบการสอนที่ 3 แบบเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมิน
1. สังเกตจากการตอบคำถาม		
2. ตรวจผลงานจากการทำใบงาน	ใบงาน	ทำถูกต้องอย่างน้อย 80%
3. ทำแบบทดสอบ	แบบทดสอบ	ทำถูกต้องอย่างน้อย 60%

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....

....

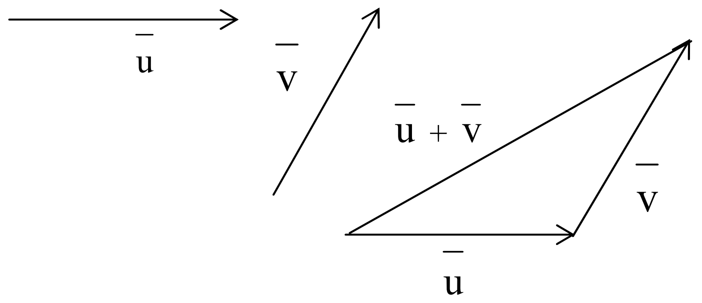
....

....

เอกสารประกอบการสอนที่ 3

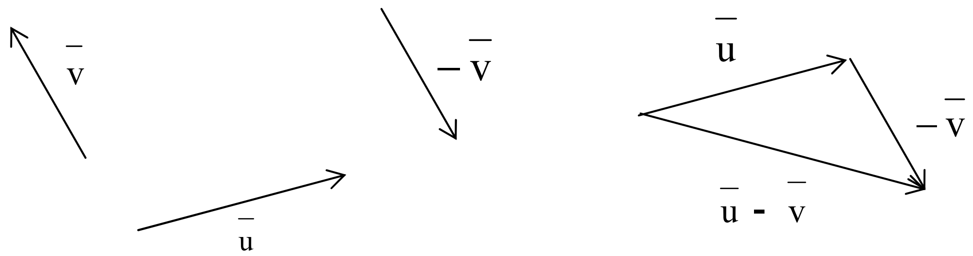
การบวกเวกเตอร์ และการลบเวกเตอร์

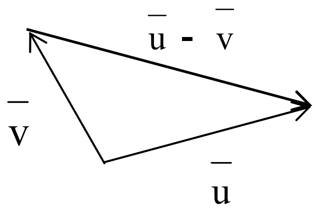
นิยาม 1 ถ้าจุดเริ่มต้นของ $\overline{v}$ เป็นจุดเดียวกับจุดสิ้นสุดของ $\overline{u}$ แล้ว $\overline{u}+\overline{v}$ คือ เวกเตอร์ซึ่งมีจุดเริ่มต้นเป็นจุดเดียวกับจุดเริ่มต้นของ $\overline{u}$ และมีจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกับจุดสิ้นสุดของ $\overline{v}$



การลบเวกเตอร์

นิยาม 1 ให้ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ผลลบของ $\overline{u}$ ด้วย $\overline{v}$ หมายถึง ผลบวกของ $\overline{u}$ กับ นิเสธของ $\overline{v}$ เขียนแทนด้วย $\overline{u}-\overline{v}$ นั่นคือ $\overline{u}-\overline{v} = \overline{u}+(-\overline{v})$



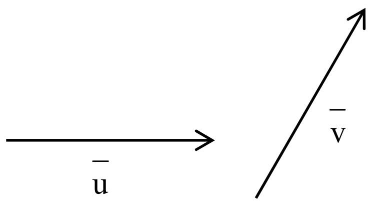


เขียนรูปใหม่เป็น

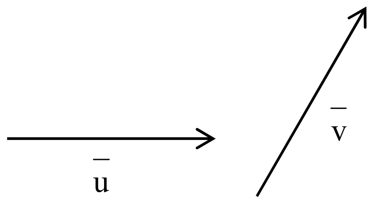
หมายเหตุ เวกเตอร์ $\overline{u}, \overline{v}$ ไม่ว่าจะวางตำแหน่งใดก็ตาม ขนาดและทิศทางไม่เปลี่ยน

ใบงานที่ 3

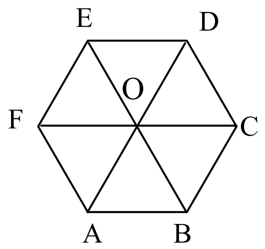
1. กำหนดเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ ดังรูป จงเขียนรูปแสดง $\bar{v} + \bar{u}$



2. กำหนดเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ ดังรูปจงเขียนรูปแสดง $\bar{v} - \bar{u}$

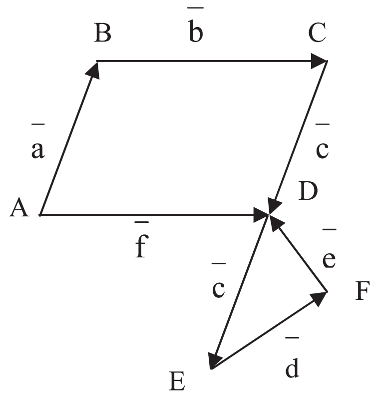


3. ให้นักเรียนสมมติเวกเตอร์ $\bar{w}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ ที่ไม่อยู่ในทิศทางเดียวกันแล้ววาดรูปแสดง
   $(\bar{w} + \bar{x}) + \bar{y} = \bar{w} + (\bar{x} + \bar{y})$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่)
4. ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า มุมเท่า ที่มีเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O
   จงหาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้



1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}$ =..
2) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC}$ =..
3) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF}$ =..
4) $\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{BA}$ =..
5) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF}$ =..
6) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OD}) - \overrightarrow{BO}$ =......................................

5.



จากรูป จงเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AE}$ และ $\overrightarrow{EA}$ ในรูปของเวกเตอร์ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$ และ $\bar{f}$

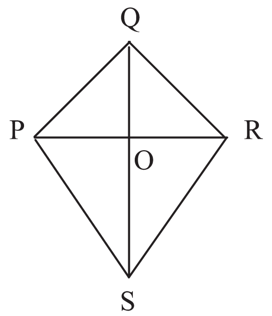
....

....

....

....

6.



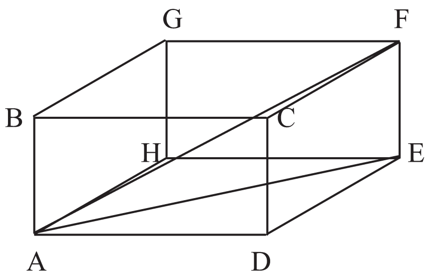
PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว มีเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O

จงหา 1) $\overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SP})$ =..................

2) $(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QS}) + \overrightarrow{RO}$ =..................

3) $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) - \overrightarrow{SR}$ =..................

7.



กำหนด ABCDEFGH เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหา

1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}$ =.....................

2) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{AB}$ =....................

3) เวกเตอร์ที่บวกกันได้ $\bar{0}$ มา 4 เวกเตอร์

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง **การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และนำไปใช้ในการพิสูจน์ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้

จุดประสงค์นำทาง

นักเรียนสามารถเขียนรูปแสดงทิศทางการบวก และการลบของเวกเตอร์ได้

2. แนวความคิดหลัก

1. ให้ a เป็นจำนวนจริง และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์แล้ว
   1.1 ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\bar{u} = \bar{0}$
   1.2 ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $a|\bar{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$
   1.3 ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

3. เนื้อหาสาระ

1. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
2. สมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
3. การนำสมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตบางบท

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ครูอธิบายการสร้างเวกเตอร์ให้มีขนาดใหญ่กว่า หรือเล็กกว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ซึ่งการกระทำดังกล่าวเราเรียกว่า การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

2. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอนเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์เพิ่มเติมในเอกสารประกอบการสอนที่ 4

3. แบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่มละ 6 คน

4. ครูและนักเรียนช่วยกันกำหนดเวกเตอร์มา 2 เวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน และกำหนดจำนวนจริงมาให้ 2 จำนวน

5. ให้แต่ละกลุ่มเขียนรูปแสดงการคูณเวกเตอร์กับจำนวนจริงที่กำหนดให้ แล้วนำผลงานมาแสดงหน้าชั้นเรียน

6. ให้แต่ละกลุ่มวาดรูปแสดงสมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

7. นักเรียนนำผลงานมาแสดงหน้าชั้น

ชั่วโมงที่ 2

1. ให้นักเรียนทำใบงาน ที่ 4 ข้อ 1 - 5
2. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจคำตอบ

ชั่วโมงที่ 3

1. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 2 ข้อ 6 – 8 โดยครูช่วยอธิบายเพิ่มเติม
2. นักเรียนช่วยกันตรวจผลงาน พร้อมทั้งครูอธิบายเพิ่มเติม

5. แหล่งการเรียนรู้ เอกสารประกอบการสอนที่ 3 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ม.5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมิน
1. สังเกตจากการตอบคำถาม		
2. ตรวจผลงานจากการทำใบงาน	ใบงาน	ทำถูกต้องอย่างน้อย 80%
3. ทำแบบทดสอบ	แบบทดสอบ	ทำถูกต้องอย่างน้อย 60%

7. บันทึกหลังสอน

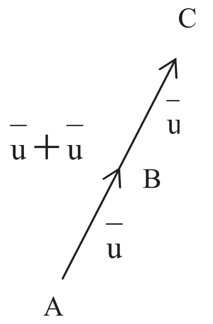
....
....
....
....

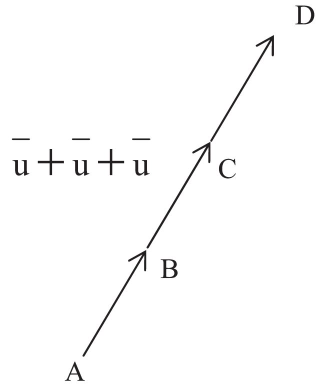
8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....
....
....
....

เอกสารประกอบการสอนที่ 4

พิจารณา $\bar{u}+\bar{u}$ และ $\bar{u}+\bar{u}+\bar{u}$





จะเห็นว่า $\bar{u}+\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นสองเท่าของ $\bar{u}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ และ $\bar{u}+\bar{u}+\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นสามเท่าของ $\bar{u}$ ถ้าใช้สัญลักษณ์ $2\bar{u}$ แทน $\bar{u}+\bar{u}$ และ $3\bar{u}$ แทน $\bar{u}+\bar{u}+\bar{u}$ จะได้ว่า

$2\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นสองเท่าของ $\bar{u}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

$3\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นสามเท่าของ $\bar{u}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

จากตัวอย่างเราจะนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

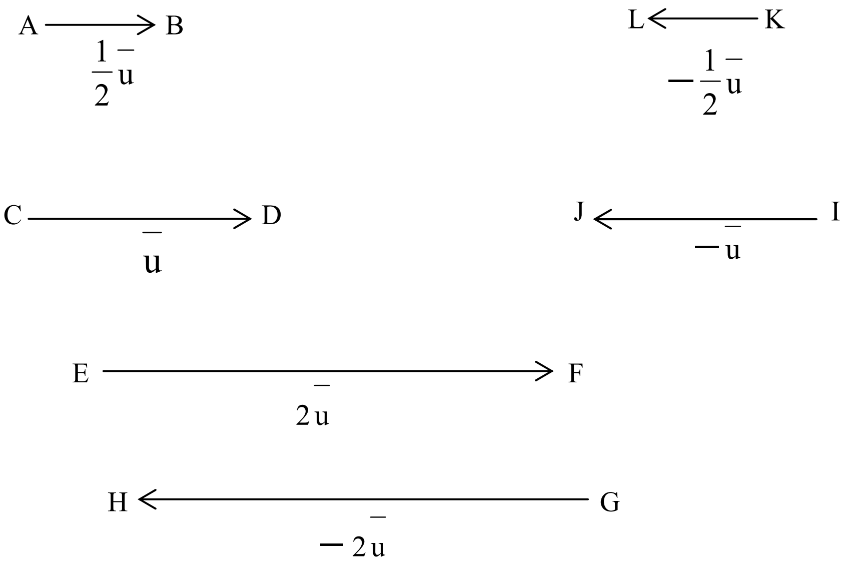
บทนิยาม กำหนด $\bar{u}$ และ $m \in R$ นิยามเวกเตอร์ $m\bar{u}$ ดังนี้

1. ถ้า $m > 0$ แล้ว $m\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $m|\bar{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$
2. ถ้า $m < 0$ แล้ว $m\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $|m||\bar{u}|$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$
3. ถ้า $m = 0$ แล้ว $m\bar{u} = \bar{0}$

ข้อสังเกต

$$1\bar{u} = \bar{u}$$
$$(-1)\bar{u} = -\bar{u}$$
$$(-m)\bar{u} = -m\bar{u}$$
$$m(-\bar{u}) = -m\bar{u}$$

ตัวอย่างที่ 1



กำหนดให้ $\overrightarrow{CD} = \bar{u}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\bar{u}$, $\overrightarrow{EF} = 2\bar{u}$, $\overrightarrow{GH} = -2\bar{u}$

$\overrightarrow{IJ} = -\bar{u}$ และ $\overrightarrow{KL} = -\frac{1}{2}\bar{u}$

และจะเห็นว่า

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CD}\right|$ และ $\overrightarrow{AB}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{CD}$

$\left|\overrightarrow{EF}\right| = 2\left|\overrightarrow{CD}\right|$ และ $\overrightarrow{EF}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{CD}$

$\left|\overrightarrow{GH}\right| = 2\left|\overrightarrow{CD}\right|$ แต่ $\overrightarrow{GH}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{CD}$

$\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$ แต่ $\overrightarrow{IJ}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{CD}$

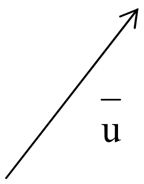
และ $\left|\overrightarrow{KL}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CD}\right|$ แต่ $\overrightarrow{KL}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{CD}$

ทฤษฎีบท 1 กำหนด $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$
$\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง m ซึ่ง $\bar{u} = m\bar{v}$

ทฤษฎีบท 2 กำหนด $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ และ $m, n \in R$
ถ้า $m\bar{u} + n\bar{v} = \bar{0}$ แล้วจะได้ว่า $m = 0$ และ $n = 0$

ใบงานที่ 4

1. กำหนดให้ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และมีทิศทางดังรูป จงบรรยายลักษณะของเวกเตอร์ ต่อไปนี้



1) $4\bar{u}$ 2) $-4\bar{u}$

3) $\frac{1}{4}\bar{u}$ 4) $-\frac{1}{4}\bar{u}$

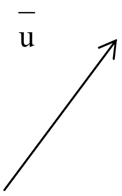
1) $4\bar{u}$ เนื่องจาก $4 > 0$ ดังนั้น $4\bar{u}$ จะมีขนาดสี่เท่าของ $\bar{u}$ หรือมีขนาด...................หน่วย และมีทิศทาง...

2) $-4\bar{u}$ เนื่องจาก 4 ...... 0 ดังนั้น $-4\bar{u}$ จะมีขนาด.. หรือมีขนาด ....หน่วย และมีทิศทาง...

3) $\frac{1}{4}\bar{u}$ เนื่องจาก 4 .... 0 ดังนั้น $\frac{1}{4}\bar{u}$ จะมีขนาด..หรือมีขนาด ....หน่วย และมีทิศทาง..

4) $-\frac{1}{4}\bar{u}$ เนื่องจาก 4 ...... 0 ดังนั้น $-\frac{1}{4}\bar{u}$ จะมีขนาด....................................หรือมีขนาด ....หน่วย และมีทิศทาง..

2. กำหนด $\bar{u}$ ดังรูป จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{u}$ กับ เวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้



1) $\bar{v}$ เมื่อ $3\bar{u} - 2\bar{v} = \bar{v}$

2) $\bar{w}$ เมื่อ $2\bar{u} + \bar{w} = 2\bar{w} + 5\bar{u}$

....
....
....
....

3. กำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน

ให้ $\bar{w} = (a+4b)\bar{u} + (2a+b+1)\bar{v}$ และ $\bar{s} = (b-2a+2)\bar{u} + (2a-3b-1)\bar{v}$

ถ้า $3\bar{w} = 2\bar{s}$ จงหาค่าของ a และ b

....

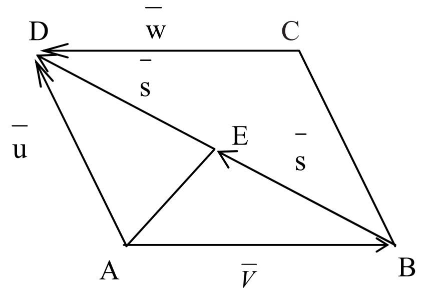
....

....

....

....

4.



จากรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ข้อใดเป็นจริง

1) $\bar{v} = w$ ....

2) $\overrightarrow{DB} = \bar{u} + \bar{v}$ ....

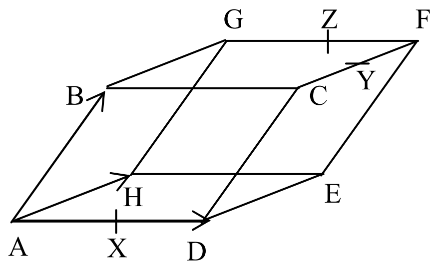
3) $3\bar{s} - \bar{u} = \bar{v}$ ....

4) $2\overline{AE} = \bar{u} + \bar{v}$ ....

5) $\overrightarrow{AE} = \bar{w} + \bar{s}$ ....

6) $\overrightarrow{AE} = \frac{\bar{u}}{2} - \frac{\bar{w}}{2}$ ....

5.



กำหนด ABCDEFGH เป็นทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานดังรูป มี X , Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และ CF ตามลำดับ และ $GZ = \frac{1}{3}GF$ ถ้า $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$, $\bar{b} = \overrightarrow{AD}$, $\bar{c} = \overrightarrow{AH}$

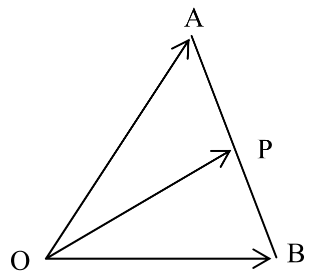
จงเขียน $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AZ}$, $\overrightarrow{EY}$ และ $\overrightarrow{XZ}$ ในรูป $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

....

....

....

…………...

6. 

จากรูป ถ้า P เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\overrightarrow{AB}$

จงแสดงว่า $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

....

....

....

....

7. A , B และ C เป็นจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน C เป็นจุดแบ่ง $\overline{AB}$ ตามอัตราส่วน $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = m : n$ ให้ O เป็นจุด ๆ หนึ่งซึ่งไม่อยู่บน $\overline{AB}$ และ $\overrightarrow{OA} = \bar{v}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{u}$ จงแสดงว่า $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{m+n}(m\bar{u} + n\bar{v})$

....

....

....

....

....

8. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ M , N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\overline{BC}$ และ $\overline{CD}$ ตามลำดับ ให้ $\bar{u} = \overline{AM}$ และ $\bar{v} = \overline{AN}$ จงแสดงว่า $\overline{AB} = \frac{4}{3}\bar{u} + \frac{2}{3}\bar{v}$

....

....

....

....

....

9. จงแสดงว่าผลรวมของเวกเตอร์ที่เป็นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีค่าเป็นศูนย์เมื่อจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ที่เป็นมัธยฐาน

....

....

....

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง **เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากสองมิติ และสามมิติ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการบวก การลบ และการคูณเวกเตอร์ ในระบบแกนมุมฉากได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้ เมื่อกำหนดจุดสองจุดมาให้
2. นักเรียนสามารถหาจุดเริ่มต้น หรือจุดปลายของเวกเตอร์ได้
3. นักเรียนสามารถ บวก ลบ เวกเตอร์ ในระนาบแกนมุมฉากได้
4. นักเรียนสามารถบอกได้ว่าเวกเตอร์คู่ใดขนานกันได้

2. แนวความคิดหลัก

1. เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และมีจุดสิ้นสุดที่จุด A(a,b) จะเขียนแทนด้วย

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

2. เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นกำเนิด และมีจุดสิ้นสุดที่จุด A(a, b , c) เขียนแทนด้วย

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ และ

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d$, $b = e$ และ $c = f$

4. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$

6. $m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma \\ mb \end{bmatrix}$ และ $m\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma \\ mb \\ mc \end{bmatrix}$ เมื่อ m เป็นจำนวนจริงใดๆ

3. เนื้อหาสาระ

1. เวกเตอร์ในระบบพิกัดแกนมุมฉากสองมิติ และสามมิติ
2. การบวก ลบ เวกเตอร์
3. การขนานกันของเวกเตอร์

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ครูสอนเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระนาบพิกัดแกนมุมฉากสองมิติและสามมิติ โดยการเปรียบเทียบให้เห็นความแตกต่าง เช่น การขับรถบนถนนซึ่งเป็นระนาบสองมิติ กับการขับเครื่องบินซึ่งเป็นระนาบสามมิติเพราะต้องอาศัยความสูงด้วย พร้อมทั้งอธิบายเพิ่มเติมส่วนที่นักเรียนยังไม่ชัดเจน
2. ให้นักเรียนศึกษาใบประกอบความรู้ที่ 5 โดยครูอธิบายประกอบเพิ่มเติม
3. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 5.1
4. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบในใบงานที่ 5.1

ชั่วโมงที่ 2

1. ครูสอนเรื่องการบวก การลบ เวกเตอร์ ในระบบแกนมุมฉากทั้งสองมิติ และสามมิติ พร้อมทั้งมีเอกสารประกอบการสอนที่ 5 เวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
2. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 5.2
3. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบในใบงานที่ 5.2

5. แหล่งการเรียนรู้ เอกสารประกอบการสอนที่ 5 หนังสือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้น ม.5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมิน
1. สังเกตจากการตอบคำถาม		
2. ตรวจผลงานจากการทำใบงาน	ใบงาน	ทำถูกอย่างน้อย 80%
3. ทำแบบทดสอบ	แบบทดสอบ	ทำถูกอย่างน้อย 60%

7. บันทึกหลังสอน

....

....

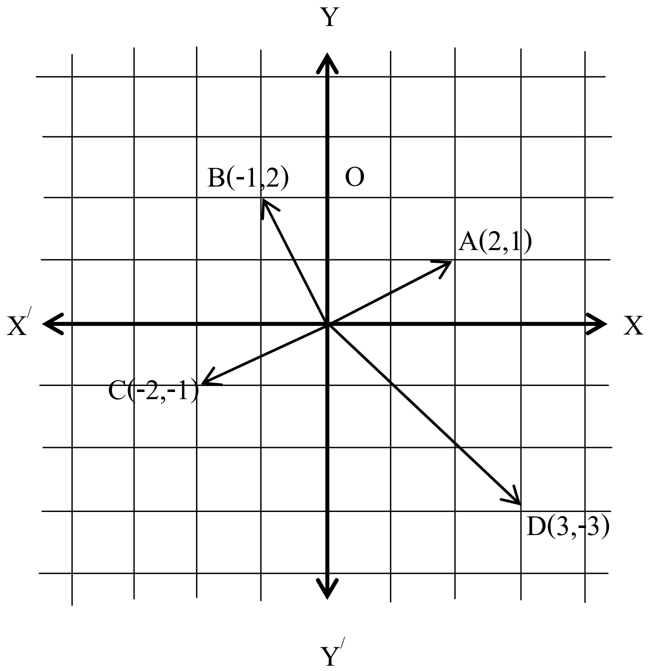
8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....

....

เอกสารประกอบการสอนที่ 5

เวกเตอร์ในตำแหน่งมาตรฐาน คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดของระบบแกนมุมฉาก



จากรูป $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ และ $\overrightarrow{OD}$ เป็นเวกเตอร์ในตำแหน่งมาตรฐาน เพราะต่างเป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด O(0,0)

$\overrightarrow{OA}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ขนาด 2 หน่วย ไปตามแกน X ทางบวกกับเวกเตอร์ขนาด 1 หน่วย ไปตามแกน Y ทางบวก

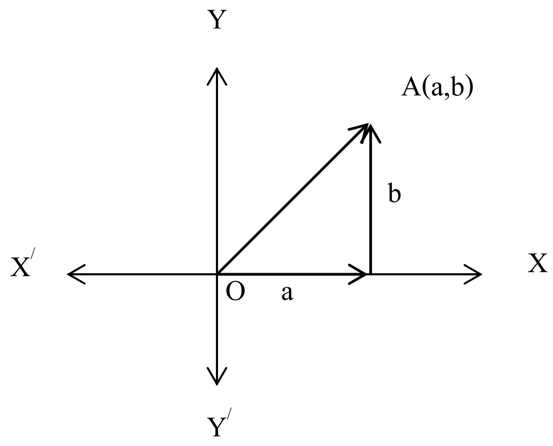
$\overrightarrow{OB}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ขนาด 1 หน่วย ไปตามแกน X ทางลบกับเวกเตอร์ขนาด 2 หน่วย ไปตามแกน Y ทางบวก

$\overrightarrow{OC}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ขนาด 2 หน่วย ไปตามแกน X ทางลบกับเวกเตอร์ขนาด 1 หน่วย ไปตามแกน Y ทางลบ

$\overrightarrow{OD}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ขนาด 3 หน่วย ไปตามแกน X ทางบวกกับเวกเตอร์ขนาด 3 หน่วย ไปตามแกน Y ทางลบ

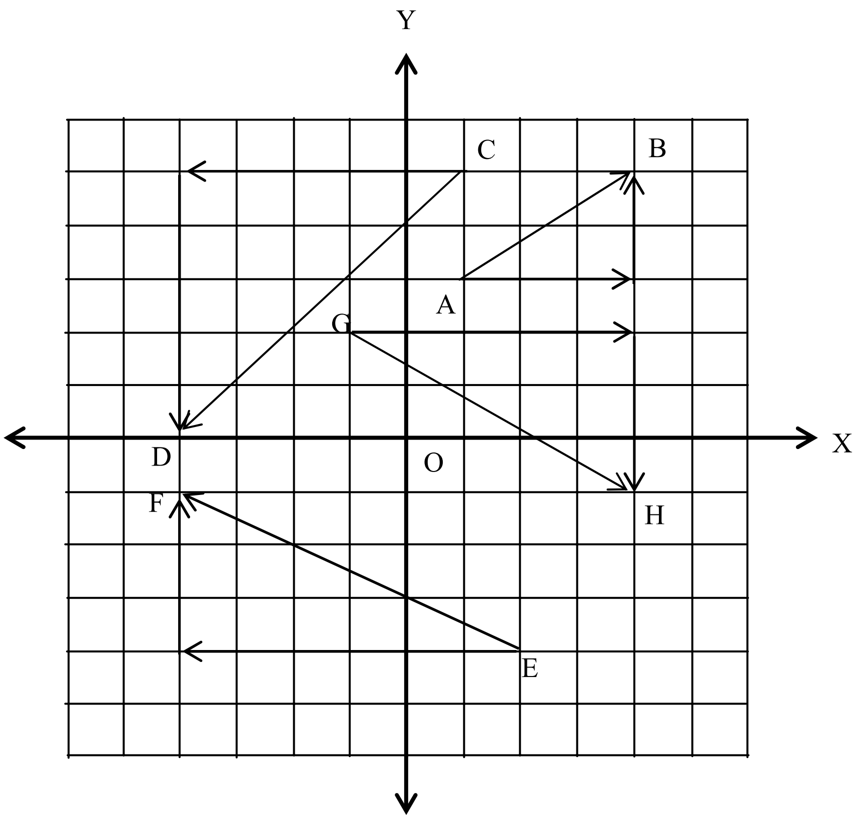
บทนิยาม เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และมีจุดสิ้นสุดที่จุด A(a, b) จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}$$



หมายเหตุ $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a \\ o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

การเขียนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากไม่จำเป็นจะต้องมีจุดเริ่มต้นที่จุด (0,0) เสมอไป และเช่นเดียวกัน เมื่อกำหนดเวกเตอร์ในรูปคู่อันดับใดก็ตามสามารถเขียนเวกเตอร์ในระนาบของระบบแกนมุมฉากแทนเวกเตอร์นั้นๆ ได้เสมอ



จากรูป

$\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

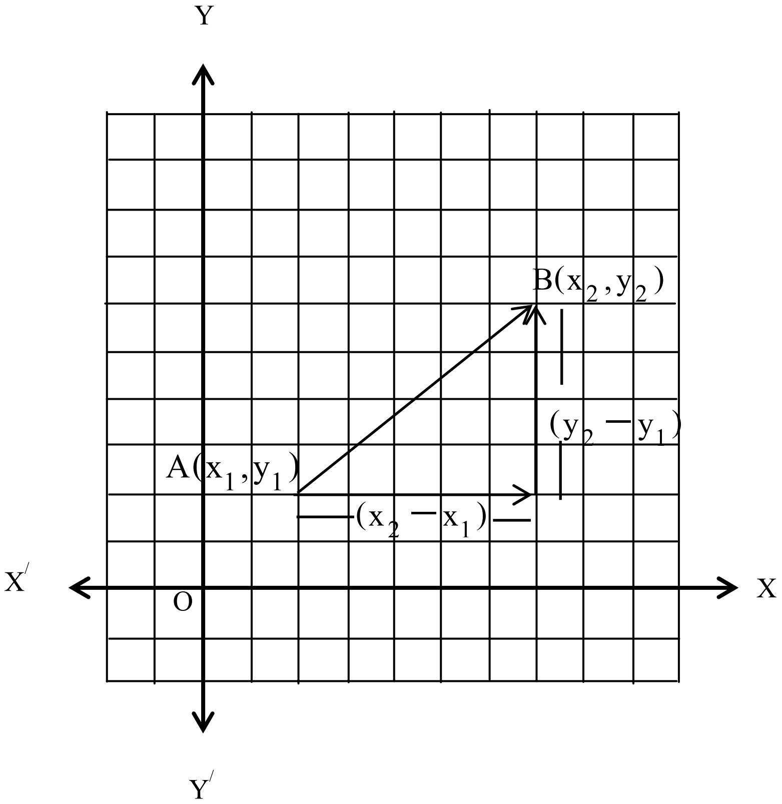
$\overrightarrow{EF} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{GH} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

บทนิยาม $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

จากนิยาม ถ้า $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ จะได้ $x = 2$ และ $y = 3$

การเขียนเวกเตอร์ที่มีจุดตั้งต้นที่จุด $A(x_1, y_1)$ และ จุดสิ้นสุดอยู่ที่ $B(x_2, y_2)$



จากรูป ในกรณีทั่วไป ถ้า $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1,y_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2,y_2)$

จะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ และถ้า $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$

แล้วจะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 1 1. กำหนด A(2,3) และ B(5,6)

วิธีทำ $\overline{AB} = \begin{bmatrix} 5-2 \\ 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. กำหนด C(-2, 3) และ D(1,4)

วิธีทำ $\overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. กำหนด A(2,3) และ $\overline{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหาจุด B

วิธีทำ ให้จุด B(x,y)

$\therefore \quad \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad x-2 = 4 \quad , \quad x = 6$

$y-3 = 5 \quad , \quad y = 8$

ดังนั้น จุด B มีพิกัดเป็น (6 , 8)

4. กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ B(2,3) จงหาจุด A

วิธีทำ ให้จุด A(x,y)

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \; 2-x = -4 \; , \; x = 6$

$3-y = 5 \; , \; y = -2$

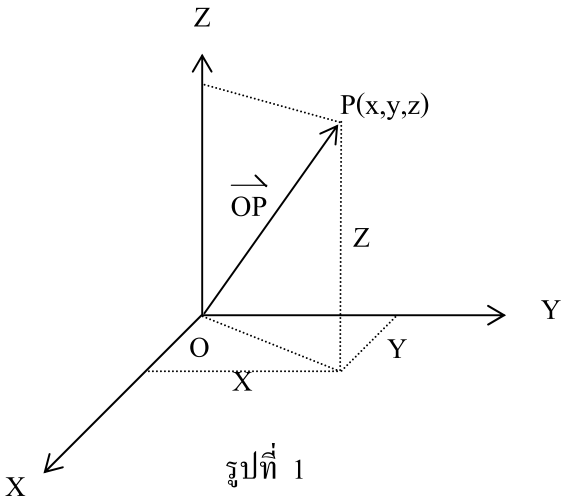
ดังนั้นจุด A มีพิกัดเป็น (- 6,2)

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จากที่กล่าวมาแล้วว่าเวกเตอร์ในสองมิติ กำหนดได้ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ซึ่งแทนเวกเตอร์เชิงเรขาคณิตที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ (a, b) หรือมีจุดเริ่มต้นที่ (x, y) และมีจุดสิ้นสุดที่ $(x + a, y + b)$ ต่อไปเราจะขยายแนวคิดจากเวกเตอร์ในสองมิติ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ โดยใช้ระบบพิกัดฉากสามมิติที่ได้ศึกษาแล้วเป็นพื้นฐาน

บทนิยาม กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริง เรียก $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ว่า เวกเตอร์ปริภูมิสามมิติ หรือ เวกเตอร์ในสามมิติ หรือเรียกสั้นๆ ว่า เวกเตอร์

ในทางเรขาคณิตเราแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ด้วยส่วนของเส้นตรงที่กำหนดทิศทางซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด (O) และมีจุดสิ้นสุดที่ $P(x, y, z)$ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดต่อไปนี้

ก. P(3,1,-2)

ข. Q(0, -2 ,5)

วิธีทำ โดยอาศัยบทนิยาม จะได้

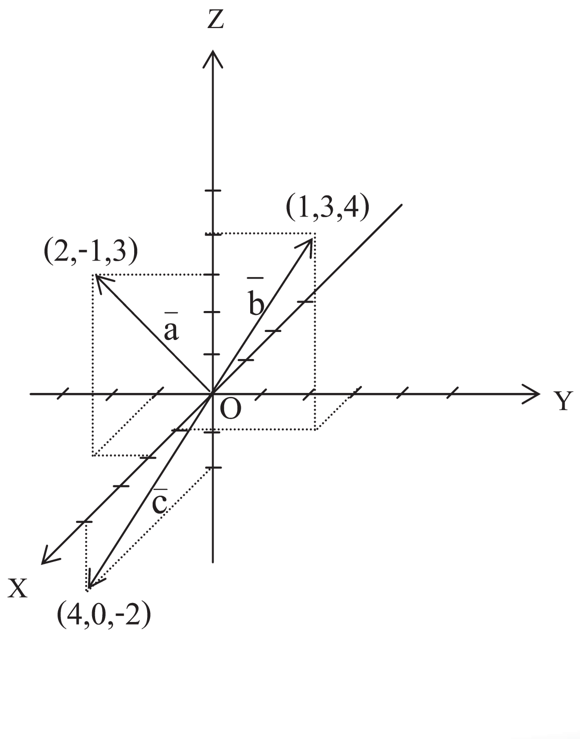
ก) $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

ข) $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในระบบพิกัดฉาก

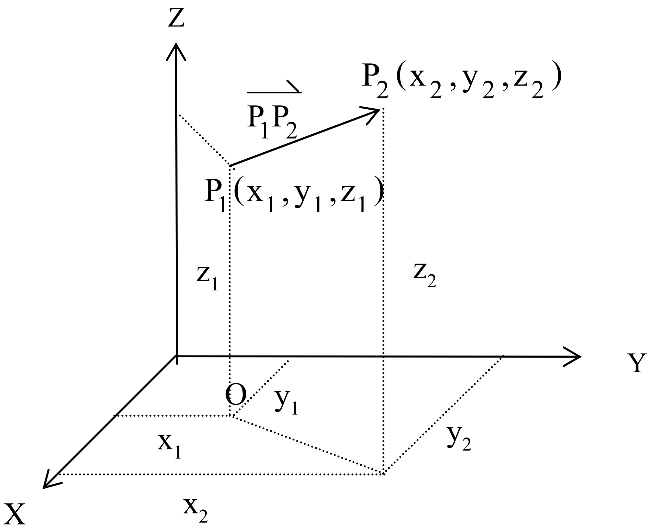
$\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\bar{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ



ในบทนิยามข้างต้น ได้กล่าวถึงการกำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด ส่วนการกำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากที่มีจุดเริ่มต้นที่ไม่ใช่จุดกำเนิด สามารถกำหนดได้ดังนี้

ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง มีจุดเริ่มต้นที่ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ซึ่งแทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$ หมายถึง เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ P (3,4,-4) เป็นจุดเริ่มต้น และ Q(5,0,7)เป็นจุดสิ้นสุด จงหา $\overrightarrow{PQ}$

วิธีทำ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 0-4 \\ 7-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}$

สำหรับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และสามมิติ การเท่ากับของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ นิเสธของเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จะเป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d$, $b = e$ และ $c = f$
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	เวกเตอร์ศูนย์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	เวกเตอร์ศูนย์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริง	$\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\alpha = -\frac{1}{2}$

จงหา $\bar{a} + 2\bar{b}$, $3\bar{a} - \bar{b}$, $-\bar{a}$, $-\frac{1}{2}\bar{a}$

วิธีทำ

$$\bar{a} + 2\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\times 3 \\ 2\times 4 \\ 2\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 \\ 2+8 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$3\bar{a} - \bar{b} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 1 \\ 3\times 2 \\ 3\times 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 \\ 6-4 \\ 12-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\times 1 \\ (-1)\times 2 \\ (-1)\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\bar{a} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2})\times 1 \\ (-\frac{1}{2})\times 2 \\ (-\frac{1}{2})\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ใบงานที่ 5.1

1. จงหา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ เมื่อกำหนด A และ B ดังต่อไปนี้

1) A(-2,1) , B(3,2)

....

....

....

2) A(-1,2) , B(-2,-3)

....

....

....

3) A(-2,-8) , B(-1,2)

....

....

....

4) A(1,-1,2) , B(2,-1,-1)

....

....

....

5) A(-2,5,3) , B(-1,5,3)

....

....

....

6) A(1,1,-1) , B(2,0,-1)

....

....

....

2. กำหนด R(2,-3) และ $\overrightarrow{RS} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหาจุด S

....

....

....

....

3. กำหนด Q(-1,-3) และ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ จงหาจุด P

....

....

....

....

4. กำหนด A(-1,2,-3) และ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหาจุด B

....

....

....

....

5. กำหนด Q(-2,-3,3) และ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ จงหาจุด P

....

....

....

....

ใบงานที่ 5.2

1. จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$ =.................. 2) $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ =..................

3) $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ =.................. 4) $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ =..................

5) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ =.................. 6) $\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$ =..................

2. กำหนดให้ A(1,2) , B(3,5) , C(-2,4) และ D(-3,3) จงหา $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

....

....

....

....

3. กำหนด $\bar{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\bar{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\bar{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\bar{f} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

1) $2\bar{a} + 3\bar{b}$ =..

....

....

2) $3\bar{a} - 4\bar{b} - 2\bar{c}$ =..

....

....

3) นิเสธของ $\bar{c} - 3\bar{b} - 2\bar{a}$ =..

....

....

4) $3\bar{e} - 4\bar{f}$ =..

....

....

5) $-3\bar{f} - 2\bar{e}$ =..

....

....

6) นิเสธของ $4\bar{e} + 3\bar{f}$ =..

....

....

4. กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, $\bar{w} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ

จงแสดงว่า $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

....

....

....

5. เวกเตอร์คู่ใดขนานกัน

1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

....

....

2) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \bar{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{e} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \bar{f} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง **ขนาดของเวกเตอร์ในสองมิติ และสามมิติ** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถเขียนเวกเตอร์ในรูปผลรวมเชิงเส้นได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาขนาดของเวกเตอร์ในสองมิติ และสามมิติได้
2. นักเรียนสามารถหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสองมิติ และสามมิติได้
3. นักเรียนสามารถเขียนเวกเตอร์ในรูปผลรวมเชิงเส้นได้
4. นักเรียนสามารถสร้างเวกเตอร์ให้เท่ากับขนาดที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก

1. $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
3. เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย เรียกว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
4. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\bar{u}$ คือ $\pm\frac{1}{|\bar{u}|}\bar{u}$
5. $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$
6. $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

3. เนื้อหาสาระ

1. ขนาดของเวกเตอร์
2. เวกเตอร์หน่วย
3. การเขียนเวกเตอร์ในรูปผลรวมเชิงเส้น
4. การสร้างเวกเตอร์ให้มีขนาดเท่ากับที่กำหนดให้

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ครูทบทวนเรื่องการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด ในระบบแกนมุมฉากสองมิติ และระบบพิกัดฉากสามมิติ ดังเอกสารประกอบการสอนที่ 1

2. ครูอธิบายวิธีการหาขนาดของเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากสองมิติ และสามมิติ โดยอาศัยความรู้เรื่องการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด

3. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการสอนที่ 6 อีกครั้งหนึ่ง

4. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 6.1

5. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบในใบงานที่ 6.1

ชั่วโมงที่ 2

1. ครูและนักเรียนทบทวนการแก้สมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร และ 3 ตัวแปร โดยใช้กฎของคราเมอร์

2. ครูอธิบายวิธีการหาค่า m , n จากสมการ $m\,\bar{u} + n\,\bar{v} = \bar{w}$

3. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 6.2 ข้อ 1

4. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบในใบงานที่ 6.2 ข้อ 1

ชั่วโมงที่ 3

1. ครูสอนเกี่ยวกับเวกเตอร์ 1 หน่วย ในระบบแกนมุมฉากสองมิติ และระบบแกนมุมฉากสามมิติ และการเขียน $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ในรูปผลรวมเชิงเส้น คือ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$ และ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

2. ครูอธิบายวิธีสร้างเวกเตอร์ที่กำหนดให้ ให้มีขนาด 1 หน่วย หรือมากกว่า 1 หน่วย ให้มีทิศทางขนานตรงข้าม ทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ โดยครูยกตัวอย่างประกอบ

3. ให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอนที่ 6 เพิ่มเติม

4. นักเรียนทำใบงานที่ 6.2 ข้อ 2 , 3 , 4

5. นักเรียนช่วยกันตรวจผลงาน พร้อมทั้งครูอธิบายเพิ่มเติม

5. แหล่งการเรียนรู้

เอกสารประกอบการสอนที่ 6 และหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้น ม.5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมิน
1. สังเกตจากการตอบคำถาม		
2. ตรวจผลงานจากการทำใบงาน	ใบงาน	ทำถูกต้องอย่างน้อย 80%
3. ทำแบบทดสอบ	แบบทดสอบ	ทำถูกต้องอย่างน้อย 60%

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....

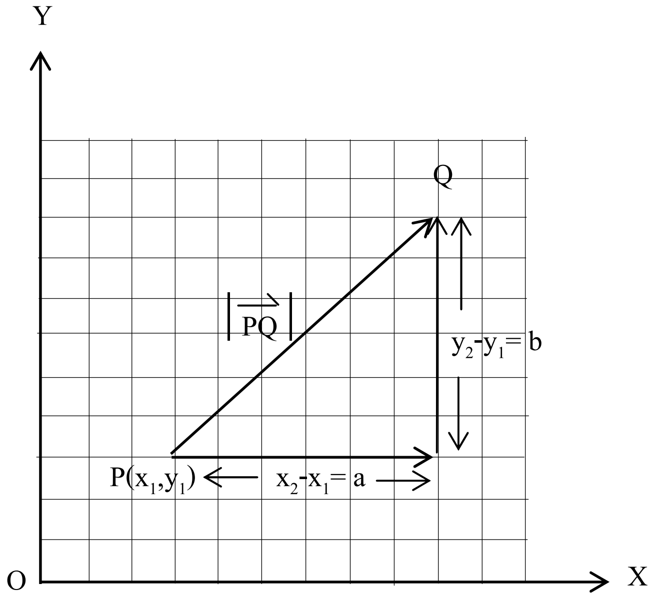
....

....

....

เอกสารประกอบการสอนที่ 6

ขนาดของเวกเตอร์ในสองมิติ



รูปที่ 1

ถ้า $\overline{PQ}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ P มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) และ Q มีพิกัดเป็น (x_2, y_2) ดังรูป 1

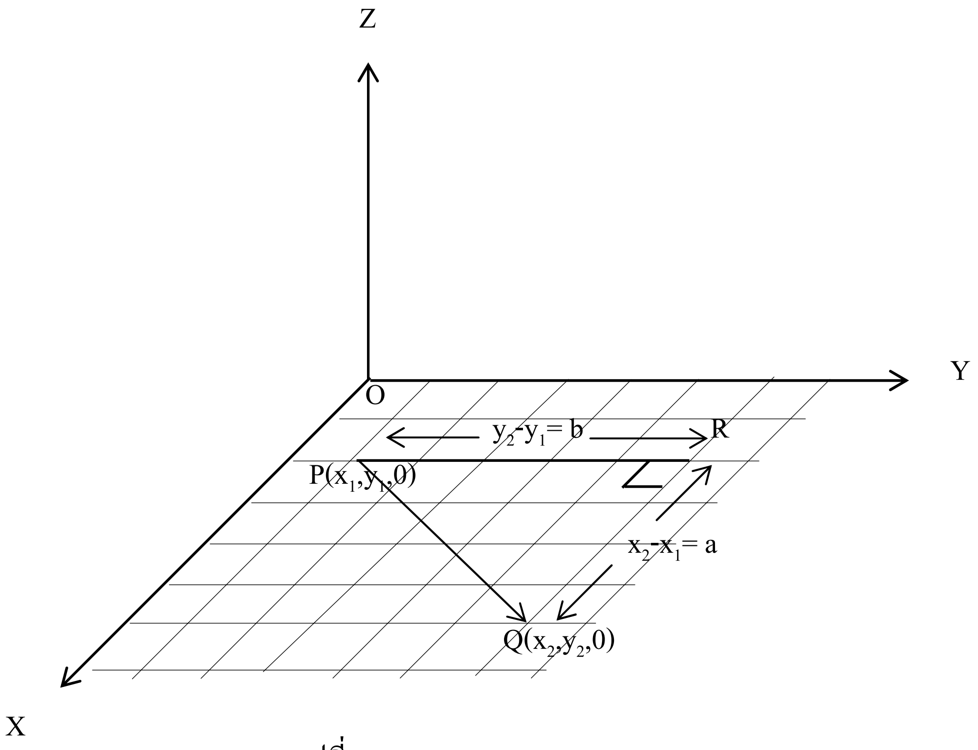
จะได้ $\overline{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ และ $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$

แล้วจะได้ $\overline{PQ} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และขนาดของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P และมีจุดสิ้นสุดที่ Q เขียนได้เป็น

$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$

การหาขนาดของเวกเตอร์ในสามมิติ



รูปที่ 2

พิจารณารูปที่ 2 ระบบแกนมุมฉากสามมิติ เฉพาะในระนาบ X, Y ให้จุด P มีพิกัดเป็น $(x_1,y_1,0)$ และ Q มีพิกัดเป็น $(x_2,y_2,0)$ ดังนั้น

$\left|\overline{QR}\right| = x_2 - x_1 = a$ และ $\left|\overline{PQ}\right| = y_2 - y_1 = b$ จะได้

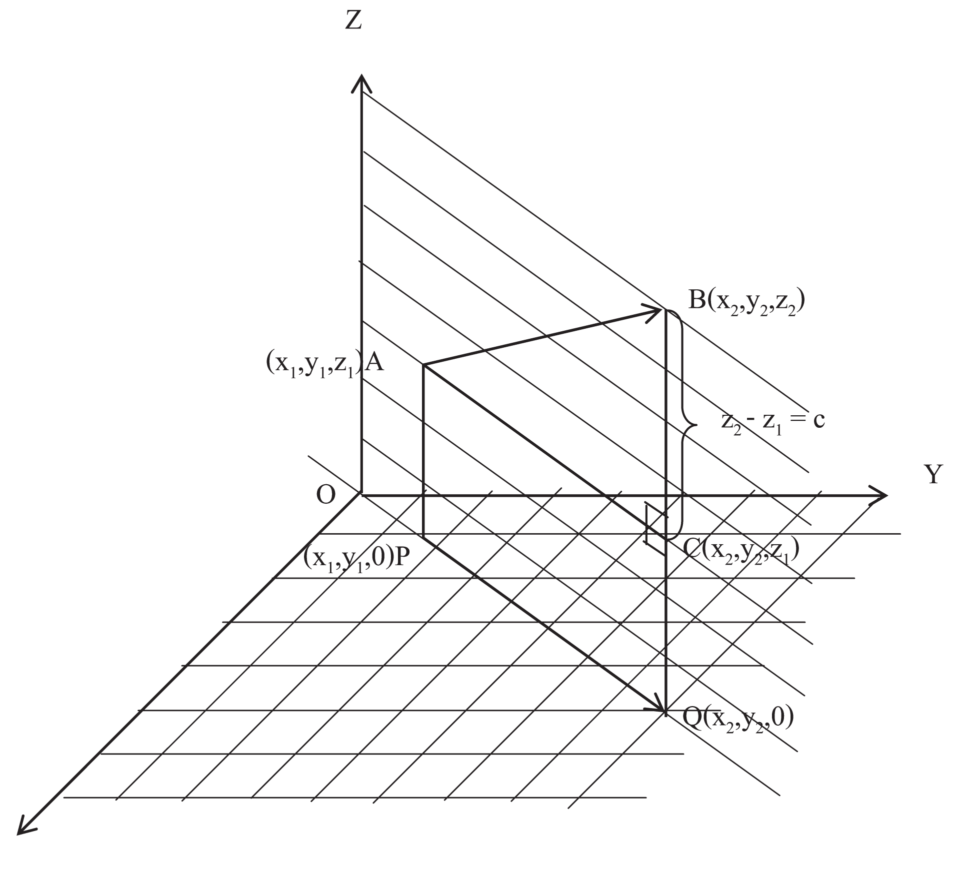
$\overline{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ

สามเหลี่ยม PQR เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม R เป็นมุมฉาก

จากทฤษฎีพิธาโกรัส จะได้ว่า

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



จากรูปที่ 2 ให้ $A(x_1,y_1,z_1)$ และ $B(x_2,y_2,z_2)$ ลากเส้น AC ขนานกับ PQ ตัด BQ ที่จุด C ทำให้ $\overline{PQ} = \overline{AC}$ และทำให้ □ ACQP เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทำให้ $\overline{BC} = z_2 - z_1 = c$ และ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่มีมุม ACB เป็นมุมฉาก ดังรูปที่ 3 ดังนั้น จากทฤษฎีพิธากอรัส จะได้ว่า

$$\left|\overline{AB}\right|^2 = \left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2$$

$$= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\left|\overline{AB}\right|^2 = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

(ก) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(ข) $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ P มีพิกัดเป็น (2, 1 , 0) และ Q มีพิกัดเป็น (-1, 1, 0)

วิธีทำ (ก) $\left|\bar{u}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

(ข) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \begin{bmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-3^2 + 0^2 + 0^2)} = \sqrt{9} = 3$

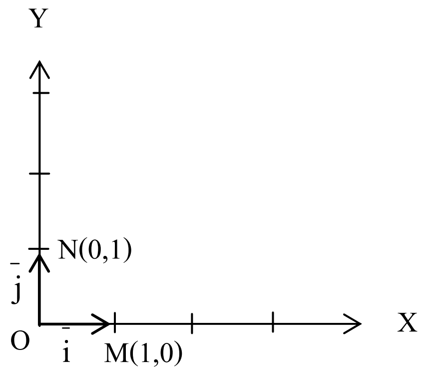
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน สองมิติ และสามมิติ

บทนิยาม เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยเรียกว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)

เนื่องจากเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใดๆ จะมีขนาดเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ดังนั้นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ในสามมิติ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย และที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใดๆ

ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

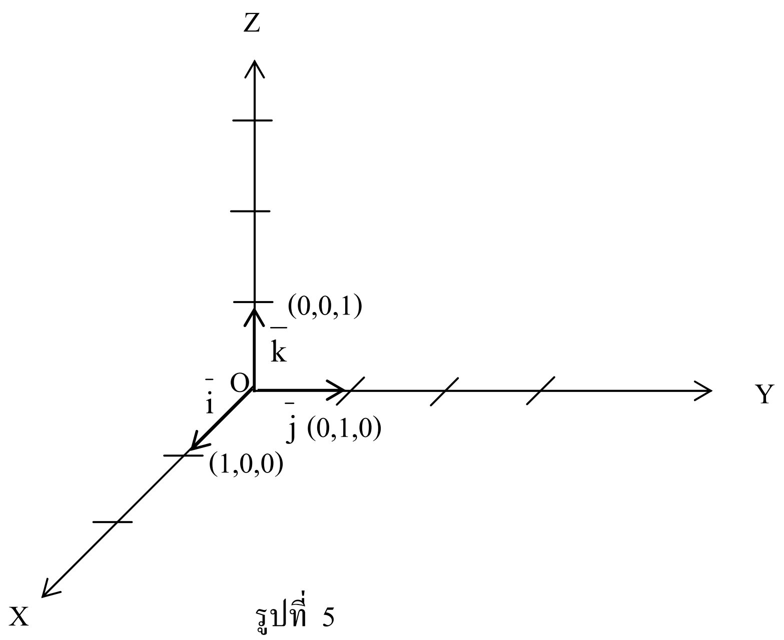


รูปที่ 4

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสองมิติที่สำคัญ คือ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ และเพื่อความสะดวกจึงแทน $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{i}$ และแทน $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$ ดังรูปที่ 4

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติที่สำคัญคือ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ โดยแทน $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{i}$

แทน $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$ และแทน $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{k}$ ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5

ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในสองมิติ เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\bar{u}$ ให้อยู่ในรูปของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ดังนี้

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$$

และในทำนองเดียวกัน ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ เราสามารถเขียน $\bar{u}$ ให้อยู่ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ดังนี้

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$$

หมายเหตุ 1. เราทราบว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ และเนื่องจาก

$$\left|\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$ ดังนั้น

$$\left|a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

2. เราเรียกการเขียน $\bar{u}$ ในรูป $a\bar{i} + b\bar{j}$ เป็นเวกเตอร์สองมิติ หรือ $a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติว่า **การเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้น**

ตัวอย่างที่ 2 $\overrightarrow{P_1P_2}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $P_1(1, 2, 0)$ และ จุดปลายที่ $P_2(-2,3,1)$ จงหา เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overline{P_1P_2}$ ในรูป $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$

วิธีทำ

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(-3)^2+1^2+1^2} = \sqrt{9+1+1} \quad \sqrt{11}$$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{11}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ คือ $-\frac{3}{\sqrt{11}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{k}$

การสร้างเวกเตอร์ให้เท่ากับขนาดที่กำหนดให้

1. เวกเตอร์ที่มีขนาด a หน่วย ที่ขนานกับ $\bar{u}$ คือ $\pm\frac{a}{|\bar{u}|}\bar{u}$

2. เวกเตอร์ที่มีขนาด a หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{a}{|\bar{u}|}\bar{u}$

3. เวกเตอร์ที่มีขนาด a หน่วย ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ คือ $-\frac{a}{|\bar{u}|}\bar{u}$

4. ถ้า $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ เป็นเวกเตอร์สองมิติแล้ว

   เวกเตอร์ที่มีขนาด a หน่วย และตั้งฉากกับ $\bar{u}$ คือ $\pm\frac{a}{|\bar{u}|}(-b\bar{i}+a\bar{j})$

ใบงานที่ 6.1

1. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติและเขียนในรูป $\bar{i}, \bar{j}$ และ $\bar{k}$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เมื่อ O เป็นจุดกำเนิด

1) $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ =..

2) $\overrightarrow{OS} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ =.....................................

3) $\overrightarrow{AB}$ โดยที่ A(1, 2) และ B(-4, 1)

....

....

....

4) $\overrightarrow{CD}$ โดยที่ C(-3, 4) และ D(1, -2)

....

....

....

5) $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ P(1, -1 , 2) และ Q(3, 2, 6)

....

....

....

6) $\overrightarrow{MN}$ โดยที่ M(0,1, 2) และ N(-1 ,-4, 1)

....

....

....

2. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,...

2) $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$,..

3) $\bar{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, ...

4) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, ...

5) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ...

6) $\bar{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, ...

7) $\overrightarrow{AB}$ เมื่อพิกัดของ A และ B คือ (1,2) และ (5, 7) ตามลำดับ

....

....

....

....

8) $\overrightarrow{RS}$ เมื่อพิกัดของ R และ S คือ (7 ,4 ,1) และ (-1 ,3 , 5) ตามลำดับ

....

....

....

....

....

ใบงานที่ 6.2

1. จงแก้สมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}$

....

....

....

....

2) $x\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

....

....

....

....

3) $x\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

....

2. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ โดยเขียนในรูปของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ หรือเขียนในรูป $\bar{i}, \bar{j}$ และ $\bar{k}$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$,..

....

2) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$,..

....

3. จงหาเวกเตอร์ขนาด 3 หน่วย ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u} = 2\bar{i} - \sqrt{12}\,\bar{j}$

....

....

4. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับเวกเตอร์ $\bar{u} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$

....

....

5. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 10 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\bar{u} = \bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$

....

....

6. ให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{v} = -5\bar{i} - \bar{j}$ จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด $\bar{u} + \bar{v}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u} - \bar{v}$

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง **โคไซน์กำหนดทิศทาง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนมีความเข้าใจโคไซน์ แสดงทิศทางของเวกเตอร์

1. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาโคไซน์กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ได้

2. แนวความคิดหลัก

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ เมื่อ

1. $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ซึ่ง $|\bar{a}| \neq 0$ เทียบกับแกน X , Y , Z ตามลำดับ คือ

จำนวนสามจำนวนซึ่งเรียงตามลำดับดังนี้ $\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}$

2. เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะมีทิศทางเดียวกัน ก็ต่อเมื่อมีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงข้ามกันก็ต่อเมื่อโคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

3. เนื้อหาสาระ

โคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่ขนานกัน โคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน และทิศทางตรงข้ามกัน

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ครูทบทวนเรื่องการหาขนาดของเวกเตอร์

2. ครูอธิบายวิธีหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ซึ่งใช้เฉพาะเวกเตอร์ในพิกัดฉากสามมิติเท่านั้น พร้อมทั้งให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอนที่ 7 เพิ่มเติมด้วย

3. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 7 ข้อ 1 , 2

ชั่วโมงที่ 2

1. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง
2. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 7 ข้อ 3
3. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบในใบงานที่ 7 ข้อ 3

5. แหล่งการเรียนรู้

เอกสารประกอบการสอนที่ 7 และหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 1 ชั้น ม.5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมิน
1. สังเกตจากการตอบคำถาม		
2. ตรวจผลงานจากการทำใบงาน	ใบงาน	ทำถูกต้องอย่างน้อย 60%
3. ทำแบบทดสอบ	แบบทดสอบ	ทำถูกต้องอย่างน้อย 80%

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....

....

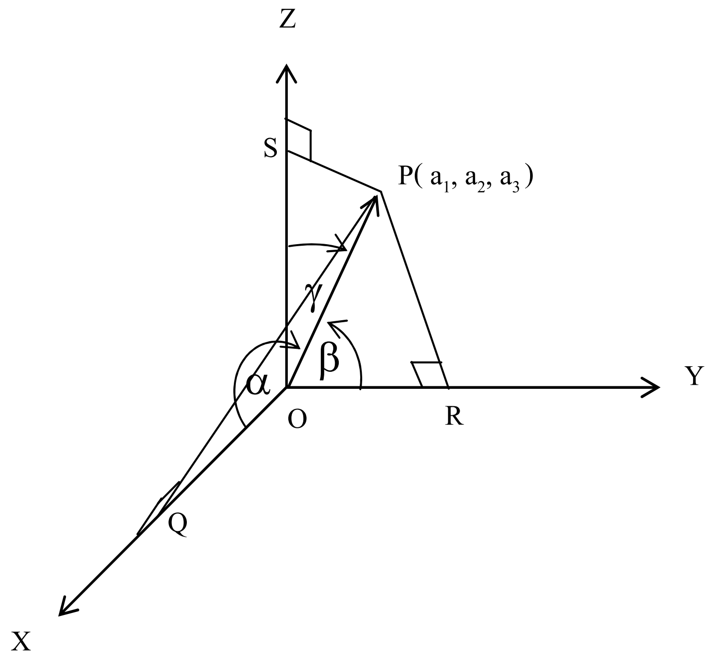
....

....

เอกสารประกอบการสอนที่ 7

โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines)

การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์นั้น นอกจากกำหนดด้วยพิกัดของเวกเตอร์แล้วยังสามารถกำหนดด้วยมุมที่เวกเตอร์ทำกับแกนพิกัดทั้งสามดังนี้



กำหนดจุด $P(a_1, a_2, a_3)$ จะได้ $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ กำหนด $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เป็นมุมที่วัดจากแกนพิกัดด้านบวกทั้งสามตามลำดับไปยัง $\overrightarrow{OP}$ จะได้

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \frac{a_1}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{OR}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \frac{a_2}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{OS}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \frac{a_3}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}$$

หมายเหตุ ในที่นี้ OQ , OR , OS หมายถึง ระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน X , Y , Z

มุม α , β , γ คือมุมที่ $\overrightarrow{OP}$ ทำกับแกน X , Y , Z ทางด้านบวก ตามลำดับเรียกมุมดังกล่าวว่า มุมกำหนดทิศทาง (direction angle) ของ $\overrightarrow{OP}$ และเรียก $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ ว่า โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosine) ของ $\overrightarrow{OP}$ เราสามารถนิยาม โคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ใดๆ ได้ดังนี้

บทนิยาม **โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosine) ของ $\bar{a}$ คือ

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ ซึ่ง } |\bar{a}| \neq 0 \text{ เทียบกับแกน X , Y , Z ตามลำดับ คือ}$$

จำนวนสามจำนวนเรียงตามลำดับ ดังนี้ $\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$

วิธีทำ $|\bar{a}| = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ คือ $\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P(0 , 3 , 5) และจุดสิ้นสุดที่ Q(1 , 5 , 2)

วิธีทำ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 5-3 \\ 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\therefore$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overline{PQ}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$

บทนิยาม	เวกเตอร์สองเวกเตอร์ จะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อมีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงข้ามก็ต่อเมื่อโคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

ตัวอย่างที่ 3 จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้คู่ใดขนานกัน

ก) เวเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P (1 , 2 , 3) และจุดสิ้นสุดที่ Q(2 , -3 , 5)

ข) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$

ค) เวกเตอร์ $\overrightarrow{OR}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และจุดสิ้นสุดที่ R(-3 , 15 , - 6)

วิธีทำ ก) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ -3-2 \\ 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2+(-5)^2+2^2} = \sqrt{1+25+4} = \sqrt{30}$

$\therefore$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}$

ข) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{2^2+(-10)^2+4^2} = \sqrt{4+100+16} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$

$\therefore$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ คือ $\frac{2}{2\sqrt{30}}, \frac{-10}{2\sqrt{30}}, \frac{4}{2\sqrt{30}}$

หรือ $\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}$

ค) $\overrightarrow{OR} = \begin{bmatrix} -3-0 \\ 15-0 \\ -6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}$

$\left|\overrightarrow{OR}\right| = \sqrt{(-3)^2+15^2+(-6)^2} = \sqrt{9+225+36} = \sqrt{270} = 3\sqrt{30}$

$\therefore$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{OR}$ คือ $\frac{-3}{3\sqrt{30}}, \frac{15}{3\sqrt{30}}, \frac{-6}{3\sqrt{30}}$

หรือ $\frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}$

จะเห็นว่า $\overrightarrow{PQ}$, $\bar{a}$ และ $\overrightarrow{OR}$ ต่างก็ขนานกัน โดยที่ $\overrightarrow{PQ}$ และ $\bar{a}$ มีทิศทางเดียวกัน แต่ $\overrightarrow{PQ}$ กับ $\overrightarrow{OR}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

สำหรับเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากสองมิติ ไม่ต้องใช้โคไซน์แสดงทิศทางเพื่อตรวจสอบเวกเตอร์คู่ใดขนานกัน หรือมีทิศทางตรงข้ามกัน ให้ทำดังนี้

กำหนด $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์โดยที่ a_1, b_1, a_2, b_2 ไม่เท่า 0

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ขนานกับ $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1b_2 = a_2b_1$

ถ้า a_1 มีเครื่องหมายเหมือนกับ b_1 แสดงว่ามีทิศทางเดียวกัน

ถ้า a_1 มีเครื่องหมายต่างกับ b_1 แสดงว่ามีทิศทางตรงข้ามกัน

ใบงานที่ 7

1. จงหาเวกเตอร์พร้อมทั้งบอกขนาดและโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ซึ่งมีจุดเริ่มต้น และมีจุดสิ้นสุดดังต่อไปนี้

   1) จุดเริ่มต้น P(2, 5, 3) จุดสิ้นสุด Q(3, 5, -1)

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   2) จุดเริ่มต้น R(-1, 5, -2) จุดสิ้นสุด S(2, 4, 7)

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   3) จุดเริ่มต้น T(-3, 1, 0) จุดสิ้นสุด V(4, 2, -3)

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

   1) $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P(1 , 4, 3) และจุดสิ้นสุดที่ Q(-2, 0, 1)

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   2) จุดเริ่มต้น P(2, 5, 3) จุดสิ้นสุด Q(3, 5, -1)

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3) จุดเริ่มต้น R(-1, 4, -2) จุดสิ้นสุด S(2, -4, 7)

....

....

....

....

....

4) จุดเริ่มต้น T(-3, 1, 0) จุดสิ้นสุด Q(4, 2, 8)

....

....

....

....

....

3. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

1) เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P(1, 4, 3) และจุดสิ้นสุดที่ Q(-2,0,1)

2) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

3) เวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ จุดกำเนิด และจุดสิ้นสุดที่ P(5,0,2)

....

....

....

....

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง **ผลคูณเชิงสเกลาร์** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 4 ชั่วโมง ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษาปีที่ 2547

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความเข้าใจบทนิยามและสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาผลคูณเชิงสเกลาร์ได้
2. นักเรียนสามารถนำสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ไปใช้ได้
3. นักเรียนสามารถหามุมระหว่างเวกเตอร์ในระนาบได้

2. แนวความคิดหลัก

1. ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2$
2. ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2 + x_3y_3$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} \cdot \bar{v}$
3. สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

3. เนื้อหาสาระ

ผลคูณเชิงสเกลาร์ และสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ครูอธิบายวิธีการหาผลคูณเชิงสเกลาร์ พร้อมให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอนที่ 8 เพิ่มเติม
2. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 8.1 ข้อ 1 กับ ข้อ 3
3. ครูและนักเรียนช่วยกันพิสูจน์สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์ ข้อที่ 1.1-1.6 จากเอกสารประกอบการสอนที่ 8

ชั่วโมงที่ 2

1. ครูอธิบายวิธีการหามุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งเวกเตอร์ระบบแกนมุมฉากสองมิติ กับมุมระหว่างเวกเตอร์ระบบแกนมุมฉากสามมิติเพื่อหาสูตร $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

2. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 8.1 ข้อ 2 , 4 , 5

ชั่วโมงที่ 3

1. ครูอธิบายการหามุมระหว่างเวกเตอร์ ที่เป็นเวกเตอร์ใดๆ โดยไม่จำเป็นว่าเวกเตอร์นั้นเป็นเวกเตอร์ในพิกัดแกนมุมฉากหรือทราบเพียงขนาดของเวกเตอร์

2. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 8.2 ข้อ 1 - 5

ชั่วโมงที่ 4

1. ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้องของคาบที่ 3 โดยครูช่วยอธิบายเพิ่มเติม
2. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 8.2 ข้อ 6 - 8
3. ครูและนักเรียนตรวจสอบความถูกต้อง

5. แหล่งการเรียนรู้ เอกสารประกอบการสอนที่ 8 และหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้น ม.5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมิน
1. สังเกตจากการตอบคำถาม		
2. ตรวจผลงานจากการทำใบงาน	ใบงาน	ทำถูกต้องอย่างน้อย 60%
3. ทำแบบทดสอบ	แบบทดสอบ	ทำถูกต้องอย่างน้อย 80%

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....

....

....

เอกสารประกอบการสอนที่ 8

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product or Product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ หมายถึง ผลคูณของเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ซึ่งนิยามในสองมิติ และสามมิติ ได้ดังนี้

> **บทนิยาม** ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2$
>
> ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$
>
> ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}\cdot\bar{v}$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$ จงหา $\bar{u}\cdot\bar{v}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\bar{u}\cdot\bar{v} &= (2\bar{i} + 3\bar{j})\cdot(-3\bar{i} + 4\bar{j}) \\
&= (2)(-3) + (3)(4) \\
&= -6 + 12 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ จงหา $\bar{a}\cdot\bar{b}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\bar{a}\cdot\bar{b} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&= (4)(1) + (1)(-2) + (-2)(-3) \\
&= 4 - 2 + 6 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. ให้ $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสองมิติ หรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1.1 $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

1.2 $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

1.3 $a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v})$

1.4 $\bar{0} \cdot \bar{u} = 0$

1.5 $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$

1.6 $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$

$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$

2. ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่ง $0 \le \theta \le 180^{\circ}$ แล้ว $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

(มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึง มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนาน และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ทั้งสอง)

3. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่<u>เวกเตอร์ศูนย์</u> $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

1.1 พิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์ในสองมิติ

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

$\bar{v} \cdot \bar{u} = x_2x_1 + y_2y_1$

โดยสมบัติการสลับที่ของการคูณของจำนวนจริง

จะได้ $x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1$

ดังนั้น $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

การพิสูจน์ในกรณีเป็นเวกเตอร์สามมิติก็พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

1.5 พิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์ในสามมิติ

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

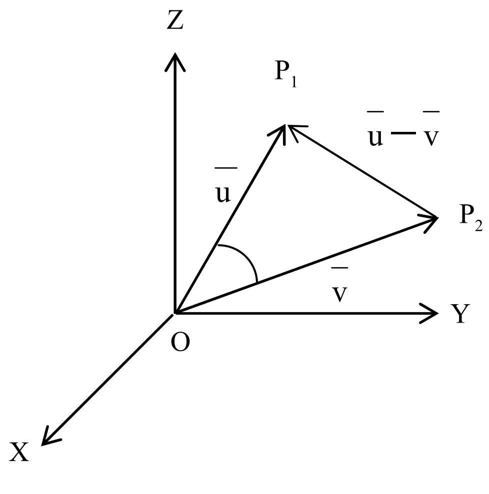
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= xx + yy + zz$$

$$= x^2 + y^2 + z^2$$

$$= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = \left|\bar{u}\right|^2$$

2. พิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์ในสามมิติ



พิสูจน์ กำหนด $\overrightarrow{OP_1} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{OP_2} = \bar{v}$

จะได้ $\overrightarrow{P_2P_1} = \bar{u} - \bar{v}$

โดยอาศัยกฎของโคไซน์จะได้ว่า

$$\left|\overline{P_2P_1}\right|^2 = \left|\overline{OP_1}\right|^2 + \left|\overline{OP_2}\right|^2 - 2\left|\overline{OP_1}\right|\left|\overline{OP_2}\right|\cos\theta$$

ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \bar{u} - \bar{v} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\cos\theta$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\cos\theta$$

ดังนั้น $\bar{u} \cdot \bar{v} = \left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\cos\theta$

3. พิสูจน์ ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ $0^{\circ} \le \theta \le 180^{\circ}$

เนื่องจาก $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

และ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta = 0$

แต่ $|\bar{u}| \neq 0$ และ $|\bar{v}| \neq 0$

ดังนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\cos\theta = 0$

ก็ต่อเมื่อ $\theta = 90^{\circ}$

ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$

ดังนั้น $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาโคไซน์ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เมื่อ

ก) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ข) $\bar{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ก) เนื่องจาก $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

ดังนั้น $\cos\theta = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$

แต่ $\bar{u}\cdot\bar{v} = (2)(2) + (3)(3) = 4 + 3 = 7$

และ $|\bar{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|\bar{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

ดังนั้น $\cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \dfrac{7}{\sqrt{65}} \approx 0.87$

ข) $|\bar{u}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

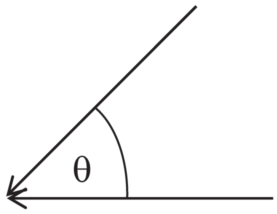
และ $|\bar{v}| = \sqrt{2^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+49+1} = \sqrt{54}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = (-4)(2) + (2)(7) + (4)(-1) = -8 + 14 - 4 = 2$

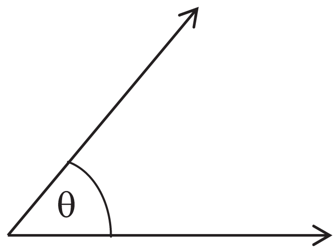
$\therefore \cos\theta = \dfrac{2}{6\sqrt{54}} \approx 0.045$

มุมระหว่างเวกเตอร์สองมิติ และสามมิติ

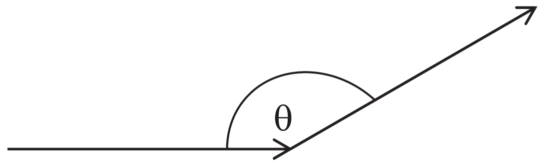
1. ลักษณะของมุมระหว่างเวกเตอร์



หรือ

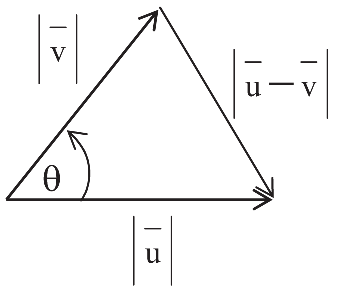


ลักษณะต่อไปนี้ ไม่ใช่ " มุมระหว่างเวกเตอร์"

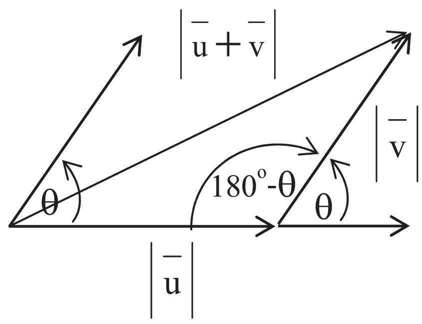


2. มุมระหว่างเวกเตอร์ จะมีค่าตั้งแต่ 0° ถึง 180° เท่านั้น

พิจารณา $\left|\bar{u}+\bar{v}\right|$



รูปที่ 1



รูปที่ 2

จากรูปที่ 1 , 2 อาศัยกฎของโคไซน์จะได้ว่า

$$\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2-2\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left|\bar{u}+\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2+2\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\cos(180^{\circ}-\theta)$$

$$\left|\bar{u}+\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2+2\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$(2)+(1)\ \left|\bar{u}+\bar{v}\right|^2+\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = 2\left|\bar{u}\right|^2+2\left|\bar{v}\right|^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$(2)-(1)\ \left|\bar{u}+\bar{v}\right|^2-\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = 4\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

จากเวกเตอร์แกนมุมฉากสองมิติ และสามมิติ มุมระหว่างเวกเตอร์ คือ

$\bar{u}\cdot\bar{v} = \left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\cos\theta$ แทนใน (1) , (2) , (4) จะได้สูตรใหม่ ดังนี้

$$\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2-2\bar{u}\cdot\bar{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left|\bar{u}+\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2+2\bar{u}\cdot\bar{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\left|\bar{u}+\bar{v}\right|^2-\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = 4\bar{u}\cdot\bar{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

สูตรข้างบนนี้จะใช้เมื่อทราบแต่ขนาดของเวกเตอร์ แต่ไม่ทราบว่าเวกเตอร์นั้นมีหน้าตาอย่างไร

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ โดยที่ $\left|\bar{u}\right| = 6$, $\left|\bar{v}\right| = 8$

$\left|\bar{u}-\bar{v}\right| = 2\sqrt{37}$ จงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

วิธีทำ สมมุติให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ดังนั้น

$$\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2-2\left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\cos\theta$$

$$(2\sqrt{37})^2 = 6^2+8^2-2\times 6\times 8\cos\theta$$

$$148 = 36 + 64 - 96\cos\theta$$

ดังนั้น $96\cos\theta = -48$

$$\cos\theta = -\frac{48}{96} = -\frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $0^{\circ} \le \theta \le 180^{\circ}$ ดังนั้น

$$\theta = 120^{\circ}$$

□

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบโดยที่ $|\bar{u}| = 10$, $|\bar{v}| = 5$ และ $|\bar{u}+\bar{v}| = 12$ จงหา $|\bar{u}-\bar{v}|$

วิธีทำ จากสูตร $|\bar{u}+\bar{v}|^2 + |\bar{u}-\bar{v}|^2 = 2|\bar{u}|^2 + 2|\bar{v}|^2$

$$12^2 + |\bar{u}-\bar{v}|^2 = 2\times10^2 + 2\times5^2$$

$$144 + |\bar{u}-\bar{v}|^2 = 200 + 50$$

$$|\bar{u}-\bar{v}|^2 = 250$$

ดังนั้น $|\bar{u}-\bar{v}| = 5\sqrt{10}$ □

ข้อควรจำสำหรับมุมระหว่างเวกเตอร์

(1) $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ ก็ต่อเมื่อ มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็นมุมฉาก
(2) $\bar{u}\cdot\bar{v} > 0$ ก็ต่อเมื่อ มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็นมุมแหลม
(3) $\bar{u}\cdot\bar{v} < 0$ ก็ต่อเมื่อ มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็นมุมป้าน

ใบงานที่ 8.1

1. จงหาค่าของ $\bar{u} \cdot \bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ดังต่อไปนี้

   1) $\bar{u} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j}$

   ……………………………………………………………………………………………………

   2) $\bar{u} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$ และ $\bar{v} = \bar{i}$

   ……………………………………………………………………………………………………

   3) $\bar{u} = -\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{v} = 3\bar{i} + 4\bar{k}$

   ……………………………………………………………………………………………………

   4) $\bar{u} = -\bar{i} - 4\bar{k}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j}$

   ……………………………………………………………………………………………………

2. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ต่อไปนี้

   1) $\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = 9\bar{i} + 6\bar{j}$

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   2) $\bar{u} = 3\bar{i} + \bar{j}$ และ $\bar{v} = -2\bar{i} + 6\bar{j}$

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   3) $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   4) $\bar{u} = \bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   ($\cos 85^{\circ} 20' = 0.0987$ และ $\cos 85^{\circ} 30' = 0.0958$)

3. กำหนดให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$

....

....

2) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}\cdot\bar{c})$

....

....

3) $\bar{b}\cdot(\bar{a}+\bar{c})$

....

....

4) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})$

....

....

4. เวกเตอร์ในข้อใดเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

1) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$,..

2) $\bar{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\bar{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$,..

3) $\bar{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$,..

4) $\bar{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$,..

ใบงานที่ 8.2

1. จงหาค่า m เมื่อกำหนดเวกเตอร์ $\bar{u} = (1-m)\bar{i}+2\bar{j}$ และ $\bar{v} = m\bar{i}+(m+2)\bar{i}$

1) เวกเตอร์ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$

....

....

....

....

2) เวกเตอร์ $\bar{u}$ มีขนาดเท่ากับ $\bar{v}$

....

....

....

....

2. ถ้า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$ แล้ว จงแสดงว่า

1) $\left|\bar{u}+\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2$

....

....

....

....

2) $\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2$

....

....

....

....

3. ถ้า $\left|\bar{u}\right| = 5$, $\left|\bar{v}\right| = 3$ และ $\left|\bar{u}+\bar{v}\right| = 4$ แล้ว $\left|\bar{u}-\bar{v}\right|$ มีค่าเท่าใด

....

....

....

....

4. กำหนดให้ $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีสมบัติ $|\bar{u}| = |\bar{w}|$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{v} + \bar{w}|$ ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีค่าเท่าใด

....

....

....

....

....

....

5. กำหนด $\bar{u} \cdot \bar{w} = 1$ และ $\bar{w}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ถ้า $\bar{u} = 4\bar{i} - 5\bar{j}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{j}$ จงหาเวกเตอร์ $\bar{w}$

....

....

....

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง **ผลคูณเชิงเวกเตอร์** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

มีความเข้าใจผลคูณเชิงเวกเตอร์ และสามารถนำไปใช้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้
2. นักเรียนสามารถหาค่าดีเทอร์มินันท์ได้

2. แนวความคิดหลัก

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ของ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{k}$

เขียนแทนด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ อ่านว่า **เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี**

3. เนื้อหาสาระ

1. ผลคูณเชิงเวกเตอร์
2. การนำผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

1. ครูทบทวนการหาดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์ โดยการกระจายโคแฟคเตอร์ แถวที่ 1
2. ครูอธิบายวิธีหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ซึ่งใช้เฉพาะเวกเตอร์แกนมุมฉากสามมิติเท่านั้น
3. ให้นักเรียนทำใบงานที่ 9.1 ข้อ 1, 3, 4

ชั่วโมงที่ 2

1. ครูอธิบายการหาค่าของ sine ของมุมระหว่าง $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$ และสมบัติของ $|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$
2. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบความรู้ที่ 9 เพิ่มเติม
3. นักเรียนทำใบงานที่ 9.1 ข้อ 2

ชั่วโมงที่ 3

1. ครูอธิบายการนำสมบัติของ $|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$ ไปใช้การหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน และปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. นักเรียนทำใบงานที่ 9.2

5. แหล่งการเรียนรู้

เอกสารประกอบการสอนที่ 9 และหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้น ม.5

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

วิธีวัดผล	เครื่องมือวัดผล	เกณฑ์การประเมิน
1. สังเกตจากการตอบคำถาม		
2. ตรวจผลงานจากการทำใบงาน	ใบงาน	ทำถูกต้องอย่างน้อย 60%
3. ทำแบบทดสอบ	แบบทดสอบ	ทำถูกต้องอย่างน้อย 80%

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ (ถ้ามี)

....
....
....
....

เอกสารประกอบการสอนที่ 9

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross Product or Vector Product)

ผลคูณอีกแบบหนึ่งที่ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ คือ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ซึ่งหาได้ในสามมิติเท่านั้น โดยนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม **ผลคูณเชิงเวกเตอร์** ของ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{k}$

เขียนแทนด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ อ่านว่า **เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี**

หมายเหตุ ในทางปฏิบัตินิยมใช้รูปของดีเทอร์มินันท์ เพื่อหาผลลัพธ์ของ $\bar{u} \times \bar{v}$ ดังนี้

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

โดยถือว่าการเขียน $\bar{u} \times \bar{v}$ ในรูปดังกล่าว เป็นวิธีการหรือเครื่องมือที่ช่วยให้จำรูปแบบได้ง่ายขึ้นและขอให้สังเกตว่าจำนวนจริงที่คูณ $\bar{i}$ หาได้โดยการตัวแถว และหลักที่มี $\bar{i}$ แล้วจึงหาดีเทอร์มินันท์ ดังนี้

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

สำหรับการหาจำนวนจริงที่คูณ $-\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$

วิธีทำ

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \bar{k}$$

$$= [(0)(4) - (3)(3)]\,\bar{i} - [(-1)(4) - (1)(3)]\,\bar{j} + [(-1)(3) - (1)(0)]\,\bar{k}$$

$$= (0 - 9)\,\bar{i} - (-4 - 3)\,\bar{j} + (-3 - 0)\,\bar{k}$$

$$= -9\bar{i} + 7\bar{j} - 3\bar{k}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$ เมื่อกำหนด

(1) $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i} - 5\bar{j}$

(2) $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + 5\bar{j}$

วิธีทำ (1) $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \bar{k}$

$= [(-3)(0) - (-5)(0)]\, \bar{i} - [(2)(0) - (1)(0)]\, \bar{j} + [(2)(-5) - (1)(-3)]\, \bar{k}$

$= (0 - 0)\, \bar{i} - (0 - 0)\, \bar{j} + (-10 + 3)\, \bar{k}$

$= -7\, \bar{k}$

วิธีทำ (2) $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \bar{k}$

$= [(0)(5) - (0)(3)]\, \bar{i} - [(2)(5) - (1)(3)]\, \bar{j} + [(2)(0) - (1)(0)]\, \bar{k}$

$= (0 - 0)\, \bar{i} - (10 - 3)\, \bar{j} + (0 - 0)\, \bar{k}$

$= -7\, \bar{j}$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. กำหนด $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

   1.1 $\bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$

   1.2 $(\bar{u} + \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \times \bar{w}) + (\bar{v} \times \bar{w})$

   1.3 $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u} \times \bar{w})$

   1.4 $\bar{u} \times (k\bar{v}) = k(\bar{u} \times \bar{v})$

   1.5 $(k\bar{u}) \times \bar{v} = k(\bar{u} \times \bar{v})$

   1.6 $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$

   1.7 $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$

2. ให้ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ จะได้ว่า $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

3. ถ้า $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$ จะได้ว่า $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$
   เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$, $0^{o} \leq \theta \leq 180^{0}$

4. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกัน
   จะได้ว่า $\bar{u} \times \bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

ในที่นี้จะพิสูจน์ ข้อ 1.1 , 1.5 และ 3 ที่เหลือจะละไว้เป็นแบบฝึกหัด

พิสูจน์ 1.1 ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\bar{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\bar{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\bar{k}$$

$$-(\bar{v}\times\bar{u}) = -\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= -[(a_3b_2-a_2b_3)\bar{i}-(a_3b_1-a_1b_3)\bar{j}+(a_2b_1-a_1b_2)\bar{k}]$$

$$= -(a_3b_2-a_2b_3)\bar{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\bar{j}-(a_2b_1-a_1b_2)\bar{k}$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)\bar{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\bar{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\bar{k}$$

$$\bar{u}\times\bar{v} = -(\bar{v}\times\bar{u})$$

จะเห็นว่า $\bar{u}\times\bar{v}$ และ $(\bar{v}\times\bar{u})$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม

พิสูจน์ 1.5 ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$k\bar{u} = k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$$

$$(k\bar{u})\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= [(ka_2)b_3-(ka_3)b_2]\bar{i}-[(ka_1)b_3-(ka_3)b_1]\bar{j}+[(ka_1)b_2-(ka_2)b_1]\bar{k}$$

$$= [k(a_2b_3)-k(a_3b_2)]\bar{i}-[k(a_1b_3)-k(a_3b_1)]\bar{j}+[k(a_1b_2)-k(a_2b_1)]\bar{k}$$

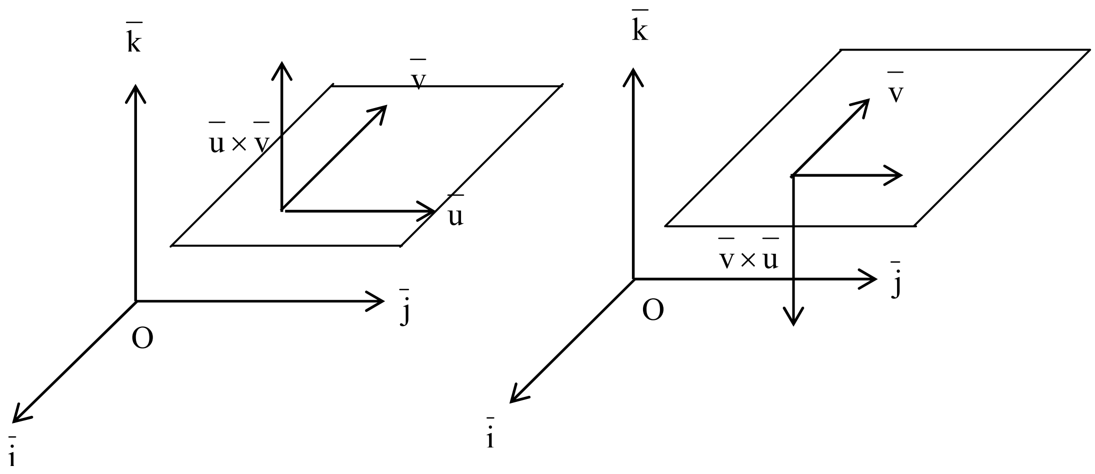
$$= k(a_2b_3-a_3b_2)\bar{i}-k(a_1b_3-a_3b_1)\bar{j}+k(a_1b_2-a_2b_1)\bar{k}$$

$$= k[(a_2b_3-a_3b_2)\bar{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\bar{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\bar{k}]$$

$$= k(\bar{u}\times\bar{v})$$

ดังนั้น $(k\bar{u})\times\bar{v} = k(\bar{u}\times\bar{v})$

ข้อสังเกต จากสมบัติข้อ 4 จะทำให้สรุปได้ว่า $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{u}\times\bar{v}$ จะตั้งฉากกัน ในที่นี้จะแสดงรูปของ $\bar{u}\times\bar{v}$ และ $\bar{v}\times\bar{u}$ โดยใช้ระนาบมือขวา ดังรูปที่1 (ก) หรือ (ข)



รูป ก รูปที่ 1 รูป ข

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\bar{a} = 2\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ จงหาค่าของ sine ของมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= [\,(-1)(1) - (1)(0)\,]\,\bar{i} - [\,(2)(1) - (2)(0)\,]\,\bar{j} + [\,(2)(1) - (2)(-1)\,]\,\bar{k}$$

$$= (-1-0)\,\bar{i} - (2-0)\,\bar{j} + (2+2)\,\bar{k}$$

$$= -\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(2)^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

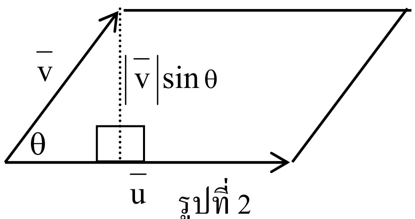
$$|\bar{b}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

จาก $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right| \left|\bar{b}\right| \sin\theta$

จะได้ $\sin\theta = \dfrac{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{30}} = \sqrt{0.7} = 0.84$$

การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



รูปที่ 2

จากรูปที่ 2 θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ คือส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้น $\left|\bar{u} \times \bar{v}\right| = \left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\right|\sin\theta$ เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านไม่ขนานกัน ยาว $\left|\bar{u}\right|$ และ $\left|\bar{v}\right|$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\overrightarrow{AB} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\overrightarrow{AD} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= [\,(3)(1) - (-2)(4)\,]\,\bar{i} - [\,(1)(1) - (3)(4)\,]\,\bar{j} + [\,(1)(-2) - (3)(3)\,]\,\bar{k}$$

$$= (3+8)\,\bar{i} - (1 - 12)\,\bar{j} + (-2-9)\,\bar{k} = 11\bar{i} + 11\bar{j} - 11\bar{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{11^2 + 11^2 + (-11)^2} = \sqrt{121 + 121 + 121} = \sqrt{363} = 11\sqrt{3}$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ $11\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A(1, -1, 3) , B(2, 3, -2) และ C(1 , 1, 5) ตามลำดับ

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3-(-1) \\ -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k} \quad \text{และ}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-1) \\ 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\bar{j}+2\bar{k}$$

ดังนั้น $$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

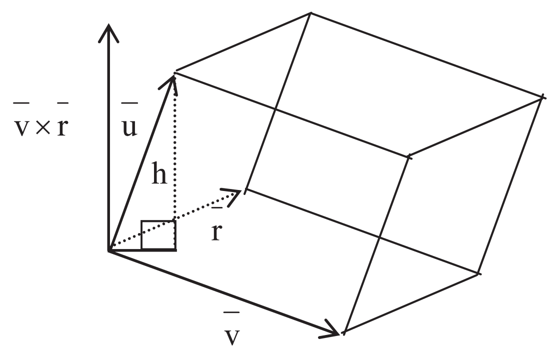
$$= ((4)(2)-(2)(-5))\bar{i} - ((1)(2)-(0)(-5))\bar{j} + ((1)(2)-(0)(4))\bar{k}$$

$$= 18\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{18^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{324+4+4} = \sqrt{332} = 2\sqrt{83}$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}(2\sqrt{83}) = \sqrt{83}$ ตารางหน่วย

การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมี $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{r}$ เป็นด้าน ดังรูปที่ 3

รูปที่ 3

ถ้า h เป็นความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ มายังระนาบที่กำหนดด้วย $\bar{v}$ และ $\bar{r}$ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}\times\bar{r}$ จะได้ว่า $h = \left|\bar{u}\right|\left|\cos\theta\right|$ ดังนั้น ปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน (parallelepiped) เท่ากับ $\left|\bar{u}\right|\left|\cos\theta\right|\left|\bar{v}\times\bar{r}\right| = \left|\bar{u}\right|\left|\bar{v}\times\bar{r}\right|\left|\cos\theta\right| = \left|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})\right|$

ข้อสังเกต 1) $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r}) = \bar{r}\cdot(\bar{u}\times\bar{v}) = \bar{v}\cdot(\bar{r}\times\bar{u})$

$-\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r}) = -\bar{u}\cdot(\bar{r}\times\bar{v}) = -\bar{v}\cdot(\bar{u}\times\bar{r}) = -\bar{r}\cdot(\bar{v}\times\bar{u})$

2) ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{r}$ อยู่ในระนาบเดียวกัน แล้วจะได้ว่า $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r}) = 0$

3) จากเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ใด ๆ ถ้าทราบว่าเวกเตอร์เท่ากันสองเวกเตอร์ ผลคูณของ

$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{v}) = \bar{v}\cdot(\bar{r}\times\bar{r}) = \bar{r}\cdot(\bar{u}\times\bar{u}) = 0$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u} = \bar{i}+\bar{j}$, $\bar{v} = \bar{j}+\bar{k}$, $\bar{r} = \bar{i}+\bar{k}$ เป็นด้าน

วิธีทำ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $\left|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})\right|$

$$\bar{v}\times\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= ((1)(1)-(0)(1))\bar{i} - ((0)(1)-(1)(1))\bar{j} + ((0)(0)-(1)(1))\bar{k}$$

$$= (1-0)\bar{i} - (0-1)\bar{j} + (0-1)\bar{k}$$

$$= \bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$$

ดังนั้น $\left|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})\right| = \left|(\bar{i}+\bar{j})\cdot(\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})\right|$

$$= \left|(1)(1)+(1)(1)+(0)(-1)\right|$$

$$= \left|1+1+0\right|$$

$$= \left|2\right| = 2$$

$\therefore$ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ 2 ลูกบาศก์หน่วย

ใบงานที่ 9.1

1. จงหา $\bar{u}\times\bar{v}$ และ $\bar{v}\times\bar{u}$ จากเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1) $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$

   ………

   ………

   ………

   ………

   ………

   2) $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{v} = \bar{j}$

   ………

   ………

   ………

   ………

   ………

   3) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

   ………

   ………

   ………

   ………

   ………

2. ให้ $\bar{u} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{j} - \bar{k}$

   1) $\bar{u}\times\bar{v}$

   ………

   ………

   ………

   ………

   ………

2) $\left|\bar{u} \times \bar{v}\right|$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

3) ค่า sine ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

3. ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ จงแสดงว่า $(\bar{u} - \bar{v}) \times (\bar{u} + \bar{v}) = (2\bar{u}) \times \bar{v}$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

4. จงพิจารณาว่าการนำเวกเตอร์มาคูณกันดังต่อไปนี้มีความหมายหรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามีความหมาย จะมีผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์หรือสเกลาร์

1) $(\bar{u} \cdot \bar{v}) \cdot \bar{r}$ ………………………………………………………………

2) $(\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{r}$ ………………………………………………………………

3) $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{r}$ ………………………………………………………………

4) $(\bar{u} \cdot \bar{v}) \times \bar{r}$ ………………………………………………………………

5) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r})$ ………………………………………………………………

ใบงานที่ 9.2

1. ให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ จงหาเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $|\bar{u} \cdot \bar{v}|$ และมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

………
………
………
………
………
………
………
………

2. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\overrightarrow{PO} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\overrightarrow{PS} = 3\bar{j} + 4\bar{k}$

………
………
………
………
………
………
………
………

3. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A(0,2,2) , B(8,8,-2) และ C(9,12,6)

………
………
………
………
………
………
………
………

4. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{r}$ ดังนี้

1) $\bar{u} = \bar{i} + \bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{r} = \bar{j} + \bar{k}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

รศ.ธงทอง จันทรางศุ เลขาธิการสภาการศึกษา
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์ ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้เรียบเรียง :

นางสาวนงรัตน์ วงศ์ศรี โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี

ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
นายเอธัสวัฒน์ คำมณี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
นางสาวสุธิตา มณีชัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้พิจารณารายงาน :

นายสมชาย ศรีวรางกูล โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นายรวิช ตาแก้ว หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา ประจำกลุ่มงานฯ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ ประจำกลุ่มงานฯ

บรรณาธิการ :

นายรวิช ตาแก้ว
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

บรรณาธิการร่วม :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : http://www.onec.go.th
http://www.thaigifted.org